Diskrete Mathematik
Übung 2, Aussagenlogik

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden aussagenlogischen Formeln

$$F := p \to (q \wedge r)$$

und

$$G := (r \wedge q) \to s$$

sowie eine Belegung B mit

$$\begin{aligned} B(p) &= \mathsf{false} \\ B(q) &= \mathsf{true} \\ B(r) &= \mathsf{true} \\ B(s) &= \mathsf{false} \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $\widehat{B}(F)$ und $\widehat{B}(G)$.

(b) Geben Sie eine Belegungen an, unter der F zu false und G zu true evaluiert wird.

Aufgabe 2

Geben Sie von folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder in KNF sind.

(a) p

(b) $p \wedge (\neg q \wedge p_1)$

(c) $p \vee (q \to p)$

(d) $p \vee (\neg p \wedge (p \vee q))$

(e) $(p \vee q) \wedge (p \vee (p \vee p))$

Aufgabe 3

Bringen Sie folgende aussagenlogischen Formeln in DNF und KNF.

(a) $p \to (q \vee (p_1 \wedge p_2))$

(b) $p \to (q \to p_1)$

(c) $(p \to q) \to p_1$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel F genau dann unerfüllbar ist, wenn die Formel $\neg F$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen ob folgende Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(a) $p \to (q \to p)$

(b) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

(c) $(p \to q) \to (q \to p)$

(d) $(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$

Aufgabe 6

Eine Menge logischer Verknüpfungen heisst *funktional vollständig*, wenn man alle Junktoren $(\wedge, \vee, \neg, \to)$ durch Kombinationen dieser Verknüpfungen äquivalent ausdrücken kann. Die Verknüpfungen $\neg, \wedge$ sind zum Beispiel funktional vollständig weil man damit $\to$ und $\vee$ wie folgt ausdrücken kann:

- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$.

Zeigen Sie, dass folgende Mengen von Verknüpfungen funktional vollständig sind:

(a) $\{\neg, \vee\}$

(b) $\{\neg, \to\}$

(c) $\{\uparrow\}$, wobei $A \uparrow B := \neg(A \wedge B)$ (NAND-Operator).

(d) $\{\downarrow\}$, wobei $A \downarrow B := \neg(A \vee B)$ (NOR-Operator).

Aufgabe 7 (Bonusaufgabe)

Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl aussagenlogische Formeln als Klasse/Datentyp. Stellen Sie folgende Funktionalitäten zur Verfügung:

- Eine Methode/Funktion `eval(Formel, Belegung)`, mit der Sie Aussagenlogische Formeln unter einer gegebenen Belegung auswerten können.
- Methoden/Funktionen `nnf(Formel)`, `dnf(Formel)`, `knf(Formel)`, um Formeln in die entsprechenden Normalformen umzuwandeln.
- Eine Methode/Funktion `pretty_print(Formel)`, die Formeln in einer gut lesbaren Form ausgibt (z.B. als LaTeX–Code).