

Diskrete Mathematik

Übung 1, Logik

Bemerkung: Das Zeichen \mathbb{N} steht für die Menge aller natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$. Alle Quantoren verstehen wir hier als Quantoren über der Menge \mathbb{N} .

Aufgabe 1

Es sei $E(n)$ irgend eine Eigenschaft welche auf natürliche Zahlen zutreffen kann oder nicht. Formalisieren Sie folgende Aussagen:

- (a) “Es gibt eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft E ”
- (b) “Alle natürlichen Zahlen haben die Eigenschaft E ”
- (c) “Genau eine natürliche Zahl hat die Eigenschaft E ”
- (d) “Mindestens drei natürliche Zahlen haben die Eigenschaft E ”
- (e) “Es gibt höchstens zwei natürliche Zahlen mit der Eigenschaft E ”

Aufgabe 2

Es sind folgende Prädikate gegeben:

- $\text{PF}(x, y) := “x \text{ ist ein Primfaktor von } y”$
- $\text{Prim}(x) := “x \text{ ist eine Primzahl}”$

Formalisieren Sie folgende Aussagen über die Natürlichen Zahlen:

- (a) “Primfaktoren sind immer Primzahlen”
- (b) “Jede natürliche Zahl die grösser als 1 ist besitzt einen Primfaktor”
- (c) “Jede Primzahl besitzt genau einen Primfaktor”
- (d) “Zahlen die genau einen Primfaktor besitzen sind nicht notwendigerweise Primzahlen”
- (e) “Primzahlen sind genau die Zahlen die sich selbst als Primfaktor haben”

Aufgabe 3

Übersetzen Sie (möglichst prägnant) folgende Formeln in natürlichsprachliche Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitsgehalt.

- (a) $\forall x (\neg \text{PF}(x, x + 1))$
- (b) $\forall x (\text{Prim}(x) \wedge \text{Prim}(x + 1) \Rightarrow x = 2)$
- (c) $\exists x \forall y (\neg \text{PF}(y, x))$
- (d) $\exists x \forall y (\neg \text{PF}(x, y))$

Aufgabe 4

- (a) (Selbststudium) Lesen Sie Kapitel 1.2 (Grundlegende Beweistechniken) im Skript.

- (b) **Bemerkung:** Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ heisst *monoton*, wenn für alle natürlichen Zahlen x, y die Implikation $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ gilt.

Zeigen Sie, dass für jede monotone Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und alle natürlichen Zahlen x, n folgendes gilt:

$$f(x) < n \wedge n < f(x+1) \Rightarrow \forall y \in \mathbb{N} (f(y) \neq n).$$

Hinweis: Fallunterscheidung