Diskrete Mathematik
Übung 7

Aufgabe 1 (Starke Induktion)

Prinzip der "starken Induktion" lässt sich wie folgt formulieren:

Es sei $A(n)$ eine Eigenschaft (Prädikat) von natürlichen Zahlen. Wenn für alle natürlichen Zahlen n die Implikation

$$\forall k < n(A(k)) \Longrightarrow A(n)$$

gilt, dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}(A(n)).$$

Beweisen Sie das Prinzip der starken Induktion.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass folgende Zahlen keine Primzahlen sind.

(a) $2^{15051} + 1$

(b) $3^{71071} + 4$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 + xy - y^2 = 2$$

keine Lösungen in $\mathbb{Z}$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie die Parität der Terme und benutzen Sie Fallunterscheidung.

Aufgabe 4

Implementieren Sie in der Programmiersprache Ihrer Wahl eine Funktion, die zu jeder natürlichen Zahl > 1 deren Primfaktorzerlegung zurückgibt.

Aufgabe 5

Es sei eine Folge von natürlichen Zahlen wie folgt gegeben:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq 1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Zahlen $a_0, \ldots, a_{10}$.

(b) Zeigen Sie, dass aufeinanderfolgende Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets teilerfremd sind. (Hinweis: für ungerade Zahlen x, y gilt $ggT(x, y) = ggT(x, 2y)$)

Aufgabe 6

Lösen Sie folgendes System simultaner Kongruenzen mit dem in der Vorlesung behandelten Algorithmus. Geben Sie die gesamte Lösungsmenge an.

$$\begin{aligned} x &= 4 \mod 9 \\ x &= 5 \mod 11 \\ x &= 2 \mod 5 \end{aligned}$$