Diskrete Mathematik
Übung 3, Grundlagen der Mengenlehre

Aufgabe 1

Die Mengen $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind durch

$$A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $A_3 \cap A_{111}$.

(b) Bestimmen Sie $\bigcup_{i \in \{2,5,4\}} A_i$.

(c) In welcher Beziehung müssen i, j und m stehen, damit

$$A_i \cup A_j = A_m$$

gilt.

(d) In welcher Beziehung müssen i, j und m stehen, damit

$$A_i \cap A_j = A_m$$

gilt.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie für beliebige Mengen A und B die Identität

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Aufgabe 3

Schreiben Sie in der Programmiersprache ihrer Wahl eine Funktion/Methode `pow`, die von einer gegebenen Menge die Potenzmenge berechnet.
Mengen können Sie zum Beispiel als Listen oder Arrays modellieren.

Test cases:

```
pow([1,3]) = [[],[1],[3],[1,3]]
pow([]) = [[]]
pow(pow([])) = [[],[[]]]
```

Aufgabe 4

Geben Sie folgende Mengen explizit an.

(a) $\{1, 3\} \times \{0, 2\}$

(b) $A \times \{1, A\}$ wobei $A = \{2\}$.

(c) $\mathcal{P}(\varnothing \times \{\varnothing\})$

(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$

(e) $\mathcal{P}(\{\varnothing\} \times \{a, b\})$

Aufgabe 5

Geben Sie paarweise disjunkte Mengen $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ an, mit

$$\bigcup_{i \text{ gerade}} A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$$
$$\bigcup_{i \text{ ungerade}} A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$$

Aufgabe 6(Bonusaufgabe)

Geben Sie eine Partition der natürlichen Zahlen in unendlich viele unendliche Blöcke an.