Diskrete Mathematik
Übung 6

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten:

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

3. $$n^2 + n \text{ ist gerade}$$

4. $$a^n - 1 \text{ ist durch } a - 1 \text{ teilbar (wobei } a \in \mathbb{N} \text{ beliebig.)}$$

5. $$n \geq 10 \Rightarrow 2^n > n^3$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Induktion nach k, dass für alle natürlichen Zahlen n, m, k folgendes gilt:

$$(n + k = m + k) \ \Rightarrow n = m. \qquad \text{(Kürzbarkeit)}$$

Hinweis: Arbeiten sie mit der (rekursiven) Definition der Addition und benützen Sie die Peano Axiome.

Aufgabe 3

Die Funktionen $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien durch folgende Rekursionsgleichungen gegeben:

$$F(0) = 0 \qquad G(0) = 1$$
$$F(n+1) = F(n) + G(n) \qquad G(n+1) = F(n+1) + G(n)$$

1. Vervollständigen Sie die Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4
$F(n)$	0				
$G(n)$	1				

2. Zeigen Sie mit Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$)

$$ggT(F(n), G(n)) = 1$$