Diskrete Mathematik
Übung 5, Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Aufgabe 1

Ist jede symmetrische und transitive Relation auch reflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Relation

$$a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \text{ ist eine Quadratzahl}$$

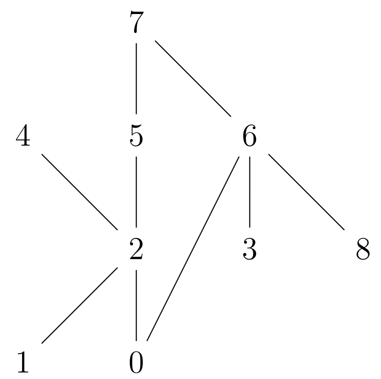
auf $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, mit $N^+ = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$, eine Äquivalenzrelation ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ ist eine ganze Zahl} \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ ist eine ganze Zahl} \qquad (*)$$

für natürliche Zahlen a und $b > 0$.

Aufgabe 3

Gegeben sei das Hasse-Diagramm der Relation R wie folgt:



(a) Geben Sie alle minimalen und alle maximalen Elemente von der Menge $\{2, 5, 6, 3, 8\}$ an.

(b) Geben Sie drei paarweise unvergleichbare Elemente an.

(c) Schreiben Sie die Menge $R \cap \{(x, y) \mid 0 < x < y < 6\}$ in aufzählender Schreibweise auf.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ auf der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$f \preceq g \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{N}\, (f(x) \leq g(x)).$$

(a) Geben Sie zwei Funktionen f und g mit $f \preceq g$ an.

(b) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $f_0, f_1, \ldots$ an, die eine echt aufsteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$f_0 \preceq f_1 \preceq \ldots$$

(c) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $g_0, g_1, \ldots$ an, die eine echt absteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$g_0 \succeq g_1 \succeq \ldots$$

Aufgabe 5

Ist die "normale" $\leq$-Relation eine Wohlordnung auf der Menge $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.