

leone corradi dell'acqua

meccanica delle strutture
il comportamento dei mezzi continui

McGraw-Hill Libri Italia srl

Milano • New York • St. Louis • San Francisco • Oklahoma City • Auckland
Bogotá • Caracas • Hamburg • Lisboa • London • Madrid • Montreal • New Delhi
Paris • San Juan • São Paulo • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

Ogni cura è stata posta nella raccolta e nella verifica della documentazione contenuta in questo libro. Tuttavia né l'Autore né la McGraw-Hill Libri Italia possono assumersi alcuna responsabilità derivante dall'utilizzo della stessa. Lo stesso dicasi per ogni persona o società coinvolta nella creazione, nella produzione e nella distribuzione di questo libro.

ad Andreina e Corrado

Copyright © 1992 McGraw-Hill Libri Italia srl
piazza Emilia, 5
20129 Milano

I diritti di traduzione, di riproduzione, di memorizzazione elettronica e di adattamento totale e parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

Realizzazione editoriale: Danilo Facca, Vimercate MI

Disegni: Tiziana Coruzzi

Impostazione grafica: Achilli & Piazza e Associati

Fotocomposizione: CAMT srl, Cologno Monzese MI

Stampa: Arti Grafiche Battaia snc, Rozzano MI

ISBN 88-386-0665-X

1^a edizione aprile 1992

Printed in Italy
1234567890GBTLLC 9065432

Indice

Premessa 1

Notazione e simbologia 7

- 0.1 Notazione matriciale 7
- 0.2 Notazione tensoriale 8
- 0.3 Operazioni tensoriali in notazione matriciale 11

Capitolo 1 Il problema strutturale 13

- 1.1 Aspetti generali 13
 - 1.1.1 Introduzione 13
 - 1.1.2 Un esempio di calcolo 14
 - 1.1.2.1 Risposta di una struttura sotto un carico assegnato 14
 - 1.1.2.2 Calcolo della capacità portante 16
 - 1.1.3 Osservazioni e commenti 21
- 1.2 Misure di deformazione e di sforzo 23
 - 1.2.1 Il comportamento uniaxiale 23
 - 1.2.2 Scorrimenti angolari e sforzi tangenziali 31
 - 1.2.3 Cambiamento del sistema di riferimento 34
- 1.3 Problemi staticamente determinati 40
 - 1.3.1 Soluzioni in termini di solo equilibrio 40
 - 1.3.2 Contenitore in pressione 41
 - 1.3.3 La statica della trave 44
 - 1.3.3.1 Azioni interne 44
 - 1.3.3.2 Vincoli e reazioni vincolari 44
 - 1.3.3.3 Sistemi articolati 58
 - 1.3.3.4 Travature reticolari 59
- 1.4 Influenza degli spostamenti sull'equilibrio 62
- 1.5 Inquadramento della materia 68
 - Esercizi 71
 - Bibliografia 74

Capitolo 2 Statica e cinematica dei mezzi continui 75

- 2.1 Lo stato di sforzo 75
 - 2.1.1 Il continuo di Cauchy 75

- 2.1.2 Definizione dello sforzo di Cauchy 76
 2.1.3 Sforzi e direzioni principali - invarianti 81
 2.1.4 Componenti idrostatica e deviatorica degli sforzi 82
 2.1.5 Stati di sforzo piani 85
 2.1.5.1 Definizione 85
 2.1.5.2 Sforzi normali e tangenziali 86
 2.1.5.3 Diagramma di Mohr 87
 2.1.6 Stati di sforzo spaziali 90
 2.1.6.1 Sforzi normali e tangenziali 90
 2.1.6.2 Diagrammi di Mohr 91
 2.1.7 Le condizioni di equilibrio 93
 2.1.7.1 Posizione del problema 93
 2.1.7.2 Le equazioni indefinite di equilibrio 93
 2.1.7.3 Le condizioni di equilibrio al contorno 95
 2.1.7.4 Considerazioni conclusive 96
 2.2 Il continuo deformabile 96
 2.2.1 Congruenza 96
 2.2.2 Cinematica di un atto di moto 97
 2.2.3 Il principio delle potenze (velocità) virtuali 100
 2.2.3.1 Enunciazione e dimostrazione 100
 2.2.3.2 Il principio delle potenze virtuali come condizione sufficiente di equilibrio 102
 2.3 Deformazioni finite 103
 2.3.1 Considerazioni introduttive 103
 2.3.2 Il tensore di deformazione di Green-Lagrange 105
 2.3.2.1 Definizione e significato 105
 2.3.2.2 Definizione delle quantità statiche associate 108
 2.3.2.3 Condizioni di equilibrio 110
 2.3.3 Formulazione del problema strutturale 111
 2.3.4 L'ipotesi di piccoli spostamenti 112
 2.4 Il tensore delle piccole deformazioni 113
 2.4.1 Definizione e significato fisico 113
 2.4.2 Cambiamento del sistema di riferimento 117
 2.4.3 Deformazioni principali e invarianti 119
 2.4.4 Variazione di volume e variazione di forma 120
 2.4.5 Le condizioni di congruenza interna 121
 Esercizi 125
 Bibliografia 127

Capitolo 3 Il legame costitutivo 129

- 3.1 Modelli costitutivi ed evidenza sperimentale 129
 3.1.1 Considerazioni introduttive 129
 3.1.2 Comportamenti fondamentali 130
 3.1.3 Rottura del materiale 135
 3.1.4 Simmetrie nel comportamento 136
 3.2 Il legame elastico 137
 3.2.1 Aspetti energetici 137
 3.2.1.1 Energia di deformazione 137

- 3.2.1.2 Energia complementare 139
 3.2.1.3 Esistenza e unicità della risposta elastica 140
 3.2.1.4 Deformazioni elastiche ed effetti anelasticci 142
 3.2.2 Il legame elastico-lineare isotropo 144
 3.2.2.1 Conseguenze dell'isotropia 144
 3.2.2.2 Definizione ingegneristica delle costanti elastiche 145
 3.2.2.3 Deformazioni termiche 148
 3.2.3 Principali legami anisotropi 149
 3.3 Il limite elastico 151
 3.3.1 Considerazioni generali 151
 3.3.2 Criteri di resistenza per materiali fragili 159
 3.3.3 Criteri di snervamento per metalli 156
 3.3.4 Considerazioni e commenti 160
 3.3.5 Rappresentazione nel piano di Mohr 163
 3.4 Il legame elasto-plastico incrementale 164
 3.4.1 Formulazione del legame uniassiale 164
 3.4.1.1 Caratteristiche del comportamento 164
 3.4.1.2 Descrizione analitica del comportamento uniassiale 168
 3.4.2 Il legame associato 173
 3.4.2.1 Formulazione 173
 3.4.2.2 Esistenza e unicità della risposta incrementale 179
 3.4.2.3 Il postulato di Drucker 182
 3.4.2.4 Dipendenza dalla temperatura 185
 3.5 Cenni sui comportamenti dipendenti dal tempo 186
 3.5.1 Modelli reologici 186
 3.5.2 Il legame viscoelastico lineare 197
 3.5.2.1 La formulazione differenziale 197
 3.5.2.2 La formulazione integrale 200
 3.5.2.3 Considerazioni conclusive 201
 Esercizi 203
 Bibliografia 205
- Capitolo 4 Il problema elastico 207**
- 4.1 Formulazione e proprietà 207
 4.1.1 Posizione del problema 207
 4.1.2 Unicità di soluzione 208
 4.1.3 Formulazioni agli spostamenti e agli sforzi 209
 4.1.4 Risoluzione del problema elastico 212
 4.2 Problemi piani 215
 4.2.1 Posizione del problema 215
 4.2.2 Problema piano nelle deformazioni 218
 4.2.3 Problema piano negli sforzi 220
 4.2.4 Formulazione in termini di funzione di sforzo 222
 4.2.5 Il problema piano in coordinate polari 227
 4.3 Soluzioni di problemi particolari 228
 4.3.1 La lastra rettangolare caricata nel suo piano 228
 4.3.2 Cilindro assialsimmetrico in deformazione piana 238
 4.3.3 Il problema di Boussinesq nel piano 252
 4.4 L'aspetto energetico dei fenomeni elastici 259

4.4.1	Energia potenziale e complementare totali	259
4.4.1.1	Definizioni	259
4.4.1.2	Stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale	260
4.4.1.3	Stazionarietà dell'Energia Complementare Totale	261
4.4.1.4	Proprietà estremali	262
4.4.2	Mezzi lineari in assenza di effetti anelastici	264
4.4.2.1	Il lavoro di deformazione	264
4.4.2.2	I teoremi di Castigliano	266
4.4.3	Principi variazionali misti	269
Esercizi		272
Bibliografia		275

Capitolo 5 Il problema di De Saint Venant 277

5.1	Formulazione e approccio risolutivo	277
5.1.1	Il problema	277
5.1.2	Approccio agli sforzi	279
5.1.3	Approccio agli spostamenti	285
5.2	I casi fondamentali	285
5.2.1	Azioni assiale e flettente	285
5.2.1.1	Soluzione del caso generale	285
5.2.1.2	Azione assiale	286
5.2.1.3	Flessione retta	287
5.2.1.4	Flessione deviata	291
5.2.1.5	Tenso(presso)-flessione	294
5.2.1.6	Lavoro di deformazione	296
5.2.2	Momento torcente	298
5.2.2.1	Formulazione del problema	298
5.2.2.2	Approccio agli spostamenti	299
5.2.2.3	Approccio agli sforzi	302
5.2.2.4	Un esempio di soluzione: la sezione ellittica	304
5.2.2.5	Il centro di torsione	308
5.2.2.6	Lavoro di deformazione	309
5.2.2.7	Analogie con altri fenomeni fisici	310
5.2.2.8	Soluzioni approssimate del problema della torsione	312
5.2.2.8.1	Profili aperti in parete sottile	312
5.2.2.8.2	Profili chiusi in parete sottile	324
5.2.3	Flessione con taglio costante	328
5.2.3.1	Formulazione del problema	328
5.2.3.2	Il centro di taglio	329
5.2.3.3	La trattazione approssimata di Jourawsky	331
5.2.3.3.1	Tensione tangenziale media su una corda	331
5.2.3.3.2	Sezioni compatte simmetriche e simmetricamente sollecitate	336
5.2.3.3.3	Profili aperti in parete sottile	339
5.2.3.3.4	Profili chiusi in parete sottile	344
5.2.3.4	Lavoro di deformazione di un tronco infinitesimo	346
5.3	Applicazioni del problema di De Saint Venant	350
5.3.1	Il principio di equivalenza elastica e sue limitazioni	350

5.3.2	La verifica della resistenza elastica	351
5.3.3	Valutazione del regime deformativo	356
Esercizi		359
Bibliografia		363

Capitolo 6 Il problema elasto-plastico 365

6.1	Il problema incrementale	365
6.1.1	Formulazione	365
6.1.2	Unicità della soluzione	366
6.1.3	Proprietà estremali	368
6.1.3.1	I teoremi di Greenberg e Prager-Hodge	368
6.1.3.2	Formulazioni estremali a due campi	373
6.1.3.3	L'approccio alla Colonnetti	377
6.2	Soluzioni del problema elasto-plastico	381
6.2.1	Considerazioni introduttive	381
6.2.2	Soluzioni di problemi particolari	385
6.2.2.1	Cilindro in deformazione piana soggetto a pressione interna	385
6.2.2.2	La torsione elasto-plastica	394
6.2.2.2.1	Formulazione	394
6.2.2.2.2	La sezione circolare	396
6.2.2.2.3	Momento torcente limite per plasticità ideale	402
6.2.3	Tensioni residue allo scarico	405
6.3	Legami in termini finiti	408
6.3.1	Percorsi olonomici	408
6.3.2	Condizione di Huber-Henky-Mises e legge di Prandtl-Reuss	410
6.3.3	Il legame olonomico	414
Esercizi		418
Bibliografia		419

Appendice A Soluzione degli esercizi proposti 421**Indice analitico** 437

Premessa

Il proposito di scrivere un testo esteso di *Meccanica delle Strutture* può apparire, oltre che ambizioso, inutile. Sono infatti disponibili, anche in lingua italiana, numerosi trattati che sviluppano i principali aspetti della materia in modo egregio ed è difficile pensare di poter fare meglio. D'altra parte, tra le discipline tecnico-scientifiche la Meccanica delle Strutture è certamente una delle meglio consolidate e gli sviluppi di cui è stata oggetto in tempi recenti, pur significativi, non sono tali da far ritenere superate in misura determinante le trattazioni esistenti.

La Meccanica delle Strutture è tuttavia profondamente inserita nel contesto culturale in cui opera e ai cui sviluppi non è insensibile. Il progresso tecnologico ha consentito, e determinati settori (ad esempio l'industria aerospaziale) richiesto, la realizzazione di strutture sempre più ardite, di cui occorre stabilire con precisione il comportamento, basandosi più sul calcolo che non sull'esperienza costruttiva maturata nei secoli. La crisi di determinate opere può inoltre avere conseguenze catastrofiche, rendendo indispensabile la corretta valutazione delle risorse che una costruzione presenta nei confronti di una situazione ultima, in condizioni che, pur eccezionali, non si può e non si deve escludere si verifichino durante la sua vita. Il tradizionale e ben consolidato ambito elastico-lineare mal si presta a fronteggiare queste e altre esigenze oggi impellenti.

La teoria matematica dell'elasticità, nella sostanza definita all'inizio dell'Ottocento, rappresenta senza dubbio uno delle più armoniose conquiste della fisica matematica. Idealizzando la struttura con un solido continuo opportunamente definito, essa perviene a formulare il problema di analisi strutturale in modo matematicamente coerente e meccanicamente ben fondato. Nell'introduzione alla sua classica trattazione in proposito, Love afferma che "una volta stabilitate le equazioni generali, tutti i problemi relativi alle piccole deformazioni di un mezzo elastico sono ricondotti a una semplice questione di calcolo". La soluzione di queste equazioni è però di fatto possibile solo per un certo numero di problemi particolari. La difficoltà è stata immediatamente riconosciuta e al suo superamento è dedicata la Meccanica delle Strutture propriamente intesa. Consapevoli ipotesi, prevalentemente di natura cinematica, suggerite dalla geometria di particolari mezzi continui, hanno consentito formulazioni semplificate, relative a tipologie strutturali di grande importanza, quali travi, piastre e gusci.

Il numero di soluzioni disponibili si è così ampliato notevolmente. Con l'eccezione dei sistemi di travi, esse restano però sempre confinate a particolari geometrie e condizioni di carico e/o vincolo, ben lungi da quanto richiesto dalla pratica ingegneristica. Con riferimento a casi concreti, è quindi necessario operare estrapolando i risultati di problemi simili (a volte solo parzialmente simili) e sopperendo col giudizio*ingegneristico alla mancanza di informazioni più dettagliate. Nei confronti delle incertezze insite in questo processo, ci si cautela mediante opportuni coefficienti di sicurezza, da molti

qualificati esponenti dell'ingegneria strutturale ribattezzati "coefficients di ignoranza".

La "questione di calcolo" cui Love riconduceva il problema, ha trovato una soluzione generale solo in epoca relativamente recente, in concomitanza con la disponibilità di potenti strumenti che hanno consentito accurate soluzioni numeriche di problemi di dimensioni anche notevoli. Sono state allora prodotte formulazioni del problema strutturale di grande efficacia, tra cui ha ottenuto particolare successo quella nota come *metodo degli Elementi Finiti*. Il metodo recepisce l'idea alla base delle teorie strutturali, svincolando però le ipotesi di partenza dalle particolari caratteristiche geometriche del mezzo. I concetti fondamentali su cui si impreria la Meccanica delle Strutture sono stati riorganizzati e adattati alle esigenze del processo risolutivo. Si è così pervenuti a formulazioni facilmente trasferibili in codici di calcolo, capaci di fornire soluzioni ingegneristicamente valide per praticamente qualunque problema. Ovviamente, il metodo non elimina la necessità di opportuni coefficienti di sicurezza; esso però riduce drasticamente le incertezze legate all'affidabilità della soluzione.

Un altro importante filone si è sviluppato pressoché in parallelo. I metodi basati sull'elasticità lineare, se ben si prestano al calcolo della risposta di molte strutture sotto carichi assegnati, sono del tutto incapaci di stabilirne il margine di sicurezza nei confronti della crisi. Alcuni dei risultati più notevoli raggiunti dalla Meccanica delle Strutture nel XX secolo sono appunto rivolti alla soluzione di questo problema. Tra questi si segnala il *calcolo a rottura*, che consente la valutazione diretta del carico di collasso di strutture costituite da materiali duttili, quali i metalli. Anche quando le idealizzazioni su cui si basa il calcolo a rottura non sono applicabili, nello stabilire la capacità portante non si può prescindere dal comportamento inelastico del materiale; un numero notevole di importanti studi è stato dedicato al problema della modellazione di tali comportamenti e alla loro influenza sulla resistenza strutturale.

Il collasso non è tuttavia sempre legato all'esaurimento delle risorse del materiale in termini di resistenza. Esso può essere dovuto a perdita di rigidezza della struttura nel suo complesso o, più in generale, al fenomeno noto col nome di *instabilità*, particolarmente insidioso in strutture snelle. Già previsto da Eulero in un'epoca in cui la tecnologia costruttiva lo rendeva scarsamente rilevante, il fenomeno ha assunto importanza sempre maggiore quando l'avvento di nuovi materiali e il raffinamento degli strumenti di analisi hanno consentito realizzazioni sempre più ardite. La sua influenza sulla capacità portante delle strutture, ancor oggi oggetto di molti studi, ha trovato una prima sistematizzazione nella tesi di dottorato scritta da Koiter negli anni della seconda guerra mondiale, tesi che pure va riguardata come uno dei più significativi risultati prodotti in tempi relativamente recenti dalla Meccanica delle Strutture.

Molti di questi sviluppi, tra cui quelli sopra menzionati, si sono tradotti in teorie e metodi coerenti e oggi ben consolidati. Essi sono considerati indispensabili *complementi* della Meccanica delle Strutture come tradizionalmente intesa e molti testi ne contengono trattazioni esaustive. Queste però spesso si collocano a valle del filone principale e si presentano in una certa misura avulse da esso.

Se questo testo si differenzia in qualche modo da altri, è per il tentativo di inquadrare in un unico schema concettuale i diversi aspetti della disciplina, da quelli ormai classici relativi all'elasticità agli sviluppi successivi, quantomeno quelli che possono oggi ritenersi conclusi. Ciò prevede una chiara distinzione, sia a livello di trattazione dei mezzi continui che di teorie strutturali o modelli per l'analisi numerica, tra i diversi aspetti che concorrono alla formulazione del problema complessivo, che l'approccio elastico fonde spontaneamente tra loro. In particolare, gli ambiti geometrico e statico sono

introdotti e definiti indipendentemente dal legame costitutivo, che rappresenta il modello matematico del comportamento del materiale e costituisce il collegamento meccanico tra i due mondi. In questa ottica, un ruolo determinante è svolto dal principio dei lavori virtuali, che instaura una sorta di dualità tra le relazioni geometriche che regolano il processo deformativo e quelle di equilibrio che governano il mondo statico, garantendo la coerenza matematica degli operatori che sovraintendono ai due ambiti. Un tale punto di vista certamente non costituisce un'innovazione, ma si è cercato di svilupparlo in modo da non privilegiare l'ambito elastico nei confronti di altri comportamenti che oggi assumono quasi pari importanza.

Dopo un capitolo introduttivo, il primo volume studia il comportamento di solidi continui, non necessariamente elastici, soggetti ad assegnate azioni esterne. Il secondo affronta invece le teorie strutturali delle travi e delle piastre (motivi di spazio hanno indotto a tralasciare i gusci, che sarebbe tuttavia riduttivo ritenere una semplice generalizzazione). Queste sono formulate a partire da ipotesi cinematiche che stabiliscono un'approssimazione (o *modello*) per gli spostamenti; il principio dei lavori virtuali permette di ricavare le relazioni di natura statica a tale modello associate e con esso coerenti. Ne risulta uno schema indipendente dal legame costitutivo, che consente l'analisi di diversi comportamenti a patto che le ipotesi di partenza, che l'esperienza ha dimostrato adeguate in ambito elastico, possano essere ritenute valide anche in un contesto più ampio.

Il modello cinematico è molto spontaneo nel caso di travi piane, ma il supporto dell'intuizione ingegneristica diviene meno evidente per tipologie più complesse. Il procedimento seguito, peraltro, consente di prescindere dal significato dell'approssimazione. Diviene così possibile trattare con continuità concettuale anche formulazioni basate su modelli dettati non da considerazioni a priori sul comportamento della particolare struttura in esame bensì da criteri di convergenza alla soluzione continua. Sempre nel secondo volume, viene introdotto in questo spirito il metodo degli Elementi Finiti, a questo punto generalizzazione spontanea e diretta delle teorie strutturali classiche.

I primi due volumi considerano l'*analisi del comportamento strutturale*, vale a dire la definizione della risposta (stato di sollecitazione e regime deformativo) sotto carichi assegnati. Il terzo e ultimo affronta invece la *valutazione della capacità portante*, dedicando particolare attenzione al calcolo a rottura e all'instabilità Euleriana; all'interno di una problematica estremamente diversificata e in buona parte ancora oggetto di ricerca, questi sono due capitoli ormai consolidati, che forniscono risultati in più che soddisfacente accordo con l'esperienza. Alcuni cenni sono peraltro rivolti anche ad altri aspetti del problema.

Pur se uno degli obiettivi perseguiti è quello di conferire pari dignità ai diversi comportamenti, purché i modelli che li descrivono siano ben definiti, occorre dire che, come gli animali della *Fattoria* di Orwell, alcuni di essi alla fine risultano "più uguali degli altri". Sia a livello di formulazione che di trattazione di problemi specifici, l'ambito elastico risulta privilegiato. Molta attenzione è però dedicata anche al problema elastoplastico, sia per quanto riguarda la risposta sotto carico che la valutazione della capacità portante. Solo pochi cenni sono dedicati a comportamenti dipendenti dal tempo. Va comunque sottolineato che tra le forse eccessive ambizioni di questo testo, non vi è certamente la velleità di coprire tutti gli aspetti della Meccanica delle Strutture. Si ritiene tuttavia che lo schema generale qui proposto faciliti al lettore il compito di colmare le inevitabili lacune.

Un'ultima osservazione preliminare riguarda il titolo scelto, *Meccanica delle Struttu-*

re in luogo della denominazione, usuale in Italia e ricca di antiche e nobili tradizioni, di *Scienza delle Costruzioni*. Non si vuole con questo sottolineare differenze, di fatto confinate all'organizzazione della materia, ma piuttosto delimitare l'ambito di interesse. All'interno delle discipline di base dell'ingegneria, la Scienza delle Costruzioni gode di una posizione di privilegio perché, forse meglio di ogni altra, è in grado di guidare gli allievi attraverso tutte le successive fasi del processo ingegneristico. Individuati gli aspetti salienti del fenomeno, si passa alla loro modellazione, si formula rigorosamente il problema, si cercano le ragionevoli approssimazioni che consentano di ottenere soluzioni generali e infine si vagliano criticamente i risultati, momento questo che rappresenta una componente fondamentale dell'intero processo; il tutto con riferimento a oggetti ben individuabili, che costituiscono un chiaro supporto fisico alla modellazione matematica. Come tradizionalmente intesa, peraltro, la Scienza delle Costruzioni non si limita a questo; essa (si veda in proposito l'ormai classico trattato del Belluzzi) si preoccupa anche di tradurre nelle applicazioni costruttive tali concetti, fase in cui l'intervento dell'ingegnere svolge un ruolo fondamentale non solo per la valutazione e l'utilizzazione dei risultati ma anche per intervenire con il suo giudizio in tutte quelle situazioni in cui il calcolo si rivela impotente; ruolo questo che, malgrado i continui progressi, resta indispensabile per la realizzazione di un'opera. Il titolo scelto intende sottolineare che il testo vuole limitarsi agli aspetti *meccanici* del problema, con riferimento non alla costruzione nel suo complesso ma alla sua *struttura* portante, vale a dire a quell'idealizzazione che individua gli elementi ritenuti determinanti nel sopportare i carichi.

Non me ne vogliono i colleghi se affermo che il testo non è stato scritto per loro. Esso trae origine da una lunga e diversificata esperienza didattica maturata presso la Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Certamente, la sua dimensione rende improponibile trattare tutto il contenuto in un unico corso, ma ritengo che molti insegnamenti, anche di base, possano ritagliare da esso programmi adeguati. Il corso di Scienza delle Costruzioni che ho svolto per tre anni agli allievi del settore dell'informazione (allora "elettronici") era basato sui Capitoli 1 e 2, sui primi tre paragrafi del Capitolo 3 integrati da alcuni argomenti del Capitolo 4, sui Capitoli 5 e 7, su alcune parti del Capitolo 15 e, in alternativa, dei Capitoli 11 o 13. La semiannualità, sempre di Scienza delle Costruzioni, che attualmente svolgo per allievi del corso di laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni utilizza parte del solo primo volume. Gli argomenti trattati nei Capitoli 3, 6, 13 e 14 provengono dalle lezioni a suo tempo tenute nel corso di Teoria della Plasticità, così come gli ultimi tre capitoli sintetizzano i contenuti dell'insegnamento di Instabilità delle Strutture che svolgo ormai da oltre vent'anni. Tutto il contenuto si presta a organizzare programmi di insegnamento per corsi strutturali a valle di quello di Scienza delle Costruzioni e che allievi architetti, ingegneri civili e di molti indirizzi industriali prevedono nei loro piani di studio. Certamente corsi specialistici, i cui contenuti sono qui confinati a uno o pochi capitoli, possono richiedere trattazioni più dettagliate. Ritengo comunque che un testo organico possa sempre essere di giovamento, aiutando a inquadrare i diversi argomenti ed evitando gli inconvenienti legati alla differente impostazione di testi specialistici o di dispense finalizzate a un corso specifico. Per tale motivo ho preferito seguire rigorosamente un ordine preciso, anche se ciò può costringere a costruire programmi di insegnamento omettendo capitoli logicamente conseguenti nello schema generale ma superflui nell'economia del singolo corso. Penso che questa impostazione possa essere utile anche a ingegneri e architetti

che operano nei diversi ambiti della strutturistica civile e industriale e si trovano spesso costretti ad affrontare in modo frammentario quegli argomenti che non erano presenti nei corsi istituzionali da loro seguiti.

Il carattere didattico del testo ha anche dettato lo sviluppo della trattazione, che si propone chiarezza, senza con questo intendere un'indebita semplificazione della problematica. Alcune parti, distinte da un carattere tipografico meno evidente, possono essere tralasciate in una prima lettura, quando l'intento principale è quello di impadronirsi della globalità del ragionamento; è però importante che esse vengano riprese in sede di approfondimento dei concetti. Allo scopo di fornire l'indispensabile supporto concreto alla trattazione teorica, l'esposizione è frequentemente inframmezzata da esempi e un certo numero di esercizi, tutti risolti, è proposto alla fine di ogni capitolo. La bibliografia è intesa a suggerire letture integrative e rimanda prevalentemente a testi o lavori di sintesi che presentino l'argomento in modo organico. Le eccezioni sono rappresentate da lavori di notevole rilevanza storica o si riferiscono ad argomenti recenti, ancora non reperibili in forma sistematizzata.

Si presuppongono solo poche conoscenze di Meccanica Razionale, limitate ai concetti fondamentali di statica e cinematica del corpo rigido e ad alcune nozioni di geometria delle sezioni. La matematica richiesta è ampiamente contenuta nei programmi dei primi due anni di studi in Ingegneria o Architettura. Per quegli argomenti che richiedono una preparazione più approfondita, i concetti necessari vengono introdotti nel corso della trattazione, rimandando alla letteratura in materia per i completamenti non essenziali alla comprensione.

Questo testo non sarebbe stato possibile senza l'incoraggiamento e l'aiuto di molti amici e colleghi, primo tra tutti Giulio Maier, che mi ha introdotto a questa disciplina e considero sempre il mio Maestro. Di grande utilità mi sono stati i suggerimenti, sia di ordine generale che specifici, di Luigi Cedolin, Giancarlo Gioda, Carlo Poggi e Giannantonio Sacchi, nonché la collaborazione di Francesco Genna, Giorgio Novati, Umberto Perego e Alberto Taliercio, che mi hanno fornito preziosi consigli su argomenti particolari. Un particolare ringraziamento intendo rivolgere a Alfio Quarteroni per la disponibilità che ha dimostrato nel rivedere argomenti di sua competenza, rispettando le esigenze di un contesto a lui non abituale.

Leone Corradi Dell'Acqua

Notazione e simbologia

0.1 NOTAZIONE MATRICIALE

Verrà fatto ampio uso di una notazione matriciale. Vettori e matrici sono indicati con simboli in neretto o racchiusi in parentesi, rispettivamente graffe e quadre. Le notazioni

$$\underset{n \times 1}{\mathbf{x}} = [x_i] = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \underset{n \times m}{\mathbf{A}} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \quad (0.1)$$

alludono quindi a vettori colonna a n componenti e a matrici di n righe e m colonne (le dimensioni sottostanti il simbolo saranno indicate solo se necessario). A tutti gli effetti, il vettore è una matrice di un'unica colonna, per cui il simbolo in neretto è indifferenziato; la natura dell'ente in considerazione si evince tuttavia dal contesto. La singola componente è indicata dal simbolo con uno o due indici, privato delle parentesi. Un vettore riga è sempre indicato come trasposto di un vettore colonna; precisamente

$$\mathbf{x}' = [x_1 \dots x_n] \quad (0.2)$$

L'inversa di una matrice quadrata e non-singolare è indicata con l'esponente $(\)^{-1}$. Essa è definita dalla condizione

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (0.3)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identica.

Si presuppone nel lettore una certa confidenza con le operazioni elementari dell'algebra matriciale. Di esse, ci si limita a richiamare quella di prodotto tra due matrici; precisamente

$$\underset{n \times m}{\mathbf{C}} = \underset{n \times r}{\mathbf{A}} \underset{r \times m}{\mathbf{B}} \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^r A_{ik}B_{kj} \quad (0.4)$$

L'operazione è definita solo se il numero di colonne della prima matrice egualia quello delle righe della seconda. Si ricorda che l'operazione non è commutativa e che la trasposta della matrice prodotto egualia il prodotto delle trasposte in ordine inverso. Precisamente

$$\mathbf{C}' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \quad \text{se} \quad \mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad (0.5)$$

Un sistema di n equazioni lineari in m incognite si scrive

$$\underset{n \times m}{\mathbf{A}} \underset{m \times 1}{\mathbf{x}} = \underset{n \times 1}{\mathbf{b}} \quad (0.6a)$$

Esso ammette soluzione solo se il vettore \mathbf{b} dei termini noti può essere espresso come combinazione lineare delle colonne di \mathbf{A} (le componenti di \mathbf{x} sono i coefficienti della combinazione). Se \mathbf{A} è quadrata e non-singolare, la soluzione esiste ed è unica per ogni \mathbf{b} e simbolicamente si scrive

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (0.6b)$$

Se $m > n$ e \mathbf{A} ha rango pieno, la soluzione esiste per ogni \mathbf{b} ma non è unica. Per $n > m$ o quando \mathbf{A} ha rango inferiore a n , il sistema ammette soluzione solo per particolari \mathbf{b} .

La notazione matriciale verrà frequentemente impiegata per rappresentare funzioni lineari e quadratiche di n variabili indipendenti, raccolte nel vettore \mathbf{x} . Si scrive, nei due casi

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (0.7a)$$

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} &= \frac{1}{2} (A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + \dots + A_{1n}x_1x_n + A_{21}x_2x_1 + \\ &+ A_{22}x_2^2 + \dots + A_{nn}x_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}x_i x_j \quad (0.7b) \end{aligned}$$

Nella *forma quadratica* (0.7b) la matrice \mathbf{A} può sempre essere considerata simmetrica, in quanto i termini con indici scambiati possono essere raccolti a fattore e sostituiti con la loro media senza alterare il risultato. Il simbolo di derivazione rispetto al vettore \mathbf{x} va inteso come segue

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \quad \frac{d^2f}{d\mathbf{x}^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (0.8)$$

Le (0.8) definiscono, rispettivamente, un vettore di n componenti e una matrice simmetrica $n \times n$. È immediato constatare che con riferimento alla funzione lineare (0.7a) risulta

$$\frac{dL}{d\mathbf{x}} = \mathbf{a} \quad \frac{d^2L}{d\mathbf{x}^2} = \mathbf{0} \quad (0.9a)$$

mentre per la forma quadratica (0.7b) si ha, se \mathbf{A} è simmetrica

$$\frac{dQ}{d\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \frac{d^2Q}{d\mathbf{x}^2} = \mathbf{A} \quad (0.9b)$$

0.2 NOTAZIONE TENSORIALE

Le grandezze che intervengono nella meccanica dei solidi hanno peraltro natura tensoriale (si include il vettore come tensore di ordine uno e lo scalare come tensore di ordine zero). I tensori sono enti matematici che posseggono quelle invarianze rispetto al

sistema di riferimento che li rendono capaci di rappresentare grandezze fisiche. Le operazioni su di essi formano l'oggetto del calcolo tensoriale, in questo testo utilizzato solo in una forma rudimentale che certamente non ne sfrutta tutte le potenzialità.

Si farà riferimento a terne Cartesiane ortogonali, ambito in cui le operazioni tensoriali si semplificano notevolmente, fino a identificarsi in alcune circostanze con quelle relative all'algebra delle matrici. I vettori hanno ora tre componenti e i tensori doppi verranno spesso assimilati a matrici 3×3 . Con la notazione precedentemente introdotta si scrive allora

$$\mathbf{n} = [n_i] = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (0.10a, b)$$

Si osservi che nella (0.10b) il primo indice si riferisce alla colonna e il secondo alla riga. Risulterà infatti spesso conveniente considerare il tensore doppio come l'insieme di tre vettori (componenti vettoriali), ognuno corrispondente a una colonna nella rappresentazione matriciale.

Verrà sistematicamente utilizzata la notazione che sottintende la sommatoria sugli indici ripetuti. Ad esempio

$$p_j = \sigma_{ij}n_i = \sigma_{1j}n_1 + \sigma_{2j}n_2 + \sigma_{3j}n_3 \quad (0.11)$$

La scrittura sottintende la sommatoria sull'indice i , ripetuto al secondo membro e che assume successivamente i valori 1, 2, 3, e corrisponde quindi all'espressione all'ultimo membro. Funzioni lineari e quadratiche del vettore \mathbf{x} si scrivono quindi

$$L = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_i x_i \quad (0.12)$$

$$Q = \frac{1}{2} (A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{13}x_1x_3 + A_{21}x_2x_1 + \dots + A_{33}x_3^2) = \frac{1}{2} A_{ij}x_i x_j \quad (0.13)$$

È immediato constatare che queste scritture trovano una corrispondenza nella notazione matriciale. Con riferimento alle (0.11-13) è infatti equivalente scrivere

$$p_j = \sigma_{ij}n_i \quad \text{oppure} \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \quad (0.14a)$$

$$L = a_i x_i \quad \text{oppure} \quad L = \mathbf{a}'\mathbf{x} \quad (0.14b)$$

$$Q = \frac{1}{2} A_{ij}x_i x_j \quad \text{oppure} \quad Q = \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (0.14c)$$

Il calcolo tensoriale prevede anche operazioni che non hanno un equivalente matriciale diretto. Ad esempio, si può associare a due tensori doppi $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$ uno scalare Λ attraverso l'espressione

$$\Lambda = \sigma_{ij}\epsilon_{ji} = \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{12}\epsilon_{21} + \sigma_{13}\epsilon_{31} + \sigma_{21}\epsilon_{12} + \dots + \sigma_{33}\epsilon_{33} \quad (0.15)$$

così come esprimere la somma delle componenti a indice uguale del tensore doppio $\boldsymbol{\sigma}$ scrivendo

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (0.16)$$

In modo analogo possono introdursi operazioni che coinvolgono tensori di ordine superiore al secondo. Ad esempio l'espressione

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (0.17a)$$

calcola il tensore doppio $[\sigma_{ij}]$ che risulta dal prodotto del tensore quadruplo $[D_{ijkl}]$ e del tensore doppio $[\epsilon_{kl}]$. La (0.17a) sottintende la sommatoria sui soli indici k e ℓ , ripetuti al secondo membro, e si scrive per esteso

$$\sigma_{ij} = D_{ij11}\epsilon_{11} + D_{ij12}\epsilon_{12} + \dots + D_{ij33}\epsilon_{33} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (0.17b)$$

Analogamente, la scrittura

$$\omega = \frac{1}{2} D_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \quad (0.18a)$$

calcola lo scalare ω attraverso una sommatoria in cui ognuno dei quattro indici assume successivamente i valori 1, 2, 3. La sommatoria comporta 81 termini e si esplicita come segue

$$\omega = \frac{1}{2} (D_{1111}\epsilon_{11}^2 + D_{1112}\epsilon_{11}\epsilon_{12} + \dots + D_{3332}\epsilon_{33}\epsilon_{32} + D_{3333}\epsilon_{33}^2) \quad (0.18b)$$

Verrà anche utilizzata la seguente notazione compatta per le derivate rispetto alla coordinata x_j

$$s_{i,j} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \quad (0.19)$$

(il riferimento a terne Cartesiane ortogonali elimina la necessità di distinguere tra derivate covarianti e controvarianti). La notazione si combina con la precedente; si intende, ad esempio

$$\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_3} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (0.20)$$

Un tensore doppio di particolare importanza è quello associato al nome di Kronecker. Esso è indicato con δ_{ij} e le sue componenti sono

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (0.21)$$

Il confronto con la (0.3) mostra che esso interpreta lo stesso ruolo della matrice identica.

Va sottolineato che quanto sopra riassunto non definisce operazioni tensoriali ma semplicemente indica come queste si eseguono in coordinate Cartesiane ortogonali. Nel calcolo tensoriale, le operazioni hanno carattere assoluto e sono definite indipendentemente dal riferimento. Ad esempio, il risultato della (0.12) è il prodotto scalare dei due vettori a e x ; peraltro, come ben noto, il prodotto scalare è definito come "prodotto dei

moduli per il coseno dell'angolo compreso", il che non sottintende alcun particolare riferimento; in coordinate Cartesiane ortogonali esso si calcola come indicato dalla (0.12). In modo analogo, con riferimento ad esempio alle (0.16), (0.15) e (0.20) si può scrivere

$$tr(\sigma) = \sigma_{ii} \quad tr(\sigma : \epsilon) = \sigma_{ij}\epsilon_{ji} \quad div(\sigma) = \sigma_{ij,i} \quad (0.22)$$

dove gli operatori "traccia" e "divergenza" e il simbolo $(:)$ denotano operazioni tensoriali, che in coordinate Cartesiane ortogonali si traducono nel secondo membro delle (0.22). È importante tener presente che la simbologia per semplicità utilizzata nel testo sottintende *operazioni assolute* su enti matematici (*i tensori*) indipendenti dal riferimento.

0.3 OPERAZIONI TENSORIALI IN NOTAZIONE MATRICIALE

Risulterà conveniente tradurre le operazioni tensoriali in notazione matriciale. Per alcune di esse, ad esempio le (0.14), l'equivalenza è immediata. In altri casi è richiesta una reinterpretazione dei simboli. Con riferimento alle (0.15), (0.17) e (0.18) si può ad esempio scrivere

$$\Lambda = \sigma^t \epsilon \quad \sigma = D \epsilon \quad \omega = \frac{1}{2} \epsilon^t D \epsilon \quad (0.23)$$

dove con σ e ϵ si intendono ora vettori di nove elementi, che ordinano in modo opportuno le componenti dei singoli tensori, e con D una matrice 9×9 che raccoglie le componenti del tensore quadruplo D_{ijkl} , ordinate di conseguenza. Lo stesso simbolo verrà utilizzato per tensori e vettori o matrici laddove si riferiscano alla stessa grandezza fisica, curando nel testo di eliminare le possibilità di equivoco.

Va infine detto che molti dei tensori doppi che verranno considerati (anche se non tutti) sono *simmetrici*; risulta cioè

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij} \quad (0.24)$$

In tal caso solo sei componenti sono diversi tra loro ed essi possono essere tradotti in vettori di soli sei elementi. Per mantenere l'equivalenza del risultato con l'operazione tensoriale occorre però definire tali vettori in modo opportuno. Ad esempio, ponendo

$$\sigma = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^t \quad (0.25a)$$

$$\epsilon = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{23} \ 2\epsilon_{31}]^t \quad (0.25b)$$

è facile constatare che risulta

$$\sigma^t \epsilon = \sigma_{ij}\epsilon_{ji} \quad (0.26)$$

Il fattore due per cui sono state moltiplicate le componenti a indice diverso nella (0.25b) è necessario a rendere la sommatoria di sei termini a primo membro della (0.26) uguale a quella di nove termini al secondo membro.

Il problema strutturale

1.1 ASPETTI GENERALI

1.1.1 INTRODUZIONE

In termini molto generali, si intende con *costruzione* un qualsiasi insieme di elementi, costituito da materiali opportuni, atto a sopportare carichi. È questa una definizione assai ampia, che include non solo i normali edifici, ma anche ponti e dighe, costruzioni navali e aeronautiche, componenti meccanici, piattaforme petrolifere in mare e così via. Per assolvere il loro compito, tutte queste opere devono convivere in sicurezza con determinate azioni, in parte legate alla funzione che si propongono di esercitare (i cosiddetti carichi utili), in parte connesse con la loro stessa esistenza (tipicamente, il peso proprio) e in parte inevitabilmente trasmesse dall'ambiente circostante (ad esempio, carichi da vento, neve, moto ondoso o di origine sismica). In ogni costruzione è presente una *struttura* portante, insieme di quelle parti che si ritiene svolgano un ruolo efficace nel resistere queste azioni. Oggetto della *meccanica delle strutture* è, come il suo stesso nome denuncia, lo studio del comportamento meccanico delle strutture sotto carico.

A rigore, il problema andrebbe affrontato in campo dinamico. Molti carichi sono infatti funzione del tempo; tale risulterà quindi anche la risposta della struttura e la variazione è a volte sufficientemente rapida da mettere in gioco forze d'inerzia significative. Esistono tuttavia svariate circostanze di rilevante interesse in cui i carichi agiscono abbastanza gradualmente da poter trascurare gli effetti dinamici da essi indotti. La trattazione in questo testo sarà confinata a questo ambito, certamente importante anche se non esauritivo.

In presenza di carichi via via crescenti, ci si aspetta che la struttura si deformi progressivamente fino al raggiungimento di una situazione critica. Questa può corrispondere a un colllasso più o meno catastrofico o anche semplicemente a una definitiva perdita di funzionalità, ad esempio per eccesso di deformazioni irreversibili. La valutazione del margine di sicurezza nei confronti di una situazione critica è un problema di importanza evidente e costituisce uno degli oggetti della meccanica delle strutture.

Peraltra, nei confronti di una situazione critica occorre cautelarsi per carichi in qualche modo eccezionali, la cui presenza non può e non deve essere esclusa ma che hanno una bassa probabilità di verificarsi nella vita di una struttura. Le condizioni di carico dette di esercizio si susseguono invece anche un numero notevole di volte e nei loro confronti è necessario assicurare che la struttura si mantenga sostanzialmente integra e sempre in grado di assolvere efficacemente i compiti per cui è stata concepita. Occorre cioè verificare che il livello di sollecitazione locale sia sufficientemente contenuto da non provocare un accumulo del danno al ripetersi del carico e che il regime

deformativo sia sempre tale da non compromettere la funzionalità. È questo un problema diverso dal precedente: ad esempio, la struttura di supporto di un macchinario il cui funzionamento è condizionato da determinate tolleranze, in condizioni di esercizio deve risultare sufficientemente rigida da garantirne il rispetto; sotto carichi eccezionali, che non possono escludersi ma che ragionevolmente si prevede si verifichino al più una volta nella vita della struttura, un collasso definitivo deve ovviamente essere evitato, ma si può spesso accettare che il funzionamento sia temporaneamente interrotto per consentire le necessarie riparazioni.

Queste semplici considerazioni evidenziano come l'oggetto della meccanica delle strutture possa, in prima approssimazione, riassumersi in due problemi fondamentali: da una parte la valutazione della capacità portante, onde stabilire il margine di sicurezza che una struttura, se soggetta a carichi eccezionali, presenta nei confronti di una situazione critica; dall'altra, lo studio del comportamento della struttura sotto carico, per assicurarne l'integrità e la funzionalità sotto azioni ripetute. Nel primo caso ci si propone di calcolare il carico massimo che può essere applicato senza produrre crisi, nel secondo di valutare la risposta sotto carichi noti. Questi due aspetti verranno ora illustrati con riferimento ad un semplice esempio.

1.1.2 UN ESEMPIO DI CALCOLO

1.1.2.1 Risposta di una struttura sotto un carico assegnato

In Figura 1.1a è illustrato un semplice schema strutturale, costituito da un'asta rigida vincolata in modo da non potersi spostare lateralmente e sostenuta da tre fili deformabili verticali equidistanti, che presentano lunghezza e sezione trasversale a priori diverse, come pure diverso può essere il materiale di cui sono costituiti. L'asta è soggetta a una forza verticale F applicata in corrispondenza del filo centrale; ci si propone di valutare la risposta della struttura a tale condizione di carico.

Intuitivamente, i tre fili risulteranno tesi e, di conseguenza, si allungheranno. Avendo considerata l'asta come infinitamente rigida, a deformazione avvenuta gli estremi inferiori dei fili si troveranno allineati su di una retta. Se il loro allungamento è modesto, si può supporre con ragionevole approssimazione che i fili si mantengano verticali. Detta allora e_n , $n = 1, 2, 3$, la loro variazione di lunghezza, dovrà risultare (Figura 1.1b)

$$e_2 = \frac{1}{2} (e_1 + e_3) \quad (1.1)$$

È questa una condizione di natura geometrica, che impone alle deformazioni (nel caso in esame, gli allungamenti dei fili) il rispetto del vincolo costituito dalla rigidità dell'asta che essi sostengono.

Ulteriori condizioni provengono dal mondo statico. La forza F dovrà infatti essere bilanciata dalle trazioni N_n nei fili che, sempre per piccoli allungamenti, possono considerarsi verticali (Figura 1.1b). L'equilibrio alla traslazione verticale e quello alla rotazione attorno al punto di ancoraggio del filo centrale forniscono allora

$$N_1 + N_2 + N_3 = F \quad N_1 - N_3 = 0 \quad (1.2a, b)$$

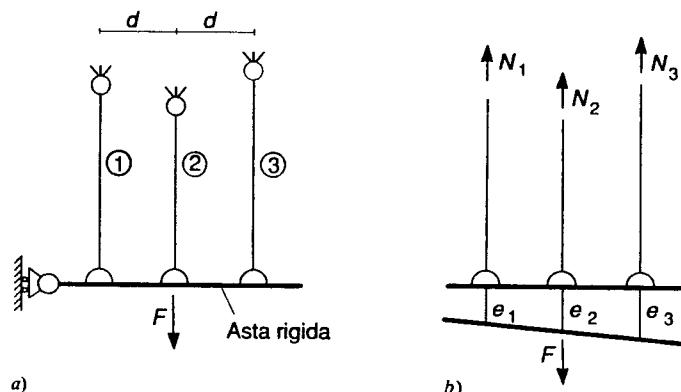


Figura 1.1

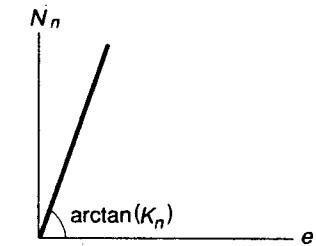


Figura 1.2

Sono queste le condizioni imposte dall'equilibrio per il problema in esame. È pure evidente che sussisterà una relazione tra le trazioni N_n nei fili e il loro allungamento e_n . Un tale legame può essere ottenuto sperimentalmente, misurando in laboratorio le variazioni di lunghezza conseguenti a forze applicate a ognuno dei fili. Si supponga che esso sia schematizzabile come illustrato in Figura 1.2, che si possa cioè assumere una relazione di proporzionalità tra trazioni e allungamenti. Si scriverà allora

$$N_n = K_n e_n, \quad n = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

dove le K_n sono le *rigidezze* del filo, da considerarsi come dati del problema.

Le (1.1-1.3) costituiscono un sistema di sei equazioni lineari nelle sei incognite N_n , e_n . La loro soluzione, che definisce la risposta della struttura al carico F , viene ora esplicitata per il caso in cui i due fili esterni $n = 1$ e $n = 3$ presentino uguale lunghezza e sezione trasversale e siano costituiti dallo stesso materiale. Si può allora porre

$$K_1 = K_3 = K \quad K_2 = \alpha K \quad (1.4)$$

È facile constatare che si ottiene

$$e_1 = e_2 = e_3 = u = \frac{F}{(2 + \alpha)K} \quad (1.5a)$$

$$N_1 = N_3 = \frac{F}{2 + \alpha} \quad N_2 = \frac{\alpha F}{2 + \alpha} \quad (1.5b)$$

I tre fili si allungano della stessa quantità, indicata con u ed espressa dalla (1.5a). Questa rappresenta lo spostamento dell'asta rigida, che trasla mantenendosi orizzontale, come del resto prevedibile per la simmetria che le (1.4) implicano. Le trazioni risultano uguali nei due fili esterni, condizione comunque imposta dall'equazione di equilibrio (1.2b), indipendentemente da simmetrie di comportamento. La quota di carico sopportata dal filo centrale è funzione del rapporto α tra le rigidezze e risulta tanto maggiore quanto più questo è elevato. L'andamento delle trazioni in funzione di α è illustrato in Figura 1.3. Si ha, in particolare

$$\begin{aligned} \alpha = 0 & : N_1 = N_3 = F/2 \quad N_2 = 0 \\ \alpha = 1 & : N_1 = N_2 = N_3 = F/3 \\ \alpha \rightarrow \infty & : N_1 = N_3 \rightarrow 0 \quad N_2 \rightarrow F \end{aligned}$$

Il caso $\alpha = 0$ configura un filo centrale infinitamente estensibile, che può allungarsi senza che ciò induca tensione alcuna; il carico è allora interamente sopportato dai fili esterni. La situazione opposta si verifica per $\alpha \rightarrow \infty$. Per $\alpha = 1$ i tre fili hanno la stessa rigidezza e sopportano la stessa quota di carico.

1.1.2.2 Calcolo della capacità portante

Il legame di Figura 1.2 può approssimare accettabilmente il comportamento di un filo reale solo fino a un certo valore N_{on} della trazione, raggiunto il quale l'andamento devia

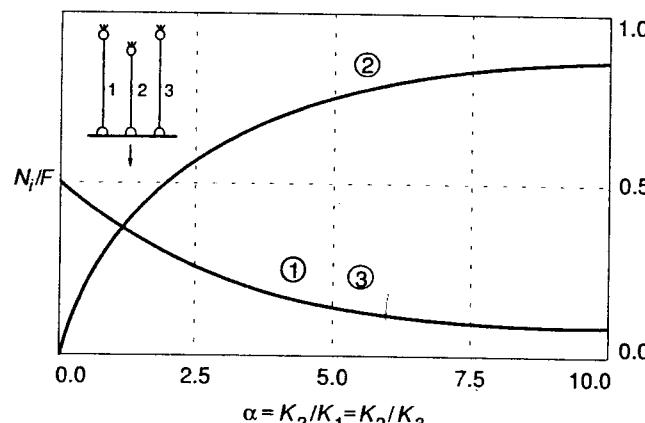


Figura 1.3

più o meno sensibilmente dalla linearità o può verificarsi rottura. La soluzione precedente è quindi valida solo fino a che risulta nei tre fili $N_n \leq N_{on}$.

Si supponga che i fili esterni, in aggiunta alle (1.4), presentino anche lo stesso limite di linearità; in tal caso si può scrivere

$$N_{01} = N_{03} = N_0 \quad N_{02} = \beta N_0 \quad (1.6)$$

La condizione che le trazioni (1.5b) non superino il loro valore limite si traduce allora nella diseguaglianza

$$F \leq \min \left\{ (2 + \alpha)N_0, \frac{\beta}{\alpha} (2 + \alpha)N_0 \right\} \quad (1.7)$$

Ad esempio, per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/3$ si ottiene, come limite di validità della soluzione (1.5), il valore del carico

$$F = \frac{5}{3} N_0 \quad (1.8)$$

in corrispondenza del quale la trazione nel filo centrale raggiunge il limite di linearità. Le (1.5) adesso prevedono

$$u = \frac{2}{3} \frac{N_0}{K} \quad (1.9a)$$

$$N_1 = N_3 = \frac{2}{3} N_0 (< N_{01,3} = N_0) \quad N_2 = \frac{1}{3} N_0 (= N_{02}) \quad (1.9b, c)$$

È spontaneo ora domandarsi se la struttura possa sopportare ulteriori incrementi di carico e, se questo è il caso, quale sia la sua risposta. Occorre a tal fine definire il comportamento dei fili al di fuori del campo di validità delle (1.3). Se il materiale di cui sono costituiti è *fragile*, risorse ulteriori sono possibili solo in misura molto modesta e i fili giungono rapidamente a rottura. In prima approssimazione, un tale comportamento è riprodotto dal diagramma in Figura 1.4: esso prevede rottura immediata per $N_n = N_{on}$ (Gli "allungamenti" $e_n > e_{on}$ vanno ora intesi come l'aumento della distanza tra i due estremi del filo, a rottura avvenuta non più collegati tra loro). Raggiunto il valore (1.8), la struttura passa allora bruscamente dalla situazione corrispondente alla soluzione (1.9), illustrata in Figura 1.5a, a quella di Figura 1.5b, in cui il filo centrale si è spezzato e tutto il carico è sopportato da quelli esterni. È adesso

$$N_1 = N_3 = \frac{5}{6} N_0 \quad N_2 = 0 \quad (1.10a)$$

Lo spostamento u , uguale all'allungamento dei fili ancora attivi, risulta invece

$$u = \frac{N_1}{K} = \frac{5}{6} \frac{N_0}{K} \quad (1.10b)$$

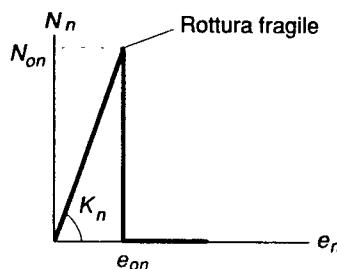


Figura 1.4

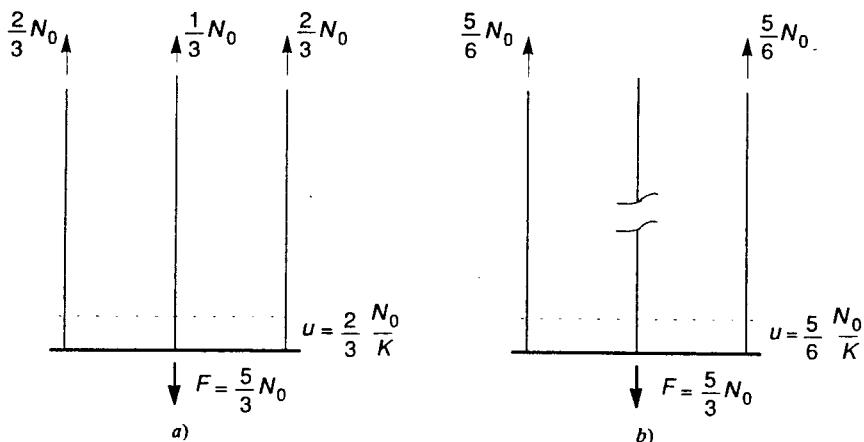


Figura 1.5

Le trazioni (1.10a) nei fili esterni sono ancora inferiori al valore di rottura, per cui è in linea di principio pensabile che il carico possa essere ulteriormente incrementato. Per $N_2 = 0$, le equazioni di equilibrio (1.2) impongono che le trazioni restanti siano pari alla metà del carico; i due fili esterni si allungano sempre nella stessa misura, che definisce lo spostamento. Si ha quindi

$$N_1 = N_3 = \frac{F}{2} \quad u = \frac{F}{2K} \quad (1.11)$$

Tale soluzione cessa di valere quando anche i fili esterni giungono a rottura. Questa è chiaramente la situazione di crisi, cui corrispondono i valori di carico e spostamento seguenti

$$F = 2N_0 \quad u = \frac{N_0}{K} \quad (1.12)$$

Gli andamenti dello spostamento e delle azioni interne al crescere del carico sono illustrati in Figura 1.6.

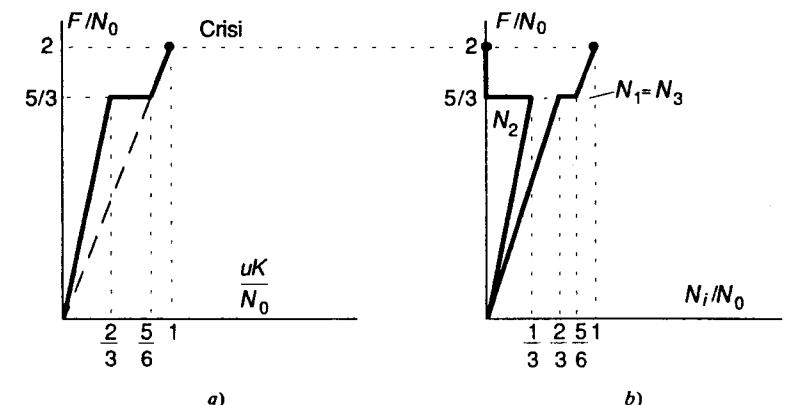


Figura 1.6

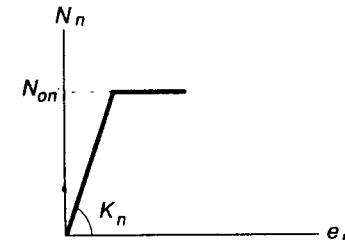


Figura 1.7

Si osservi che la crisi può coincidere con la rottura del primo filo; operando con altri valori dei rapporti adimensionali α e β è infatti facile verificare che spesso l'incremento di trazione nei fili superstiti porta il valore totale a eccedere immediatamente il limite di rottura. Anche nell'esempio qui svolto l'incremento rispetto al valore (1.8) è puramente teorico; la brusca transizione tra le due situazioni in Figura 1.5 non è in generale tollerabile perché gli effetti dinamici che essa comporta sono di per sé capaci di esaurire le restanti risorse. Di fatto, per un comportamento schematizzabile come in Figura 1.4, il carico di crisi della struttura può essere identificato con il limite di validità della soluzione (1.5).

Diverso è il caso se il materiale è *duttile*. Il valore N_{on} assume adesso il significato di *limite di snervamento*, raggiunto il quale il filo può subire senza rottura deformazioni anche notevoli, cui peraltro è associato un incremento di trazione molto modesto. Un comportamento limite è quello illustrato in Figura 1.7: raggiunto il valore di snervamento, il filo può allungarsi indefinitamente rifiutando incrementi di trazione ma fornendo sempre il contributo $N_n = N_{on}$.

In tale ipotesi, non appena il valore di carico (1.8) viene superato, il filo centrale si allunga a trazione costante. I soli incrementi di carico si ridistribuiscono ora sui due

fili esterni, le cui trazioni si calcolano scrivendo le equazioni di equilibrio (1.2) per $N_2 = N_0/3$. Si ottiene (Figura 1.8a)

$$N_1 = N_3 = \frac{F}{2} - \frac{N_0}{6} \quad N_2 = \frac{N_0}{3} \quad (1.13a)$$

La struttura nel suo complesso diviene più cedevole, in quanto il filo centrale non contribuisce più alla sua rigidezza. L'incremento di spostamento coincide con l'incremento di allungamento dei fili non ancora a snervamento (ad esempio il filo 1). Si ha allora

$$u = \frac{N_1}{K} = \frac{F}{2K} - \frac{N_0}{6K} \quad (1.13b)$$

Tale soluzione è valida fino a che anche le trazioni (1.13a) nei fili esterni non raggiungono il limite di snervamento. Come è facile verificare sulla base delle (1.13), ciò avviene in corrispondenza dei seguenti valori di carico e spostamento

$$F = \frac{7}{3} N_0 \quad u = \frac{N_0}{K} \quad (1.14a, b)$$

Tale situazione è illustrata in Figura 1.8b.

È a questo punto evidente che ulteriori incrementi di carico non sono possibili. I tre fili sono tutti a snervamento e il comportamento di Figura 1.7 non consente alle loro trazioni di aumentare; in presenza di un carico più elevato non è quindi possibile rispettare contemporaneamente l'equilibrio e i limiti di snervamento. Il valore (14a) si configura come *carico di collasso* per la struttura.

L'andamento dello spostamento e delle trazioni al crescere del carico è illustrato in Figura 1.9. Il pianerottolo orizzontale in Figura 1.9a è dovuto al fatto che nella situazione di collasso i fili possono allungarsi senza incrementi di trazione e quindi la struttura può subire spostamenti arbitrari a carico costante.

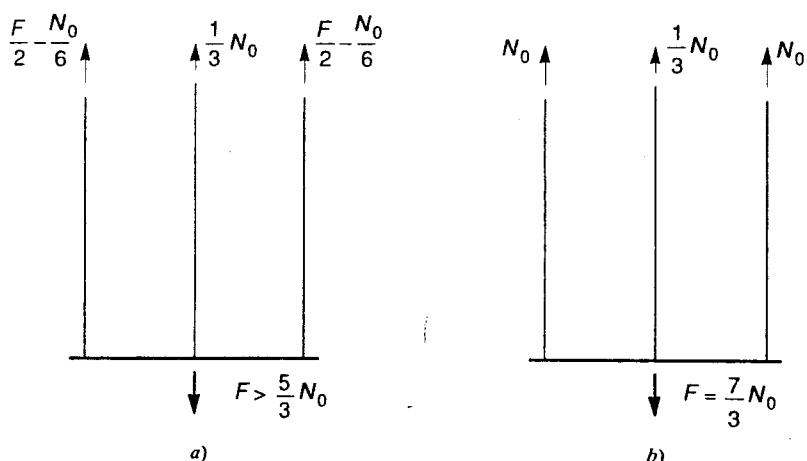


Figura 1.8

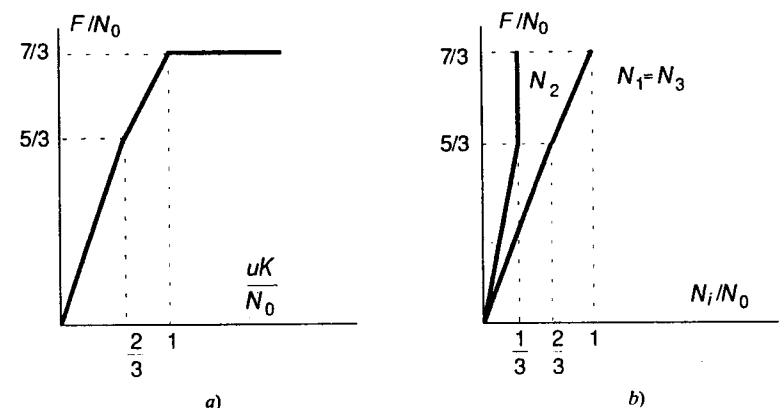


Figura 1.9

1.1.3 OSSERVAZIONI E COMMENTI

La semplicità dell'esempio ne ha consentito la soluzione sulla base di considerazioni meccaniche elementari e pressoché intuitive. Esso peraltro consente osservazioni di carattere affatto generale.

Per risolvere il problema sono state utilizzate relazioni provenienti da tre diversi ambiti. Considerazioni geometriche sulle modalità con cui la struttura può deformarsi senza violare le condizioni imposte dai vincoli hanno condotto alla (1.1). Le (1.2) sono invece di natura statica e impongono l'equilibrio della struttura. Occorre infine considerare il comportamento del materiale, nel caso specifico rappresentato dal diagramma di Figura 1.2, eventualmente completato da una delle alternative illustrate nelle Figure 1.4 o 1.7. Sono questi gli ingredienti fondamentali per la soluzione di un qualunque problema di meccanica delle strutture.

Nel caso generale, le relazioni di carattere geometrico definiscono le condizioni che il campo di spostamenti deve rispettare e le deformazioni che a tali spostamenti conseguono. La loro derivazione comporta alcune ipotesi sul processo deformativo. Solitamente si assume che questo avvenga senza lacerazioni o sovrapposizioni di materiale, conservando quindi la continuità della struttura. Un processo deformativo di questo tipo e che inoltre rispetti i vincoli esterni è detto *congruente*. Questa ipotesi può essere più o meno verificata in diverse circostanze. Nell'esempio, essa risulta paleamente violata quando un filo giunge a rottura, situazione che, peraltro, va in genere considerata come critica. Tuttavia anche strutture globalmente integre possono presentare (e spesso presentano) fessurazioni più o meno estese senza che la funzionalità ne sia compromessa. Occorre allora valutare se l'ipotesi di congruenza sia ancora accettabile, quantomeno come ragionevole approssimazione e, in caso contrario, provvedere a una generalizzazione delle relazioni geometriche che incorporino eventuali discontinuità (problema questo non ancora risolto in modo soddisfacente nel caso generale).

Le condizioni di equilibrio introducono dei legami tra le forze applicate e la sollecitazione (o *sforzo*) localmente presente nella struttura. Nell'esempio, lo sforzo è spontaneamente identificato con le trazioni nei fili e, in effetti, la conoscenza di tali valori

permette di valutare l'impegno a cui i fili risultano sottoposti. È evidente un'analogia con il mondo geometrico, dove la congruenza stabilisce delle relazioni tra spostamenti e deformazioni e ciò suggerisce una sorta di simmetria tra i due ambiti, in cui forze-spostamenti e sforzi-deformazioni si corrispondono tra loro. Esiste tuttavia una differenza, importante quanto meno a livello concettuale. Gli spostamenti sono quantità misurabili ed è quindi possibile, almeno in linea di principio, stabilire se e in quale misura la congruenza risulti violata. L'equilibrio invece è, in un certo senso, un postulato alla base di ogni problema meccanico (a rigore, non è infatti possibile concepire un esperimento in grado di stabilire se l'equilibrio sia o meno violato) e, come tale, deve sempre risultare esattamente verificato. Nell'esempio, le (1.2) definiscono le trazioni necessarie ad assicurare l'equilibrio. Tali relazioni non sono sufficienti a determinarne univocamente il valore, ma qualunque soluzione deve rispettarle senza approssimazioni.

Equilibrio e congruenza operano in due ambiti indipendenti. Sono concepibili situazioni in cui si producono deformazioni in assenza di sforzo (è questo il caso, ad esempio, di un corpo privo di vincoli assoggettato a variazioni di temperatura ovunque uniformi: le deformazioni di origine termica si producono allora liberamente, senza indurre sollecitazione alcuna). È però evidente come in generale quanto meno una parte della deformazione sia legata da un rapporto di causa-effetto allo sforzo. Tale rapporto dipende dalla natura del materiale e la sua traduzione in termini matematici prende il nome di *legame costitutivo*. La sua definizione non può prescindere dall'esperienza, che sola può mettere in luce le caratteristiche qualitative e quantitative del comportamento dei diversi materiali. Non è però possibile definire un vero e proprio legame costitutivo solo su questa base: è comunque indispensabile un modello teorico che traduca in termini matematici le principali caratteristiche fenomenologiche del comportamento, entro cui inquadrare i risultati sperimentali.

Il legame costitutivo deve recepire quegli aspetti del comportamento del materiale che si ritengono essenziali per definirne adeguatamente la risposta. È importante osservare che lo stesso materiale può richiedere modellazioni diverse in diverse circostanze. Per molti materiali da costruzione, un legame come quello in Figura 1.2, che schematizza il comportamento detto *elastico lineare*, è adeguato per l'analisi di una struttura in condizioni di esercizio. Esso però non è assolutamente in grado di fornire informazioni sulla resistenza ultima: si è infatti visto che mentre per un materiale fragile la crisi praticamente coincide con l'esaurimento della fase elastica, per un materiale duttile si hanno risorse ulteriori anche cospicue (nell'esempio, il carico di collasso (1.14a) supera del 40% il valore (1.8) al limite elastico). Ai fini della valutazione della capacità portante di una struttura è quindi essenziale che il legame incorpori alcuni aspetti del comportamento del materiale al di fuori del campo elastico. Quello di Figura 1.7 (noto come modello *elasto-plastico ideale*) recepisce in forma semplificata la capacità di certi materiali (tipicamente, un acciaio dolce) di subire in fase inelastica deformazioni anche cospicue a sforzo praticamente costante.

Prima di stabilire un legame costitutivo tra sforzi e deformazioni è tuttavia necessario definire queste quantità. Anche se il mondo geometrico della congruenza appartiene alla realtà osservabile, non è immediatamente ovvio come associare a determinati spostamenti opportune misure della *deformazione* locale, cioè della variazione di volume e di forma dell'intorno di un punto della struttura. Queste misure devono essere convenzionalmente definite e a esse devono essere associate corrispondenti misure di sollecitazione o sforzo locale. Gli aspetti qualitativi di tale problema verranno introdotti nel paragrafo che segue.

1.2 MISURE DI DEFORMAZIONE E DI SFORZO

1.2.1 IL COMPORTAMENTO UNIASSIALE

Si consideri un *esperimento ideale* di trazione condotto sulla barra illustrata in Figura 1.10a. Essa abbia lunghezza iniziale pari a ℓ_0 e la sezione circolare in Figura 1.10b, inizialmente di area A_0 . Con il termine "esperimento ideale" si allude ad una prova condotta in modo che il regime deformativo nella barra sia ovunque costante. A un determinato valore della forza F conseguira nella barra un allungamento $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, dove ℓ indica la lunghezza corrente: si supporrà che ogni fibra longitudinale di lunghezza unitaria si allunghi della stessa quantità. Inoltre, la sezione si contrarrà trasversalmente: si supporrà che la barra si mantenga un cilindro di sezione circolare, con area corrente pari ad A . A rigore, tali ipotesi non sono mai verificate; per deformazioni non troppo elevate esse sono tuttavia abbastanza ragionevoli se il provino è costituito da un materiale *isotropo*, privo cioè di direzioni preferenziali di comportamento.

L'esperimento può essere condotto sia a *carico imposto*, misurando l'allungamento che conseguie a ogni valore della forza applicata, sia a *spostamento imposto*, valutando la forza necessaria a produrre determinate variazioni di lunghezza. In ogni caso, esso consente di associare a ogni valore di F il corrispondente allungamento $\Delta\ell$, nonché la variazione $\Delta d = d - d_0$ del diametro della sezione (come l'intuizione suggerisce, in una prova di trazione sarà sempre $d < d_0$ e, quindi, $\Delta d < 0$). È quindi possibile, sulla base dei dati sperimentali, tracciare dei diagrammi $F - \Delta\ell$ e $F - \Delta d$ (o, in alternativa, $\Delta d - \Delta\ell$) che riflettono il comportamento del materiale di cui la barra è costituita.

È peraltro evidente che barre di dimensioni iniziali diverse subiranno, a parità di trazione, allungamenti diversi, che diminuiranno con l'aumentare della superficie A_0 della sezione e aumenteranno con la lunghezza. Pure le contrazioni trasversali risulteranno differenti. Sono quindi significativi non tanto i valori assoluti della forza applicata e delle variazioni $\Delta\ell$, Δd delle dimensioni lineari del provino, quanto quelli relativi, rispettivamente, alle unità di area e di lunghezza. Con riferimento alle dimensioni iniziali della barra, si può allora porre

$$\epsilon = (\ell - \ell_0)/\ell_0 \quad \epsilon_t = (d - d_0)/d_0 \quad (1.15a, b)$$

quantità che definiscono, rispettivamente, le *deformazioni dirette* longitudinale e trasversale, e

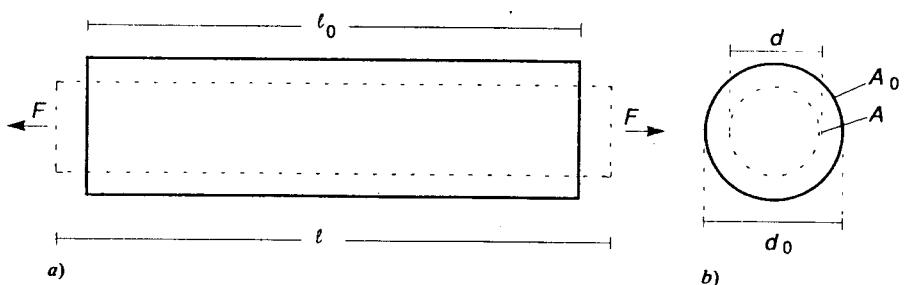


Figura 1.10

$$\sigma = F/A_0 \quad (1.16)$$

che definisce lo *sforzo normale*. Le (1.15), (1.16) sono note come misure *nominali* di deformazione e di sforzo, relative ad una prova uniaxiale. Si osservi che lo sforzo ha le dimensioni di una forza per unità di superficie ed è quindi misurato in N/mm² (MPa). La deformazione è invece un numero puro.

In realtà, le quantità così definite rappresentano ancora le variazioni delle dimensioni lineari del provino e la forza applicata misurate nel corso dell'esperimento. Esse sono state infatti ricondotte a misure unitarie dividendole per quantità fisse. Se espressi in tali termini, i diagrammi subiscono quindi solo cambiamenti di scala. Peraltra, essi ora consentono di risalire al comportamento di provini di qualsiasi dimensione iniziale. È a questo punto possibile rappresentare anche la risposta a compressione, non derivabile da un esperimento su di una barra allungata (quale è tipicamente il provino di trazione) che tenderebbe a inflettersi.

Il diagramma $\sigma - \epsilon$ relativo a un acciaio dolce è illustrato in Figura 1.11a, dove sono anche indicati gli ordini di grandezza delle deformazioni caratteristiche. In Figura 1.11b è invece riportato, in funzione di ϵ , il rapporto

$$\nu = -\epsilon_t/\epsilon \quad (a)$$

detto *coefficiente di contrazione trasversale* (i valori numerici si riferiscono sempre a un acciaio dolce). Tale valore è comunque positivo, risultando sempre ϵ_t di segno opposto a ϵ .

Sono a questo punto opportune alcune osservazioni. Nel definire le misure nominali di sforzo e deformazione si è ipotizzato che questi fossero ovunque costanti nel provino. In una prova reale, lo sforzo risulta ragionevolmente costante solo in una zona a una certa distanza dagli estremi, dove la sua distribuzione locale è perturbata dalle modalità di applicazione del carico o da variazioni di sezione imposte dalla realizzazione della prova (Figura 1.12). Questa deve quindi essere condotta su provini abbastanza allungati da garantire la presenza di una zona non perturbata sufficientemente estesa.

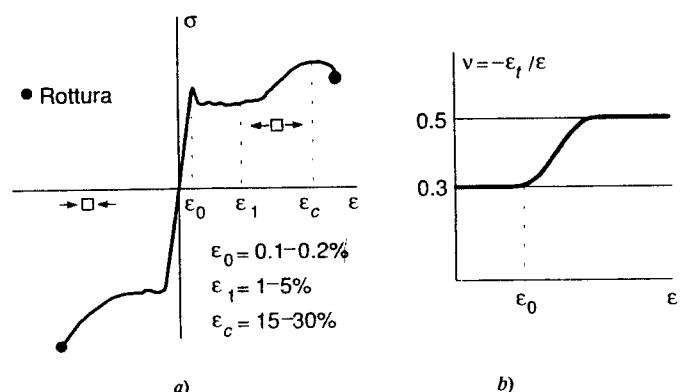


Figura 1.11

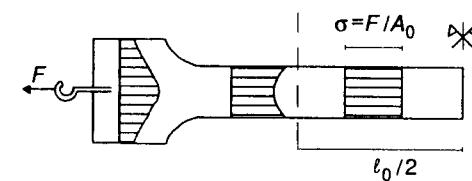


Figura 1.12

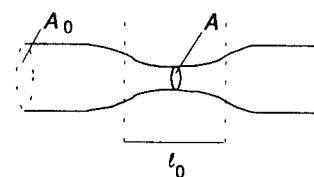


Figura 1.13

Anche nel tratto centrale della barra, peraltro, le deformazioni possono ritenersi ragionevolmente costanti solo fino a quando si mantengono di entità modesta. Aumentando di valore, esse tendono a localizzarsi in un breve tratto, la cui sezione diminuisce considerevolmente, dando luogo al fenomeno detto di *strizione* (Figura 1.13). A questo punto, né sforzi né deformazioni possono ancora essere considerati uniformi e i loro valori nominali risultano influenzati dal modo con cui le misure vengono effettuate. In particolare, nella (1.15a) ℓ_0 va inteso come una lunghezza di riferimento, convenzionalmente fissata in modo da rappresentare un ragionevole valore medio sul tratto in cui le deformazioni si concentrano.

Una prova di compressione è più delicata. Una barra troppo allungata tenderebbe a inflettersi. D'altra parte, le disomogeneità di sforzo agli estremi, conseguenti alle modalità di applicazione del carico, possono coinvolgere l'intero provino se questo è tozzo e rendere ininterpretabili i risultati. Può inoltre verificarsi, in modo più o meno pronunciato a seconda delle modalità di prova, il fenomeno detto di *barreling*; esso è dovuto al fatto che agli estremi la dilatazione trasversale della sezione è in qualche modo contrastata; si ha allora un rigonfiamento nella zona centrale del provino, con conseguenti effetti cerchianti che ne aumentano la rigidezza.

Le prove possono comunque essere eseguite e dai loro risultati si può risalire a una curva detta *uniassiale*, che può pensarsi derivata da un esperimento ideale in cui sforzi e deformazioni siano ovunque costanti. Il suo tracciamento richiede interventi correttivi per eliminare risultati spuri associati a fenomeni quali la strizione o il barreling; questi provvedimenti sono in larga misura convenzionali e non conducono a risultati univoci, con differenze che divengono sensibili all'aumentare della deformazione. Pur con queste limitazioni, si ottiene in tal modo una curva rappresentativa del comportamento del materiale.

La curva di Figura 1.11a è il prodotto di queste rielaborazioni, ma ancora non appare del tutto soddisfacente. Essa presenta una dissimmetria tra le risposte a trazione e compressione che, se non può escludersi in generale, sembra poco giustificata per il materiale qui considerato. Il tratto descendente nella parte terminale della curva di trazione indurrebbe a pensare a una diminuzione di sforzo per deformazioni crescenti. In realtà esso è dovuto alla contrazione trasversale: anche se lo sforzo aumenta localmente, la diminuzione della sezione impedisce che si riscontri un equivalente incremento nella forza esterna e, in una prova a carico imposto, il provino colllassa per il valore di F corrispondente all'ordinata massima della curva, prima che il materiale sia giunto a rottura. La risposta a compressione non evidenzia tale fenomeno, in quanto la sezione ora aumenta in conseguenza dell'accorciamento.

In effetti la curva è stata espressa in termini di misure unitarie di sforzo e deformazione mediante un'operazione formale (e un po' artificiosa) in cui forza e allungamento sono state divisi per quantità fisse. Essa è ancora nella sostanza un diagramma carico-allungamento e rappresenta quindi più il comportamento del provino nel suo complesso che non quello del materiale di cui è costituito. La sollecitazione locale del materiale appare meglio rappresentata da una misura di sforzo ottenuta dividendo F per l'area corrente A del provino piuttosto che per il suo valore iniziale A_0 . Si ha allora, in luogo della (1.16)

$$\sigma_v = F/A \quad (1.17)$$

Analogamente, per la deformazione è spontaneo riferirsi a ogni istante al valore corrente ℓ della lunghezza di riferimento. Si definisce allora il seguente incremento di deformazione

$$d\epsilon_v = d\ell/\ell \quad (1.18a)$$

Integrando sotto la condizione che sia $\epsilon_v = 0$ per $\ell = \ell_0$, si ottiene

$$\epsilon_v = \ln(\ell/\ell_0) \quad (1.18b)$$

Si osservi che, a differenza della corrispondente definizione nominale (1.15a), la (1.18b) incorpora l'ovvio vincolo fisico $\ell > 0$, che impedisce al provino di accorciarsi fino ad assumere lunghezze negative.

In Figura 1.14 è riportata a tratto continuo una curva $\sigma - \epsilon$ per il materiale e, a tratteggio, quella in termini delle misure di sforzo e deformazione ora introdotte. Essa ridimensiona drasticamente la dissimmetria di comportamento a trazione e compressione, che è quindi in massima parte attribuibile a effetti "strutturali", legati alla risposta del provino nel suo complesso, come del resto atteso per il materiale considerato. Si osservi che la differenza tra le due curve è significativa solo per deformazioni grandi in valore assoluto.

Quanto detto induce a considerare le (1.17), (1.18) come le corrette definizioni di sforzo di normale e deformazione diretta. In effetti, l'espressione (1.17) di σ_v è nota in letteratura come sforzo *vero*; tale attributo non è solitamente conferito alla ϵ_v , cui ci si riferisce come alla deformazione *logaritmica*. Queste definizioni godono di un'importante proprietà (che nel prossimo capitolo verrà introdotta nel caso generale come *principio delle potenze virtuali*). Supponendo infatti σ_v ed ϵ_v costanti, è facile verificare l'egualanza seguente

$$\int_V \sigma_v d\epsilon_v dV = \sigma_v d\epsilon_v V = \frac{F}{A} \frac{d\ell}{\ell} A\ell = F d\ell \quad (1.19)$$

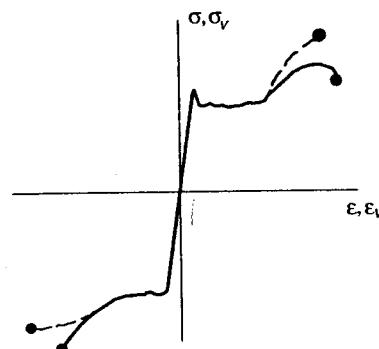


Figura 1.14

Cioè l'integrale sul *volume corrente* $V = A\ell$ dello sforzo vero per un incremento della deformazione logaritmica egualia il lavoro compiuto dalla forza applicata per una variazione infinitesima di lunghezza. Si noti che nello stabilire tale proprietà è stato fatto uso solamente delle definizioni (1.17) e (1.18a) di σ_v e $d\epsilon_v$; il particolare comportamento del materiale non gioca alcun ruolo.

Lo sforzo (1.17) è definito nella configurazione corrente (deformata) del provino, dove effettivamente l'equilibrio si instaura. Pertanto, il suo valore dipende dal regime deformativo, in particolare da come l'area della sezione varia col carico; ne consegue che materiali diversi presentano sforzi diversi sotto lo stesso carico se si contraggono trasversalmente con modalità differenti. Anche se tale risultato è del tutto corretto, questa caratteristica fa della (1.17) una definizione non sempre conveniente ai fini applicativi. Lo stesso problema non sembra sorgere per la deformazione logaritmica (1.18b), che appare comunque riferita alla configurazione iniziale. Va detto però che la sua autentica definizione è quella relativa al suo incremento (1.18a), la cui integrazione, immediata nel caso uniaxiale, non lo è altrettanto in situazioni più generali.

Le misure nominali (1.15), (1.16), riferite alla configurazione iniziale, non presentano questo inconveniente. È spontaneo domandarsi se non possano essere utilizzate in alternativa. Intuitivamente la risposta è positiva, a patto che esse siano tra loro legate dalla relativa curva uniaxiale (a tratto pieno in Figura 1.14). Occorre comunque stabilire quali siano le condizioni perché determinate misure di sforzo e di deformazione possano essere legittimamente impiegate. Anche se la motivazione non è al momento apparente (la giustificazione verrà data solo nel prosieguo della trattazione), si anticipa che la consistenza matematica del problema strutturale richiede che valga la condizione (1.19); che risulti cioè

$$\int_{V_0} \sigma d\epsilon dV_0 = F d\ell \quad (1.20)$$

dove $V_0 = A_0\ell_0$ è ora il *volume iniziale*, relativo quindi alla configurazione cui le misure di sforzo e deformazione sono riferite. La validità della (1.20) è di verifica immediata. Dalla (1.15a) si ottiene infatti $d\epsilon = d\ell/\ell_0$; introducendo questo valore unitamente alla definizione (1.16) di σ e ricordando che tali quantità sono ipotizzate costanti nel provino, l'integrale nella (1.20) si riconduce al secondo membro.

La (1.20) può essere anche vista come la condizione che *definisce* la misura di sforzo consistente con la misura di deformazione (1.15a). Questa può essere considerata una definizione, ragionevole ma in un certo senso arbitraria, introdotta per motivi di convenienza operativa. Lo sforzo a essa corrispondente si ottiene allora *imponendo* che valga la (1.20) per tutti i possibili $d\epsilon$ e conseguenti $d\ell$. Nel caso specifico, si ottiene la (1.16).

Le misure nominali sono in effetti spesso impiegate nell'analisi strutturale. Esse (o, quanto meno, le loro generalizzazioni a un caso più generale) non sono però sempre adatte a trattare deformazioni di notevole entità. Si preferisce allora definire la deformazione del provino rispetto alla configurazione iniziale attraverso la relazione

$$E = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} \quad (1.21a)$$

da cui discende

$$dE = \frac{\ell}{\ell_0^2} d\ell \quad (1.21b)$$

La corrispondente misura di sforzo, che verrà indicata con S ed è pure riferita alla configurazione iniziale, consegue da una condizione analoga alla (1.20). Supponendo sempre sforzi e deformazioni costanti nel provino, questa si scrive

$$\int_{V_0} S \, dE \, dV_0 = S(\ell/\ell_0) V_0 \, d\ell = S(\ell/\ell_0) A_0 \, d\ell = F \, d\ell \quad (1.22)$$

da cui si ottiene S nella forma

$$S = \frac{F}{A_0} \frac{\ell_0}{\ell} \quad (1.23)$$

La (1.21a) particolarizza al caso uniaxiale la misura di deformazione associata in letteratura ai nomi di Green-Lagrange, che trova largo impiego nell'analisi di problemi strutturali caratterizzati da grandi deformazioni. La corrispondente misura di sforzo, associata ai nomi di Piola-Kirchhoff, risulta definita in modo assolutamente astratto dalla condizione (1.22). Anche nel semplice caso di comportamento uniaxiale, il suo significato meccanico non è evidente. Peraltro, il modo con cui è stata costruita ne garantisce la consistenza con le deformazioni corrispondenti.

Sono quindi possibili diverse definizioni alternative per sforzi e deformazioni, tutte in sé legittime se tra loro associate attraverso l'identità delle potenze virtuali. Si noti che tale condizione, espressa nei tre casi considerati dalle (1.19), (1.20) e (1.22), ha comunque lo stesso secondo membro, per cui può anche scriversi

$$\int_V \sigma_v \, d\varepsilon_v \, dV = \int_{V_0} \sigma \, dE \, dV_0 = \int_{V_0} S \, dE \, dV_0 \quad (1.24)$$

La (1.24) può essere utilizzata per definire ulteriori misure, riferite sia alla configurazione iniziale che a quella corrente. Nel primo caso, l'integrazione si effettua su V_0 , nel secondo su V .

Operando sulle tre diverse misure di deformazione diretta (1.15a), (1.18b), (1.21a) qui considerate, si constata con semplici calcoli che tra di esse sussistono le mutue relazioni

$$\varepsilon = \exp(\varepsilon_v) - 1 = \sqrt{1 + 2E} - 1 \quad (1.25a)$$

$$\varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon) = \ln(\sqrt{1 + 2E}) \quad (1.25b)$$

$$E = \frac{1}{2} [(\exp(\varepsilon_v))^2 - 1] = \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (1.25c)$$

In modo analogo si ottiene per gli sforzi

$$\sigma = \sigma_v(A/A_0) = S(\ell/\ell_0) \quad (1.26a)$$

$$\sigma_v = \sigma(A_0/A) = S(A_0/A)(\ell/\ell_0) \quad (1.26b)$$

$$S = \sigma_v(A/A_0)(\ell_0/\ell) = \sigma(\ell_0/\ell) \quad (1.26c)$$

A rigore, la curva $\sigma_v - \varepsilon_v$ va considerata quella effettivamente rappresentativa del comportamento uniaxiale del materiale. Il ricorso a definizioni alternative richiede una sua trasformazione; l'operazione può essere eseguita formalmente sulla base delle relazioni (1.25), (1.26) che sussistono tra le diverse definizioni. A illustrare la procedura valga l'esempio che segue.

ESEMPIO 1.1 Si consideri un materiale caratterizzato dalla curva uniaxiale

$$\sigma_v = \frac{\varepsilon_v}{|\varepsilon_v|} K |\varepsilon_v|^n \quad K = 500 \text{ MPa} \quad n = 0.25 \quad (b)$$

il cui andamento è diagrammato nella curva ① di Figura 1.15. Il materiale sia incompressibile, si deformi cioè a volume costante. Una barra costituita da un tale materiale avrà quindi, a ogni istante del processo deformativo $V = V_0$. Per sforzi e deformazioni uniformi, dalle (1.24) si ottiene allora

$$\sigma_v \, d\varepsilon_v = \sigma \, dE = S \, dE$$

da cui, ricordando anche le (1.25b), si ricava

$$\sigma = \sigma_v \frac{d\varepsilon_v}{dE} = \frac{\sigma_v}{1 + \varepsilon} \quad S = \sigma_v \frac{d\varepsilon_v}{dE} = \frac{\sigma_v}{1 + 2E} \quad (c)$$

Le (1.25) stabiliscono anche, in particolare

$$\varepsilon = \exp(\varepsilon_v) - 1 \quad E = \frac{1}{2} [(\exp(\varepsilon_v))^2 - 1] \quad (d)$$

Per ogni valore della deformazione logaritmica le (b) forniscono il corrispondente sforzo vero. Le misure di deformazione alternative si ottengono dalle (d) e, sulla base di queste informazioni, mediante le (c) si calcolano i valori delle misure di sforzo associate a ognuna di esse. I valori numerici sono riportati in Tabella 1.1 per un intervallo molto ampio di deformazione e gli andamenti delle curve $\sigma - \varepsilon$ e $S - E$ sono illustrati in Figura 1.15 (curve ② e ③). In figura sono anche tra loro collegati alcuni punti che identificano la stessa situazione fisica (che corrispondono cioè alla stessa riga in Tabella 1.1).

Si può osservare che il comportamento a trazione e compressione, che le (b) prevedono simmetrico, perde questa caratteristica se espresso in termini di misure riferite alla configurazione iniziale. Rispetto alla ① sia la curva ② che la ③ sono più rigide a compressione e meno a trazione, evidenziando così gli effetti sulla risposta della variazione nelle dimensioni della sezione trasversale. In particolare, essendo le misure nominali di sforzo e deformazione semplicemente la forza e l'allungamento rapportati a quantità costanti, la curva $\sigma - \varepsilon$ rappresenta il comportamento ideale di una barra omogenea; appare che a trazione la forza è delimitata superiormente dal valore corrispondente all'ordinata del punto indicato con C in Figura 1.15, dove la curva ② assume tangente orizzontale. Raggiunto tale punto, l'incremento di sforzo vero non è più in grado di compensare la contrazione trasversale della sezione e la barra collappa (il tratto discendente può essere effettivamente percorso solo in una prova ad allungamento imposto). Svolgendo i calcoli, si potrebbe constatare che la condizione $d\sigma/d\varepsilon = 0$ comporta

$$\sigma_c = 275.3 \text{ MPa} \quad \varepsilon_c = .284 \quad (e)$$

valori cui corrispondono le misure alternative

$$\sigma_{vc} = 353.6 \text{ MPa} \quad \varepsilon_{vc} = .250 \quad S_c = 214.4 \text{ MPa} \quad E_c = .324$$

Il carico di collasso è dato dal prodotto di σ_c per l'area iniziale della sezione.

Rispetto alla curva ① del materiale, il diagramma $S - E$ evidenzia differenze ancora più marcate. In particolare, a trazione esso presenta un massimo per una situazione precedente il collasso. La condizione $dS/dE = 0$ identifica infatti la coppia di valori

$$S = 231.5 \text{ MPa} \quad E = .142 < E_c$$

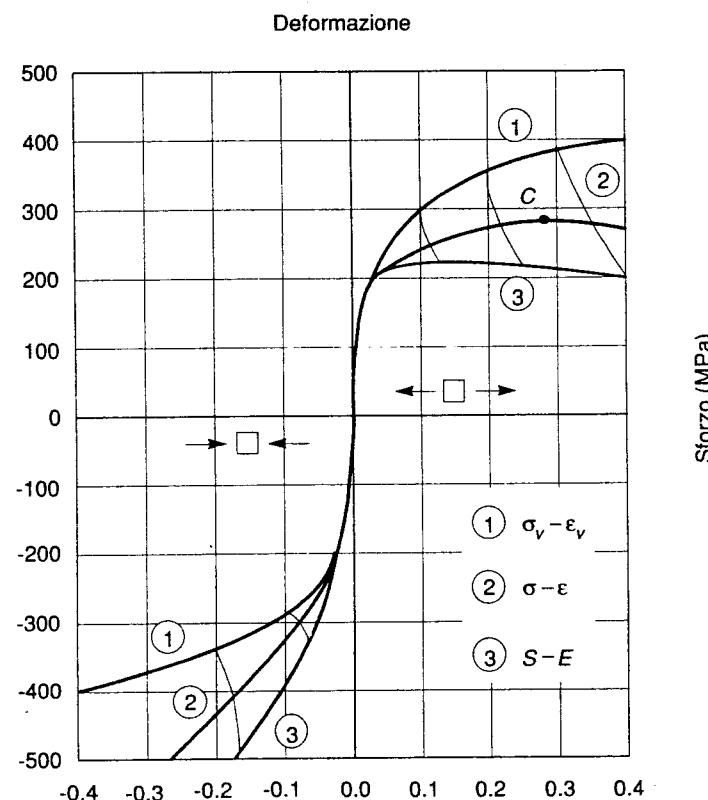


Figura 1.15

Tabella 1.1

ϵ	ϵ	E	σ	s	S
-0.4	-0.330	-0.275	-397.6	-593.2	-885.0
-0.35	-0.295	-0.252	-384.6	-545.7	-774.5
-0.3	-0.259	-0.226	-370.0	-499.5	-674.3
-0.25	-0.221	-0.197	-353.6	-454.0	-582.9
-0.2	-0.181	-0.165	-334.4	-408.4	-498.8
-0.15	-0.139	-0.130	-311.2	-361.5	-420.0
-0.1	-0.095	-0.091	-281.2	-310.7	-343.4
-0.05	-0.049	-0.048	-236.4	-248.6	-261.3
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.05	0.051	0.053	236.4	224.9	213.9
0.1	0.105	0.111	281.2	254.4	230.2
0.15	0.162	0.175	311.2	267.8	230.5
0.2	0.221	0.246	334.4	273.8	224.1
0.25	0.284	0.324	353.6	275.3	214.4
0.3	0.350	0.411	370.0	274.1	203.1
0.35	0.419	0.507	384.6	271.0	191.0
0.4	0.492	0.613	397.6	266.6	178.7

cui non è associabile alcun particolare significato. Questa circostanza riflette la natura puramente formale della definizione di S , di cui si possono dare solo interpretazioni alquanto artificiose e di fatto prive di interesse. Cionondimeno, le (1.21), (1.23) si rivelano spesso utili a fini applicativi.

Le differenze tra le diverse definizioni sono rilevanti solo per deformazioni grandi in valore assoluto. Sviluppando le (1.25a) in serie di McLaurin si ottiene infatti

$$\epsilon_v = \ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} + \dots \quad (|\epsilon| < 1) \quad (1.27a)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2E} - 1 = E - \frac{E^2}{2} + \frac{E^3}{2} - \frac{5E^4}{8} + \dots \quad (|E| < .5) \quad (1.27b)$$

Per deformazioni sufficientemente piccole da permettere di troncare gli sviluppi ai termini lineari le misure di deformazione quindi coincidono. In tal caso si può anche assumere $V = V_0$ e dalle (1.24) conseguono che pure le misure di sforzo si identificano. Si può allora porre

$$\epsilon_v \approx \epsilon \approx E \quad \sigma_v \approx \sigma \approx S \quad (1.28)$$

Nella pratica ingegneristica, questa circostanza è spesso verificata. Gli usuali materiali da costruzione in condizioni di esercizio subiscono deformazioni dell'ordine dell'uno-due per mille (.001-.002); anche materiali duttili, in quanto tali in grado di deformarsi notevolmente, nelle situazioni di collasso incipiente di una struttura presentano in genere deformazioni limitate a un qualche per cento. Per questi ordini di grandezza, i termini più che lineari nelle (1.27) possono essere trascurati e non occorre più distinguere tra le diverse definizioni di sforzo e deformazione.

Esistono ovviamente casi in cui l'approssimazione (1.28) non è giustificata. Materiali molto deformabili, quali le gomme o certi tessuti biologici, non possono essere studiati in questo ambito. Anche strutture snelle, ad esempio gusci di piccolo spessore, pur se costituite da materiali rigidi possono presentare deformazioni intrinsecamente piccole associate a spostamenti e rotazioni notevoli. In tutti questi casi, l'analisi non può prescindere da una precisa definizione delle misure di sforzo e deformazione utilizzate e dalle conseguenze che queste implicano.

Nel seguito di questo capitolo, ci si limiterà a considerare il caso di deformazioni abbastanza piccole da legittimare le (1.28). Sforzi normali e deformazioni dirette verranno rappresentati attraverso le loro definizioni nominali σ ed ϵ .

1.2.2 SCORRIMENTI ANGOLARI E SFORZI TANGENZIALI

Si consideri ora un altro esperimento ideale, condotto su di un cilindro circolare cavo rigidamente fissato a un estremo e sottoposto a un momento torcente all'altro. La sua sezione retta abbia raggio medio R e spessore b comparativamente piccolo (Figura 1.16).

Per ogni valore della coppia applicata, è possibile misurare lo spostamento dei punti sulla superficie esterna (che la piccolezza dello spessore consente di identificare con la superficie media) e da questi di risalire al regime deformativo. Se il cilindro è costituito da un materiale isotropo, si osserva che le sezioni rette ruotano mantenendosi piane e che, almeno per piccole rotazioni, le fibre longitudinali si conservano rettilinee e non variano di lunghezza. Il regime deformativo è quindi governato dalla rotazione $\vartheta(z)$

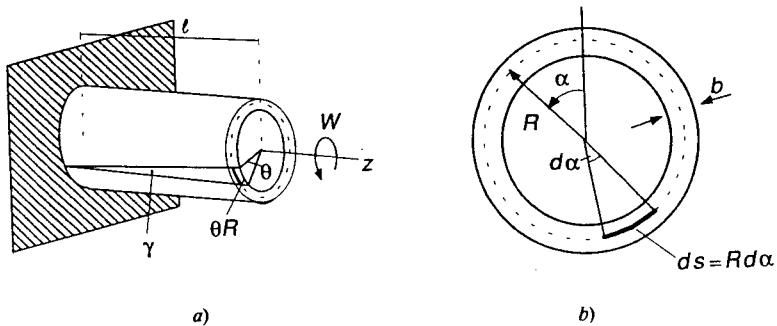


Figura 1.16

della generica sezione di ascissa z , funzione lineare della distanza dall'incastro. Questa può essere espressa in funzione della rotazione $\Theta = \vartheta(l)$ dell'estremo libero (Figura 1.16a) scrivendo

$$\vartheta(z) = \Theta \frac{z}{l} \quad (f)$$

Nelle condizioni ideali in cui si suppone di operare, il regime deformativo è quindi definito dalla sola Θ . Tale valore, peraltro, dipende ancora dalle dimensioni del cilindro. È infatti evidente come, a parità di altre condizioni, la rotazione della sezione estrema aumenti con la lunghezza e sarebbe possibile constatare che diminuisce con R . Una grandezza più significativa è rappresentata dall'angolo γ che la generica fibra longitudinale viene ad assumere rispetto alla sua posizione originaria, parallela all'asse z . Semplici considerazioni geometriche (Figura 1.16a) mostrano che questo angolo vale

$$\gamma = \Theta \frac{R}{l} \quad (1.29a)$$

e risulta ovunque costante nel provino. Tale parametro deformativo è noto come *scorrimento angolare* e misura la variazione dell'angolo tra due fibre originariamente ortogonali. Si consideri infatti un elemento infinitesimo sulla superficie media del cilindro, ritagliato tra due generatrici a distanza $ds = R d\alpha$ e due sezioni rette a distanza dz (Figura 1.17a). I lati dell'elemento mantengono inalterata la loro lunghezza ma l'angolo che essi formano, originariamente retto, varia appunto di γ .

Ci si domanda ora quale misura di sforzo corrisponda allo scorrimento angolare. Intuitivamente, due sezioni rette si scambieranno sollecitazioni radenti nel loro piano. Stante la simmetria polare del cilindro rispetto all'asse z , queste risulteranno indipendenti dall'anomalia α e, per la piccolezza dello spessore, saranno dirette secondo la tangente alla linea media della sezione. Si configura così un *flusso* q di forze per unità di lunghezza della linea media ovunque costante (Figura 1.18a). Il suo valore è fissato da una condizione di equivalenza statica con il momento torcente applicato, che l'equilibrio richiede costante in ogni sezione. Si può quindi scrivere (Figura 1.18b)

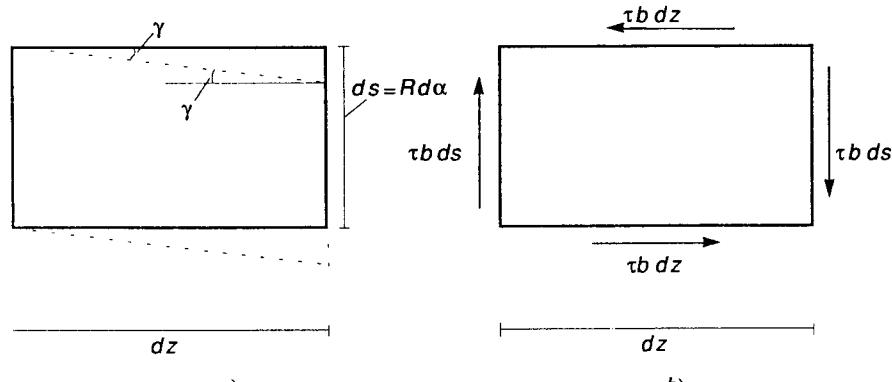


Figura 1.17

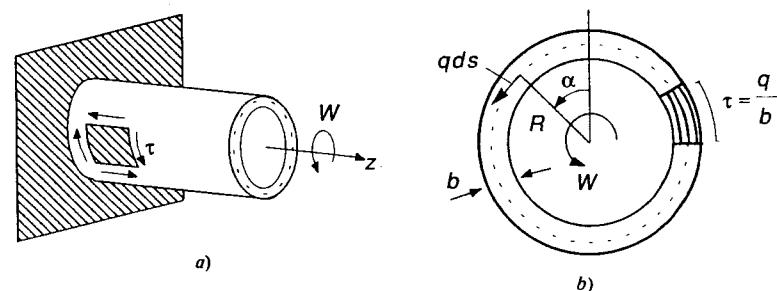


Figura 1.18

$$W = \int_0^{2\pi R} q R ds = \int_0^{2\pi} q R^2 d\alpha = 2\pi R^2 q \quad (g)$$

Il flusso q è peraltro una risultante degli sforzi locali sullo spessore, che possono variare lungo di esso senza contraddirre la simmetria; se lo spessore è sottile tali variazioni saranno però modeste e appare legittimo assumere che lo sforzo sia ovunque costante, come illustrato in Figura 1.18b, dove è indicato con τ . Dalla (g) si ottiene allora

$$\tau = \frac{q}{b} = \frac{W}{2\pi R^2 b} \quad (1.29b)$$

Tale componente, detta *sforzo (o tensione) tangenziale*, identifica la sollecitazione associata allo scorrimento angolare. Come la componente normale, essa ha le dimensioni di una forza per unità di superficie.

La tensione tangenziale non è però presente solo sulle sezioni rette del cilindro. L'equilibrio dell'elemento infinitesimo di Figura 1.17 nei confronti della rotazione nel

piano in cui è rappresentato richiede infatti che anche due fibre longitudinali contigue si scambino sforzi tangenziali, il cui valore è sempre dato dalla (1.29b). Dalla Figura 1.17b si evince infatti che la coppia formata dalle risultanti sui lati verticali dell'elemento per il loro braccio dz eguaglia quella delle risultanti sui lati orizzontali per il loro braccio ds . Il cilindro è quindi sollecitato da tensioni tangenziali ovunque costanti, mutuamente scambiate tra fibre adiacenti dirette secondo le generatrici o a esse ortogonali, che graficamente si rappresentano come indicato sull'elemento tratteggiato in Figura 1.18a.

Le (1.29) consentono di risalire dalle coppie di valori W e Θ sperimentalmente misurati al legame tra tensioni tangenziali e scorrimenti angolari per il materiale. Per piccole deformazioni, esso si presenta in genere qualitativamente simile alla curva $\sigma - \epsilon$, anche se i valori caratteristici sono numericamente diversi. Il confronto tra le due curve è illustrato in Figura 1.19 per un acciaio che presenta un comportamento pressoché bilineare.

Se nelle (1.29) le dimensioni del provino si intendono riferite alla sua geometria iniziale, le misure di sforzo e deformazione sono ancora dette nominali. In realtà, rotazioni anche notevoli producono cambiamenti del tutto marginali nei valori del raggio e dello spessore, per cui nello scrivere la (1.29b) non è in genere necessario distinguere tra tensioni tangenziali nominali e "vere". Per quanto riguarda lo scorrimento angolare, si noti che il secondo membro della (1.29a) a rigore definisce la tangente dell'angolo γ anziché l'angolo stesso. Per piccoli valori dello scorrimento angolare le due misure di fatto coincidono, ma quando questo cresce oltre un certo limite, la scelta di $\tan \gamma$ come parametro deformativo appare più adatta, quanto meno perché incorpora il vincolo fisico $\gamma < 90^\circ$.

1.2.3 CAMBIAMENTO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Gli esperimenti ideali sopra descritti si riferiscono a due situazioni caratterizzate da regimi deformativi tra loro diversi. Mentre nella prova di trazione le fibre sia longitudinali che trasversali cambiano di lunghezza mantenendosi tra loro ortogonali, nell'esperimento di torsione esse non variano le loro dimensioni lineari subendo però scorrimenti angolari. Questa conclusione tuttavia vale solo per le particolari direzioni secondo le quali la deformazione è stata misurata. È spontaneo chiedersi come si deformino nei due casi fibre orientate in modo diverso; in altre parole, come le componenti di deformazione varino col sistema di riferimento.

Il regime deformativo dell'intorno di un punto nella barra sottoposta a trazione può essere evidenziato isolando intorno al punto un cubo infinitesimo con spigoli pari a ds e due facce opposte ortogonali a una fibra longitudinale. A deformazione avvenuta, il cubo si è trasformato in un parallelepipedo, i cui spigoli paralleli all'asse presentano lunghezza $ds(1 + \epsilon)$ e i rimanenti si sono contratti al valore $ds(1 + \epsilon_t) = ds(1 - \nu\epsilon)$, con ν definito dalla (a). In Figura 1.20a è illustrato in un piano il quadrato indeformato di lati ds (tratteggiato) e il rettangolo con lati di lunghezza modificata. L'asse z identifica una direzione parallela all'asse della barra.

Si immagini ora di ritagliare attorno allo stesso punto un elemento di materiale con spigoli ruotati di 45° nel piano del disegno (Figura 1.20b). Le fibre longitudinali e trasversali della barra saranno ovviamente sempre allungate o contratte della stessa quantità. Esse però ora corrispondono alle diagonali del quadrato tratteggiato in figura; per effetto della deformazione questo si trasforma in un rombo e i suoi lati, originariamente ortogonali, subiscono uno scorrimento angolare.

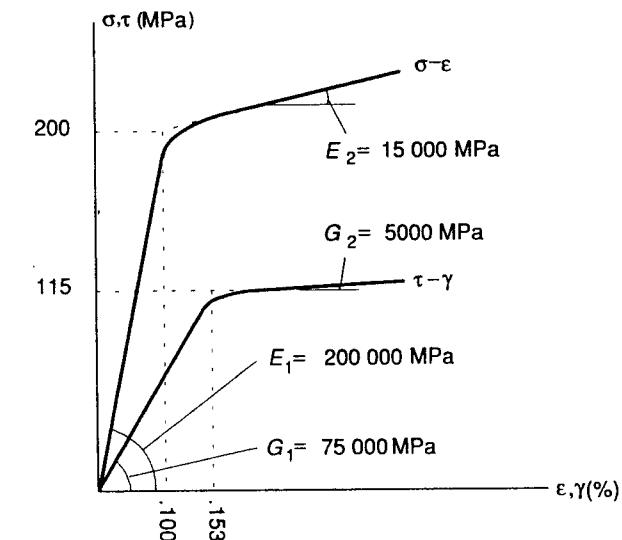


Figura 1.19

È facile calcolare il valore di tale scorrimento in funzione delle deformazioni $\epsilon_z = \epsilon$ ed $\epsilon_y = -\nu\epsilon$ delle fibre in direzione z e y . Semplici considerazioni geometriche mostrano infatti che la tangente dell'angolo α in Figura 1.20b è espressa dalla relazione

$$\tan \alpha = \frac{1 + \epsilon}{1 - \nu\epsilon} = (1 + \epsilon)(1 + \nu\epsilon) \approx 1 + (1 + \nu)\epsilon \quad (h1)$$

(l'espressione è stata troncata ai termini lineari in ϵ ed è quindi valida per piccole deformazioni). D'altra parte è anche $\alpha = \pi/4 + \gamma/2$, per cui si può scrivere

$$\tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan(\gamma/2)}{1 - \tan(\pi/4)\tan(\gamma/2)} = \frac{1 + \tan(\gamma/2)}{1 - \tan(\gamma/2)}$$

Per piccoli γ tale espressione si linearizza come segue

$$\tan \alpha \approx \frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2} = (1 + \gamma/2)^2 \approx 1 + \gamma \quad (h2)$$

Eguagliando tra loro le (h) si ottiene quindi

$$\underline{\gamma}_{\text{tr}} = (1 + \nu)\epsilon \quad (1.30a)$$

dove gli indici sottolineati che la (1.30a) rappresenta lo scorrimento angolare tra le

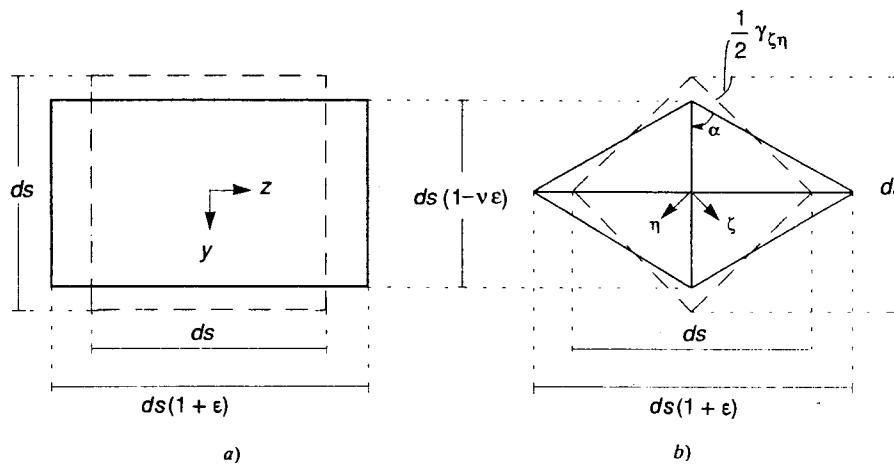


Figura 1.20

fibre originariamente orientate secondo gli assi ζ ed η , inclinati di 45° rispetto a z e y . Queste fibre variano anche di lunghezza; considerazioni geometriche del tutto analoghe mostrerebbero infatti che risulta

$$\epsilon_\zeta = \epsilon_\eta = \frac{1+\nu}{2} \epsilon \quad (1.30b)$$

Si esamina ora il regime deformativo relativo alla prova di torsione sul cilindro in parete sottile. In Figura 1.21 è illustrato (a tratteggio) un quadrato infinitesimo di lato ds ritagliato sulla superficie media e (a tratto pieno) il rombo in cui esso si trasforma per effetto dello scorrimento angolare γ . L'asse z coincide con una generatrice del cilindro. Dal momento che le fibre originariamente orientate secondo z e y non variano di lunghezza, i lati del rombo sono sempre pari a ds .

È evidente dalla figura che fibre orientate a 45° subiranno invece deformazioni dirette e non scorrimenti angolari. Le variazioni di lunghezza si calcolano dalle relazioni trigonometriche

$$\frac{\sqrt{2}}{2} ds(1 + \epsilon_\zeta) = ds \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} ds(1 + \epsilon_\eta) = ds \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

Per piccoli γ si può scrivere

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos(\pi/4) \cos(\gamma/2) + \sin(\pi/4) \sin(\gamma/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \gamma/2)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin(\pi/4) \cos(\gamma/2) - \cos(\pi/4) \sin(\gamma/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \gamma/2)$$

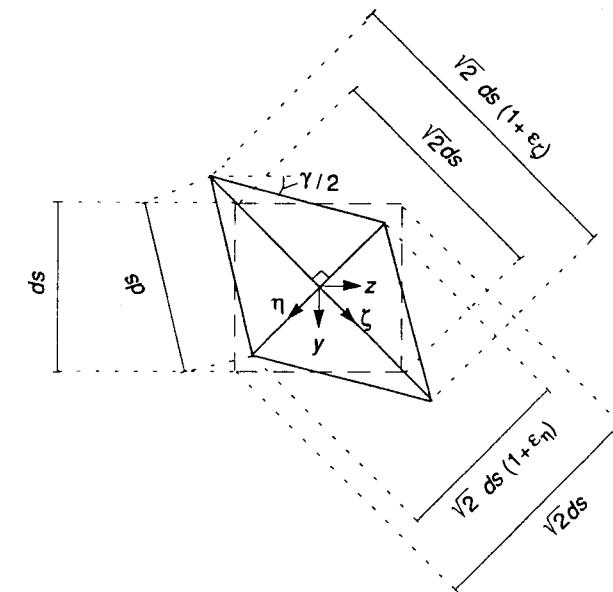


Figura 1.21

Si ottiene quindi

$$\epsilon_\zeta = \gamma/2 \quad \epsilon_\eta = -\gamma/2 \quad (1.31)$$

Come le componenti di deformazione, anche le componenti di sforzo dipendono dal riferimento. Nella prova uniaxiale, su di ogni sezione retta della barra agisce una forza σ per unità di superficie. Ne consegue che un elemento infinitesimo di tale sezione (un quadrato di lato ds) è sottoposto a una forza σds^2 . Si immagini ora di isolare un volume infinitesimo di materiale delimitato nel verso delle z crescenti da una faccia ortogonale a tale asse (appartenente quindi ad una sezione retta) e nel verso opposto da una ortogonale a un asse ζ inclinato di 45° rispetto alle z negative (Figura 1.22). Per equilibrio, anche su questa faccia dovrà essere presente la stessa forza σds^2 , ora diretta nel verso negativo di z , che può decomporsi in una componente normale alla faccia stessa e in una componente radente (tangenziale) diretta secondo η . È facile constatare che queste componenti risultano uguali tra loro e valgono $(\sqrt{2}/2)\sigma ds^2$. Indicando con σ_ζ e $\tau_{\zeta\eta}$ i loro valori per unità di superficie e ricordando che questa ora vale $\sqrt{2} ds^2$, si ottiene quindi

$$\sigma_\zeta = \sigma/2 \quad \tau_{\zeta\eta} = \sigma/2 \quad (1.32a)$$

Procedendo in modo assolutamente identico, si verifica anche che le componenti di sforzo su di una faccia di normale η , indicate con σ_η e $\tau_{\eta\zeta}$, valgono ancora

$$\sigma_\eta = \sigma/2 \quad \tau_{\eta\zeta} = \sigma/2 \quad (1.32b)$$

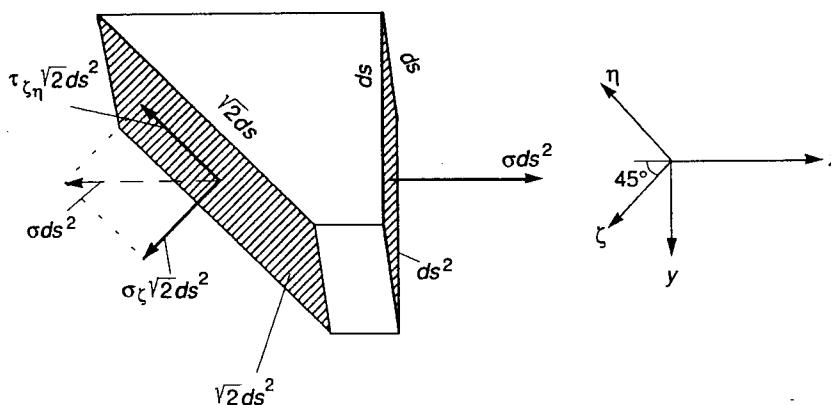


Figura 1.22

In Figura 1.23 è illustrata l'equivalente operazione relativa alla prova di torsione; su facce inclinate di 45° rispetto a z si hanno adesso tensioni tangenziali nulle, mentre le componenti normali risultano

$$\sigma_\zeta = \tau \quad \sigma_\zeta = -\tau \quad (1.33)$$

Le (1.32), (1.33) sanciscono l'equivalenza tra le rappresentazioni in Figura 1.24. L'equivallenza tra le tensioni tangenziali su due facce tra loro ortogonali non è casuale. Essa consegue dall'equilibrio alla rotazione dell'elemento nel piano in cui è rappresentato; non è quindi necessario introdurre per le τ due simboli tra loro diversi solo per l'inversione degli indici.

Si è così stabilita una relazione tra i valori degli sforzi e delle deformazioni nel riferimento (z, y, x) , con z parallelo all'asse del provino e y appartenente a una sua sezione retta, e quelli nel riferimento (ζ, η, x) , ruotato di 45° rispetto al precedente nel piano (z, y) (l'asse x , ortogonale al piano del disegno, negli esempi si mantiene immutato). I risultati si riassumono come segue

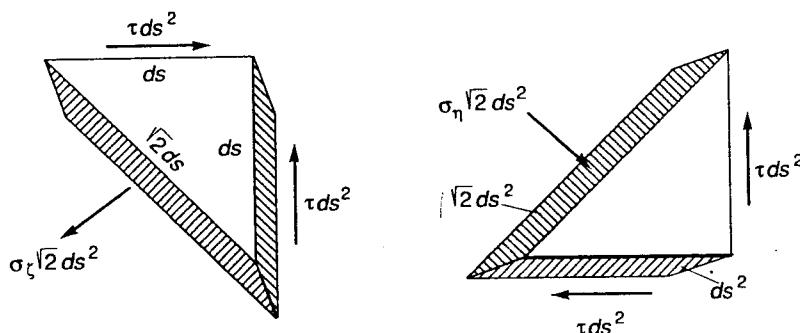


Figura 1.23

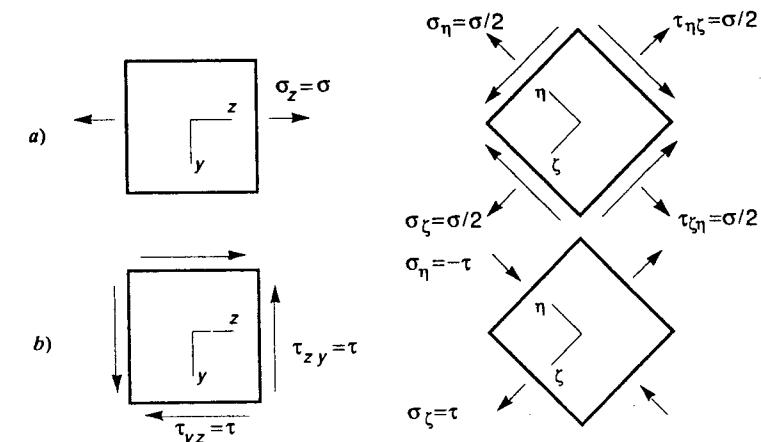


Figura 1.24

Prova uniassiale

$$\sigma_z = \sigma, \quad \sigma_y = \tau_{zy} = 0 \quad \epsilon_z = \epsilon, \quad \epsilon_y = -\nu\epsilon, \quad \gamma_{zy} = 0 \quad (1.34a)$$

$$\sigma_\zeta = \sigma_\eta = \tau_{\zeta\eta} = \frac{\sigma}{2} \quad \epsilon_\zeta = \epsilon_\eta = \frac{1+\nu}{2}\epsilon, \quad \gamma_{\zeta\eta} = (1+\nu)\epsilon$$

Prova di torsione

$$\sigma_z = \sigma_y = 0, \quad \tau_{zy} = \tau \quad \epsilon_z = \epsilon_y = 0, \quad \gamma_{zy} = \gamma \quad (1.34b)$$

$$\sigma_\zeta = \tau, \quad \sigma_\eta = -\tau, \quad \tau_{\zeta\eta} = 0 \quad \epsilon_\zeta = \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon_\eta = -\frac{\gamma}{2}, \quad \gamma_{\zeta\eta} = 0$$

Nelle (1.34) sono state indicate solo le componenti nel piano del disegno. In linea di principio, sforzi e deformazioni hanno componenti anche in direzione x , che negli esempi considerati risultano peraltro nulle.

Per semplicità, si è solo considerata una rotazione di 45° del riferimento nel piano (z, y) . Ovviamente, questo è solo un caso particolare. È certamente possibile concepire rotazioni di qualunque entità, non necessariamente contenute nel piano. In ogni riferimento, le componenti di sforzo e di deformazione assumono valori diversi, ma i regimi tensionale e deformativo permangono chiaramente gli stessi. Questi rappresentano infatti delle grandezze fisiche, cui ci si riferisce, rispettivamente, come allo *stato di sforzo* e allo *stato di deformazione*. Le loro componenti scalari variano col riferimento, seguendo però una particolare legge di trasformazione che garantisce l'invarianza delle grandezze che rappresentano. Questa legge risulterà essere quella relativa a un ente matematico noto come tensore doppio, che nel caso in questione gode anche di proprietà di simmetria.

1.3 PROBLEMI STATICAMENTE DETERMINATI

1.3.1 SOLUZIONI IN TERMINI DI SOLO EQUILIBRIO

La formulazione del problema strutturale richiede che vengano considerati i tre diversi aspetti statico (dell'equilibrio), geometrico (della congruenza) e quello relativo al comportamento del materiale, che instaura un collegamento meccanico tra i due precedenti. Solo attingendo a tutti questi ambiti si possono derivare le relazioni che consentono di ottenere la soluzione completa, vale a dire le definizione dei regimi tensionale e deformativo in ogni punto della struttura.

A volte però lo stato di sforzo costituisce l'informazione di primario interesse. È spontaneo allora domandarsi se essa non possa essere ottenuta in termini puramente statici, se cioè lo sforzo in ogni punto della struttura non sia determinato dalle sole condizioni di equilibrio con i carichi applicati. In generale la risposta è negativa: la semplice struttura esaminata nel Paragrafo 1.1.2 è in effetti un controesempio, in quanto le equazioni di equilibrio (1.2) non si sono dimostrate da sole in grado di fissare univocamente i valori delle trazioni nei tre fili. Esistono peraltro problemi particolari in cui gli sforzi, o quantomeno alcune loro significative misure globali, sono dettati dal solo equilibrio. Tali problemi sono detti *staticamente determinati* o *isostatici*.

Anche in un problema staticamente determinato non sarebbe a rigore possibile ignorare il regime deformativo. L'equilibrio si instaura infatti a deformazione avvenuta e dovrebbe essere quindi imposto con riferimento alla configurazione finale, definita dai valori assunti dagli spostamenti in soluzione. Non sono però rare situazioni, anche di rilevante interesse ingegneristico, caratterizzate da spostamenti così piccoli da potersi ritenere ininfluenti sull'equilibrio. Questo può allora essere imposto sulla configurazione indeformata, assimilando la struttura a un corpo rigido e riconducendo le condizioni di equilibrio alle equazioni cardinali della statica.

I due casi trattati nel paragrafo precedente sono esempi di problemi isostatici. Sia nella prova uniaxiale che in quella di torsione sul cilindro cavo in parete sottile lo sforzo è stato infatti valutato semplicemente imponendo l'equilibrio con i carichi esterni. Le sue misure nominali, che costituiscono un'accettabile approssimazione dello sforzo vero se le deformazioni sono piccole, sono state definite sulla configurazione iniziale e non sono quindi influenzate dal regime deformativo. Anche in questi problemi, peraltro, l'equilibrio non è in grado di definire univocamente il valore degli sforzi locali, ma determina solo alcune misure globali del regime tensionale. Se infatti si immagina di separare idealmente il provino in trazione in due parti, perché queste si mantengano individualmente in equilibrio occorre postulare che esse si scambino, attraverso la superficie di separazione, delle tensioni la cui risultante è una forza $N = F$ in direzione dell'asse del provino (Figura 1.25a). Se la separazione avviene secondo una sezione retta, è spontaneo pensare che a tale risultante corrisponda una distribuzione di tensioni normali uniformi sulla sezione. Benché ragionevole, questa è però solo un'ipotesi; qualunque distribuzione di sforzi (non necessariamente solo normali) che dia luogo come risultante alla sola $N = F$ è in realtà compatibile con l'equilibrio, che non è in grado di indicare un andamento privilegiato. Analoghe considerazioni valgono per il cilindro cavo. L'equilibrio richiede che due sezioni rette si scambino momenti torcenti $M_t = W$ (Figura 1.25b), ma non detta una particolare distribuzione di tensioni tangenziali sulla sezione. Solo la simmetria polare del problema e la piccolezza dello spessore consentono di ipotizzare una distribuzione uniforme.

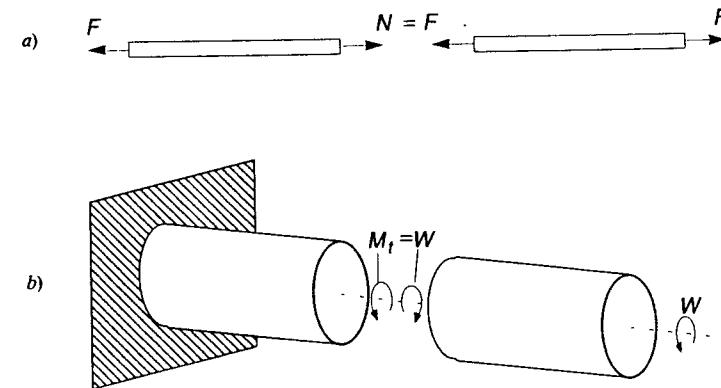


Figura 1.25

Di fatto, nessun problema è isostatico in termini di sforzi locali. L'equilibrio può però fissare univocamente il valore di determinate risultanti e questa informazione risulta spesso di notevole interesse diretto; a volte è anche possibile, con l'ausilio di ragionevoli ipotesi, ricostruire su questa base un plausibile andamento del regime tensionale locale. La situazione più semplice è rappresentata da quelle strutture le cui tensioni possono ragionevolmente supporsi ovunque uniformi (*stati di sforzo omogenei*). Essa comprende i due casi precedenti e un ulteriore esempio viene ora presentato.

1.3.2 CONTENITORE IN PRESSIONE

Si consideri (Figura 1.26) un recipiente soggetto a una pressione interna p . Esso presenta una porzione centrale cilндrica di raggio medio R e uno spessore di parete b costante. Intuitivamente, in tale porzione sia le fibre longitudinali che quelle circonferenziali risulteranno tese; se lo spessore è sottile ($b/R \ll 1$), si possono ritenere presenti solo le due componenti di sforzo normale indicate in figura, che è lecito assumere uniformi sullo spessore. Le loro risultanti sullo spessore stesso sono legate alla pressione da sole condizioni di equilibrio.

Si considerino dapprima le tensioni circonferenziali (Figura 1.27a); se si isola una semicirconferenza, è immediato constatare che l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale (normale al diametro di separazione) richiede

$$2\sigma_\theta b = \int_0^\pi pR \sin\vartheta \, d\vartheta = 2pR$$

In tale relazione, il primo membro rappresenta la trazione per unità di lunghezza, risultante di sforzi circonferenziali σ_θ uniformi sullo spessore, e il secondo l'integrale delle componenti verticali della pressione pds , normale alla parete (Figura 1.27b). Si ottiene quindi

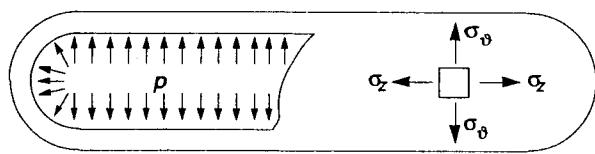


Figura 1.26

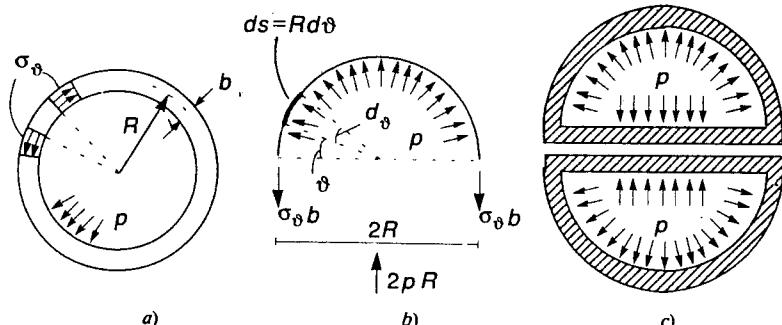


Figura 1.27

$$\sigma_\theta = p \frac{R}{b} \quad (1.35a)$$

Si osservi che la risultante delle componenti verticali della pressione è pari alla pressione stessa per il diametro del cilindro. È infatti facile constatare l'equivalenza statica tra le situazioni illustrate nelle Figure 1.27a e 1.27c.

Del tutto analogo è il calcolo delle tensioni longitudinali σ_z . Si isolì ora una porzione del contenitore separandola secondo una sezione retta (Figura 1.28a). L'equilibrio alla traslazione in direzione longitudinale adesso impone

$$\int_0^{2\pi} \sigma_z b R d\theta = \pi p R^2$$

(il secondo membro rappresenta la risultante delle componenti longitudinali della pressione interna, equivalente alla pressione stessa agente sulla superficie di separazione di raggio R , Figura 1.28b). Supponendo ancora gli sforzi costanti, si ottiene

$$\sigma_z = p \frac{R}{2b} = \frac{1}{2} |\sigma_\theta| \quad (1.35b)$$

Le (1.35) definiscono il regime tensionale nella porzione centrale, di forma cilindrica, del contenitore; esso si configura come uno stato di sforzo biassiale, le cui componenti stanno tra loro in rapporto di due a uno. La (1.35a) costituisce una delle più classiche e antiche relazioni nella meccanica delle strutture. Essa è nota come *formula di Mariotte*,

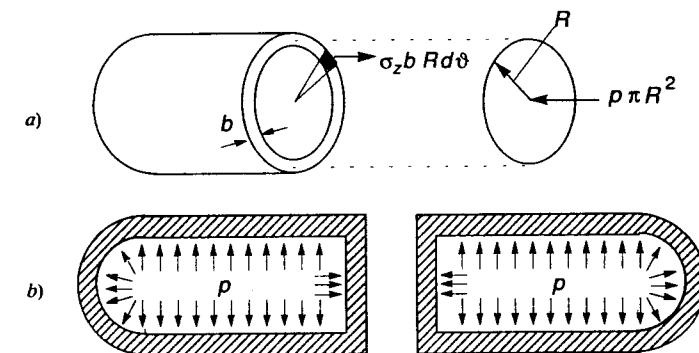


Figura 1.28

dal nome dello studioso francese che la derivò nel secolo XVII, utilizzandola per la verifica di tubi di condotta soggetti alla pressione dell'acqua al loro interno.

Lo stato di sforzo nelle due parti terminali del contenitore dipenderà ovviamente dalla loro geometria. È a volte possibile valutare con sole condizioni di equilibrio il regime tensionale anche in queste zone (ad esempio, quando esse sono costituite da semisfere, come in Figura 1.26). Va detto, peraltro, che alle soluzioni indipendentemente calcolate nella porzione cilindrica e nelle zone terminali non sono sempre associati regimi deformativi tra loro consistenti. La congruenza è allora violata, indicando che il calcolo ha fornito una soluzione puramente equilibrata, ma non la soluzione effettiva del problema.

Le (1.35) rappresentano comunque bene lo stato di sforzo nel corpo cilindrico centrale, almeno a una certa distanza dalle connessioni con le zone di estremità. Anche qui esse sono però solamente una soluzione approssimata, adeguata per rapporti R/b relativamente elevati. Solo in questo caso, infatti, le variazioni sullo spessore possono essere ignorate. Va anche considerato che, per effetto della pressione, la superficie interna del contenitore risulta compresa in direzione radiale. Sarà pertanto presente anche uno sforzo normale σ_r che comprime le fibre in direzione dello spessore, pari alla pressione p all'interno e nullo sulla superficie esterna scarica (Figura 1.29). Il suo massimo valore assoluto è comunque uguale a p e risulta quindi inferiore alle altre componenti normali, date dalle (1.35), in ragione del rapporto b/R . Se lo spessore è sottile, la σ_r può essere trascurata.

La soluzione per un contenitore in pressione di forma sferica (Figura 1.30) può essere ottenuta con procedimento analogo. Per evidenti motivi di simmetria, le componenti di sforzo normale risulteranno uguali in ogni direzione. Il calcolo fornisce il valore

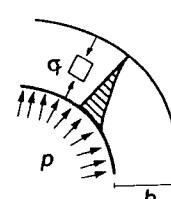


Figura 1.29

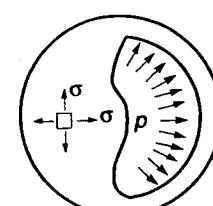


Figura 1.30

$$\sigma = p \frac{R}{2b} \quad (1.36)$$

dove, al solito, R indica il raggio medio e b lo spessore della parete.

1.3.3 LA STATICÀ DELLA TRAVE

1.3.3.1 Azioni interne

Il solido noto col nome di *trave* riveste particolare importanza nella meccanica delle strutture. Esso può pensarsi generato da un'area piana (*sezione trasversale*) che trasla mantenendosi normale alla traiettoria descritta dal suo baricentro, detta *asse geometrico*. Se le dimensioni lineari della sezione trasversale sono piccole rispetto allo sviluppo dell'asse geometrico e ai suoi raggi di curvatura, è possibile ricondurre lo studio della trave a un problema monodimensionale.

Per realizzare questo obiettivo occorre però che gli sforzi locali siano espressi in termini di risultanti o *azioni interne*. La Figura 1.31a illustra una generica sezione trasversale e una terna cartesiana ortogonale con origine nel baricentro G . L'asse z è normale alla sezione e coincide quindi con la tangente all'asse geometrico. Gli assi x e y identificano due generiche direzioni tra loro ortogonali nel piano della sezione. Risulterà spesso conveniente farli coincidere con direzioni privilegiate; quanto segue non è però condizionato da scelte particolari.

In ogni punto della sezione trasversale lo stato di sforzo presenta una componente normale σ_z e una tangenziale nel piano della sezione stessa. Questa può essere decomposta nelle sue componenti secondo x e y , indicate rispettivamente con τ_{zx} e τ_{zy} (Figura 1.31a). Si definiscono *azioni interne* le seguenti quantità

$$\text{Azione assiale} \quad N = \int_A \sigma_z dA \quad (1.37a)$$

$$\text{Azioni taglienti} \quad T_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad T_y = \int_A \tau_{zy} dA \quad (1.37b, c)$$

$$\text{Momenti flettenti} \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = - \int_A \sigma_z x dA \quad (1.37d, e)$$

$$\text{Momento torcente} \quad M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \quad (1.37f)$$

Le azioni assiale e taglienti sono quindi le risultanti delle componenti di sforzo locale rispetto ai tre assi coordinati; i momenti risultanti delle σ_z rispetto a due assi baricentrici nel piano sono detti flettenti; infine, il momento delle tensioni tangenziali rispetto all'asse z costituisce il momento torcente. Graficamente, le quantità definite dalle (1.37) si evidenziano come illustrato in Figura 1.31b.

In quanto risultanti, le azioni interne possono assumere lo stesso valore anche in presenza di regimi tensionali localmente differenti. Con riferimento a una sezione rettangolare, sono illustrate in Figura 1.32a due diverse distribuzioni di σ_z (funzioni

della sola y); è facile verificare che entrambe danno luogo alle stesse azioni interne, precisamente

$$N = 0 \quad M_x = \frac{1}{4} \bar{\sigma} b h^2 \quad M_y = 0$$

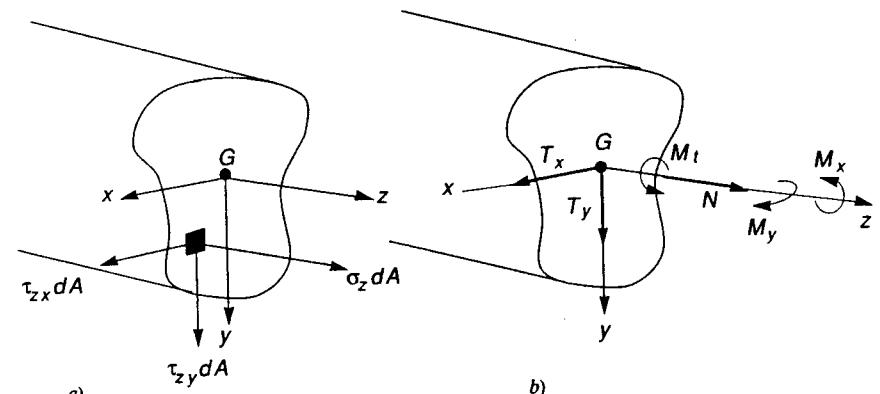


Figura 1.31

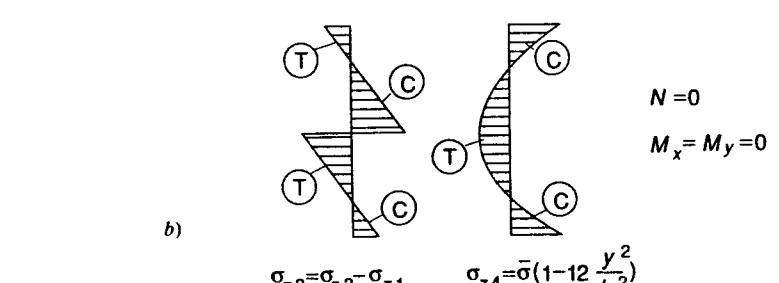
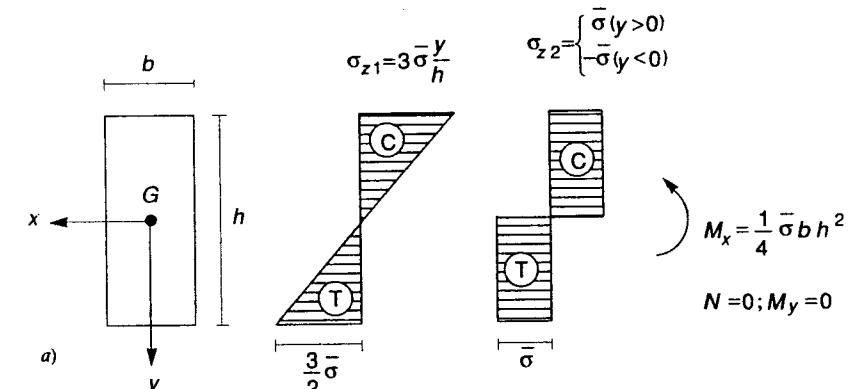


Figura 1.32

Per lo stesso motivo, valori identicamente nulli per le azioni interne non implicano necessariamente assenza di sforzo locale. Le due distribuzioni di σ_z in Figura 1.32b (sempre riferite alla sezione rettangolare) hanno infatti risultanti e momenti risultanti nulli (tali distribuzioni di sforzo sono dette *autotensioni* o *stati di coazione*). Le azioni interne rappresentano comunque significative misure globali dello stato di sollecitazione in una trave, la cui conoscenza costituisce un'informazione di notevole interesse diretto.

A volte l'asse geometrico della trave è contenuto in un piano, ad esempio ortogonale all'asse x , e la geometria della sezione e le condizioni di carico sono tali da legittimare l'ipotesi

$$T_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_t = 0 \quad (1.38a-c)$$

(ciò tipicamente avviene quando i carichi esterni sono tutti contenuti nel piano $y-z$ è asse di simmetria per la sezione). La trave allora si dice *piana* e le azioni interne si riconducono alle sole azioni assiale N , flettente $M = M_x$ e tagliente $T = T_y$ (gli indici possono essere omessi, non sussistendo possibilità di equivoco). Queste quantità sono dotate di segno. Sulla sezione la cui normale uscente coincide con il verso positivo di z , le componenti di sforzo locale sono state considerate positive se dirette come gli assi coordinati (Figura 1.33a); conseguentemente dalla (1.37a) che un'azione assiale positiva configura trazione. Per quanto riguarda il momento flettente, si osserva che se positivo tende le fibre corrispondenti a y positivi. Al di là delle convenzioni di segno, spesso dettate da motivi di convenienza operativa e quindi diverse caso per caso, è importante valutare se l'azione assiale comporti trazione o compressione e, per il momento flettente, quali fibre risultino tese e quali compresse. La risposta del materiale di cui la trave è costituita può infatti presentare differenze sensibili nei due casi.

Questo aspetto non è altrettanto cruciale per l'azione tagliente, in quanto la risposta spesso non è influenzata dal segno delle tensioni tangenziali. Comunque, T risulta positivo se diretto nel verso positivo di y ; se si immagina (Figura 1.33b) di isolare un tronco infinitesimo di trave evidenziando le azioni interne sulla faccia opposta, per equilibrio uguali e contrarie a meno di variazioni infinitesime, si evince che il taglio

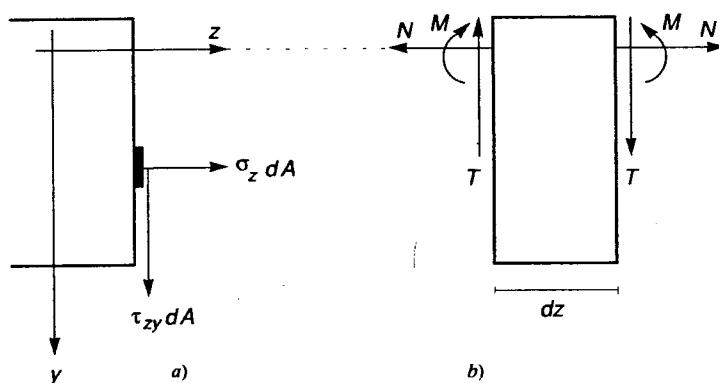


Figura 1.33

risulta positivo se suggerisce una rotazione dell'elemento in senso orario. Nel caso tridimensionale i versi positivi per le azioni interne sono quelli indicati in Figura 1.31b, sempre per una sezione la cui normale uscente coincide con il verso positivo di z .

Una trave il cui asse geometrico non presenta circuiti chiusi, priva di vincoli e soggetta a carichi esterni globalmente equilibrati è staticamente determinata in termini di azioni interne. Se infatti si immagina di separare la trave in due parti secondo una sezione retta, le azioni interne che vengono scambiate attraverso tale sezione sono univocamente determinate dalle equazioni cardinali della statica scritte con riferimento a una qualsiasi delle due parti per i carichi esterni e le azioni interne su di essa agenti. Un semplice esempio di trave piana valga a illustrare questa affermazione e il procedimento risolutivo.

ESEMPIO 1.2 Si consideri una trave con asse geometrico costituito dalla semicirconferenza in Figura 1.34a. La trave è soggetta a due forze uguali, opposte e allineate applicate ai due estremi. Si immagini di separare la trave in due tronchi a una distanza $R\vartheta$ dall'estremo superiore (punto A in figura); perché le due porzioni si mantengano individualmente in equilibrio occorre allora postulare che esse si scambino una forza verticale F e una coppia eguale e opposta a quella formata dalla stessa F per la distanza $R \sin \vartheta$ dalla retta di applicazione dei carichi. Le azioni normale e tagliente si calcolano decomponendo F secondo le direzioni tangente e normale all'asse geometrico della trave nel punto A. Si ottiene

$$N = F \sin \vartheta \quad M = FR \sin \vartheta \quad T = F \cos \vartheta \quad (a)$$

Se positive, tali quantità sono come indicate in Figura 1.34b. Dal momento che nell'intervallo $0 \leq \vartheta \leq \pi$ è sempre $\sin \vartheta \geq 0$, l'azione assiale risulta sempre di trazione e il momento flettente tende sempre le fibre esterne. Il taglio risulta invece orario per $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ e antiorario nel tratto rimanente.

Un'espressiva rappresentazione grafica della soluzione è costituita dai cosiddetti *diagrammi delle azioni interne*. Essi sono illustrati in Figura 1.34c-e e le loro ordinate, lette ortogonalmente all'asse della trave, sono proporzionali attraverso un opportuno fattore di scala ai valori assoluti di tali azioni. Il simbolo \textcircled{T} sul diagramma delle azioni assiali indica trazione (un'eventuale compressione sarebbe stata indicata con \textcircled{C}); analogamente, nel diagramma relativo alle azioni taglienti, \textcircled{A} e \textcircled{C} distinguono i tagli antiorari da quelli orari. In Italia, il diagramma del momento flettente è convenzionalmente riportato dalla parte delle fibre tese e non richiede quindi simboli che ne identifichino il segno (in altri paesi, segnatamente gli Stati Uniti d'America, è invece in uso la convenzione opposta: il diagramma dei momenti viene sistematicamente riportato dalla parte delle fibre compresse).

1.3.3.2 Vincoli e reazioni vincolari

Il caso sopra esaminato è in realtà estremamente particolare. L'insieme dei carichi che agiscono su di una trave è in genere solo parzialmente noto. Esso è infatti costituito da azioni esterne, che si suppone di conoscere, e da azioni trasmesse dai vincoli con cui la trave è collegata al contesto esterno che ne costituisce il supporto.

Una trave può presentare vincoli in uno o più punti del suo asse geometrico. Tali vincoli inoltre si possono differenziare tra loro per le azioni (*reazioni vincolari*) che sono capaci di trasmettere alla trave stessa. I simboli che verranno usati per i vincoli più comuni sono illustrati in Tabella 1.2 unitamente alle reazioni che ognuno di essi è in

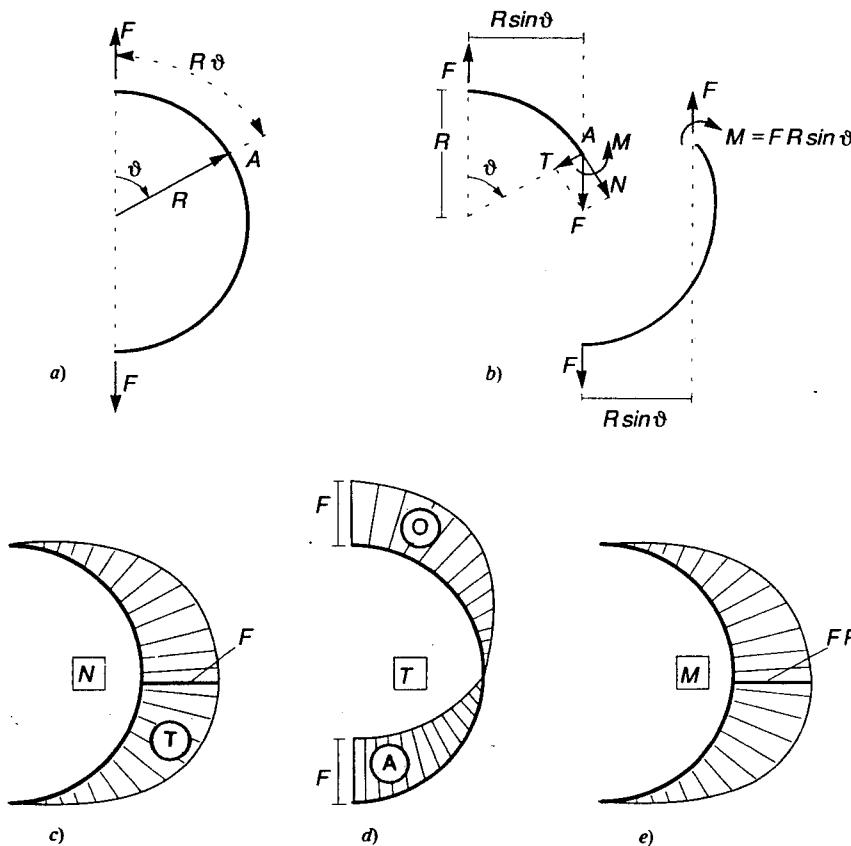
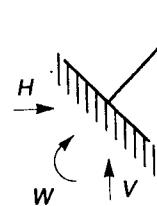
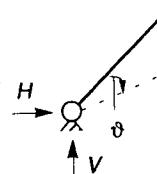
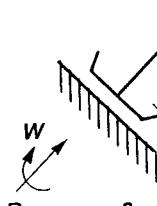
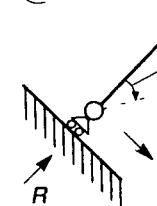
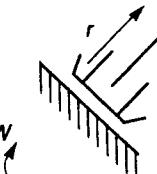


Figura 1.34

grado di fornire. Si supporrà sempre che i vincoli siano *bilateri*, che cioè la reazione possa assumere qualunque segno. Ad esempio, l'unica reazione consentita dal vincolo "carrello" (caso (d) in Tabella 1.2) è costituita da una forza passante per il punto vincolato e ortogonale al piano di scorrimento, ma può anche avere verso opposto a quello indicato.

Le reazioni vincolari devono assicurare l'equilibrio con le azioni esterne. Non è però a priori assicurato che i vincoli siano in grado di equilibrare carichi arbitrari né, se questo è il caso, che le sole equazioni cardinali della statica determinino univocamente il valore delle loro reazioni. Ci si propone ora di esaminare a scopo illustrativo alcune situazioni tipiche, per semplicità riferite a travi piane. Per non limitare l'indagine a condizioni di carico particolari, le forze esterne saranno sostituite dalla loro risultante applicata in un determinato punto del piano e dal loro momento risultante rispetto a tale punto. Con riferimento a un corpo rigido, al quale la trave è stata assimilata ai fini di questa indagine, tale operazione è del tutto legittima. I carichi esterni saranno quindi

Tabella 1.2

Vincolo	Reazioni fornite	Spostamenti concessi
a) incastro		H, V, W
b) cerniera		H, V
c) pattino		R, W
d) carrello		R
e)		W

rappresentati dalle componenti F_x, F_y della loro risultante secondo due assi coordinati e dal momento M rispetto all'origine O del sistema di riferimento; queste tre quantità hanno valori a priori arbitrari.

Si consideri dapprima la situazione in Figura 1.35a. I vincoli forniscono le tre componenti di reazione indicate con H, V_A e V_B . Le tre equazioni cardinali della statica nel piano, scritte imponendo l'equilibrio alla traslazione nelle due direzioni coordinate e quello alla rotazione intorno al punto O , conducono a un sistema di equazioni lineari che, in forma matriciale, si scrive come segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -Y & X_A & X_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

La matrice dei coefficienti ha determinante diverso da zero. È allora noto dall'algebra lineare [1] che, qualunque sia il vettore dei termini noti, la (1.39) fornisce una e una sola soluzione. In altre parole, i vincoli sono in grado di equilibrare qualunque carico applicato e le loro reazioni sono univocamente fissate dall'equilibrio. Una volta calcolato il loro valore, il problema si riconduce al caso nel paragrafo precedente, relativo a una trave priva di vincoli e soggetta a un sistema equilibrato di forze note, le cui azioni interne sono a loro volta determinate dal solo equilibrio. La Figura 1.35a esemplifica quindi un caso di trave *isostatica*.

Diverso è il caso di Figura 1.35b. I vincoli forniscono ora quattro componenti di reazione e le equazioni cardinali della statica conducono al sistema sottodeterminato

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -Y & X_A & X_B & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V_A \\ V_B \\ W \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} \quad (1.40a)$$

È evidente che le tre sole equazioni di equilibrio del corpo rigido non sono in grado di fissare il valore delle reazioni. La trave è però in grado di equilibrare qualunque condizione di carico in quanto la matrice dei coefficienti ha rango pieno [1]. Di questo ci si può rendere conto considerando, ad esempio, la coppia W , in realtà reazione fornita dal pattino, come un carico esterno; portando a secondo membro il suo contributo, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -Y & X_A & X_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} - W \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.40b)$$

Appare come W possa assumere, nel rispetto dell'equilibrio, valore arbitrario; le rimanenti reazioni possono essere calcolate mediante le equazioni cardinali della statica in funzione dei carichi applicati e di tale valore. L'equilibrio definisce quindi le reazioni vincolari (e, di conseguenza, le azioni interne) a meno di un parametro arbitrario. Una trave di questo tipo è detta staticamente indeterminata o *iperstatica* e il parametro arbitrario (o i parametri, nel caso ve ne fosse più d'uno) reazione iperstatica (o reazioni

iperstatiche). Si osservi che non tutte le reazioni vincolari sono iperstatiche: le condizioni di equilibrio (1.40) fissano infatti univocamente per la componente orizzontale nella cerniera il valore $H = -F_x$.

È intuitibile che in una trave reale le reazioni, iperstatiche comprese, assumano valori ben determinati in soluzione. Essi non sono però calcolabili in termini di solo equilibrio e la loro valutazione richiede che venga considerata la deformabilità della struttura. Il procedimento risolutivo è stato esemplificato con riferimento alla struttura in Figura 1.1, essa pure iperstatica.

Si consideri ora (Figura 1.35c) una trave vincolata con una cerniera a un solo estremo. Le equazioni cardinali della statica si scrivono adesso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -Y & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} \quad (1.41)$$

In generale questo sistema non ammette soluzione. Ciò traduce l'evidente impossibilità da parte di due sole componenti di reazione vincolare di equilibrare carichi arbitrari, quantomeno nella configurazione di riferimento. È noto [1] che perché una soluzione esista, il vettore dei termini noti deve soddisfare la condizione

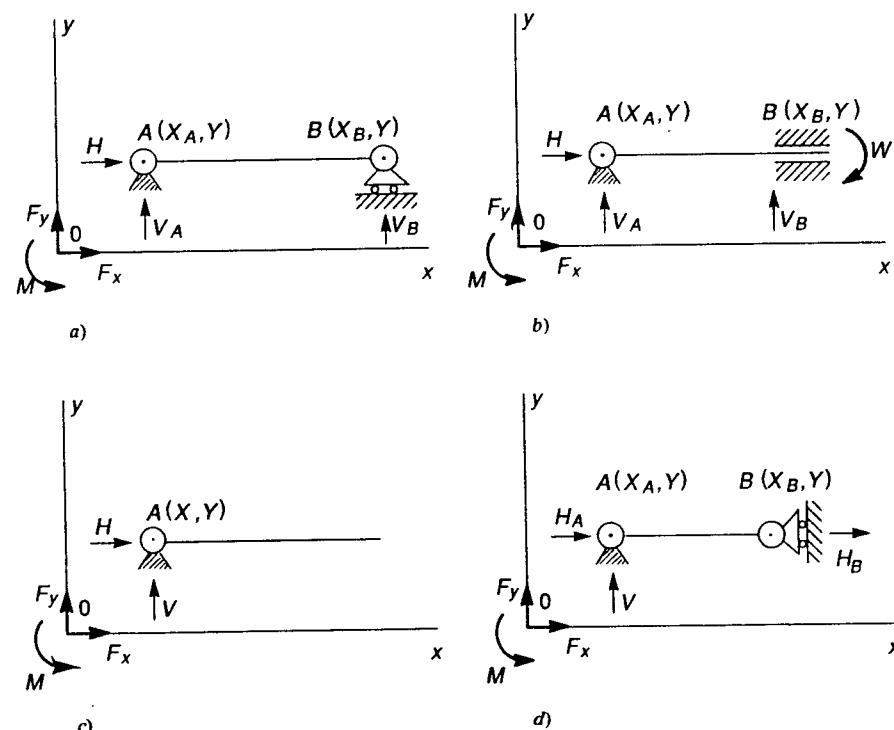


Figura 1.35

$$YF_x - XF_y + M = 0 \quad (b)$$

che cioè la risultante delle forze applicate abbia retta d'azione passante per la cerniera. In tal caso risulta

$$H = -F_x \quad V = -F_y \quad (c)$$

Se i carichi esterni rispettano la (b), le reazioni vincolari sono quindi univocamente determinate dalle equazioni cardinali della statica. Si noti che l'equilibrio sussiste in entrambe le situazioni illustrate in Figura 1.36, anche se la seconda appare intuitivamente poco credibile. Il vincolo è comunque in grado di fornire una reazione uguale e opposta alla forza applicata; il problema non è tanto legato all'equilibrio in sé quanto alla sua qualità; si vedrà che la situazione in Figura 1.36b è di equilibrio instabile.

Una struttura incapace di equilibrare in una determinata configurazione una qualunque condizione di carico è detta *ipostatica* o *labile*. Come l'esempio illustra, l'equilibrio può sussistere sotto carichi particolari, ma non è sempre vero che esso possa determinare univocamente le reazioni vincolari e, quindi, le azioni interne. Per la trave illustrata in Figura 1.35d, dalle equazioni cardinali della statica si ottiene infatti

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Y & -Y & X_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ H_B \\ V \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} \quad (1.42a)$$

Le due prime colonne della matrice dei coefficienti sono tra loro uguali, il che indica che la matrice stessa è singolare e le tre equazioni non sono tra loro indipendenti. Ancora una volta, la trave non è in grado di equilibrare qualunque carico. La (1.42a) può anche essere scritta nella forma equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -Y & X_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A + H_B \\ V \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} \quad (1.42b)$$

Il confronto con la (1.41) mostra che i carichi che possono essere equilibrati nella configurazione di riferimento sono ancora quelli che soddisfano la condizione (b), tali cioè che la retta d'azione della loro risultante passi per la cerniera. Per essi, peraltro, l'equilibrio fornisce

$$H_A + H_B = -F_x \quad V = -F_y \quad (d)$$

e definisce quindi solo la somma delle componenti orizzontali di reazione, ma non il valore di ciascuna di esse. In quanto incapace di equilibrare qualunque carico esterno, la trave in Figura 1.35d è ipostatica. Nei confronti delle condizioni di carico (b) essa è però iperstatica: l'equilibrio infatti sussiste ma, da solo, non consente di calcolare le reazioni vincolari.

Nel trattare i diversi casi in Figura 1.35, i vincoli sono stati considerati sotto il profilo statico, vale a dire dal punto di vista delle reazioni che sono capaci di fornire. A questo aspetto ne è peraltro associato uno duale, cinematico, che riguarda gli spostamenti che

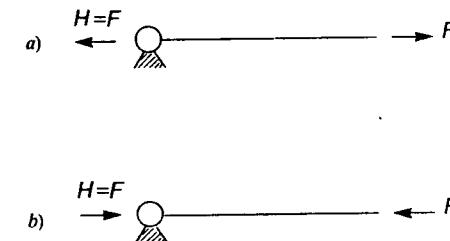


Figura 1.36

ogni vincolo impedisce o consente. Un vincolo perfetto impone valore nullo alle componenti di spostamento corrispondenti alle reazioni fornite (questa affermazione presuppone che la trave sia vincolata a un supporto rigido). Ad esempio, una cerniera impedisce al punto di spostarsi nel piano, ma consente all'asta di ruotare attorno a essa. Le componenti di spostamento concesse da ogni vincolo perfetto sono riportate nell'ultima colonna di Tabella 1.2. Il numero di reazioni vincolari fornite o, equivalentemente, il numero di componenti di spostamento impediti è detto *grado di vincolo*. L'incastrato è quindi un vincolo triplo, la cerniera e il pattino vincoli doppi, il carrello e il caso (e) in tabella vincoli semplici.

Una trave nel piano presenta tre componenti di moto rigido, che possono essere identificate con due traslazioni (ad esempio, secondo i due assi coordinati) e una rotazione attorno a un punto particolare. Se questi *gradi di libertà* sono impediti dai vincoli, eventuali spostamenti sono possibili solo a prezzo di deformazioni; una trave rigida si mantiene quindi fissa nel piano.

È facile constatare che una trave è in grado di equilibrare qualunque condizione di carico nella configurazione di riferimento se e solo se i suoi vincoli impediscono qualsiasi moto rigido, anche se infinitesimo (*atto di moto rigido*). È questo il caso degli esempi in Figura 1.35a,b: in entrambi una rotazione attorno alla cerniera in A comporterebbe una componente verticale di spostamento all'estremo di destra, impedita dai vincoli ivi presenti (nel secondo caso anche la rotazione in B non è concessa dal pattino). La trave in Figura 1.35c presenta invece un'evidente possibilità di rotazione finita attorno alla cerniera. Questa è possibile anche nel caso di Figura 1.35d, sia pure limitatamente ad un atto di moto: il carrello in B consente infatti sia lo spostamento verticale che la rotazione dell'estremo di destra (Figura 1.37). Ciò potrebbe apparire in contrasto con la rigidità dell'asta, in quanto comporterebbe un allungamento pari a $L' - L$. A differenza dello spostamento verticale, questa quantità è però del secondo ordine in ϑ e quindi ininfluente su di un atto di moto. Esplicitando la relazione tra L ed L' e sviluppando in serie di Mac Laurin, si può infatti scrivere

$$L = L' \cos \vartheta = L' \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \dots \right)$$

Al primo ordine è quindi $L' = L$.

Dal momento che una trave rigida ha tre gradi di libertà nel piano, tre gradi di vincolo sono necessari a impedire ogni atto di moto rigido. Essi sono anche sufficienti se i vincoli sono correttamente posizionati; la trave è allora isostatica. In caso contrario si ricade in una situazione analoga al caso di Figura 1.35d: la trave è ipostatica e, con

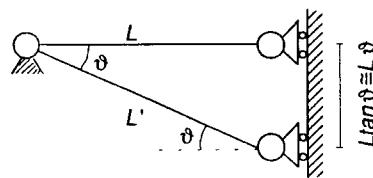


Figura 1.37

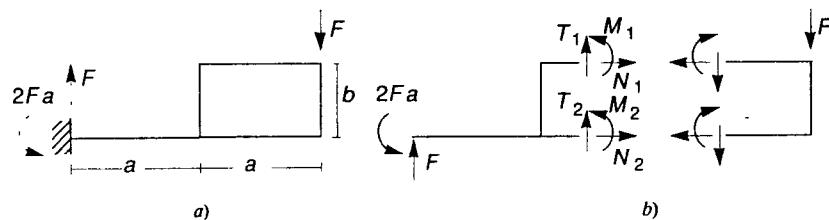


Figura 1.38

riferimento alle condizioni di carico che essa è in grado di equilibrare, anche iperstatica. Un grado di vincolamento superiore a tre comporta una trave certamente iperstatica, anche se eventuali labilità non sono escluse da questo solo fatto.

Una trave vincolata in modo da non consentire atti di moto rigido può equilibrare qualsiasi carico nella sua configurazione di riferimento. Se essa è iperstatica, peraltro, l'equilibrio può definirne le azioni interne solo a meno di uno o più parametri arbitrari, che non possono essere determinati quantitativamente se non rimuovendo l'ipotesi di corpo rigido. Si sottolinea che perché una trave sia isostatica è anche necessario che, come sin qui ipotizzato, il suo asse geometrico non presenti circuiti chiusi. In caso contrario il solo equilibrio non definisce univocamente il regime statico, come illustrato dall'esempio di Figura 1.38: le reazioni fornite dall'incastro sono fissate dalle equazioni cardinali della statica, ma non le azioni interne nell'anello chiuso; per suddividere la struttura in due parti occorre infatti sezionare la trave in due punti (Figura 1.38b) mettendo così in evidenza sei componenti di azione interna, tre delle quali iperstatiche.

ESEMPIO 1.3 La trave in Figura 1.39a è soggetta ad una forza orizzontale F applicata in corrispondenza del carrello e a un carico verticale di intensità p per unità di lunghezza e di risultante pure pari ad F . Essa è isostatica in quanto presenta tre gradi di vincolo e atti di moto rigido risultano impediti (una rotazione intorno alla cerniera comporterebbe infatti, al primo ordine, un sollevamento del carrello). Il solo equilibrio determina quindi sia le reazioni vincolari (Figura 1.39b) che le azioni interne. Nei riferimenti locali indicati in Figura 1.39b, queste si esprimono analiticamente come segue

$$N_1 = F \quad (\text{trazione})$$

$$N_2 = \frac{F}{2} \quad (\text{trazione})$$

$$T_1 = F \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\ell} \right) \quad (\text{orario})$$

$$T_2 = F \quad (\text{antiorario})$$

$$M_1 = \frac{F}{2} \left(3x - \frac{x^2}{\ell} \right) \quad (\text{tende le fibre inferiori}) \quad M_2 = Fy \quad (\text{tende le fibre di sinistra})$$

I relativi diagrammi di azione interna sono illustrati nelle Figure 39c-e.

ESEMPIO 1.4 La trave in Figura 1.40a è una volta iperstatica; essa infatti può essere ricondotta a una struttura isostatica declassando il vincolo incastro a cerniera e considerando la coppia X da esso trasmessa come un carico esterno (Figura 1.40b). Le reazioni vincolari e i diagrammi di azione interna relativi al carico distribuito e alla reazione iperstatica sono illustrati nelle Figure 40c-d (i diagrammi delle azioni assiali sono stati omessi, risultando queste sempre nulle).

La più generale soluzione equilibrata è rappresentata dalla sovrapposizione delle due soluzioni. A X può però essere attribuito qualunque valore nel rispetto dell'equilibrio. Si osservi che la risposta relativa all'iperstatica è in equilibrio sotto carichi nulli (o auto-equilibrata); i diagrammi di Figura 1.40d rappresentano quindi uno stato di coazione in termini di azioni interne.

ESEMPIO 1.5 Quanto detto per travi piane vale senza modifiche concettuali anche nel caso generale. Chiaramente, una trave nello spazio ha sei gradi di libertà e sei sono pure le equazioni cardinali della statica, riconducibili a tre condizioni di equilibrio alla traslazione secondo tre assi coordinati e tre alla rotazione attorno agli assi stessi.

Anche se il suo asse geometrico è contenuto nel piano (z, x), la trave di Figura 1.41a non è piana perché la forza F agisce parallelamente al terzo asse. Essa è isostatica in quanto l'incastro impedisce ogni moto rigido ma non può essere declassato senza introdurne. Ciò trova conferma dal calcolo delle reazioni vincolari, univocamente defi-

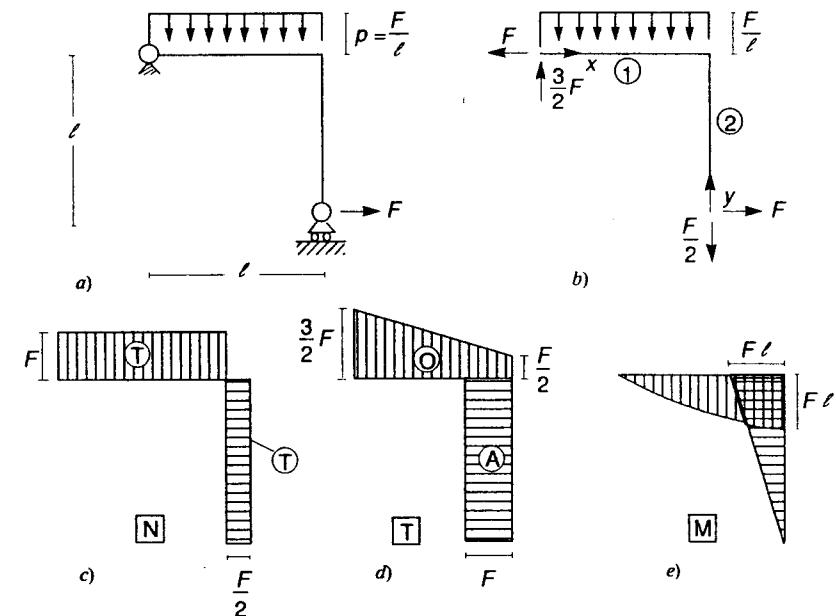


Figura 1.39

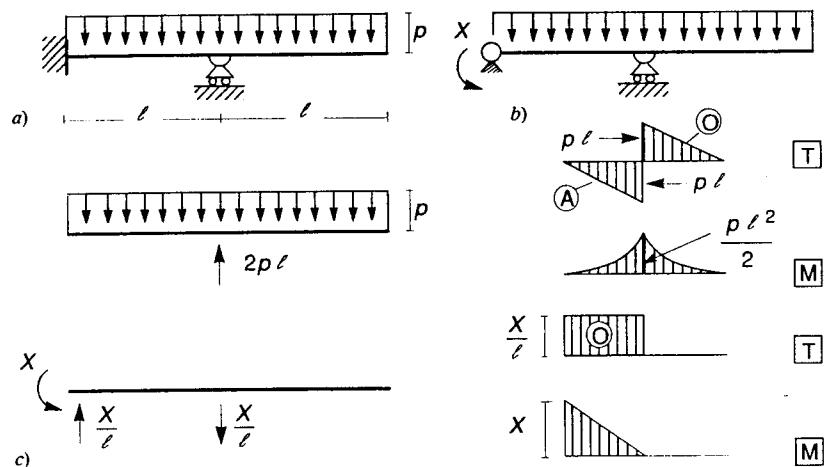


Figura 1.40

nite dall'equilibrio. L'incastro fornisce solo tre reazioni non nulle, precisamente (vedi figura) una forza V in direzione y , un momento flettente W_f (attorno all'asse x) e un momento torcente W_t (attorno all'asse z). Esse valgono

$$V = F \quad W_f = 2F\ell \quad W_t = Fa$$

Per maggior chiarezza grafica, i momenti sono a volte indicati come vettori diretti ortogonalmente al piano in cui agiscono e verso definito dalle convenzioni per rotazioni positive. Per distinguerli dalle forze, essi sono indicati con frecce a due punte. Con tale simbologia, le reazioni vincolari si rappresentano come in Figura 1.41b.

Si procede ora al calcolo delle azioni interne nei tre tratti numerati da ① a ③ in Figura 1.41a. Si indichi con s un'ascissa che percorra l'asse geometrico della trave a partire dalla sezione di incastro e si isoli, in ogni tratto, la porzione che conduce dal valore corrente di s all'estremo caricato (Figura 1.41c). L'equilibrio mostra che sono comunque presenti solo un'azione tagliante diretta parallela a y , un momento flettente nel piano (s, y) ed eventualmente un momento torcente. Il calcolo fornisce, per i tre tratti, i valori

$$\begin{array}{lll} T_1 = F & M_{f1} = F(2\ell + a - s) & M_{t1} = 0 \\ T_2 = F & M_{f2} = F(\ell + a - s) & M_{t2} = Fl \\ T_3 = F & M_{f3} = F(2\ell - s) & M_{t3} = Fa \end{array}$$

Tali quantità sono sempre positive e, quindi, hanno il verso ipotizzato in Figura 1.41c (tale ipotesi non coincide necessariamente con le convenzioni usate nello scrivere le (1.37), ma è conveniente ai fini del calcolo). I diagrammi delle azioni interne sono illustrati in Figura 1.41d. I momenti flettenti sono riportati dalla parte delle fibre tese (sempre le superiori) mentre i segni di momenti torcenti e azioni taglienti sono a fianco indicati.

Si osservi che in corrispondenza dei vincoli i valori delle azioni interne coincidono con le reazioni vincolari. L'informazione fornita dai diagrammi di azione interna è quindi esaustiva.

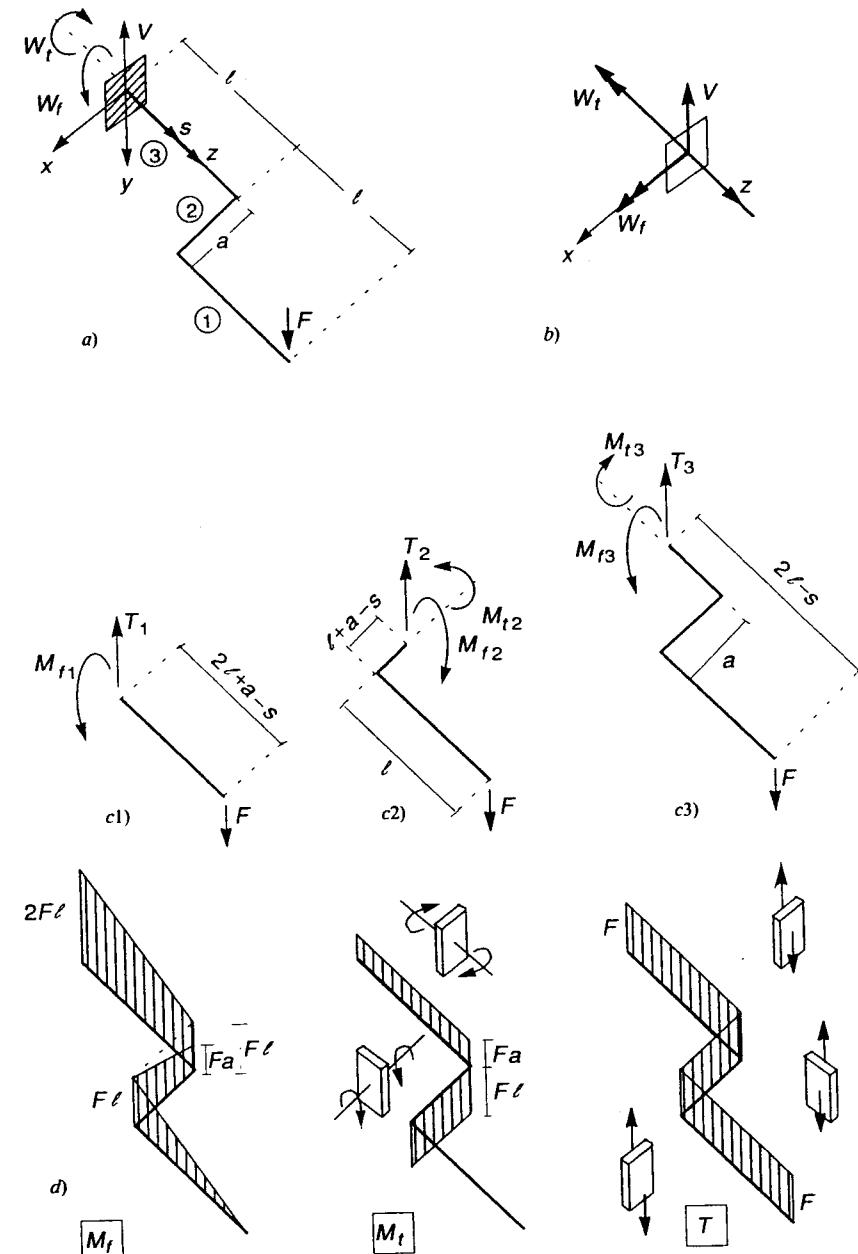


Figura 1.41

1.3.3.3 Sistemi articolati

Quanto sviluppato per la singola asta può essere facilmente esteso a sistemi di travi vincolate mutuamente tra loro oltre che al supporto esterno (Figura 1.42). Ora le condizioni di equilibrio nel piano non sono più limitate alle tre equazioni cardinali della statica del corpo rigido: se privato dei vincoli esterni il sistema può infatti evidenziare gradi di libertà dovuti a possibili movimenti di una parte relativamente a un'altra (nell'esempio di Figura 1.42, l'asta ① può ruotare rispetto al resto della struttura attorno alla cerniera A). Altri gradi di libertà possono risultare dall'apertura, richiesta per il calcolo delle azioni interne, di eventuali anelli chiusi (come quello formato dalle aste ②, ③ e ④ in Figura 1.42), non più necessariamente iperstatici.

L'incremento nel numero delle equazioni necessarie a imporre l'equilibrio costituisce peraltro la sola differenza rispetto alla trave singola. Si dirà ancora *isostatico* il sistema se le equazioni di equilibrio ammettono una e una sola soluzione per qualunque condizione di carico, *iperstatico* se tale soluzione è definita a meno di uno o più parametri arbitrari, *ipostatico* o *labile* se la soluzione esiste solo per particolari condizioni di carico.

L'indagine di natura statica sull'esistenza e unicità della soluzione delle equazioni di equilibrio può ancora essere sostituita da un'equivalente analisi cinematica, che appur si atti di moto rigido (della struttura nel suo complesso o di una parte rispetto all'altra) siano o meno impediti. Se privato di tutti i vincoli esterni e mutui, un sistema di n aste possiede $3n$ gradi di libertà nel piano. Sono quindi necessari $3n$ gradi di vincolo per impedirli; se i vincoli sono correttamente posizionati essi sono anche sufficienti e la struttura è isostatica. Si noti che dal punto di vista del grado di vincolo non vi è differenza tra il collegamento al supporto esterno o a un'altra asta: lo stesso vincolo impedisce le stesse componenti di spostamento, nel primo caso assolute, nel secondo relative. Occorre solo prestare attenzione al fatto che a volte un unico simbolo sottintende più vincoli: ad esempio, la cerniera A in Figura 1.42 in quanto collegamento tra le aste ① e ③ è un vincolo doppio; in quanto collega anche l'asta ④ alle due precedenti introduce due ulteriori gradi di vincolo.

Strutture di questo tipo costituiscono sistemi articolati di asta rigide. Il più semplice è noto come *arco a tre cerniere* ed è formato da due aste vincolate esternamente e tra loro da tre vincoli doppi (Figura 1.43). È facile verificare che il sistema non presenta atti di moto rigido se le tre cerniere non sono allineate: le possibilità di movimento

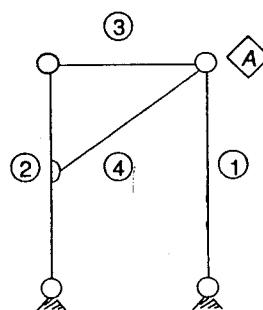


Figura 1.42

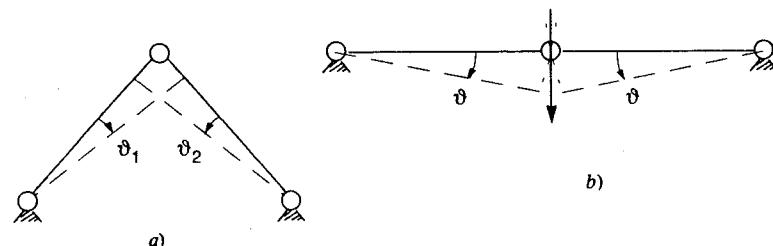


Figura 1.43

introdotte eliminando la cerniera interna comportano infatti uno spostamento relativo tra i due estremi, nella realtà collegati (Figura 1.43a). Diverso è il caso se le cerniere si trovano su un'unica retta (Figura 1.43b): l'atto di moto è adesso possibile anche in presenza del collegamento.

Molti sistemi articolati sono riconducibili a tale tipologia. È questo il caso dell'esempio di Figura 1.42: le tre aste ②, ③, ④, in quanto arco a tre cerniere montato su di un'asta, costituiscono un insieme internamente rigido, incernierato a terra e, tramite la cerniera A, all'asta ①, a sua volta vincolata a terra con un'ulteriore cerniera. Spesso una o più "cerniere" sono costituite da due vincoli semplici o da insiemi di aste che, dal punto di vista cinematico, impongono comunque a una parte della struttura di ruotare attorno a un punto ben determinato.

ESEMPIO 1.6 Lo schema di Figura 1.44a è un arco a tre cerniere non allineate (il pattino può infatti essere visto come una cerniera nel punto improprio della retta ortogonale al suo piano di scorrimento) ed è quindi isostatico. Le tre equazioni cardinali per la struttura considerata come un corpo rigido forniscono le condizioni

$$H + F = 0 \quad V_A + V_B - F = 0 \quad \frac{3}{2} Fl - V_B l - W = 0$$

che non sono ovviamente in grado da sole di determinare le quattro componenti di reazione. L'ulteriore condizione è fornita dall'equilibrio alla rotazione di un'asta rispetto all'altra; è facile constatare che l'equilibrio del pilastro di destra, rispetto alla cerniera interna comporta

$$W = 0$$

il che consente il calcolo delle restanti reazioni a terra e quindi delle azioni interne. La soluzione è riportata nelle Figure 1.44b-c. Si osservi che lo stesso risultato sarebbe stato ottenuto imponendo l'equilibrio della trave a gomito rispetto alla cerniera interna; tale condizione, pertanto, non è indipendente dalle precedenti.

1.3.3.4 Travature reticolari

Si definisce *reticolare* una struttura costituita da un insieme di asta collegate tra loro esclusivamente da cerniere alle loro estremità (Figura 1.45a). È questa una tipologia di notevole importanza, che trova largo impiego, ad esempio, in coperture di grandi

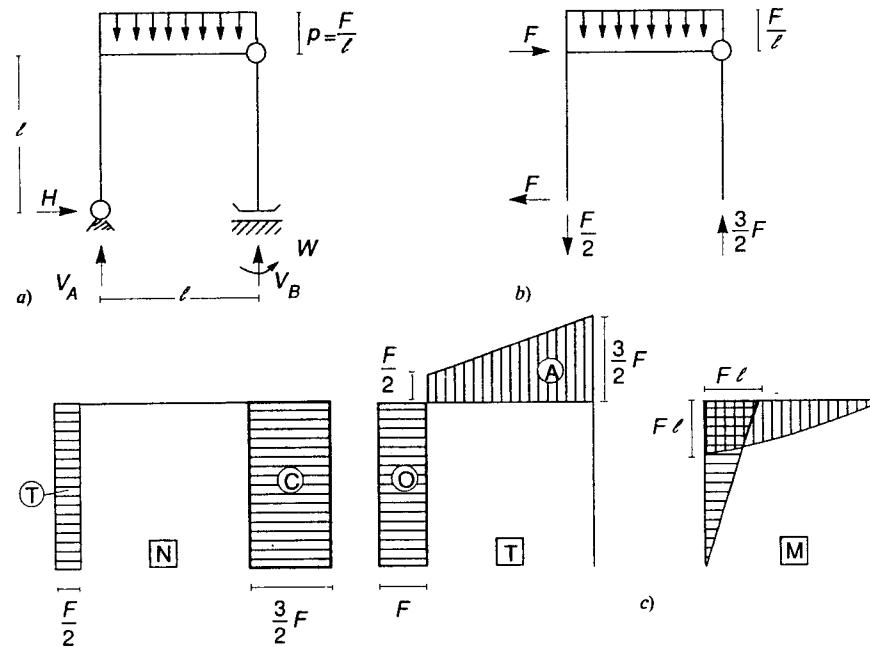


Figura 1.44

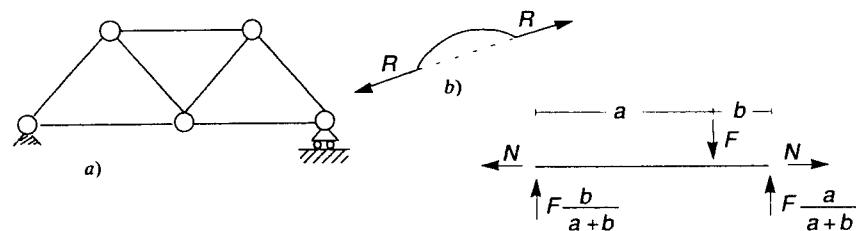


Figura 1.45

dimensioni, tralci di sostegno di linee elettriche e così via. Tali strutture presentano caratteristiche che consentono procedimenti semplificati di calcolo.

Si consideri infatti un'asta vincolata con cerniere ai suoi estremi e priva di carichi; l'equilibrio richiede, come è immediato constatare, che le reazioni trasmesse attraverso le cerniere siano uguali, opposte e allineate sulla retta che congiunge i due estremi (Figura 1.45b). Se l'asta è rettilinea, essa risulterà quindi soggetta a sola azione assiale. In presenza di carichi sull'asta, l'equilibrio alla traslazione in direzione trasversale e alla rotazione consente comunque di determinare subito le componenti trasversali di reazione, lasciando come incognita la sola azione assiale (Figura 1.45c). Sono stati proposti metodi sia grafici che algebrici, basati su artifici spontanei e immediati, che permettono un calcolo sistematico e molto snello delle azioni assiali in travature reticolari isostatici.

che. La trattazione di tali metodi esula dallo scopo di questo capitolo: ci si limita qui a illustrare un esempio di soluzione, senza peraltro insistere sui dettagli degli aspetti operativi.

ESEMPIO 1.7 Si consideri la struttura piana di Figura 1.46a. Essa è isostatica, come è facile verificare osservando che l'asta ① è correttamente vincolata al supporto esterno con una cerniera e un carrello, che le asta ② e ③ costituiscono un arco a tre cerniere montato su di essa e che le asta ④ e ⑤ sono a loro volta un arco a tre cerniere sovrapposto alla struttura precedente. Le tre equazioni cardinali della statica del corpo rigido (quale è in effetti la struttura privata dei soli vincoli a terra) consentono di calcolare le reazioni, che risultano come indicato in Figura 1.46b.

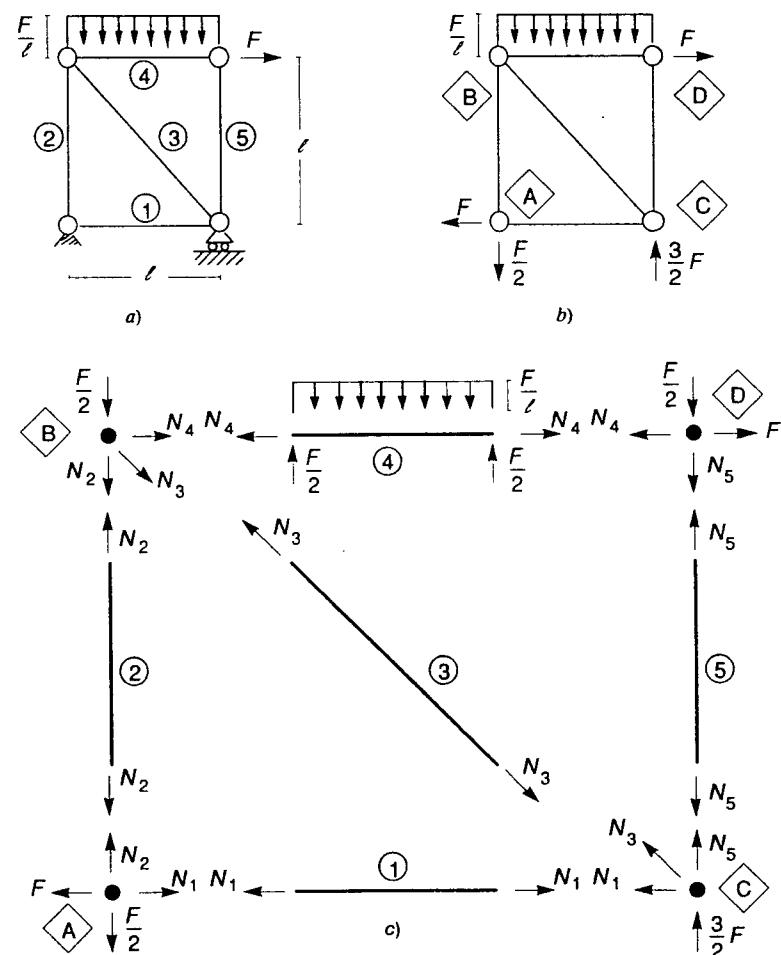


Figura 1.46

In Figura 1.46c la struttura è stata rappresentata isolando le aste di cui è costituita e mettendo in evidenza le forze che le aste scambiano con i nodi in cui si collegano mediante cerniere. Le reazioni verticali nell'asta ④ sono fissate dall'equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione dell'asta stessa, equazioni in cui non interviene l'azione assiale N_4 . L'equilibrio alla traslazione nelle due direzioni del nodo A permette di calcolare immediatamente N_1 e N_2 ; noto quest'ultimo valore, un'analogia operazione sul nodo B consente di valutare N_3 e N_4 (questo calcolabile, unitamente a N_5 , anche operando direttamente sul nodo D). L'equilibrio del nodo C è a questo punto una semplice verifica della correttezza del calcolo.

Tutte le aste risultano soggette ad azione assiale costante e, tranne la ④, a questa sola azione interna. La rappresentazione grafica è allora convenientemente sostituita dalla semplice elencazione dei valori di N riportata in Tabella 1.3 (le azioni assiali nelle aste sono considerate positive se di trazione), limitando i diagrammi ai soli momento flettente e azione tagliante dell'asta ④.

L'esercizio esemplifica un procedimento facilmente sistematizzabile nel caso in cui in ogni nodo sia possibile ricondursi a due sole incognite, a questo punto determinabili con le due equazioni di equilibrio alla traslazione nel piano del nodo stesso. Per innescare il procedimento occorre ovviamente che in almeno un nodo concorrono solamente due aste (come nel nodo A dell'esempio); questa circostanza è di fatto molto frequentemente (anche se non necessariamente) verificata in travature reticolari piane isostatiche.

1.4 INFLUENZA DEGLI SPOSTAMENTI SULL'EQUILIBRIO

Le strutture ingegneristiche sono spesso sufficientemente rigide e vincolate da assicurare che gli spostamenti siano piccoli, al punto da potersi ragionevolmente ritenere ininfluenti sull'equilibrio; queste condizioni possono allora essere imposte con riferimento alla configurazione indeformata, assimilando la struttura a un corpo rigido o a un sistema articolato di aste individualmente rigide. Anche se spesso del tutto ragionevole, questa tuttavia è solo un'ipotesi, che può essere più o meno verificata. Esistono infatti importanti circostanze in cui non è lecito ignorare il regime deformativo neppure ai soli fini della scrittura delle equazioni di equilibrio.

Strutture molto deformabili ricadono ovviamente in questa categoria. A essa appartengono anche sistemi labili, pur se costituiti da materiali di per sé abbastanza rigidi.

Tabella 1.3

Azioni interne nella struttura di Figura 1.46

Azioni assiali

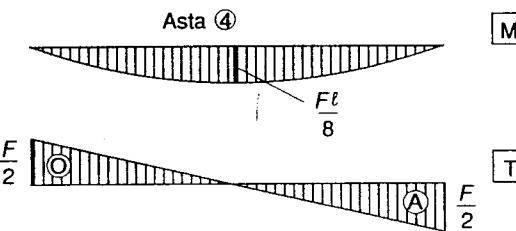
$$N_1 = F$$

$$N_2 = F/2$$

$$N_3 = -\sqrt{2} \cdot F$$

$$N_4 = F$$

$$N_5 = -F/2$$



Come si è visto, tali sistemi possono equilibrare nella configurazione indeformata solo determinati carichi. Ciò non significa che essi siano incapaci di sostenere carichi di altro tipo; l'equilibrio può infatti instaurarsi in una configurazione diversa. A volte questa si discosta solo di poco da quella di riferimento, ma solo in virtù di tale scostamento l'equilibrio è di fatto possibile. A scopo illustrativo vengono ora discussi due esempi.

ESEMPIO 1.8 Si consideri la fune di Figura 1.47a, incernierata all'estremo di sinistra e sostenuta nell'altro da una carrucola oltre la quale è fissato un contrappeso W. Si vuole applicare un peso (forza verticale) pari a F in corrispondenza della mezzaria della luce.

La fune è priva di rigidità flessionale; la sola possibile azione interna è rappresentata dalla trazione (o *tiro*), sempre diretta secondo la linea media e ovunque pari a W. È allora evidente come l'equilibrio non possa sussistere nella configurazione indeformata, dove i tiri risulterebbero orizzontali (Figura 1.47b). Per effetto dello spostamento trasversale u del punto di applicazione del carico essi acquisiscono però una componente verticale, indicata con V in Figura 1.47c, capace di bilanciare la forza applicata. L'equilibrio del nodo A' nella sua configurazione deformata richiede, come è immediato constatare, $V = F/2$. Dal momento che il tiro è inclinato come la fune, semplici considerazioni geometriche permettono di stabilire le relazioni

$$\frac{V}{W} = \frac{u}{\ell} \quad \ell = \sqrt{L^2 + u^2} \quad (a)$$

Si ottiene quindi

$$F = 2V = 2W \frac{u}{\ell} = \frac{2Wu}{\sqrt{L^2 + u^2}} \quad (b)$$

Introducendo le quantità adimensionali

$$f = \frac{F}{2W} \quad \eta = \frac{u}{L} \quad (c)$$

In (b) si scrive

$$f = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \quad (d)$$

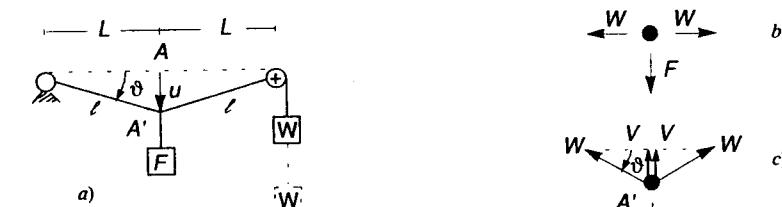


Figura 1.47

o anche, risolvendo per lo spostamento

$$\eta = \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} \quad (d2)$$

Le (d) stabiliscono il legame tra la forza applicata e lo spostamento che ne consegue e definiscono quindi la risposta della fune. Il loro andamento è diagrammato in Figura 1.48. Si noti che la soluzione esiste solo per $f < 1$ ($F < 2W$); è infatti evidente come, pur ammettendo spostamenti arbitrariamente grandi, la componente verticale del tiro non possa eccedere il valore del tiro stesso.

Si osservi che per $f \ll 1$ (carico applicato sensibilmente più piccolo del contrappeso), la risposta è pressoché lineare ($\eta = f$). Un tiro elevato consente infatti di equilibrare un carico comparativamente modesto inducendo solo spostamenti di piccola entità. Ciò legittima semplificazioni geometriche, permettendo in particolare di scrivere, in luogo delle (a), $V = W(u/L)$. Anche se piccoli, tali spostamenti sono tuttavia essenziali: in loro assenza l'equilibrio non sarebbe infatti possibile.

La soluzione del problema è stata ottenuta in termini di solo equilibrio, sia pure scritto con riferimento alla configurazione deformata. Essa è quindi valida indipendentemente dal comportamento del materiale di cui la fune è costituita (la risposta di una fune assialmente deformabile è sempre fornita dalle (d); rispetto a quella di una fune inestensibile, si differenzia solo per un minor innalzamento del contrappeso). La struttura è in effetti staticamente determinata essendo il valore W per il tiro dettato dall'equilibrio. Questa è ovviamente una circostanza particolare, che non risulterà sempre verificata.

ESEMPIO 1.9 Si consideri ora l'arco a tre cerniere allineate in Figura 1.49. Come osservato nel Paragrafo 1.3.3.3, nella sua configurazione di riferimento esso non è in grado di equilibrare una forza verticale agente sulla cerniera centrale. L'equilibrio richiede uno spostamento trasversale, indicato con u in figura, che conferisce una componente verticale alle azioni assiali nelle aste. A differenza del tiro nella fune dell'esempio precedente, tali azioni assiali non sono però inizialmente presenti e si sviluppano solo in conseguenza dell'allungamento.

L'equilibrio della cerniera centrale (Figura 1.49b) richiede ancora

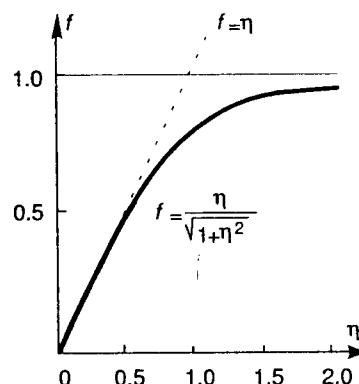


Figura 1.48

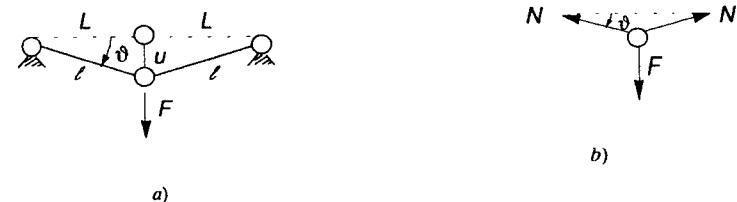


Figura 1.49

$$F = 2N \frac{u}{L} \quad (e1)$$

dove N è appunto il valore delle azioni assiali, per simmetria uguale nelle due aste. Esso sarà funzione dell'allungamento, indicato con e , attraverso il legame che descrive il comportamento dell'asta stessa. Si assuma quello schematizzato in Figura 1.2, che si traduce nella relazione lineare

$$N = Ke \quad (e2)$$

Semplici considerazioni geometriche permettono di esprimere sia l'allungamento e che la lunghezza corrente ℓ delle aste in termini di u . Si può infatti scrivere

$$e = \ell - L \quad \ell = \sqrt{L^2 + u^2} \quad (e3)$$

Le (e) consentono di determinare il legame carico-spostamento che riassume la risposta della struttura. Introducendo le quantità adimensionali

$$f = \frac{F}{KL} \quad \eta = \frac{u}{L} \quad (f1, 2)$$

il risultato si esprime nella forma

$$f = 2\eta \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right] \quad (g)$$

L'andamento della (g) è rappresentato dalla curva ④ in Figura 1.50.

Si supponga ora che le aste presentino un limite di resistenza elastica a trazione pari a N_0 . Ponendo

$$n_0 = \frac{N_0}{KL} \quad (h)$$

e ricordando le (f), dalle (e) si calcolano lo spostamento e il carico al limite elastico. Risulta

$$\eta_0 = \sqrt{n_0(2+n_0)} \quad f_0 = \frac{2n_0}{1+n_0} \sqrt{n_0(2+n_0)} \quad (i1, 2)$$

In corrispondenza di tali valori la (g) perde di validità. Se il comportamento è idealmente fragile (Figura 1.4), le aste giungono a questo punto a rottura e la struttura collassa. Ulteriori risorse si riscontrano invece nel caso di un comportamento idealmente duttile

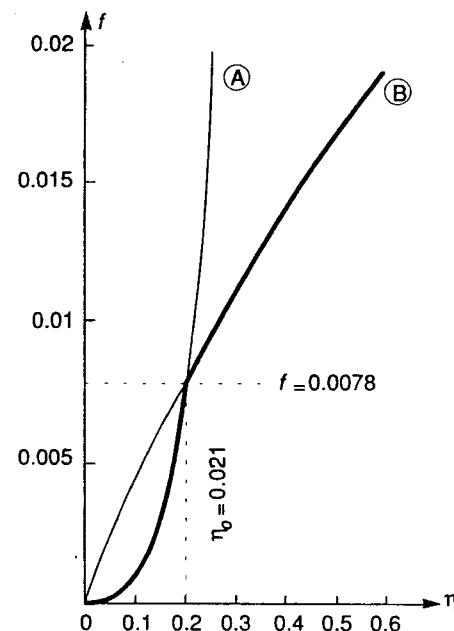


Figura 1.50

(Figura 1.7). Raggiunto il limite di snervamento, le due aste possono allora deformarsi a trazione costante. La risposta della struttura è adesso definita dalla sola (e1) scritta per $N = N_0$. Si ottiene

$$f = \frac{2n_0\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \quad (i)$$

Anche la (i) è diagrammata in Figura 1.50 (curva B), per il valore $n_0 = .02$. I due grafici si intersecano nel punto di coordinate (i) e l'effettiva risposta della struttura è evidenziata con tratto ingrossato.

Si osservi che la curva A presenta tangente orizzontale nell'origine. Ciò indica che la struttura è priva di rigidezza iniziale, circostanza che ne riflette la labilità. La struttura può sopportare carichi solo per effetto della deformazione: questa genera allungamento nelle aste e, quindi, azione assiale, conferendo inoltre a quest'ultima la componente verticale necessaria per l'equilibrio. Un'ipotetico comportamento illimitatamente elastico consentirebbe alla struttura di sopportare carichi di qualunque intensità. La rigidezza della struttura aumenterebbe monotonicamente, non prevedendo tale comportamento un limite superiore per l'azione assiale.

Tale limite è peraltro imposto dalla duttilità del materiale di cui le aste sono costituite e la curva A viene a un certo punto sostituita dalla B. Questa presenta lo stesso andamento di quella relativa all'esempio precedente (Figura 1.48); una volta fissato dal legame costitutivo il valore $N = N_0$ per le azioni assiali, la soluzione è infatti dettata dalla sola condizione di equilibrio (e1) scritta nella configurazione corrente. Si osservi che, a differenza dell'esempio trattato nel Paragrafo 1.1, le ulteriori risorse della struttura rispetto al limite elastico (i2) non sono adesso dovute a ridistribuzione. Le azioni

interne infatti non crescono di valore; la loro componente verticale però aumenta con lo spostamento e ciò consente incrementi di carico. La resistenza ultima della struttura corrisponde adesso al valore $f = 2n_0$ ($F = 2N_0$), peraltro non raggiungibile per spostamenti finiti e solo asintoticamente avvicinabile.

In virtù della sua definizione (h), n_0 ha il significato di deformazione al limite elastico. Il valore $n_0 = .02$ usato per tracciare la curva B in Figura 1.50 è di fatto molto elevato (quello relativo a un acciaio, ad esempio, risulta tipicamente inferiore di un ordine di grandezza). È allora evidente che se le aste sono costituite da un materiale con un comportamento realistico, la fase elastica per l'arco a tre cerniere di Figura 1.49 è estremamente limitata e di fatto inesistente. La struttura non è in grado di sopportare carichi significativi se non sfruttando le risorse conferite dalla duttilità e comunque a prezzo di spostamenti notevoli. Per tali motivi, strutture labili sono in genere prive di interesse ingegneristico. A meno che non siano soggette solamente a carichi che possano essere equilibrati nella configurazione di riferimento, il loro utilizzo è subordinato a interventi che conferiscono loro una rigidezza adeguata.

In misura più o meno elevata, ogni struttura è deformabile e quindi, a rigore, l'equilibrio dovrebbe essere sempre imposto nella configurazione finale, in cui effettivamente si instaura. Questo tuttavia comporta calcoli di notevole complessità in quanto le relazioni che governano il problema risultano altamente non-lineari. Negli esempi precedenti ciò non ha impedito agevoli soluzioni in forma chiusa, ma è evidente come esse siano state possibili solo in virtù della semplicità dei problemi considerati. Per sistemi strutturali realistici, gli oneri di calcolo sono tali da ritenersi sostenibili solo se un procedimento generale di questo tipo è effettivamente indispensabile.

Sistemi strutturali potenzialmente molto deformabili, o per la natura dei materiali di cui sono costituiti o perché ipostatici o labili, sono utilizzati in alcune importanti circostanze. Una fune, ad esempio, in quanto priva di rigidezza flessionale può essere vista come una catena di cerniere ed è quindi altamente ipostatica. Cionondimeno, sistemi di funi sono largamente impiegati, a volte anche in strutture di notevole impegno. Spesso per conferire loro una maggior rigidezza si ricorre all'espedito di introdurre un tiro iniziale, o *pretensione*, che limiti l'entità degli spostamenti svolgendo funzione analoga a quella del contrappeso nell'esempio di Figura 1.47. Anche così, peraltro, gli effetti degli spostamenti non possono assolutamente essere trascurati.

Nella maggior parte delle applicazioni, tuttavia, gli spostamenti che una struttura può subire sono limitati a valori molto piccoli da esigenze di funzionalità operativa. Il sistema allora, oltre che costituito da materiali sufficientemente poco deformabili, deve essere vincolato in modo che ogni possibile atto di moto rigido risulti impedito. La piccolezza degli spostamenti consente semplificazioni di carattere matematico, quali la linearizzazione delle relazioni geometriche che governano la congruenza. Questo fatto non implica però che gli spostamenti siano necessariamente ininfluenti sull'equilibrio; esistono situazioni in cui esso deve ancora essere imposto con riferimento alla configurazione deformata.

Un caso particolarmente significativo è quello di travi presso-inflesse. Se la trave, vincolata in modo da non presentare labilità, è assimilata a un corpo rigido, la forza P produce solamente un'azione assiale e non contribuisce ai momenti flettenti, che dipendono dai soli carichi trasversali (Figura 1.51a). Peraltro, l'equilibrio si instaura a deformazione avvenuta; la forza orizzontale P all'estremo di destra acquisisce allora, per effetto dell'inflessione, un braccio rispetto a ogni punto della linea media, contribuendo essa pure al regime flessionale (Figura 1.51b). Tale contributo, in gergo ingegneristico noto come *effetto P-Δ*, si rivela spesso tutt'altro che trascurabile e un

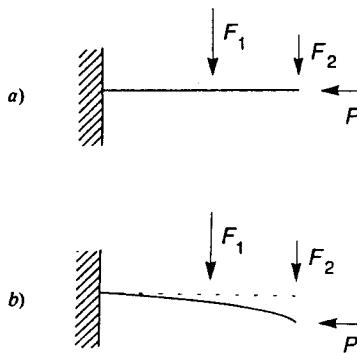


Figura 1.51

calcolo che lo ignorasse non consentirebbe di cogliere aspetti fondamentali del comportamento. Situazioni analoghe si riscontrano anche in altre importanti tipologie strutturali, quali lastre o gusci. Alcuni significativi problemi di questo tipo verranno esaminati nel corso della trattazione.

Molte strutture di interesse ingegneristico subiscono tuttavia spostamenti così piccoli da non influenzare le modalità con cui l'equilibrio si instaura, il che consente di semplificare notevolmente la formulazione del problema strutturale. Sia per l'importanza che questo ambito riveste, sia per le semplificazioni che l'operare al suo interno comporta, molti dei più notevoli risultati raggiunti dalla meccanica delle strutture si riferiscono a esso. Pur non trascurando alcuni importanti problemi che richiedono la rimozione delle ipotesi che lo definiscono, anche nel seguito della trattazione, questo ambito verrà decisamente privilegiato.

1.5 INQUADRAMENTO DELLA MATERIA

Alla meccanica delle strutture, così come oggi intesa, viene convenzionalmente attribuita una data di nascita precisa: il 1638, anno di pubblicazione dei *Discorsi* di Galileo. In tale opera si trova infatti la prima trattazione sistematica di un vero e proprio problema strutturale, precisamente quello della mensola incastrata a un estremo e caricata trasversalmente in corrispondenza dell'altro. Le successive fasi dell'evoluzione della disciplina sono riportate in testi di carattere storico (ad esempio, [2, 3]).

Dal "problema di Galileo" hanno avuto origine entrambi gli aspetti del problema strutturale. In un certo senso più agevole per la cultura meccanica del tempo si è presentato quello relativo alla valutazione della capacità portante delle strutture. Sulla base di considerazioni limitate all'equilibrio e alla resistenza del materiale, gli ingegneri del XVIII secolo hanno sviluppato metodi capaci di stabilire la resistenza di opere quali archi e volte in pietra o muri di sostegno per terreni. L'analisi della risposta di una struttura sotto carico assegnato ha invece richiesto l'introduzione di nuovi concetti, connessi con la deformabilità delle struttura stessa e del materiale di cui essa è costituita. Hanno così fatto la loro apparizione nel mondo strutturale, accanto agli aspetti

statici dell'equilibrio, quelli relativi alla geometria della deformazione e al comportamento del materiale.

Se in un primo tempo l'interesse degli studiosi era abbastanza equamente suddiviso tra i due problemi, il secondo ha assunto importanza preponderante quando, nella prima parte del secolo XIX, ha assunto una veste pressoché definitiva la *teoria matematica dell'elasticità* [4], che ancor oggi costituisce un capitolo di preminente importanza della meccanica delle strutture. La struttura è stata sostituita da un solido ideale, costituito da un mezzo continuo tridimensionale caratterizzato opportunamente in termini statici e cinematici, governato da un legame costitutivo che generalizza il comportamento uniaxiale elastico lineare di Figura 1.2. Su questa base è stata prodotta una teoria armoniosa e completa, che va riguardata come uno dei risultati più notevoli raggiunti dalla fisica matematica dell'Ottocento. La necessità di considerare materiali che neppure in prima approssimazione possono essere schematizzati come elastici ha condotto in tempi più recenti alla formulazione di altri modelli costitutivi (vedi, ad esempio, [5, 6]), senza peraltro modificare le relazioni che governano la statica e la geometria della deformazione del mezzo. Lo studio della risposta dei mezzi continui ad azioni sollecitanti assegnate forma l'oggetto del primo volume di questo testo.

Pur se le ipotesi alla base della formulazione continua sono in larga misura del tutto accettabili, anche nel caso più semplice, relativo al comportamento elastico lineare, le equazioni che ne risultano si rivelano troppo complesse per consentire agevoli soluzioni generali. Questa difficoltà è stata immediatamente riconosciuta e al suo superamento è rivolta la meccanica delle strutture propriamente detta. L'introduzione di ulteriori drastiche ma consapevoli ipotesi ha consentito formulazioni semplificate per particolari problemi di notevole rilevanza ingegneristica; hanno così avuto origine le teorie strutturali della trave e delle lastre piane e curve (la prima è stata in realtà stabilita precedentemente, come sviluppo del problema di Galileo), formulate dapprima in campo elastico e successivamente estese ad altri comportamenti. Il secondo volume del testo è dedicato a queste teorie e al metodo degli elementi finiti, che ne costituisce una concretualmente spontanea estensione e consente, con l'ausilio dei mezzi di calcolo automatico oggi disponibili, procedimenti risolutivi di grande versatilità ed efficacia, applicabili praticamente a ogni tipologia strutturale.

Il successo della teoria matematica dell'elasticità e delle teorie strutturali che ne sono derivate ha distolto per lungo tempo l'attenzione degli studiosi dal problema della resistenza ultima delle strutture. La formulazione elastica non è tuttavia in grado di fornire una risposta soddisfacente a questo problema e anche l'introduzione di altri legami costitutivi ne consente la soluzione solo al prezzo di lunghe e onerose analisi evolutive, che calcolino la risposta della struttura sotto carichi man mano crescenti fino al raggiungimento di una situazione di crisi. Questo importante aspetto del problema strutturale, oggetto fino all'inizio dell'Ottocento di numerosi e importanti studi, è stato ripreso in epoca relativamente recente, producendo i risultati forse più significativi della meccanica delle strutture del XX secolo. Si segnalano tra questi il *calcolo a rottura* [7], che consente la valutazione diretta del carico ultimo di strutture costituite da materiali duttili che presentino un limite al livello di sforzo sopportabile, e la pressoché definitiva sistematizzazione dei metodi atti a studiare i fenomeni detti di *instabilità* [8] che, previsti per la prima volta da Eulero quando apparivano ancora poco rilevanti nel contesto ingegneristico dell'epoca, hanno via via assunto, per le strutture sempre più ardite che l'avvento di nuovi materiali e il raffinamento dei procedimenti risolutivi

hanno consentito di realizzare, un'importanza notevolissima. Ad alcuni di questi risultati è dedicato l'ultimo volume della trattazione.

La vastità della materia comporta che anche opere molto estese possano trattare solo determinati argomenti. Esistono peraltro anche in lingua italiana presentazioni ampie e sistematiche dei principali aspetti della disciplina, tra cui occorre citare quanto meno gli ormai classici trattati di Belluzzi [9], Franciosi [10] e Baldacci [11], nonché quello, in corso di completamento, di Sollazzo e collaboratori [12]. Sono anche disponibili ottimi testi didattici che, pur limitati agli argomenti oggetto di corsi istituzionali di base, si segnalano per rigore e chiarezza di esposizione; tra essi, ci si limita qui a citare quelli di Cicala [13] e Capurso [14]. Da tutte queste opere (oltre che da quelle che verranno man mano indicate nel prosieguo della trattazione) è stato ampiamente attinto nella stesura di questo testo.

ESERCIZI

- 1.1 Determinare la risposta della struttura in Figura 1.1a assumendo per i fili il comportamento lineare in Figura 1.2 con i seguenti valori

$$K_1 = K \quad K_2 = 2K \quad K_3 = 3K$$

- 1.2 Una barra di gomma abbia lunghezza iniziale $\ell_0 = 1 \text{ m}$ e sezione circolare con diametro iniziale $\varphi_0 = 15 \text{ mm}$. Una prova di trazione associa a due lunghezze correnti ℓ i seguenti valori della forza applicata F

$$\ell = 1.20 \text{ m}, \quad F = 355 \text{ N}$$

$$\ell = 1.50 \text{ m}, \quad F = 885 \text{ N}$$

Supponendo che il provino si mantenga cilindrico e che il materiale sia incompressibile (si deformi cioè a volume costante) calcolare nei due casi le tensioni normali nominali e vere.

- 1.3 Con riferimento al provino dell'esercizio precedente, si supponga che il legame tra sforzi e deformazioni nominali sia lineare ($\sigma = Ke$). Determinare il legame tra sforzo vero e deformazione logaritmica.
- 1.4 Per la barra dell'Esempio 1.1, mostrare che il carico di collasso a trazione, identificato dalla condizione $d\sigma/d\varepsilon = 0$ (punto C in Figura 1.15), corrisponde, rispettivamente, a

$$d\sigma_v/d\varepsilon_v = \sigma_v \quad dS/dE = -S/(1 + 2E)$$

- 1.5 Tracciare i diagrammi delle azioni interne per l'asta di Figura 1.E5.

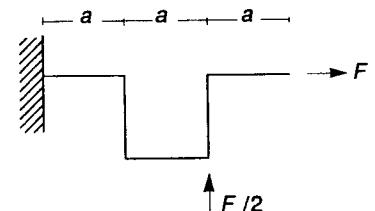


Figura 1.E5

- 1.6 Calcolare le azioni assiali nelle aste che compongono le due strutture reticolari piane di Figura 1.E6.
- 1.7 Calcolare le azioni interne nelle sezioni indicate con A, B, C e D nell'asta di Figura 1.E7.
- 1.8 Le due travi in Figura 1.E8 presentano labilità. Indicare i sistemi di forze che possono essere equilibrati nella configurazione indeformata e calcolare le reazioni vincolari in funzione di un'incognita iperstatica opportunamente scelta.
- 1.9 La struttura labile in Figura 1.E9 è in grado di equilibrare il carico applicato nella sua configurazione indeformata? Se sì, quali delle quattro reazioni vincolari possono essere scelte come incognita iperstatica?

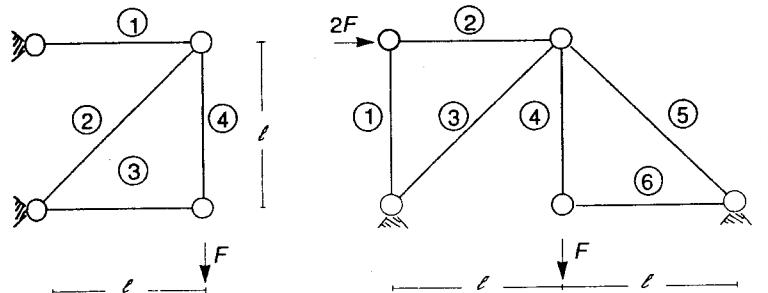


Figura 1.E6

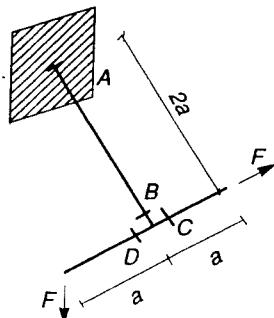


Figura 1.E7

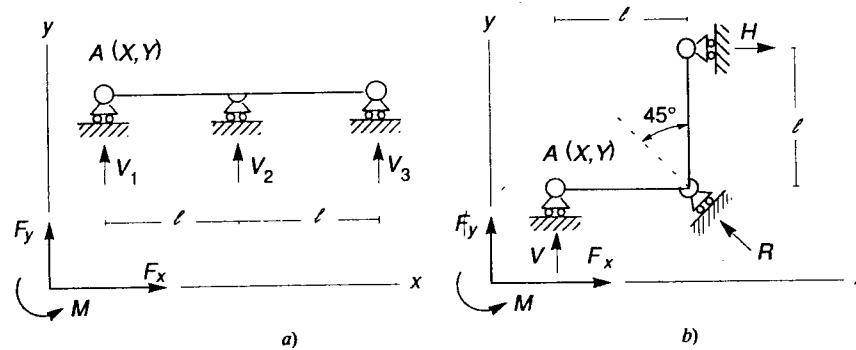


Figura 1.E8

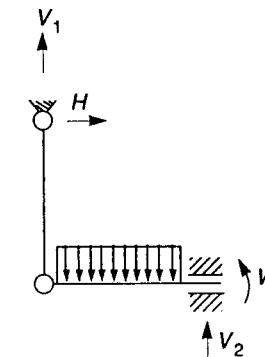


Figura 1.E9

1.10 Scrivere la più generale espressione equilibrata dei momenti flettenti per le travi di Figura 1.E10.

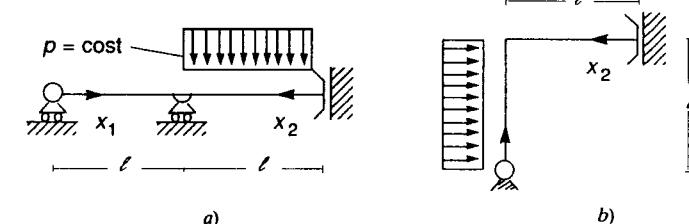


Figura 1.E10

1.11 Si consideri (Figura 1.E11) un tronco infinitesimo di trave rettilinea, soggetto alle forze esterne ndx e pdx (rispettivamente orizzontale e verticale) e alla coppia mdx . Mostrare che le condizioni di equilibrio si traducono nei seguenti legami differenziali

$$\frac{dN}{dx} = -n \quad \frac{dT}{dx} = -p \quad \frac{dM}{dx} = T = m$$

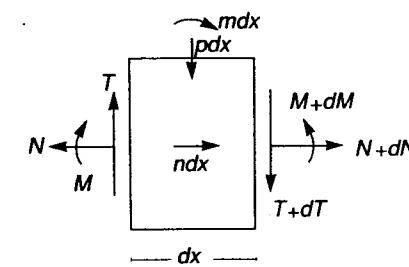


Figura 1.E1

- 1.12 La trave ipostatica di Figura 1.E12 è soggetta a una forza verticale F nella cerniera centrale e a una forza orizzontale W sul carrello di destra. Determinare, per W fissato, il legame tra F e la componente verticale u dello spostamento della cerniera centrale.

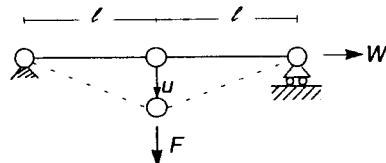


Figura 1.E12

BIBLIOGRAFIA

- [1] HOHN F.E., *Elementary matrix algebra*, 2^a ed., MacMillan, Londra, 1964.
- [2] TIMOSHENKO S.P., *History of strength of materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [3] BENVENUTO E., *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, Firenze, 1981.
- [4] LOVE A.E.H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4^a ed., Dover Publications, New York, 1944.
- [5] GROSS B., *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity*, Hermann, Parigi, 1953.
- [6] KOITER W.T., General theorems for elastic-plastic solids, in: *Progress in solid mechanics*, editori Sneddon e Hill, p.166, North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [7] HODGE P.G.Jr, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [8] KOITER W.T., *On the stability of Elastic Equilibrium*, Tesi, Delft, Olanda, 1945 (traduzione inglese in NASA F1Q 833, 1967).
- [9] BELLUZZI O., *Scienza delle costruzioni*, 4 volumi, Zanichelli, Bologna, 1941-1960.
- [10] FRANCIOSI V., *Scienza delle costruzioni*, 5 volumi, Liguori, Napoli, 1959-1965.
- [11] BALDACCI R., *Scienza delle Costruzioni*, 2 volumi, UTET, Torino, 1970.
- [12] SOLLAZZO A. e altri, *Scienza delle Costruzioni*, UTET, Torino; vol. I (con U. Ricciuti), 1983, vol. II (con S. Marzano), 1988.
- [13] CICALA P., *Scienza delle Costruzioni*, 2 volumi, Levrotto e Bella, Torino, 1958.
- [14] CAPURSO M., *Lezioni di scienza delle costruzioni*, Pitagora, Bologna, 1971.

Statica e cinematica dei mezzi continui

2.1 LO STATO DI SFORZO

2.1.1 IL CONTINUO DI CAUCHY

Si consideri un mezzo continuo tridimensionale in una configurazione Γ , nella quale esso occupi il volume V , delimitato dalla superficie laterale S . Il mezzo sia soggetto ad azioni meccaniche (o forze) agenti al suo interno (ad esempio, il peso proprio) e/o sulla sua superficie laterale (azioni di contatto, quali la pressione del vento). Si consideri una porzione finita ΔV di volume o ΔS di superficie del mezzo; la quotaparte di azioni meccaniche che interessa tale porzione può essere rappresentata dalla forza risultante ΔR applicata in un punto (ad esempio, il baricentro) e dal momento risultante ΔM rispetto a tale punto (Figura 2.1). Il continuo di Cauchy è caratterizzato dall'ipotesi che esistano i limiti finiti

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta R / \Delta V) = \mathbf{f} \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta S) = \mathbf{f} \quad (2.1a, b)$$

mentre

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta V) = \mathbf{0} \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta S) = \mathbf{0} \quad (2.2a, b)$$

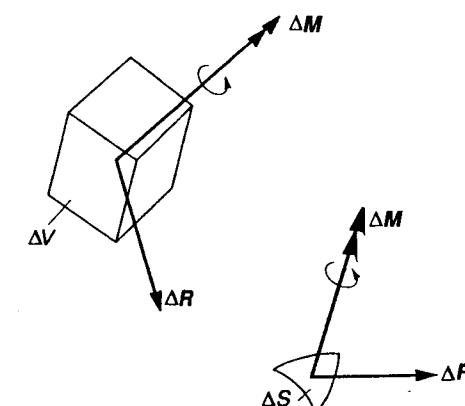


Figura 2.1

Le quantità definite dalle (2.1) rappresentano, rispettivamente, le *forze di volume* \mathbf{F} in V (dimensionalmente, N/mm³) e le *trazioni superficiali* \mathbf{f} su S (dimensionalmente, N/mm²).

L'ipotesi (2.2) definisce il mezzo continuo detto di Cauchy; è possibile ammettere la presenza di un limite finito ma in generale non nullo anche per i rapporti $\Delta\mathbf{M}/\Delta V$ e $\Delta\mathbf{M}/\Delta S$; in tal caso si configura una classe più ampia di corpi, detti polari o di Cosserat, al cui interno si colloca il continuo di Cauchy [1].

Si osservi anche che l'esistenza dei limiti finiti (2.1) è incompatibile con la presenza di azioni concentrate; queste possono essere concepite unicamente come risultanti di azioni locali su di una porzione, finita anche se piccola, di volume o di superficie (Figura 2.2).

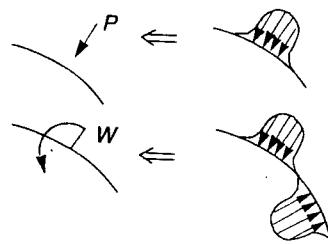


Figura 2.2

La configurazione Γ sia di equilibrio. Le forze agenti sul mezzo dovranno allora soddisfare le equazioni cardinali della statica che in un riferimento cartesiano ortogonale ($O; x_1, x_2, x_3$) si scrivono

$$\int_S f_i dS + \int_V F_i dV = 0 \quad (2.3a)$$

$$\int_S (f_i x_j - f_j x_i) dS + \int_V (F_i x_j - F_j x_i) dV = 0 \quad (2.3b)$$

Le (2.3a) ($i = 1, 2, 3$) sono le equazioni di equilibrio alla traslazione nelle tre direzioni coordinate e le (2.3b) quelle di equilibrio alla rotazione intorno ai tre assi (Figura 2.3), ovviamente significative solo per $j > i$.

2.1.2 DEFINIZIONE DELLO SFORZO DI CAUCHY

Si supponga ora di suddividere idealmente il mezzo continuo in due porzioni. Perché queste restino individualmente in equilibrio occorre postulare la presenza di forze di superficie che le due parti si scambiano attraverso la frontiera di separazione. Si consideri intorno a un punto P di tale frontiera un elemento di area $d\Sigma$, identificato dalla normale uscente \mathbf{n}_α in P (Figura 2.4). Analogamente a quanto fatto per le azioni superficiali esterne, si postula

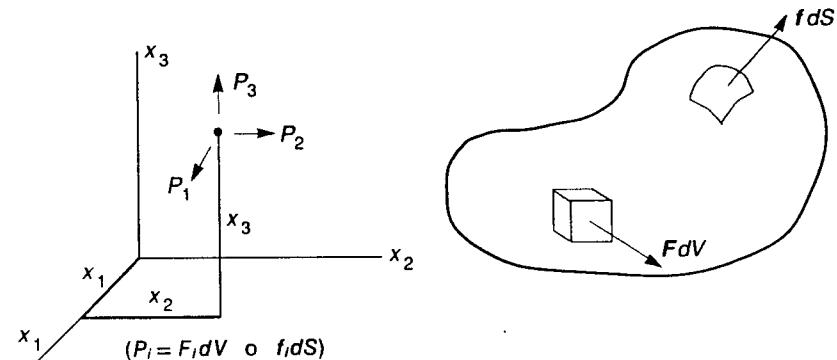


Figura 2.3

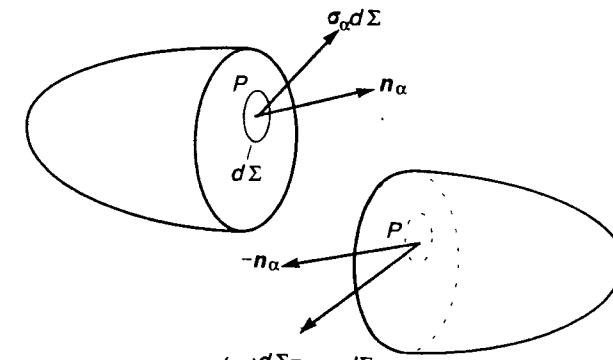


Figura 2.4

$$\lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} (\Delta\mathbf{R}/\Delta\Sigma) = \sigma_\alpha \quad \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} (\Delta\mathbf{M}/\Delta\Sigma) = 0 \quad (2.4a, b)$$

Il vettore $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(P, \mathbf{n}_\alpha)$ è detto *sforzo* o *tensione* nel punto P su di una giacitura di normale \mathbf{n}_α . Le sue componenti hanno le dimensioni di una forza per unità di area (N/mm² o MPa).

Sulla rimanente porzione del continuo suddiviso, l'areola infinitesima $d\Sigma$ intorno a P avrà normale uscente $-\mathbf{n}_\alpha$; il vettore di sforzo in P su questa giacitura risulterà opposto a σ_α . Precisamente

$$\sigma_{(-\alpha)} = -\sigma_\alpha \quad (2.5)$$

Il vettore di sforzo in un punto dipende quindi dalla giacitura dell'areola $d\Sigma$, identificata dalla sua normale uscente \mathbf{n}_α . L'insieme di tutti i vettori σ_α al variare di \mathbf{n}_α individua lo *stato di sforzo* in P . La natura di questo ente è definita dall'equilibrio, che mostra come la misura di sforzo ora introdotta (nota come *sforzo di Cauchy*) sia un *tensore doppio simmetrico*.

Si consideri infatti (Figura 2.5) un tetraedro infinitesimo con tre facce ortogonali agli assi coordinati; la quarta giacitura è identificata dal versore normale \mathbf{n}_α , le cui componenti sono i coseni direttori rispetto agli assi coordinati

$$n_{\alpha i} = \cos(\hat{\mathbf{n}_\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)$$

Detta allora $d\Sigma$ l'area infinitesima della faccia di normale \mathbf{n}_α , l'area $d\Sigma_i$ della faccia ortogonale a x_i , risulterà

$$d\Sigma_i = n_{\alpha i} d\Sigma \quad (a)$$

Sulla giacitura di normale \mathbf{n}_α agisce la forza $\sigma_\alpha d\Sigma$; sulle altre tre facce agiranno invece le forze $-\sigma_i d\Sigma$ (il segno negativo è stato introdotto, coerentemente con la (2.5), in quanto le giaciture hanno normale uscente $-\mathbf{n}_i$, dove \mathbf{n}_i indica il versore orientato nel senso positivo dell'asse x_i). L'equilibrio alla traslazione del tetraedro fornisce quindi

$$\sigma_\alpha d\Sigma - \sigma_1 d\Sigma_1 - \sigma_2 d\Sigma_2 - \sigma_3 d\Sigma_3 = 0$$

Nello scrivere questa relazione non si è tenuto conto della forza di volume FdV perché infinitesimo del terzo ordine; trascurabile rispetto alle altre forze in gioco che sono del secondo ordine; per lo stesso motivo non sono state considerate le variazioni dello sforzo nel passare dal punto P (identificabile con l'origine) al baricentro delle singole facce. Introducendo la (a) e semplificando $d\Sigma$ si ottiene quindi

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 n_{\alpha 1} + \sigma_2 n_{\alpha 2} + \sigma_3 n_{\alpha 3} = \sigma_j n_{\alpha j} \quad (2.6a)$$

Nello scrivere l'ultima uguaglianza si è sottinteso, come si farà anche nel seguito, la sommatoria sugli indici ripetuti.

Si è pertanto dimostrato come il vettore tensione su di una qualunque giacitura di normale \mathbf{n}_α sia noto se lo sono i tre vettori σ_i su tre giaciture mutuamente ortogonali. Lo stato di sforzo in P risulta quindi definito dalle tre componenti vettoriali σ_i o, equivalentemente, dalle nove componenti scalari σ_{ij} . Detta σ la matrice di queste componenti, si può scrivere la (2.6a) in forma compatta come segue

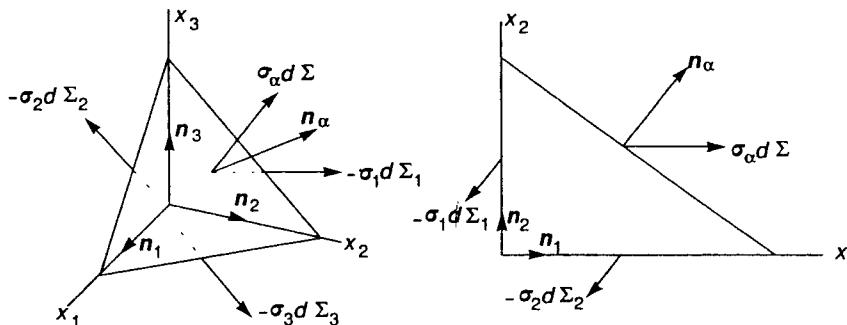


Figura 2.5

$$\sigma_\alpha = \sigma \mathbf{n}_\alpha; \quad \sigma_{\alpha i} = \sigma_{ij} n_{\alpha j} \quad (2.6b, c)$$

dove

$$\sigma = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La (2.6) indica anche che l'ente definito da σ è un *tenso doppio*. Se infatti si considera un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale $(0; \xi_\alpha, \alpha = 1, 2, 3)$, definito dai coseni direttori $n_{\alpha i}$ dei suoi assi rispetto al riferimento $(0; x_i)$, si può verificare che le componenti $\sigma_{\alpha\beta}$ di σ in $(0; \xi_\alpha)$ sono legate alle σ_{ij} dalla relazione

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{ij} n_{\alpha i} n_{\beta j} \quad (2.8)$$

che esprime appunto la legge di variazione delle componenti di un tensore doppio col sistema di riferimento.

La simmetria del tensore σ consegue dall'equilibrio alla rotazione del tetraedro. Si considerino tre assi x'_i paralleli a x_i ma passanti per il baricentro G_α della faccia di normale \mathbf{n}_α , dove la forza $\sigma_\alpha d\Sigma$ è applicata. Le distanze da G_α dei baricentri G_i delle altre tre facce sono $dx_i/3$ (Figura 2.6). Il volume del tetraedro è invece

$$dV = d\Sigma_1(dx_1/3) = d\Sigma_2(dx_2/3) = d\Sigma_3(dx_3/3) \quad (2.9)$$

Nell'equilibrio alla rotazione del tetraedro intorno all'asse x'_i intervengono solo le forze $\sigma_{23} d\Sigma_2$ e $\sigma_{32} d\Sigma_3$; a meno di infinitesimi di ordine superiore al terzo, si ottiene allora

$$\sigma_{23} d\Sigma_2(dx_2/3) - \sigma_{32} d\Sigma_3(dx_3/3)$$

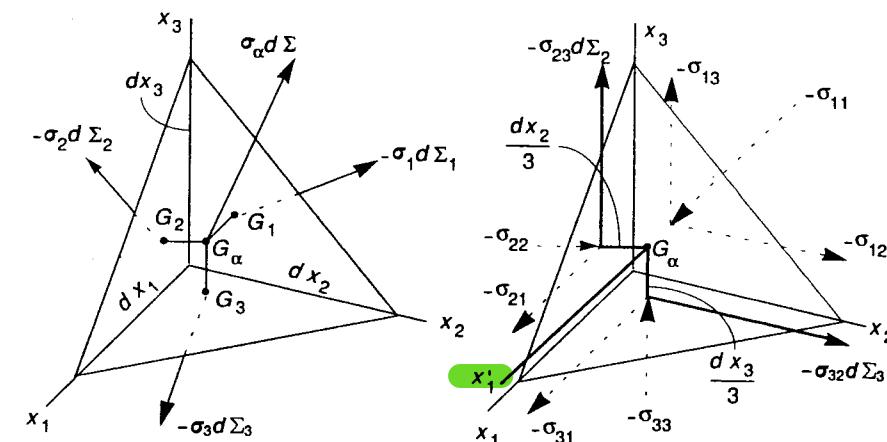


Figura 2.6

relazione che, in virtù della (2.9), impone $\sigma_{32} = \sigma_{23}$. L'equilibrio alla rotazione intorno a x'_2 e x'_3 conduce allo stesso risultato per le altre componenti ad indici diversi di σ . Si conclude pertanto

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (2.10)$$

Per maggior chiarezza grafica, l'equivalente operazione nel piano è illustrata in Figura 2.7; l'equilibrio alla rotazione intorno al punto G_α (per cui passa l'asse x'_1 ortogonale al piano del disegno) mostra immediatamente che vale l'egualianza $\sigma_{21} = \sigma_{12}$.

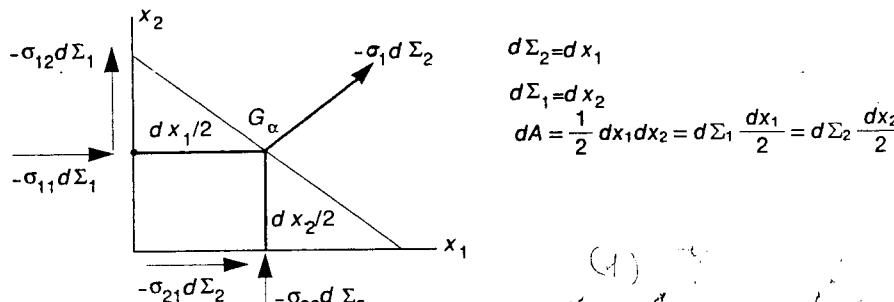


Figura 2.7

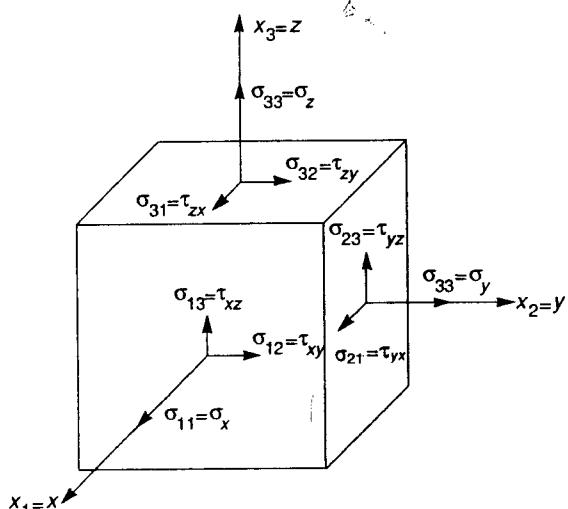


Figura 2.8

Le nove componenti del tensore degli sforzi sono solitamente illustrate evidenziando le tre giaciture ortogonali mediante un cubetto ritagliato intorno al punto (Figura 2.8). Le componenti ad indici diversi, dette *tangenziali*, vengono spesso indicate con τ_{ij} ; alle componenti ad indici uguali, dette *normali* o *dirette*, viene in tal caso attribuito un unico indice. Se si denota con (x, y, z) la terna di riferimento, l'espressione (detta *ingegneristica*) del tensore degli sforzi diviene

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\tau_{ji} = \tau_{ij}) \quad (2.11)$$

2.1.3 SFORZI E DIREZIONI PRINCIPALI - INVARIANTI

Con la rotazione del sistema di riferimento, le componenti del tensore degli sforzi si trasformano seguendo la legge di variazione di un tensore doppio, che si mantiene simmetrico. Ci si chiede ora se esistano giaciture n_α privilegiate, rispetto alle quali le componenti di sforzo assumano un aspetto particolare. Più precisamente, si ricercano (se esistono) giaciture su cui il vettore tensione (2.6) presenti solo componente normale; risultati cioè

$$\sigma_n = s n_\alpha \quad (2.12)$$

In virtù della (2.6b), l'identificazione di tali giaciture si riconduce alla ricerca della soluzione del problema

$$\sigma n_\alpha = s n_\alpha \quad (2.13a)$$

o, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - s & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - s & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.13b)$$

La ricerca delle soluzioni non banali della (2.13) costituisce un problema di autovalori; esso si riconduce alla determinazione dei valori di s che annullino il determinante della matrice nella (2.13b), condizione che si traduce nell'equazione di terzo grado

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (2.14)$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy} \tau_{yx} - \tau_{yz} \tau_{zy} - \tau_{zx} \tau_{xz} \\ J_3 &= \det(\sigma) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Un classico teorema di algebra lineare assicura che, essendo σ simmetrica, la (2.14) ha sempre tre radici (o *autovalori*) reali s_1, s_{II} e s_{III} , detti *sforzi (o tensioni) principali*, in corrispondenza dei quali la (2.13) presenta soluzioni non banali. Se questi valori risultano distinti, i tre corrispondenti *autovettori* n_1, n_{II}, n_{III} identificano tre direzioni mutuamente ortogonali, pure dette *principali*, che costituiscono un riferimento privilegiato. In presenza di autovalori coincidenti, esiste una molteplicità di direzioni principali, al cui interno è comunque possibile scegliere una terna triortogonale. Qualora sia $s_1 = s_{II} = s_{III}$ qualunque riferimento risulta principale.

I valori degli sforzi principali non dipendono dal sistema di riferimento originariamente assunto; le radici della (2.14) saranno pertanto sempre le stesse e pure indipendenti dal riferimento dovranno risultare i coefficienti (2.15), cui ci si riferisce come agli *invarianti di sforzo* (rispettivamente lineare, quadratico e cubico). Nel riferimento principale le loro espressioni si semplificano e divengono

$$J_1 = s_1 + s_{II} + s_{III}; \quad J_2 = s_1 s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_1; \quad J_3 = s_1 s_{II} s_{III} \quad (2.16)$$

Ovviamente, qualunque combinazione delle (2.15) da luogo a quantità indipendenti dal riferimento (le tensioni principali sono esse stesse degli invarianti). È tuttavia possibile dimostrare che un tensore doppio possiede tre soli invarianti indipendenti.

2.1.4 COMPONENTI IDROSTATICA E DEVIATORICA DEGLI SFORZI

Risulta a volte conveniente esprimere lo stato di sforzo come somma dei due seguenti addendi

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} + S_{ij} \quad (2.17a)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{bmatrix} \quad (2.17b)$$

dove

$$p = \frac{J_1}{3} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (s_1 + s_{II} + s_{III}) \quad (2.18)$$

è noto come *pressione idrostatica*. Nella (2.17a) il simbolo δ_{ij} indica il tensore doppio identità o di Kronecker, che vale, per definizione

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (b)$$

Il primo addendo della (2.17) costituisce la componente detta appunto idrostatica (o sferica) di sforzo (la denominazione è dettata dal fatto che lo stato di sforzo in un elemento di materiale soggetto a pressione uniforme è costituito da questo solo termi-

ne), mentre il secondo addendo è detto deviatore di tensione. In virtù della (2.18) la sua espressione risulta

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z}{3} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

È facile verificare che i valori principali \bar{s}_α delle tensioni deviatoriche sono

$$\bar{s}_\alpha = s_\alpha - p, \quad \alpha = I, II, III \quad (2.20)$$

mentre le direzioni principali coincidono con quelle di σ . Gli invarianti del deviatore risultano

$$J'_1 = J_1 - 3p = 0 \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} J'_2 &= \frac{1}{3} (J_1^2 - 3J_2) = \frac{1}{6} [(s_1 - s_{II})^2 + (s_{II} - s_{III})^2 + (s_{III} - s_1)^2] = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \end{aligned} \quad (2.21b)$$

$$J'_3 = \frac{1}{27} (2J_1^3 - 9J_1 J_2 + 27J_3) = (s_1 - p)(s_{II} - p)(s_{III} - p) \quad (2.21c)$$

ESEMPIO 2.1 Si consideri il tensore degli sforzi

$$\sigma = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 10 \\ -20 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

Gli invarianti (2.15) valgono

$$J_1 = 103 \quad J_2 = 2200 \quad J_3 = 0$$

L'equazione (2.14) si scrive quindi

$$s^3 - 103s^2 + 2200s = 0$$

e le sue radici risultano

$$s_1 = 72.766 \quad s_{II} = 30.234 \quad s_{III} = 0$$

Le corrispondenti direzioni principali sono le soluzioni non banali del sistema omogeneo (2.13b), in cui s è posto, di volta in volta, uguale a una delle tre tensioni principali. Si ottiene

$$\mathbf{n}_1 = \begin{Bmatrix} .536 \\ -.840 \\ .077 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{n}_{II} = \begin{Bmatrix} .794 \\ .533 \\ .292 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{n}_{III} = \begin{Bmatrix} .286 \\ .095 \\ -.953 \end{Bmatrix}$$

Tali vettori sono stati normalizzati imponendo la condizione $\mathbf{n}_\alpha^T \mathbf{n}_\alpha = 1$, in modo che le loro componenti rappresentino i coseni direttori delle tre direzioni principali rispetto agli assi del riferimento originario. È facile verificare che i tre vettori risultano mutuamente ortogonali. Si può anche constatare come gli invarianti siano effettivamente tali e che, in particolare, risulta $J_1 = s_1 + s_{II}$ e $J_2 = s_1 s_{II}$.

La pressione idrostatica e il deviatore valgono

$$p = 103/3 = 34.333 \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.667 & -20 & 10 \\ -20 & 25.667 & 0 \\ 10 & 0 & -31.333 \end{bmatrix}$$

È possibile verificare che gli autovalori di \mathbf{S} soddisfano la (2.20).

ESEMPIO 2.2 Si consideri lo stato di sforzo

$$\sigma = \begin{bmatrix} 75 & 20 & 0 \\ 20 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

Gli sforzi principali valgono, come è facile verificare

$$s_1 = 85; \quad s_{II} = s_{III} = 35$$

La direzione principale \mathbf{n}_1 è univocamente definita; essa si ottiene come soluzione non banale del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 75 - s_1 & 20 & 0 \\ 20 & 45 - s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 35 - s_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 20 & 0 \\ 20 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e risulta, normalizzando

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .894 \\ .447 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Gli autovettori corrispondenti ai due rimanenti valori principali (tra loro coincidenti) sono invece le soluzioni non banali del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 75 - 35 & 20 & 0 \\ 20 & 45 - 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 - 35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e risultano

$$\mathbf{n}_{II, III} = \frac{1}{\sqrt{5\alpha^2 + \beta^2}} \begin{Bmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

Al variare di α e β si ottengono tutte le direzioni nel piano ortogonale a \mathbf{n}_1 . È ovviamente sempre possibile scegliere in questo piano due direzioni tra loro ortogonali. Ad esempio

$$\mathbf{n}_{II} = \begin{Bmatrix} -.447 \\ .894 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{n}_{III} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

2.1.5 STATI DI SFORZO PIANI

2.1.5.1 Definizione

Si consideri (Figura 2.9) un tetraedro di Cauchy riferito alla terna principale. Il tensore degli sforzi risulta allora diagonale, con sole tensioni normali pari ai valori principali. Detti α_1 , α_{II} e α_{III} i coseni direttori di \mathbf{n}_α rispetto agli assi principali, dalla (2.6) si ottiene

$$\sigma_\alpha = \begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha II} \\ \sigma_{\alpha III} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{II} \\ \alpha_{III} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

relazione che esprime il vettore tensione sulla generica giacitura \mathbf{n}_α in funzione degli sforzi principali.

Si supponga adesso che una delle tensioni principali, ad esempio s_{III} , sia nulla. La (2.22) allora mostra che la componente $\sigma_{\alpha III}$ risulterà nulla su qualunque giacitura, cioè che il vettore σ_α sarà sempre contenuto nel piano ortogonale a \mathbf{n}_{III} . In tal caso, lo stato tensionale si dice *piano*.

Senza perdita di generalità, si può identificare la direzione \mathbf{n}_{III} con l'asse z ; essendo

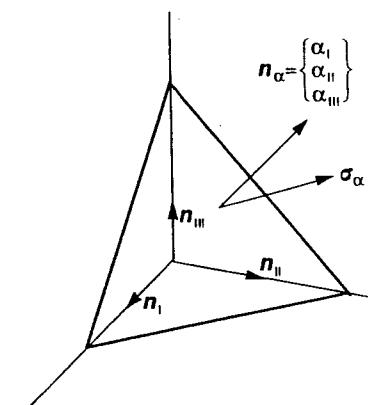


Figura 2.9

questa una direzione principale, oltre allo sforzo normale $\sigma_z = s_{II}$ si annulleranno anche le tensioni tangenziali τ_{zx} e τ_{zy} . Le uniche componenti non nulle saranno quindi σ_x , σ_y e $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, contenute nel piano (x, y) , detto *piano delle tensioni*.

Per stati di sforzo piani, gli invarianti (2.15) divengono

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad J_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy} \tau_{yx} \quad J_3 = 0 \quad (2.23)$$

Gli sforzi principali sono sempre forniti dalle radici della (2.14) che, una volta eliminata l'ovvia soluzione $s_{III} = 0$, si riconduce all'equazione di secondo grado

$$s^2 - (\sigma_x + \sigma_y)s + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

da cui gli sforzi principali non nulli possono essere immediatamente calcolati. Si ottiene

$$\begin{cases} s_I \\ s_{II} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.24)$$

La componente idrostatica e il deviatore di uno stato piano di sforzo si esprimono

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{3} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \frac{-\sigma_x + 2\sigma_y}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (2.25a, b)$$

2.1.5.2 Sforzi normali e tangenziali

Si consideri (Figura 2.10) il vettore tensione σ_α su di una faccia di normale n_α nel piano delle tensioni. In accordo con la (22), le sue componenti risultano

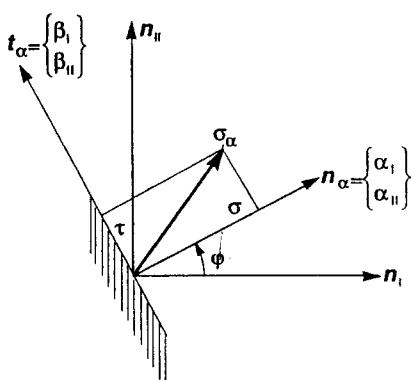


Figura 2.10

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} s_I \alpha_I \\ s_{II} \alpha_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_I \cos \varphi \\ s_{II} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Si indichino ora con $\sigma = n_\alpha^\top \sigma_\alpha$ e $\tau = t_\alpha^\top \sigma_\alpha$ le componenti scalari di σ_α nel riferimento (n_α, t_α) in Figura 2.10 (rispettivamente, sforzo normale e tangenziale). Esse valgono

$$\sigma = s_I \cos^2 \varphi + s_{II} \sin^2 \varphi \quad \tau = (s_{II} - s_I) \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.26a, b)$$

È di interesse determinare le giaciture nel piano delle tensioni sulle quali σ e τ assumono i loro valori massimi e minimi. Differenziando le (2.26) rispetto a φ si ottiene

$$\partial \sigma / \partial \varphi = 2(s_{II} - s_I) \sin \varphi \cos \varphi = 2\tau \quad (2.27a)$$

$$\partial \tau / \partial \varphi = (s_{II} - s_I)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = (s_{II} - s_I) \cos 2\varphi \quad (2.27b)$$

Appare dalla (2.27a) che risulta $\partial \sigma / \partial \varphi = 0$ sulle giaciture principali, dove appunto è $\tau = 0$; i valori estremi dello sforzo normale sono quindi quelli principali. La (2.27b) mostra invece come le massime τ si riscontrino su giaciture inclinate di $\pm \pi/4$ rispetto alle direzioni principali; su di esse la (2.26b) fornisce $\tau = \pm (s_I - s_{II})/2$. Si ha pertanto

$$\sigma_{\max(\min)} = \max(\min)\{s_I, s_{II}\} \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}|s_I - s_{II}| \quad (2.27c)$$

Si noti che massimi e minimi vanno intesi solo con riferimento a giaciture contenute nel piano delle tensioni.

2.1.5.3 Diagramma di Mohr

Utilizzando le identità

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \quad \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

dalle (2.26) si ottiene

$$\sigma - \frac{s_I + s_{II}}{2} = \left(\frac{s_I - s_{II}}{2} \right) \cos 2\varphi \quad (2.28a)$$

$$\tau = - \left(\frac{s_I - s_{II}}{2} \right) \sin 2\varphi \quad (2.28b)$$

Quadrando e sommando, si perviene alla relazione

$$\left(\sigma - \frac{s_I + s_{II}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{s_I - s_{II}}{2} \right)^2 \quad (2.29)$$

La (2.29) (come del resto le (2.28) in forma parametrica) rappresenta l'equazione di una

circonferenza nel piano (σ, τ), con centro nel punto ($\sigma = c, \tau = 0$) e raggio R , dove

$$c = \frac{s_I + s_{II}}{2} \quad R = \frac{|s_I - s_{II}|}{2} \quad (2.30a)$$

Per un dato stato di sforzo piano, i valori delle tensioni normali e tangenziali *relativi a una qualunque giacitura nel piano delle tensioni* appartengono a questa circonferenza, nota come *cerchio di Mohr*.

In virtù delle (2.23) si può anche scrivere

$$c = \frac{1}{2} J_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R^2 = \frac{1}{4} (J_1^2 - 4J_2) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.30b)$$

espressioni che permettono di definire il cerchio di Mohr senza il calcolo preliminare dei valori principali di sforzo. Il significato dei termini è illustrato in Figura 2.11.

Dal confronto con la Figura 2.10 appare come una rotazione φ del sistema di riferimento nel piano delle tensioni si traduca in una rotazione pari a 2φ nel cerchio di Mohr; due punti diametralmente opposti sul cerchio corrispondono quindi a due giaciture tra loro ortogonali.

L'inclinazione del sistema di riferimento rispetto alla terna principale può essere ricavata risolvendo le (2.28) rispetto a φ . Si ottiene

$$\tan 2\varphi = -\frac{\tau}{\sigma - c} \quad (2.31)$$

con c dato dalla (2.30).

Due stati di sforzo piano cui corrisponda lo stesso cerchio di Mohr possono differire tra loro al più per l'orientazione del riferimento principale.

Il diagramma di Mohr è una rappresentazione grafica di grande utilità pratica, in quanto consente una visualizzazione immediata degli aspetti fondamentali di uno stato di sforzo piano (sforzi e direzioni principali, tensioni tangenziali massime). Occorre prestare una certa

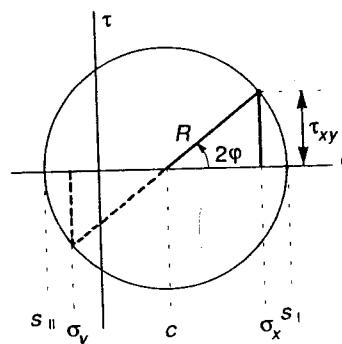


Figura 2.11

attenzione alle convenzioni di segno, al primo impatto piuttosto ostili. Esse coincidono con quelle usate nella definizione del tensore degli sforzi (e illustrate in Figura 2.8) solamente per le tensioni normali, positive se di trazione. Per quanto riguarda invece le tensioni tangenziali, le convenzioni implicitamente introdotte con la Figura 2.10 richiedono che le τ su due giaciture ortogonali abbiano lo stesso valore assoluto ma segno opposto. Per evitare confusioni legate al segno negativo nella (2.31), conviene assumere positive le tensioni tangenziali se suggeriscono una rotazione in verso orario dell'elemento di materiale nel piano. In tal caso le rotazioni degli assi del sistema di riferimento avvengono nello stesso verso che nel cerchio di Mohr, ovviamente con angoli dimezzati.

ESEMPIO 2.3 Si consideri lo stato di sforzo in Figura 2.12a. Per le convenzioni precedentemente assunte si avrà, rispettivamente sulla faccia di normale x e su quella di normale y :

$$\sigma_x = 60, \tau_{xy} = -30 \quad \sigma_y = -20, \tau_{yx} = 30$$

Sarà allora, per le (2.30b)

$$c = 20 \quad R = 50$$

Le due tensioni principali nel piano, definite dalla (2.24), valgono quindi

$$s_{I,II} = c \pm R = \begin{cases} 70 \\ -30 \end{cases}$$

Il cerchio di Mohr relativo a tale stato tensionale è illustrato in Figura 2.12b. I due punti relativi alle giaciture di normale x e y sono indicati con A e B , rispettivamente. Le due tensioni principali corrispondono ai punti in cui la circonferenza interseca l'asse delle σ (punti S' e S''). Le direzioni principali sono ruotate rispetto agli assi coordinati di un angolo φ il cui valore assoluto si calcola mediante la (2.31) e risulta

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan(30/40) = .322 \text{ rad}$$

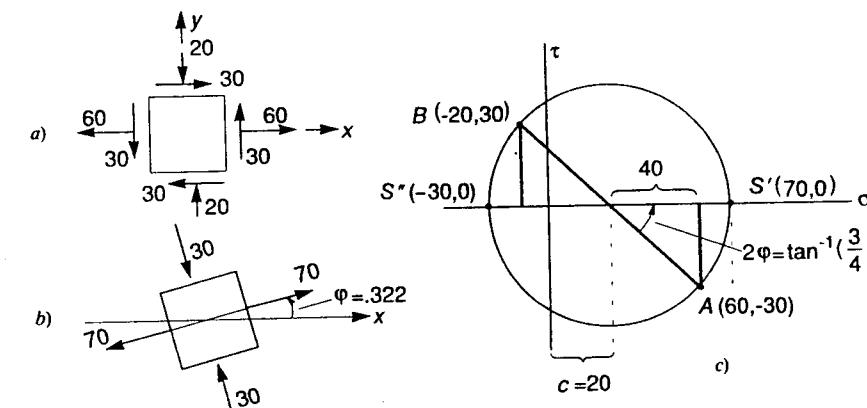


Figura 2.12

Rispetto all'asse x , la direzione principale \mathbf{n}_1 risulterà ruotata di φ in senso antiorario, in quanto nel cerchio di Mohr antioraria è la rotazione che conduce dal punto A al punto S' . Nel riferimento principale, lo stato di sforzo si presenta come indicato in Figura 2.12c.

Si osservi che sia le tensioni principali che la tangente dell'angolo 2φ sono direttamente ricavabili dal diagramma di Mohr. Anche se un tale procedimento non è in realtà competitivo rispetto al calcolo (oltretutto molto semplice) mediante le (2.24) e (2.31), la visualizzazione grafica risulta molto utile.

2.1.6 STATI DI SFORZO SPAZIALI

2.1.6.1 Sforzi normali e tangenziali

Si consideri ancora il tetraedro di Cauchy di Figura 2.9; il vettore tensione sulla faccia di normale \mathbf{n}_α è espresso dalla (2.22). Esso può essere decomposto nella somma delle sue componenti vettoriali normale (diretta come \mathbf{n}_α) e tangenziale (radente alla faccia ed indicata con τ)

$$\sigma_\alpha = \sigma \mathbf{n}_\alpha + \tau \quad (2.32)$$

come nel caso piano, si definisce sforzo normale la quantità $\sigma = \mathbf{n}'_\alpha \sigma_\alpha$; lo sforzo tangenziale τ , di cui interessa essenzialmente il valore assoluto, viene ora identificato con il *modulo* del vettore τ . Con semplici calcoli, si ottiene

$$\sigma = \mathbf{n}'_\alpha \sigma_\alpha = s_1 \alpha_1^2 + s_{II} \alpha_{II}^2 + s_{III} \alpha_{III}^2 \quad (2.33a)$$

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \tau' \tau = (\sigma_\alpha - \sigma \mathbf{n}_\alpha)' (\sigma_\alpha - \sigma \mathbf{n}_\alpha) = \sigma'_\alpha \sigma_\alpha - \sigma^2 = \\ &= s_1^2 \alpha_1^2 + s_{II}^2 \alpha_{II}^2 + s_{III}^2 \alpha_{III}^2 - (s_1 \alpha_1^2 + s_{II} \alpha_{II}^2 + s_{III} \alpha_{III}^2)^2 \end{aligned} \quad (2.33b)$$

In quanto coseni direttori, le componenti di \mathbf{n}_α dovranno inoltre rispettare la condizione

$$\alpha_1^2 + \alpha_{II}^2 + \alpha_{III}^2 = 1 \quad (2.33c)$$

Le giaciture sulle quali lo sforzo normale σ è massimo o minimo possono essere calcolate imponendo che sia $\partial\sigma/\partial\alpha_i = 0$ ($i = I, II, III$) sotto la condizione (2.33c). Eliminando, ad esempio, $\alpha_{III}^2 = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_{II}^2$ dalla (2.33a) si ottiene

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha_I} = 2(s_1 - s_{III})\alpha_1 = 0; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha_{II}} = 2(s_{II} - s_{III})\alpha_{II} = 0$$

se $s_1 \neq s_{II} \neq s_{III}$, l'unica soluzione è $\alpha_1 = \alpha_{II} = 0$, che implica $\alpha_{III} = \pm 1$ e corrisponde alla direzione principale \mathbf{n}_{III} . Analoghe soluzioni si ottengono eliminando α_{II}^2 e α_1^2 . Le giaciture sulle quali σ è stazionario sono quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_{II} \\ \alpha_{III} \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

ovvero le giaciture principali. In particolare, gli sforzi normali saranno massimi o minimi su una di queste giaciture. Pertanto

$$\sigma_{\max(\min)} = \max(\min) \{ s_I, s_{II}, s_{III} \} \quad (2.34)$$

In modo analogo, le giaciture su cui lo sforzo tangenziale τ è massimo si ottengono imponendo $\partial\tau^2/\partial\alpha_i = 0$ ($i = I, II, III$) sotto la condizione (2.33c). Eliminando dalla (2.33b) ancora $\alpha_{III}^2 = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_{II}^2$ (ad esempio), si ottiene il sistema

$$\alpha_I(s_I - s_{III}) \left[(s_I - s_{III}) \left(\alpha_I^2 - \frac{1}{2} \right) + (s_{II} - s_{III}) \alpha_{II}^2 \right] = 0$$

$$\alpha_{II}(s_{II} - s_{III}) \left[(s_{II} - s_{III}) \left(\alpha_{II}^2 - \frac{1}{2} \right) + (s_I - s_{III}) \alpha_I^2 \right] = 0$$

Se $s_I \neq s_{II} \neq s_{III}$, le uniche soluzioni risultano

$$\begin{array}{lll} \alpha_I = 0 & \alpha_{II} = 0 & \alpha_{III} = \pm 1 \\ \alpha_I = \pm 1/\sqrt{2} & \alpha_{II} = 0 & \alpha_{III} = \pm 1/\sqrt{2} \\ \alpha_I = 0 & \alpha_{II} = \pm 1/\sqrt{2} & \alpha_{III} = \pm 1/\sqrt{2} \end{array}$$

Ripetendo il calcolo eliminando successivamente α_{II}^2 e α_I^2 , si perviene alle seguenti soluzioni non ripetute

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_I \\ \alpha_{II} \\ \alpha_{III} \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1/\sqrt{2} & 0 & \pm 1/\sqrt{2} \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} \\ \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \end{array} \right|$$

Le prime tre corrispondono alle giaciture principali, dove $\tau = 0$ e quindi τ^2 è minimo. Le altre identificano direzioni ortogonali a un asse principale e ruotate di $\pi/4$ rispetto agli altri due. τ risulterà massima su una di tali giaciture; con riferimento a esse, dalla (2.33b) si ottiene

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \max \{ |s_I - s_{II}|, |s_{II} - s_{III}|, |s_{III} - s_I| \} \quad (2.35)$$

Nel derivare questi risultati, si è ipotizzato che le tensioni principali siano tutte diverse tra loro. Nel caso di valori coincidenti esiste una molteplicità di soluzioni che riflette la molteplicità delle direzioni principali, ma non altera le conclusioni.

2.1.6.2 Diagrammi di Mohr

Risolvendo le (2.33a, b) rispetto ai coseni direttori, si ottiene

$$\alpha_I^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - s_{II})(\sigma - s_{III})}{(s_I - s_{II})(s_I - s_{III})} \quad (2.36a)$$

$$\alpha_{II}^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - s_{III})(\sigma - s_I)}{(s_{II} - s_{III})(s_{II} - s_I)} \quad (2.36b)$$

$$\alpha_{III}^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - s_I)(\sigma - s_{II})}{(s_{III} - s_I)(s_{III} - s_{II})} \quad (2.36c)$$

È lecito assumere, senza perdita di generalità, che sia $s_I > s_{II} > s_{III}$; dal momento che i primi membri delle (2.36) sono non-negativi, se ne traggono le diseguaglianze seguenti

$$\begin{aligned} \tau^2 + (\sigma - s_{II})(\sigma - s_{III}) &\geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - s_{III})(\sigma - s_I) &\leq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - s_I)(\sigma - s_{II}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nel piano $\sigma - \tau$, le (2.37) identificano l'area tratteggiata in Figura 2.13, delimitata da tre cerchi di Mohr, ognuno riferito a un piano principale. I valori delle tensioni normale e tangenziale su una qualunque giacitura risultano compresi in questa regione.

Si noti che in presenza di due sforzi principali coincidenti, due dei cerchi si sovrappongono mentre il terzo degenera in un punto. Per uno stato di sforzo idrostatico ($s_I = s_{II} = s_{III}$) tutti e tre i cerchi si riducono a un unico punto. Nel caso di stati di sforzo piani, una delle tensioni principali è nulla; due cerchi risultano allora tangentì all'asse delle τ nell'origine, mentre il terzo è quello definito nel Paragrafo 2.1.5.3. Se le due tensioni principali non nulle hanno lo stesso segno, la tensione tangenziale massima è data non dalla seconda delle (2.27c) (che definisce solo il valore massimo nel piano degli sforzi), bensì dalla (2.35) particolarizzata al caso $s_{III} = 0$.

I diagrammi di Mohr costituiscono un'efficace rappresentazione grafica di uno stato di sforzo. Due stati tensionali cui corrispondono gli stessi cerchi di Mohr hanno molte caratteristiche in comune; in particolare, è possibile trovare due sistemi di riferimento rispetto ai quali essi presentano le stesse componenti scalari; tali riferimenti, peraltro, non sono necessariamente sovrapposti. Analogamente a quanto visto nel caso piano, i diagrammi potrebbero essere usati per la definizione grafica delle giaciture rispetto ai piani principali [2]; il procedimento, tuttavia, è troppo intricato per essere competitivo col calcolo analitico.

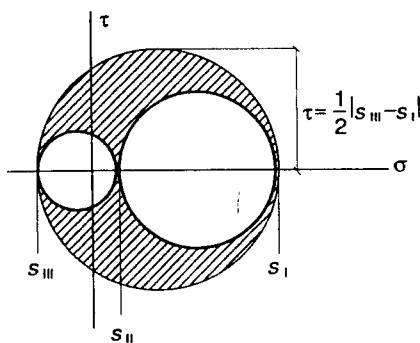


Figura 2.13

2.1.7 LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

2.1.7.1 Posizione del problema

Anche se il tensore degli sforzi è stato definito postulando l'equilibrio, nulla è stato ancora detto sui legami che l'equilibrio è in grado di instaurare tra le componenti σ_{ij} del tensore e le forze agenti sul mezzo continuo.

In virtù della sua definizione (2.1), (2.2), sul continuo di Cauchy agiscono solo forze, di superficie o di volume. Queste ultime (F_i) sono considerate note, mentre il contorno S può essere suddiviso in due parti: un contorno caricato S_F su cui agiscono trazioni superficiali f_i note, e un contorno vincolato S_u che trasmette reazioni vincolari r_i a priori incognite (Figura 2.14). Nel loro complesso, queste azioni esterne dovranno soddisfare le equazioni cardinali della statica (2.3) scritte con riferimento alla configurazione Γ .

2.1.7.2 Le equazioni indefinite di equilibrio

Si consideri (Figura 2.15) un punto P nel continuo e si ritagli intorno a esso un parallelepipedo infinitesimo con spigoli dx_i paralleli agli assi coordinati. Si mettano in evidenza le componenti vettoriali di tensione sulle facce di questo parallelepipedo,

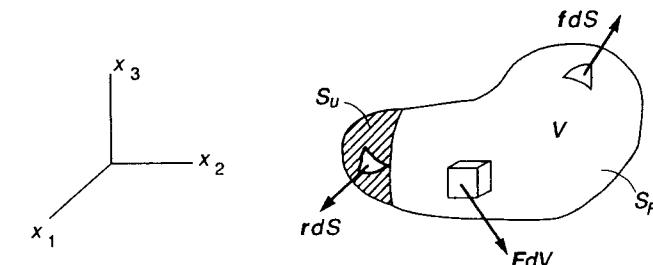


Figura 2.14

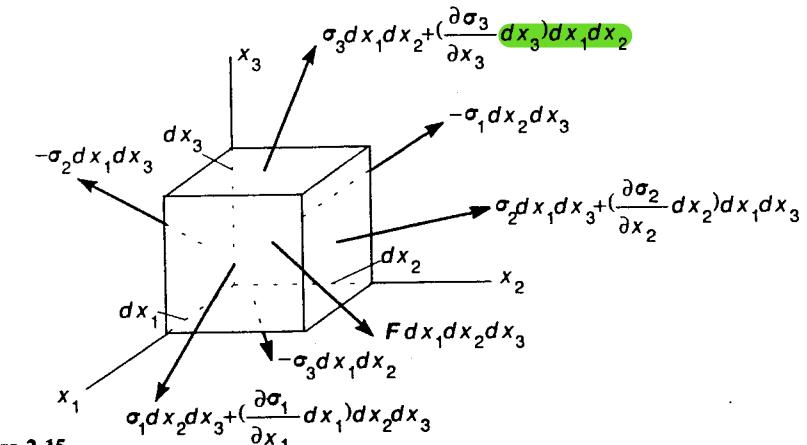


Figura 2.15

tenendo conto delle loro variazioni nei versi positivi delle x_i . Nel parallelepipedo sarà inoltre presente la forza di volume $\mathbf{F}dV$.

L'equilibrio alla traslazione fornisce immediatamente

$$\partial\sigma_1/\partial x_1 + \partial\sigma_2/\partial x_2 + \partial\sigma_3/\partial x_3 + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{in } V \quad (2.38a)$$

o, compattamente

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } V \quad (2.38b)$$

o anche, in notazione ingegneristica

$$\begin{aligned} \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + \partial\tau_{zx}/\partial z + F_x &= 0 \\ \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{zy}/\partial z + F_y &= 0 \quad \text{in } V \\ \partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.38c)$$

(nello scrivere la (2.38b) è stato fatto uso della seguente notazione per le derivate: $g_{i,j} = \partial g_i / \partial x_j$). Le (2.38) sono note come *equazioni indefinite di equilibrio* e forniscono un legame differenziale tra le componenti σ_{ij} del tensore degli sforzi e le forze di volume F_i , legame che deve valere in ogni punto del mezzo. Si osservi che esse coinvolgono le forze di volume e le variazioni delle componenti di sforzo tra due punti a distanza infinitesima, cioè le quantità che erano state trascurate nello scrivere le (2.6) perché di ordine superiore alle altre forze allora in gioco.

L'equilibrio alla rotazione del parallelepipedo in Figura 2.15 non permette di formulare relazioni ulteriori, limitandosi a confermare la simmetria del tensore di Cauchy.

2.1.7.3 Le condizioni di equilibrio al contorno

Un elemento infinitesimo di volume adiacente al contorno può essere visualizzato mediante il tetraedro di Figura 2.5, in cui la generica normale \mathbf{n}_α all'areola $d\Sigma$ è sostituita dalla normale \mathbf{n} alla superficie esterna dS . L'equilibrio richiede che la componente vettoriale di tensione σ_α su questa giacitura coincida con le trazioni superficiali agenti nel punto, siano esse forze note \mathbf{f} (su S_F) o reazioni vincolari incognite \mathbf{r} (su S_u). Dalle (2.6) si ottiene allora

$$\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = \begin{cases} \mathbf{f} & \text{su } S_F \\ \mathbf{r} & \text{su } S_u \end{cases} \quad (2.39a)$$

o anche

$$\sigma_{ij} n_i = \begin{cases} f_j & \text{su } S_F \\ r_j & \text{su } S_u \end{cases} \quad (2.39b)$$

Le (2.40) si limitano a definire le reazioni vincolari che conseguono, per equilibrio, a una determinata distribuzione di sforzi. Le effettive condizioni al contorno sono date dalle (2.39), che esprimono il legame di equilibrio tra sforzi e trazioni superficiali applicate e, scritte in notazione ingegneristica, divengono

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= f_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z &= f_y \quad \text{su } S_F \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= f_z \end{aligned} \quad (2.39c)$$

2.1.7.4 Considerazioni conclusive

Le equazioni di equilibrio, sia indefinite che al contorno, sono state ottenute nell'ipotesi che le sei *equazioni cardinali della statica* (2.3) fossero verificate per il continuo nella configurazione Γ e, quindi, per ogni suo elemento infinitesimo interno o adiacente al contorno. Si potrebbe peraltro dimostrare che se le (2.38) sono soddisfatte ovunque in V e le (2.39, 2.40) ovunque su S , allora le forze applicate certamente soddisfano le (2.3). Si noti che tra le forze applicate occorre considerare anche le reazioni vincolari che, se definite dalle (2.40), assicurano l'equilibrio globale del mezzo.

È peraltro evidente che le tre sole equazioni differenziali (2.38) in V e le condizioni al contorno (2.39) su S_F non sono sufficienti a determinare univocamente le sei *componenti indipendenti* del tensore degli sforzi in funzione delle forze di volume o di superficie applicate. **Lo stato di sforzo non è calcolabile con il solo equilibrio: il continuo è staticamente indeterminato.**

Per semplicità, nella trattazione si è fatto riferimento a terne cartesiane ortogonali. Peraltra, in un qualsiasi sistema di riferimento ortogonale, anche curvilineo, l'equilibrio del tetraedro di Figura 2.5 definisce lo sforzo di Cauchy come un tensore doppio simmetrico, come tale comunque espresso dalla (2.11) che richiede semplicemente una reinterpretazione degli indici. In notazione tensoriale, le equazioni indefinite di equilibrio (2.38) e al contorno (2.39) si scrivono, rispettivamente

$$\operatorname{div}(\sigma) + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{in } V \quad (2.38d)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{su } S_F \quad (2.39d)$$

dove i simboli denotano operazioni *absolute* su enti tensoriali o vettoriali. Per coordinate curvilinee ortogonali, la (2.39d) è identica alle (2.39a-c), a parte il significato degli indici. L'operazione di divergenza di un tensore, che appare nella (2.38d), si traduce nella prima parte delle (2.38a-c) nel caso di coordinate cartesiane ortogonali, ma corrisponde a operazioni differenziali diverse in altri sistemi di coordinate. Ad esempio, in un riferimento cilindrico ($O; r, \vartheta, z$), le (2.38) si esplicitano come segue [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\vartheta r}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\tau_{z\vartheta}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{rz}}{r} + F_\vartheta &= 0 \quad \text{in } V \\ \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\vartheta z}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.38e)$$

Di particolare interesse è il caso assialsimmetrico, per il quale si ha $F_\vartheta = 0$, $\tau_{\vartheta r} = \tau_{\vartheta z} = 0$ e le componenti non nulle risultano indipendenti da ϑ . Le (2.38e) si riducono allora alle due sole equazioni

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad \text{in } V \quad (2.38f)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0$$

Per stati di sforzo piani, è anche $F_z = 0$, $\tau_{rz} = \sigma_z = 0$. Le (2.38f) si particolarizzano quindi nell'unica equazione

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad \text{in } V \quad (2.38g)$$

valida anche per $\sigma_z \neq 0$, purché indipendente da z .

2.2 IL CONTINUO DEFORMABILE

2.2.1 CONGRUENZA

Si consideri ora il continuo come un mezzo deformabile (Figura 2.16). Al tempo $t = 0$ esso si trovi in una configurazione (*di riferimento, iniziale o indeformata*) $\bar{\Gamma}$, in cui un suo punto P abbia, rispetto a una terna cartesiana ortogonale, coordinate X_i ($i = 1, 2, 3$). Si supponga che il continuo subisca un cambiamento di configurazione che lo porti, al generico tempo t , nella configurazione *corrente* $\Gamma(t)$. Il punto P si troverà ora in una posizione p , di coordinate x_i rispetto alla stessa terna di riferimento.

La funzione vettoriale

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t) \quad (2.41)$$

è detta *traiettoria* del punto $P(X)$. Lo spostamento del punto nella transizione $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma(t)$ è definito dal vettore

$$\mathbf{s}(X, t) = \mathbf{x}(X, t) - \mathbf{X} \quad (2.42)$$

L'ipotesi fondamentale, detta di *congruenza*, assume che il cambiamento di configurazione avvenga senza lacerazioni o compenetrazioni di materiale; ciò richiede che le

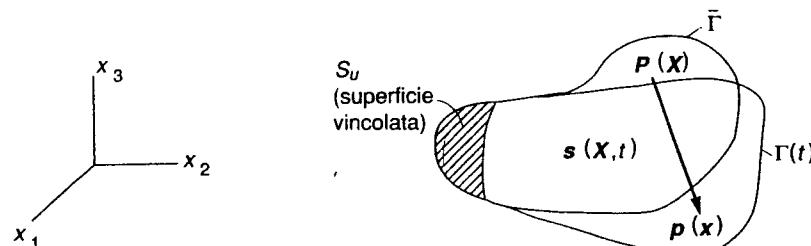


Figura 2.16

componenti del vettore spostamento (2.42) siano funzioni quanto meno continue e a un sol valore di X . Dovranno inoltre essere rispettate le eventuali condizioni imposte sulla porzione vincolata S_u del contorno, dove agli spostamenti è assegnato il valore $\bar{s}(X, t)$ (spesso, ma non necessariamente, nullo). Si richiede cioè

$$\mathbf{s}(X, t) = \bar{s}(X, t) \quad \text{su } S_u \quad (2.43)$$

Un vettore di spostamento continuo e a un sol valore ovunque in V e rispettoso della (2.43) su S_u definisce cambiamenti di configurazione congruenti. In quanto segue, verrà inoltre ipotizzato che le componenti di \mathbf{s} siano sufficientemente differenziabili perché le operazioni che verranno man mano introdotte risultino ben definite.

2.2.2 CINEMATICA DI UN ATTO DI MOTO

Ci si propone ora di definire le relazioni cinematiche relative a un *atto di moto* a partire dalla configurazione corrente $\Gamma(t)$. Si consideri in $\bar{\Gamma}$ un punto $P_0(X_0)$ che in $\Gamma(t)$ si è trasformato in $p_0(x_0)$ seguendo la traiettoria $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(X_0, t)$. Per l'ipotesi di congruenza, un punto $P(X)$ originariamente nell'intorno di P_0 ($X - X_0 = dX$) si trasformerà in $p(x)$ sempre nell'intorno di p_0 ($\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}$). La velocità di p_0 è un vettore tangente alla traiettoria in $\Gamma(t)$, espresso dalla relazione

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = d\mathbf{x}_0/dt = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (2.44a)$$

o anche, in virtù della (2.42)

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = d\mathbf{s}_0/dt = \dot{\mathbf{s}}_0 \quad (2.44b)$$

X_0 rappresenta infatti la posizione del punto in $\bar{\Gamma}$ e quindi non dipende da t . La velocità di un punto p nell'intorno di p_0 (Figura 2.17) può essere espressa in funzione del vettore $d\mathbf{v}$ di velocità relativa di p rispetto a p_0 scrivendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v} \quad (2.45)$$

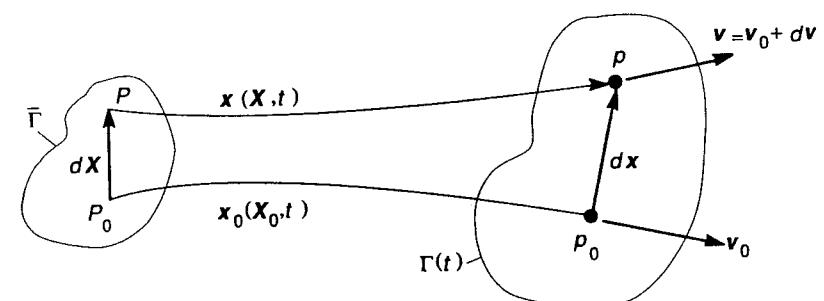


Figura 2.17

Assumendo differenziabilità per le velocità, è allora

$$d\mathbf{v} = (\mathbf{D}\mathbf{v}/d\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad dv_i = (\partial v_i / \partial x_j)dx_j \quad (2.46)$$

Il tensore doppio

$$\mathbf{L} = d\mathbf{v}/d\mathbf{x} \quad L_{ij} = \partial v_i / \partial x_j = v_{i,j} \quad (2.47)$$

è detto *gradiente di velocità*. In generale, esso non si presenta simmetrico; è peraltro sempre possibile esprimere come somma delle sue parti simmetrica ed emisimmetrica ponendo

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad L_{ij} = D_{ij} + W_{ij} \quad (2.48)$$

dove

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}') \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}') \quad W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (2.50)$$

È allora possibile scrivere la (2.45) nella forma seguente

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{W}d\mathbf{x} + \mathbf{D}d\mathbf{x} \quad v_i = v_{0i} + W_{ij}dx_j + D_{ij}dx_j \quad (2.51)$$

L'atto di moto dell'intorno di p_0 può pensarsi costituito da un contributo rigido (traslazione e/o rotazione) e da uno deformativo, responsabile di variazioni di volume e di forma. Ci si propone ora di individuare questi contributi nella (2.51).

Si consideri il caso in cui sia presente solo il primo addendo

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r0} \quad v_{ri} = v_{r0i} \quad (2.52)$$

Tutti i punti dell'intorno presentano allora la stessa velocità, il che configura un atto di moto di traslazione rigida. Il significato del secondo addendo

$$d\mathbf{v}_e = \mathbf{W}d\mathbf{x} \quad dv_{ei} = W_{ij}dx_j \quad (2.53a)$$

può essere intuito considerando che la forma quadratica associata a un tensore emisimmetrico è nulla. Precisamente

$$d\mathbf{x}' \mathbf{W} d\mathbf{x} = W_{ij} dx_i dx_j = 0 \quad \forall d\mathbf{x}$$

Ciò significa (Figura 2.18a) che in ogni punto dell'intorno il vettore velocità definito dalla (2.53a) risulta ortogonale a $d\mathbf{x}$, il che suggerisce un atto di moto di rotazione rigida dell'intorno.

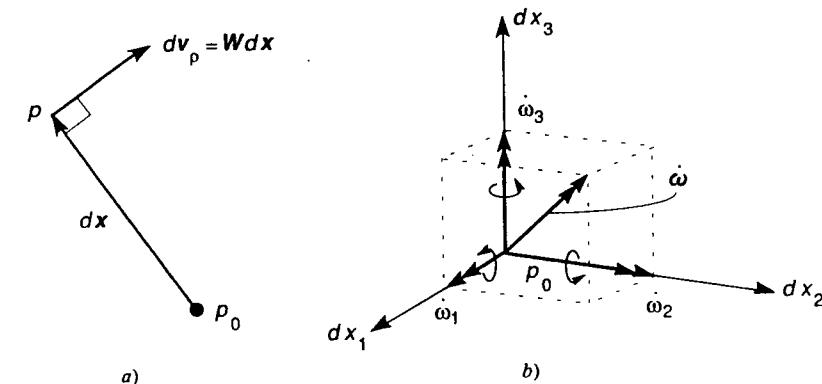


Figura 2.18

In effetti la velocità di rotazione rigida dell'intorno può essere esplicitata sommando vettorialmente i contributi relativi alle rotazioni attorno ai tre assi, indicate con $\dot{\omega}$, in Figura 2.18b (si ricorda che un atto di moto di rotazione è una grandezza vettoriale, anche se una rotazione finita non gode di tale proprietà). Le componenti di velocità secondo i tre assi risultano allora

$$\begin{Bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & -\dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \quad (2.53b)$$

Il tensore, detto di *velocità di rotazione* o di *spin*, che governa questo atto di moto è quindi emisimmetrico e coincide con \mathbf{W} . Il confronto con le (2.50) permette di stabilire le relazioni

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{2}(v_{3,2} - v_{2,3}) \quad \dot{\omega}_2 = \frac{1}{2}(v_{1,3} - v_{3,1}) \quad \dot{\omega}_3 = \frac{1}{2}(v_{2,1} - v_{1,2}) \quad (2.53c)$$

La parte puramente deformativa dell'atto di moto è pertanto costituita dall'ultimo addendo della (2.51). Il tensore doppio simmetrico \mathbf{D} definito dalla (2.49) è detto *tensore di velocità di deformazione* o di *stretching*. Il significato delle sue componenti verrà specificato nel seguito, con riferimento a spostamenti finiti ma abbastanza piccoli da potersi confondere con atti di moto. Si potrebbe mostrare che la forma quadratica a esso associata misura la velocità di variazione della distanza $ds = |d\mathbf{x}| = \sqrt{d\mathbf{x}' d\mathbf{x}}$ tra due punti dell'intorno. Precisamente, si ha

$$\frac{d}{dt}(ds^2) = 2d\mathbf{x}' \mathbf{D} d\mathbf{x} = 2D_{ij} dx_i dx_j \quad (2.54)$$

2.2.3 IL PRINCIPIO DELLE POTENZE (VELOCITÀ) VIRTUALI

2.2.3.1 Enunciazione e dimostrazione

Si consideri (Figura 2.19) un mezzo continuo in una configurazione $\Gamma(t)$; si supponga di applicare al mezzo in tale configurazione delle forze esterne F^* in V e f^* su S_F e che sia possibile definire un tensore doppio simmetrico σ_{ij}^* in V , con conseguenti reazioni vincolari $r_j^* = \sigma_{ij}^* n_i$ su S_u , tale da assicurare il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio (2.38), (2.39). Precisamente

$$\sigma_{ij,i}^* + F_j^* = 0 \quad \text{in } V \quad \sigma_{ij}^* n_i = f_j^* \quad \text{su } S_F \quad (2.55a, b)$$

Forze e sforzi rispettosi della (2.55) sono detti *staticamente ammissibili* in Γ . Ovviamente, alle stesse forze esterne non corrisponde un'unica distribuzione di sforzi staticamente ammissibili.

Si definisce inoltre *cinematicamente ammissibile* o *virtuale* un atto di moto a partire dalla configurazione Γ che sia costituito da una distribuzione di velocità \hat{v}_j rispettosa delle condizioni di vincolo su S_u e da un tensore di velocità di deformazione da essa derivato attraverso le (2.49). Precisamente

$$\hat{D}_{ji} = \frac{1}{2} (\hat{v}_{j,i} + \hat{v}_{i,j}) \quad \text{in } V \quad \hat{v}_j = \bar{v}_j \quad \text{su } S_u \quad (2.56a, b)$$

La denominazione "virtuale" intende sottolineare che le (2.56) definiscono semplicemente uno dei possibili atti di moto congruenti da Γ . In particolare, esso non è in alcun modo relazionato alle forze e sforzi presenti nel mezzo in tale configurazione.

È possibile dimostrare il seguente enunciato, noto come *principio delle potenze (o velocità) virtuali*:

- Ogni distribuzione staticamente ammissibile in Γ e.. ogni atto di moto virtuale da Γ soddisfano l'identità

$$\int_V F_j^* \hat{v}_j dV + \int_{S_F} f_j^* \hat{v}_j dS + \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i \bar{v}_j dS = \int_V \sigma_{ij}^* \hat{D}_{ji} dV \quad (2.57)$$

È immediato riconoscere nel primo membro della (2.57) la potenza delle forze esterne di volume e di superficie (comprensive queste ultime delle reazioni $r_j^* = \sigma_{ij}^* n_i$ su S_u) per l'atto di moto virtuale; il secondo membro può essere interpretato come potenza virtuale interna.

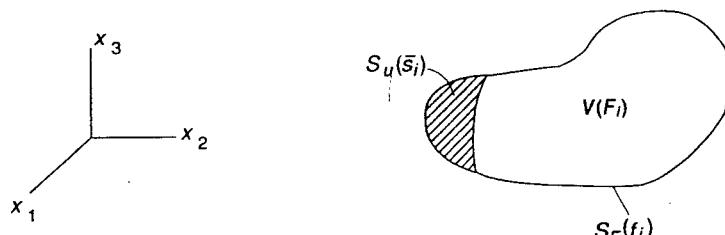


Figura 2.19

La dimostrazione ricorre al teorema della divergenza. Sotto condizioni molto generali e di fatto ininfluenti, questo stabilisce per ogni funzione vettoriale $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ la seguente egualanza

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{g}) dV = \int_S \mathbf{g}' \mathbf{n} dS$$

$$\int_V (\partial g_1 / \partial x_1 + \partial g_2 / \partial x_2 + \partial g_3 / \partial x_3) dV = \int_S (g_1 n_1 + g_2 n_2 + g_3 n_3) dS \quad (2.58)$$

$$\int_V g_{i,i} dV = \int_S g_i n_i dS$$

Si assume

$$g_i = \sigma_{ij}^* \hat{v}_j$$

È quindi

$$g_{i,i} = (\sigma_{ij}^* \hat{v}_j)_{,i} = \sigma_{ij,i}^* \hat{v}_j + \sigma_{ij}^* \hat{v}_{j,i}$$

Si esprima ora, attraverso la (2.48), $\hat{v}_{j,i}$ come somma delle sue parti simmetrica ed emisimmetrica ($\hat{v}_{j,i} = \hat{D}_{ji} + \hat{W}_{ji}$). Essendo σ_{ij}^* simmetrico e \hat{W}_{ji} emisimmetrico, risulterà $\sigma_{ij}^* \hat{W}_{ji} = 0$. Si può allora scrivere

$$g_{i,i} = \sigma_{ij,i}^* \hat{v}_j + \sigma_{ij}^* \hat{D}_{ji}$$

Introducendo questa espressione nella (2.58), suddividendo l'integrale sul contorno nei suoi contributi sulle porzioni caricata e vincolata e riordinando i termini, si perviene a esprimere il secondo membro della (2.57) nella forma

$$\int_V \sigma_{ij}^* \hat{D}_{ji} dV = - \int_V \sigma_{ij,i}^* \hat{v}_j dV + \int_{S_F} \sigma_{ij}^* n_i \hat{v}_j dS + \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i \hat{v}_j dS \quad (2.59)$$

Pertanto, per le (2.55), (2.56b) si può anche scrivere

$$- \int_V \sigma_{ij,i}^* \hat{v}_j dV = \int_V F_j^* \hat{v}_j dV; \quad \int_{S_F} \sigma_{ij}^* n_i \hat{v}_j dS = \int_{S_F} f_j^* \hat{v}_j dS \quad (2.60a, b)$$

$$\int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i \hat{v}_j dS = \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i \bar{v}_j dS \quad (2.60c)$$

La (2.59) si riconduce quindi alla (2.57), il che dimostra l'asserto.

Questo enunciato non è in alcun modo condizionato dalla natura del materiale di cui il mezzo continuo è costituito. Esso stabilisce quindi una relazione di validità assolutamente generale tra distribuzioni staticamente ammissibili in una configurazione e atti di moto virtuali dalla stessa configurazione. La (2.57) coinvolge unicamente la struttura matematica degli operatori che governano la statica e la cinematica del mezzo continuo.

2.2.3.2 Il principio delle potenze virtuali come condizione sufficiente di equilibrio

L'identità (2.57) può essere interpretata come condizione necessaria di equilibrio, in quanto ogni statica ammessa in Γ la soddisfa per ogni cinematica virtuale da Γ . Tale condizione, peraltro, è anche *sufficiente* per l'equilibrio. Si può infatti dimostrare anche il seguente enunciato:

■ Forze e sforzi che in una configurazione Γ soddisfino l'eguaglianza

$$\int_V F_j \hat{v}_j dV + \int_{S_F} f_j \hat{v}_j dS + \int_{S_u} r_j \bar{v}_j dS = \int_V \sigma_{ij} \hat{D}_{ji} dV \quad (2.61)$$

per tutti i possibili atti di moto virtuale da Γ , soddisfano necessariamente le equazioni di equilibrio indefinite e al contorno (2.55).

Nella (2.61) r_j indica le reazioni vincolari su S_u .

La dimostrazione segue gli stessi passi operativi della precedente. Dal momento che σ_{ij} è simmetrico e W_{ji} emisimmetrico, è lecito porre

$$\sigma_{ij} \hat{D}_{ji} = \sigma_{ij} (\hat{D}_{ji} + \hat{W}_{ji}) = \sigma_{ij} \hat{v}_{j,i}$$

Il teorema della divergenza stabilisce allora

$$\int_V \sigma_{ij} \hat{D}_{ji} dV = - \int_V \sigma_{ij,i} \hat{v}_j dV + \int_{S_F} \sigma_{ij} n_i \hat{v}_j dS + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_i \bar{v}_j dS \quad (2.62)$$

Nello scrivere la (2.62) è stata utilizzata la (2.56b), soddisfatta da ogni cinematica virtuale. Introducendo nella (2.61) e riordinando i termini, si ottiene

$$\int_V (F_j + \sigma_{ij,i}) \hat{v}_j dV + \int_{S_F} (f_j - \sigma_{ij} n_i) \hat{v}_j dS + \int_{S_u} (r_j - \sigma_{ij} n_i) \bar{v}_j dS = 0 \quad (2.63)$$

per tutti gli atti di moto virtuale (2.56).

Si considerino ora due cinematiche virtuali $\hat{v}_j^{(1)}$ e $\hat{v}_j^{(2)}$. La loro differenza $\delta \hat{v}_j = \hat{v}_j^{(2)} - \hat{v}_j^{(1)}$ è essa stessa un atto di moto virtuale associato alla condizione al contorno omogenea $\delta \hat{v}_j = 0$ su S_u . La (2.63) si traduce pertanto nella condizione

$$\int_V (F_j + \sigma_{ij,i}) \delta \hat{v}_j dV + \int_{S_F} (f_j - \sigma_{ij} n_i) \delta \hat{v}_j dS = 0 \quad \forall \delta \hat{v}_j = 0 \text{ su } S_u \quad (2.64)$$

che, stante l'arbitrarietà delle $\delta \hat{v}_j$, implica le (2.55).

Il principio delle potenze virtuali è pertanto *condizione necessaria e sufficiente* di equilibrio. Esso può quindi essere anche visto come un postulato (il che giustifica il nome di "principio") a partire dal quale le leggi di equilibrio possono essere *dimostrate*. Come formulazione alternativa dell'equilibrio esso trova largo impiego nella meccanica delle strutture.

Si potrebbe anche dimostrare [3] che imporre l'eguaglianza

$$\int_V F_j^* v_j dV + \int_{S_F} f_j^* v_j dS + \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i v_j dS = \int_V \sigma_{ij}^* D_{ji} dV$$

per tutte le distribuzioni staticamente ammissibili (2.55) equivale a imporre che l'atto di moto v_j , D_{ji} sia virtuale (che soddisfi cioè le (2.56)). Il principio è anche utilizzato in questa forma, benché il suo interesse sia più limitato. A differenza delle equazioni di equilibrio, che sono nella sostanza un assunto, le (2.56) hanno infatti un significato geometrico preciso, che rende scarsamente rilevante una loro formulazione alternativa.

2.3 DEFORMAZIONI FINITE

2.3.1 CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE

Nel paragrafo precedente sono state introdotte le grandezze e le relazioni geometrichi atte a definire un atto di moto a partire da una generica configurazione $\Gamma(t)$. Questa è a sua volta definita dallo spostamento $\mathbf{s}(X)$ che i punti subiscono nella transizione finita $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$. Non è stata però ancora introdotta alcuna misura che caratterizzi lo stato di deformazione globale del continuo in questa transizione.

Per introdurre l'argomento, si consideri il solido parallelepipedo e privo di vincoli illustrato in Figura 2.20 nelle sue configurazioni iniziale e corrente. Quest'ultima sia definita dalle seguenti componenti del vettore spostamento (2.42)

$$s_1 = X_1 \frac{\ell(t) - \bar{\ell}}{\bar{\ell}} \quad s_2 = X_2 \frac{a(t) - \bar{a}}{\bar{a}} \quad s_3 = X_3 \frac{a(t) - \bar{a}}{\bar{a}} \quad (2.65a)$$

o, equivalentemente, dalle seguenti traiettorie (2.41)

$$x_1 = X_1 \frac{\ell(t)}{\bar{\ell}} \quad x_2 = X_2 \frac{a(t)}{\bar{a}} \quad x_3 = X_3 \frac{a(t)}{\bar{a}} \quad (2.65b)$$

Opportune funzioni del tempo $\ell(t)$ e $a(t)$ descrivono una particolare cinematica attraverso una sequenza di configurazioni $\Gamma(t)$. Le derivate delle (2.65) rispetto al tempo definiscono le velocità relative agli atti di moto in questa sequenza. Risulta

$$\dot{s}_1(\mathbf{x}) = X_1(\dot{\ell}/\bar{\ell}); \quad \dot{s}_2(\mathbf{x}) = X_2(\dot{a}/\bar{a}); \quad \dot{s}_3(\mathbf{x}) = X_3(\dot{a}/\bar{a}) \quad (2.66)$$

Utilizzando le inverse delle (2.65b), le (2.66) possono essere scritte anche nella forma

$$v_1(\mathbf{x}) = x_1(\dot{\ell}/\bar{\ell}); \quad v_2(\mathbf{x}) = x_2(\dot{a}/\bar{a}); \quad v_3(\mathbf{x}) = x_3(\dot{a}/\bar{a}) \quad (2.67)$$

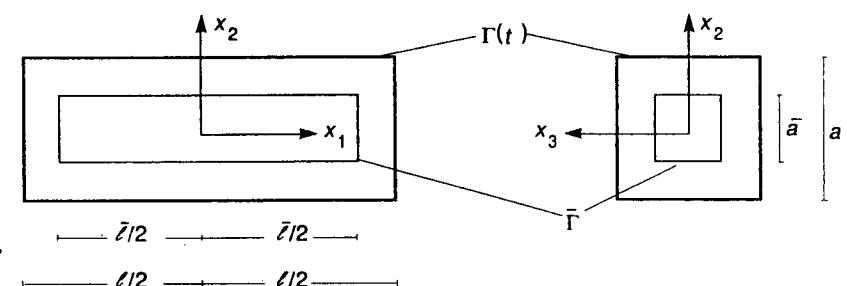


Figura 2.20

È immediato verificare che il gradiente di velocità L definito dalla (2.47) risulta simmetrico. Pertanto, l'atto di moto (2.67) presenta velocità di rotazione ovunque nulla ($\mathbf{W} = \mathbf{0}$) e velocità di deformazione

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dot{\ell}/\ell & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}/a & 0 \\ 0 & 0 & \dot{a}/a \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Si vuole adesso introdurre una *misura finita* della deformazione del mezzo continuo nella transizione $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma(t)$, che sia associata agli sforzi di Cauchy σ in $\Gamma(t)$ attraverso il principio delle potenze virtuali. È spontaneo pensare a un tensore ε_v definito dalle condizioni

$$\dot{\varepsilon}_v = \mathbf{D}; \quad \varepsilon_v(t=0) = \mathbf{0} \quad (2.69a)$$

Se \mathbf{D} è dato dalla (2.68), si ottiene in tal modo

$$\varepsilon_v = \begin{bmatrix} \ln(\ell/\bar{\ell}) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(a/\bar{a}) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(a/\bar{a}) \end{bmatrix} \quad (2.69b)$$

che sembrerebbe una ragionevole definizione, in accordo con le richieste formulate. In effetti, le (2.69) rappresentano la generalizzazione della deformazione logaritmica introdotta nel Paragrafo 1.1.2.1, associata attraverso il principio delle potenze virtuali (1.19) allo sforzo vero (1.17), in cui è facile riconoscere la particolarizzazione al caso uniassiale del tensore di Cauchy.

Le (2.69) sono però facilmente definibili solo per cinematiche particolari che, come quella qui considerata, presentino velocità di rotazione identicamente nulla. In casi più generali, l'integrale della (2.69a) viene a dipendere dal percorso, vale a dire dal modo con cui rotazioni rigide e deformazioni dell'intorno si susseguono nel processo deformativo. Opportune ipotesi su tale sequenza consentono di introdurre misure di deformazione finita a partire dalla (2.69a). Esse, peraltro, non sono sempre le più convenienti per un problema di meccanica delle strutture.

Va a questo proposito sottolineato come sia possibile introdurre, in linea di principio con una certa arbitrarietà, misure alternative di deformazione finita. I soli requisiti essenziali sono infatti che queste misure siano univocamente determinate in funzione degli spostamenti $\mathbf{s}(X)$, che contengano solo i contributi della deformazione pura e che presentino natura tensoriale, assicurando così le necessarie invariantanze geometriche rispetto al sistema di riferimento. Esse possono essere riferite sia alla configurazione indeformata $\bar{\Gamma}$ che alla configurazione corrente $\Gamma(t)$. Nei due casi, si introducono tensori del tipo

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{s}(X)) \quad (2.70)$$

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(\mathbf{s}(X(x))) \quad (2.71)$$

cui ci si riferisce, rispettivamente, come a misure *Lagrangiane* ed *Euleriane* di deformazione. Nell'ambito di ciascuno dei due approcci sono possibili definizioni alternative, come è pure possibile (e talvolta conveniente) riferirsi a configurazioni intermedie. L'approccio Euleriano si rivela particolarmente adatto allo studio di problemi di meccanica dei fluidi. Nella meccanica delle strutture, l'approccio Lagrangiano è più spontaneo e viene spesso preferito. In quanto segue, esso solo verrà considerato.

Una volta introdotta la definizione (2.70), l'atto di moto a partire dalla configurazione corrente $\Gamma(t)$ è descritto dalla derivata materiale $\dot{\mathbf{E}}$ della deformazione, che rappresenta una misura alternativa, pur se equivalente, al tensore \mathbf{D} . Ne consegue che la nuova misura di deformazione non è più associata allo sforzo di Cauchy nel principio delle potenze virtuali. Se si vuole conservare la validità di questo principio, le cui implicazioni sono notevoli, occorre quindi associare a ogni possibile definizione (2.70) una corrispondente misura di sforzo, come \mathbf{E} riferita alla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$, determinata dalla condizione che l'eguaglianza

$$\int_V \sigma_{ij}(x) \hat{D}_{ji}(x) dV = \int_{\bar{V}} S_{ij}(X) \hat{E}_{ji}(X) d\bar{V} \quad (2.72)$$

valga per tutti i possibili atti di moto virtuale da $\Gamma(t)$. Il tensore S_{ij} rappresenta una misura dello sforzo nella configurazione corrente $\Gamma(t)$ riferita alla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$. Ciò comporta che l'integrazione debba essere effettuata sul volume iniziale \bar{V} .

Per la validità del principio delle potenze virtuali, occorre anche sostituire le forze esterne $\mathbf{F}(x)$ in V e $\mathbf{f}(x)$ su S (in Γ) equivalenti misure $\mathbf{T}(X)$ in \bar{V} e $\mathbf{t}(X)$ su \bar{S} (in $\bar{\Gamma}$), definite da una condizione analoga alla (2.72). Precisamente

$$\int_V F_j(x) \hat{v}_j(x) dV + \int_S f_j(x) \hat{v}_j(x) dS = \int_{\bar{V}} T_j(X) \hat{s}_j(X) d\bar{V} + \int_{\bar{S}} t_j(X) \hat{s}_j(X) d\bar{S} \quad (2.73)$$

dove \mathbf{f} (o \mathbf{t}) rappresentano trazioni superficiali note o reazioni vincolari, a seconda che agiscano sulle porzioni caricata o vincolata del contorno. Si osservi che $\hat{v}(x)$ e $\hat{s}(X)$ rappresentano le stesse velocità: le seconde sono ottenute dalle prime semplicemente sostituendo nella (2.44) $x = X(x)$, come definito dalla (2.41).

Una completa trattazione del problema della definizione di misure di deformazione finita e delle quantità statiche a esse associate esula dallo scopo di questo testo (per maggiori dettagli si veda, ad esempio, [4]). Ci si limita qui a illustrare il procedimento con riferimento alla misura Lagrangiana di deformazione di più comune utilizzazione in meccanica delle strutture.

2.3.2 IL TENSORE DI DEFORMAZIONE DI GREEN-LAGRANGE

2.3.2.1 Definizione e significato

Si consideri ancora la Figura 2.17. Si vuole ora esprimere il vettore dx che congiunge i punti p e p_0 nell'intorno deformato in funzione del vettore dX tra gli stessi punti nella configurazione iniziale. Dalla (2.42) riscritta nella forma

$$x(X) = X + \mathbf{s}(X); \quad x_i(X) = X_i + s_i(X) \quad (2.74)$$

si ottiene

$$dx = F dX; \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad (2.75)$$

dove

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = I + \frac{d\mathbf{s}}{d\mathbf{X}} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial s_i}{\partial X_j} \quad (2.76)$$

(nella (2.76), $I = [\delta_{ij}]$ indica sempre il tensore identità o di Kronecker). Il tensore \mathbf{F} è noto come *gradiente di deformazione*. La sua conoscenza permette di definire lo stato di deformazione finita dell'intorno di P_0 . Detta infatti $ds = |\mathbf{dx}|$ la distanza tra p e p_0 , distanza pari a $dS = |\mathbf{dX}|$ nella configurazione iniziale, per la (2.75) si può scrivere

$$ds^2 = d\mathbf{x}' d\mathbf{x} = d\mathbf{X}' \mathbf{F}' \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad dS^2 = d\mathbf{X}' d\mathbf{X} \quad (2.77a, b)$$

da cui si ottiene

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{X}' (\mathbf{F}' \mathbf{F} - I) d\mathbf{X} \quad (2.77c)$$

Le (2.77) definiscono la *metrica della deformazione*, che permette di valutare le variazioni di lunghezza di tutti gli elementi in una stessa di centro P_0 . Il tensore doppio simmetrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}' \mathbf{F} - I) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\mathbf{s}}{d\mathbf{X}} \right)' + \left(\frac{d\mathbf{s}}{d\mathbf{X}} \right) + \left(\frac{d\mathbf{s}}{d\mathbf{X}} \right)' \left(\frac{d\mathbf{s}}{d\mathbf{X}} \right) \right] \quad (2.78a)$$

$$E_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial s_i}{\partial X_j} + \frac{\partial s_j}{\partial X_i} + \frac{\partial s_k}{\partial X_i} \frac{\partial s_k}{\partial X_j} \right] \quad (2.78b)$$

è noto come *tensore di deformazione di Green-Lagrange*. In virtù della sua definizione, la (2.77c) si esprime nella forma

$$ds^2 - dS^2 = 2d\mathbf{X}' \mathbf{E} d\mathbf{X} = 2E_{ij} dX_i dX_j \quad (2.79)$$

La denominazione di tensore di deformazione è giustificata dal fatto che se le componenti di \mathbf{E} sono tutte nulle, tutte le fibre della stessa di centro P_0 mantengono inalterata la propria lunghezza e quindi l'intorno di P_0 subisce al più un moto rigido. La conoscenza di \mathbf{E} permette di definire le variazioni di lunghezza e di angolo in fibre comunque orientate. Si consideri infatti (Figura 2.21) una fibra nell'intorno di P_0 la cui orientazione sia identificata dal vettore unitario \mathbf{N}_α ($|\mathbf{N}_\alpha| = 1$). Nella configurazione Γ la stessa fibra sarà orientata secondo un altro vettore, pure unitario, indicato con \mathbf{n}_α . La (2.79) allora fornisce

$$\frac{ds_\alpha^2 - dS_\alpha^2}{dS_\alpha^2} = \frac{2}{dS_\alpha^2} d\mathbf{X}'_\alpha \mathbf{E} d\mathbf{X}_\alpha = 2\mathbf{N}'_\alpha \mathbf{E} \mathbf{N}_\alpha \quad (2.80)$$

con il significato dei simboli indicato in Figura 2.21.

Si introducano le seguenti misure ("ingegneristiche") di deformazione diretta per la fibra originariamente orientata secondo \mathbf{N}_α

$$\Lambda_\alpha = \frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} \quad \epsilon_\alpha = \Lambda_\alpha - 1 = \frac{ds_\alpha - dS_\alpha}{dS_\alpha} \quad (2.81a, b)$$

In letteratura, Λ_α è noto come *stretch*, mentre ϵ_α rappresenta la deformazione *nominale* della fibra. Dalla (2.80) si ottiene

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{1 + 2\mathbf{N}'_\alpha \mathbf{E} \mathbf{N}_\alpha} \quad \epsilon_\alpha = \sqrt{1 + 2\mathbf{N}'_\alpha \mathbf{E} \mathbf{N}_\alpha} - 1 \quad (2.82a, b)$$

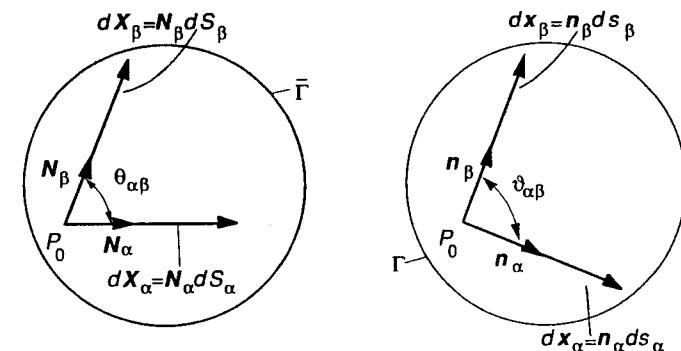


Figura 2.21

Si consideri ora la variazione dell'angolo $\Theta_{\alpha\beta}$ formato da due fibre originariamente orientate secondo \mathbf{N}_α e \mathbf{N}_β (Figura 2.21). Nelle configurazioni $\bar{\Gamma}$ e Γ si avrà, rispettivamente

$$\cos \Theta_{\alpha\beta} = \mathbf{N}'_\alpha \mathbf{N}_\beta \quad \cos \vartheta_{\alpha\beta} = \mathbf{n}'_\alpha \mathbf{n}_\beta \quad (2.83a, b)$$

Ricordando la (2.81a), la seconda si può scrivere

$$\cos \vartheta_{\alpha\beta} = \frac{1}{dS_\alpha dS_\beta} d\mathbf{X}'_\alpha d\mathbf{X}_\beta = \frac{1}{dS_\alpha dS_\beta} \frac{1}{\Lambda_\alpha \Lambda_\beta} d\mathbf{X}'_\alpha d\mathbf{X}_\beta$$

o anche, tenendo conto delle (2.75), (2.78)

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{dS_\alpha dS_\beta} \frac{1}{\Lambda_\alpha \Lambda_\beta} d\mathbf{X}'_\alpha \mathbf{F}' \mathbf{F} d\mathbf{X}_\beta = \frac{1}{\Lambda_\alpha \Lambda_\beta} \mathbf{N}'_\alpha \mathbf{F}' \mathbf{F} \mathbf{N}_\beta = \\ &= \frac{1}{\Lambda_\alpha \Lambda_\beta} (\mathbf{N}'_\alpha \mathbf{N}_\beta + 2\mathbf{N}'_\alpha \mathbf{E} \mathbf{N}_\beta) = \frac{1}{\Lambda_\alpha \Lambda_\beta} (\cos \Theta_{\alpha\beta} + 2\mathbf{N}'_\alpha \mathbf{E} \mathbf{N}_\beta) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Se le fibre sono originariamente orientate secondo due assi coordinati, ad esempio

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_1 = [1 \ 0 \ 0]' \quad \mathbf{N}_\beta = \mathbf{N}_2 = [0 \ 1 \ 0]'$$

risulta

$$\mathbf{N}'_1 \mathbf{E} \mathbf{N}_1 = E_{11} \quad \mathbf{N}'_1 \mathbf{E} \mathbf{N}_2 = E_{12} \quad \mathbf{N}'_1 \mathbf{N}_2 = \cos \Theta_{12} = 0$$

Le (2.82), (2.84) divengono allora

$$\Lambda_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} \quad \epsilon_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \quad (2.85a, b)$$

$$\cos \vartheta_{12} = \frac{2E_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} = \sin \gamma_{12} \quad (2.86)$$

Nella (2.86), $\gamma_{12} = \pi/2 - \vartheta_{12}$ indica lo *scorrimento angolare* tra le due fibre, originariamente ortogonali.

Si considerino le derivate materiali rispetto al tempo delle grandezze cinematiche introdotte. Dalla definizione (2.76) del gradiente di deformazione \mathbf{F} si ottiene, in virtù delle (2.44) e (2.47)

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{L}\mathbf{F} \quad (2.87)$$

Le (2.78) peraltro forniscono

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{F}'\mathbf{F} - \mathbf{I}) \right\} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}'\mathbf{F} + \mathbf{F}'\dot{\mathbf{F}}) \quad (2.88a)$$

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_j} + \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_i} \right) \quad (2.88b)$$

Per le (2.87) e (2.49) si può allora scrivere

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \mathbf{F}'(\mathbf{L}' + \mathbf{L})\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{D}\mathbf{F} \quad \dot{E}_{ij} = (\partial x_h / \partial X_i)(\partial x_k / \partial X_j) D_{hk} \quad (2.89a)$$

Dal momento che è $\det(\mathbf{F}) > 0$, la (2.89a) può essere invertita. Si ottiene

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}'\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \quad D_{ij} = (\partial X_h / \partial x_i)(\partial X_k / \partial x_j) \dot{E}_{hk} \quad (2.89b)$$

relazione che definisce l'atto di moto deformativo a partire dalla configurazione corrente Γ in termini del tensore di Green-Lagrange. Le (2.89) possono anche essere ottenute eguagliando la (2.54) con la derivata materiale della (2.79).

2.3.2.2. Definizione delle quantità statiche associate

Ci si propone adesso di definire la misura di sforzo $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ associata a $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ attraverso la condizione di equivalenza della potenza virtuale interna (2.72), nonché le forze di volume $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ in \bar{V} e le trazioni superficiali $\mathbf{t}(\mathbf{X})$ su \bar{S} definite dall'analogia condizione (2.73). Si ricorda a questo proposito che l'integrale di una funzione $g(\mathbf{x})$ sul volume corrente V si trasforma in un integrale sul volume iniziale \bar{V} attraverso la relazione

$$\int_V g(\mathbf{x}) dV = \int_{\bar{V}} J g(\mathbf{x}(\mathbf{X})) d\bar{V} \quad (2.90)$$

dove

$$J = \det(\mathbf{F}) = dV/d\bar{V} = \bar{\rho}/\rho \quad (2.91)$$

è lo Jacobiano della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$. Nella (2.91) $\bar{\rho}$ e ρ indicano la densità del materiale, rispettivamente nelle configurazioni iniziale e corrente. L'ultima eguaglianza segue dalla condizione $\bar{\rho}d\bar{V} = \rho dV$.

Si consideri inoltre un'areola $d\bar{S}$ con giacitura di normale \mathbf{N} in \bar{V} , che si trasforma nell'areola dS di normale \mathbf{n} in Γ (Figura 2.22). Vale allora la relazione seguente [4]

$$ndS = J\mathbf{F}'\mathbf{N}d\bar{S} \quad n_i dS = J(\partial X_j / \partial x_i)N_j d\bar{S} \quad (2.92)$$

che permette di scrivere, per ogni vettore $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ definito su S , l'eguaglianza

$$\int_S \mathbf{g}'(\mathbf{x}) n dS = \int_{\bar{S}} \mathbf{g}'(\mathbf{x}(\mathbf{X})) J\mathbf{F}'\mathbf{N} d\bar{S} \quad (2.93)$$

e quindi di trasformare un integrale su S nel corrispondente su \bar{S} .

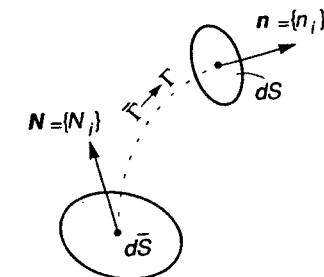


Figura 2.22

Si consideri la condizione (2.73), che esprime l'eguaglianza della potenza virtuale esterna. Con riferimento al solo integrale di volume, la (2.90) consente di scrivere

$$\int_V F_j(\mathbf{x}) \hat{v}_j(\mathbf{x}) dV = \int_{\bar{V}} J F_j(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \hat{v}_j(\mathbf{x}(\mathbf{X})) d\bar{V} = \int_{\bar{V}} T_j(\mathbf{X}) \hat{s}_j(\mathbf{X}) d\bar{V} \quad (2.94)$$

da cui conseguie

$$T_j(\mathbf{X}) = J F_j(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \quad (2.95a)$$

Le forze di volume sono in genere espresse in termini di densità unitarie. Si pone allora

$$F_j(\mathbf{x}) = \rho b_j(\mathbf{x}) \quad T_j(\mathbf{X}) = \bar{\rho} B_j(\mathbf{X}) \quad (2.95b, c)$$

dove

$$B_j(\mathbf{X}) = b_j(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \quad (2.95d)$$

Pertanto, nel riferire le forze di volume alla configurazione iniziale occorre solo tener conto della variazione di densità.

Gli integrali sul contorno nella (2.73) sono tra loro legati attraverso la (2.93). Ricordando che le trazioni superficiali $\mathbf{t}(\mathbf{X})$, siano esse forze applicate o reazioni vincolari, coincidono con la componente vettoriale di sforzo sulla giacitura di normale \mathbf{n} , per la (2.92) si può scrivere

$$\mathbf{t} dS = \sigma \mathbf{n} dS = J \mathbf{F}' \mathbf{N} d\bar{S} \quad (2.96)$$

La (2.93) quindi fornisce

$$\int_S f_j \hat{v}_j dS = \int_S \hat{\mathbf{v}}' \mathbf{t} dS = \int_{\bar{S}} J \hat{\mathbf{s}}' \sigma \mathbf{F}' \mathbf{N} d\bar{S} = \int_{\bar{S}} \hat{\mathbf{s}}' \mathbf{t} d\bar{S} = \int_{\bar{S}} t_j \hat{s}_j d\bar{S} \quad (2.97)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{t} = J \sigma \mathbf{F}' \mathbf{N} \quad t_j = J \sigma_{ij} (\partial X_k / \partial x_i) N_k \quad (2.98)$$

La (2.98) definisce le forze di superficie in $\Gamma(t)$ riferite alla configurazione iniziale. Il confronto con la (2.96) mostra l'eguaglianza

$$\mathbf{t} dS = \mathbf{t} d\bar{S} \quad (2.99)$$

La risultante delle azioni superficiali su di un'areola infinitesima si mantiene pertanto immutata quando queste sono riportate alla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$.

Considerazioni analoghe permettono di definire attraverso la (2.72) la misura di sforzo associata a E . Esprimendo D in funzione di E mediante la (2.89b) e sfruttando la (2.90) si ottiene infatti

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \hat{D}_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \hat{E}_{kh} dV = \\ &= \int_{\bar{V}} J \sigma_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \hat{E}_{kh} d\bar{V} = \int_{\bar{V}} S_{hk} \hat{E}_{kh} d\bar{V} \end{aligned} \quad (2.100)$$

dove

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = J \mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}' \quad S_{ij} = J \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \sigma_{hk} \quad (2.101)$$

è un tensore doppio simmetrico, noto come (*secondo*) *tensore di sforzo di Piola-Kirchhoff*. Esso rappresenta la misura della tensione associata al tensore di deformazione di Green-Lagrange. Essendo $J = \det(\mathbf{F}) > 0$, la (2.101) può essere invertita. Si ottiene

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}' \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial X_h} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} S_{hk} \quad (2.102)$$

Si noti che mentre le misure delle forze \mathbf{T} e \mathbf{t} sopra introdotte sono comunque valide nell'ambito di un approccio Lagrangiano, la definizione (2.101) dello sforzo consegue dalla particolare scelta (2.78) del tensore Lagrangiano di deformazione. La condizione (2.72) impone con riferimento a una misura di deformazione Lagrangiana alternativa alla (2.78) produrrebbe una diversa definizione di sforzo.

2.3.2.3 Condizioni di equilibrio

Il secondo tensore di Piola-Kirchhoff rappresenta una misura di sforzo piuttosto formale, cui è difficile attribuire un significato fisico preciso. Ciò rende problematica la scrittura diretta delle relazioni di equilibrio tra le componenti di questo tensore e le forze esterne (2.95), (2.98). Il modo con cui le quantità statiche sono state definite permette peraltro di riferire il principio delle potenze virtuali alla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$ e di imporre l'equilibrio attraverso di esso. La condizione ora si scrive

$$\int_{\bar{V}} T_j \delta \hat{s}_j d\bar{V} + \int_{\bar{S}_F} t_j \delta \hat{s}_j d\bar{S} = \int_{\bar{V}} S_{ij} \delta \hat{E}_{ji} d\bar{V} \quad (2.103a)$$

per ogni

$$\delta \hat{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial (\delta \hat{s}_k)}{\partial X_j} + \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \frac{\partial (\delta \hat{s}_k)}{\partial X_i} \right] \quad \text{in } \bar{V} \quad \delta \hat{s}_i = 0 \quad \text{su } \bar{S}_u \quad (2.103b, c)$$

dove la (2.103b) è semplicemente la (2.88) scritta per $\hat{s} = \delta \hat{s}$, cioè per la differenza tra due atti di moto virtuali da Γ , riferiti a $\bar{\Gamma}$. Applicando il teorema della divergenza, si ottengono, attraverso manipolazioni matematiche qui omesse per brevità, le equazioni di equilibrio indefinite e al contorno nella forma

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(S_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) + T_k = 0 \quad \text{in } \bar{V} \quad S_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} N_i = t_k \quad \text{su } \bar{S}_F \quad (2.104a, b)$$

Si osservi che quest'ultima equazione rappresenta semplicemente la definizione (2.98) di t_i in termini del secondo tensore di Piola-Kirchhoff.

Se i gradienti di deformazione sono abbastanza piccoli da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo in $\partial s_i / \partial X_j$, dalla (2.78) si ottiene

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial X_j} + \frac{\partial s_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.105)$$

Il processo di deformazione finita si identifica allora con un *atto di moto a partire dalla configurazione indeformata $\bar{\Gamma}$* e diviene lecito porre

$$s_i(\mathbf{X}) = v_i(\mathbf{X}) \Delta t \quad E_{ij}(\mathbf{X}) = D_{ij}(\mathbf{X}) \Delta t \quad (2.106)$$

Inoltre, per piccoli E_{ij} si può scrivere

$$\sqrt{1 + 2E_{11}} = 1 + E_{11} \quad \frac{1}{\Lambda_1} \approx 1 - E_{11} \quad \arcsin(E_{12}) \approx E_{12}$$

Le (2.82), (2.83) allora divengono

$$\epsilon_1 = E_{11} \quad \gamma_{12} = 2E_{12} \quad (2.107a, b)$$

relazioni che mostrano come le componenti del tensore di deformazione di Green-Lagrange vengano a identificarsi con le misure ingegneristiche (a meno di un fattore due per gli scorrimenti angolari).

Il generico atto di moto virtuale (2.103b, c) risulta adesso governato dalla velocità di deformazione

$$\delta \hat{E}_{ij} = \delta \hat{D}_{ij} \quad (2.108)$$

ed è quindi riferito alla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$. Dalla (2.100) consegue allora

$$S_{ij}(\mathbf{X}) = \sigma_{ij}(\mathbf{X}) \quad (2.109)$$

Per deformazioni infinitesime, il secondo tensore di Piola-Kirchhoff si identifica quindi con il tensore di Cauchy definito nella configurazione indeformata $\bar{\Gamma}$. Analogo risultato vale per le misure di forze applicate. Le equazioni di equilibrio si riconducono allora alle (2.38), (2.39), pure scritte con riferimento alla configurazione indeformata.

Si fa osservare infine che la deformazione diretta (1.1.21) e lo sforzo normale (1.23), introdotti senza giustificazioni nel Paragrafo 1.1.2.1, rappresentano la particolarizzazione al caso uniaxiale rispettivamente delle misure di Green-Lagrange e Piola-Kirchhoff.

2.3.3 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA STRUTTURALE

Gli sviluppi precedenti hanno mostrato la possibilità di definire:

1. misure di deformazione finita derivabili (ad esempio, attraverso le (2.78)) dal campo di spostamenti, che permettono, unitamente alle condizioni sul contorno vincolato, di descrivere cambiamenti di configurazione congruenti;
2. misure di sforzo a esse associate mediante il principio delle potenze virtuali, imponendo il quale si possono esplicitare le relazioni di equilibrio (ad esempio, le (2.104)) tra gli sforzi e le forze agenti sul mezzo continuo.

Introducendo opportuni legami tra gli sforzi e le deformazioni, che rappresentano una descri-

zione matematica delle proprietà del materiale di cui il mezzo è costituito, si può formulare il problema di analisi strutturale, che si propone di determinare la risposta (spostamenti, deformazioni e sforzi) del continuo soggetto ad azioni esterne assegnate (forze di volume e di superficie, cedimenti vincolari, eventuali deformazioni imposte).

Indipendentemente dalla natura di questo legame, la cui definizione verrà esaminata nel prossimo capitolo, il problema si presenta non-lineare. Tale è infatti il legame (2.78) tra deformazioni e spostamenti. Inoltre, la circostanza fisica per cui l'equilibrio si instaura nella configurazione finale, rende le equazioni di equilibrio (2.104) dipendenti dal campo di spostamenti. La nonlinearità del problema è intrinseca e misure di deformazione e sforzo alternative a quelle qui considerate non sono in grado di rimuoverla. Il problema, tuttavia, si semplifica notevolmente qualora, come accade in molti casi di interesse pratico, gli spostamenti siano di piccola entità. Ciò infatti consente di linearizzare le relazioni sia geometriche che di equilibrio.

2.3.4 L'IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI

Si suppongano ragionevoli le seguenti ipotesi:

1. Spostamenti e deformazioni sono così piccoli da poter assimilare la cinematica finita a quella di un *atto di moto a partire dalla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$* .
2. Spostamenti e deformazioni sono così piccoli da non influenzare il modo con cui l'equilibrio si instaura nella struttura. Ciò consente di *imporre le condizioni di equilibrio nella configurazione iniziale (indeformata) $\bar{\Gamma}$* .

Sono questi gli assunti alla base della cosiddetta *ipotesi di piccoli spostamenti*. Ovviamente, essa può risultare più o meno accettabile in diverse circostanze. La sua prima parte assimila le quantità cinematiche a infinitesimi del primo ordine e la sua validità dipende unicamente dall'entità degli spostamenti e delle loro derivate (le strutture sono spesso, anche se non sempre, sufficientemente rigide da assicurarne la legittimità). La seconda parte, che coinvolge la statica, non è una necessaria conseguenza della prima; come è stato esemplificato nel Paragrafo 1.1.4 con riferimento ad aste presso-inflesse, esistono importanti circostanze in cui gli spostamenti, benché piccoli dal punto di vista geometrico, sono pur sempre tali da influenzare in modo determinante l'equilibrio. Peraltro, in molti problemi di interesse ingegneristico l'ipotesi di piccoli spostamenti risulta effettivamente accettabile nella sua interezza.

In virtù dell'assunto 1, la cinematica risulta definita da un campo di spostamenti $\mathbf{s}(\mathbf{X})$ continuo in \bar{V} e rispettoso delle condizioni al contorno su \bar{S}_u e da un *tensore di piccole deformazioni* $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{X})$ derivabile da \mathbf{s} con le modalità relative ad un atto di moto. Le relazioni geometriche sono allora formalmente uguali alle (2.56) e si scrivono

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \text{ in } V \quad s_i = \bar{s}_i \text{ su } S_u \quad (2.110a, b)$$

L'assunto 2 consente di identificare ai fini statici le coordinate \mathbf{x} dei punti nella configurazione corrente con le coordinate \mathbf{X} degli stessi punti nella configurazione iniziale. La misura di sforzo è allora il tensore di Cauchy riferito a quest'ultima configurazione e le condizioni di equilibrio sono imposte dalle (2.38), (2.39) scritte con riferimento a $\bar{\Gamma}$. Precisamente

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \text{ in } V; \quad \sigma_{ij}n_i = f_j \text{ su } S_F \quad (2.111a, b)$$

Anche se per semplicità è stata utilizzata la simbologia relativa alla configurazione corrente, nelle (2.110), (2.111) va inteso il riferimento alla configurazione iniziale $\bar{\Gamma}$. Salvo esplicita affermazione contraria, i simboli verranno usati in tal senso anche nel seguito.

È di interesse vedere come si enuncia il principio delle potenze virtuali in questo contesto. Si noti innanzitutto che adesso è lecito parlare di spostamenti in luogo di velocità e, quindi, di lavori in luogo di potenze. Inoltre, la configurazione di equilibrio è ora quella indeformata. Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti, il *principio dei lavori (spostamenti) virtuali* si enuncia pertanto come segue

■ *Condizione necessaria di equilibrio.* Ogni statica σ_{ij}^*, F_j^* , f_j^* rispettosa delle condizioni di equilibrio (2.111) e ogni cinematica $\hat{\epsilon}_{ij}, \hat{s}_j$ rispettosa delle (2.110) soddisfano la seguente identità

$$\int_V F_j^* \hat{s}_j dV + \int_{S_F} f_j^* \hat{s}_j dS + \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i \bar{s}_j dS = \int_V \sigma_{ij}^* \hat{\epsilon}_{ji} dV \quad (2.112)$$

■ *Condizione sufficiente di equilibrio.* Imporre che l'eguaglianza

$$\int_V F_j \delta \hat{s}_j dV + \int_{S_F} f_j \delta \hat{s}_j dS = \int_V \sigma_{ij} \delta \hat{\epsilon}_{ji} dV \quad (2.113a)$$

valga per tutte le cinematiche virtuali

$$\delta \hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \hat{s}_{i,j} + \delta \hat{s}_{j,i}) \text{ in } V \quad \delta \hat{s}_i = 0 \text{ su } S_u \quad (2.113b)$$

equivale a imporre le relazioni di equilibrio (2.111) tra le quantità statiche.

Il primo membro della (2.112) rappresenta il lavoro virtuale esterno (\mathcal{L}_e), mentre il secondo membro è detto lavoro virtuale interno (\mathcal{L}_i). Va ancora sottolineato che non sussiste alcuna relazione di causa-effetto tra quantità statiche e cinematiche.

2.4 IL TENSORE DELLE PICCOLE DEFORMAZIONI

2.4.1 DEFINIZIONE E SIGNIFICATO FISICO

Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti, la cinematica finita si identifica con quella relativa a un atto di moto a partire dalla configurazione iniziale. Seguendo lo stesso itinerario logico percorso nel Paragrafo 2.2, è quindi possibile, dato un vettore di spostamento \mathbf{s} , introdurre il tensore doppio

$$\psi(\mathbf{x}) = d\mathbf{s}/d\mathbf{x} \quad \psi_{ij} = \partial s_i / \partial x_j \quad (2.114)$$

detto *gradiente di spostamento*. Esso ha lo stesso significato del tensore \mathbf{L} definito dalla (2.47) e consente di esprimere lo spostamento di un punto P nell'intorno di P_0 mediante la relazione

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_0(\mathbf{x}) + \psi d\mathbf{x} \quad (2.115)$$

Il gradiente di spostamento può essere decomposto nelle sue parti **simmetrica** ed **antisimmetrica**, scrivendo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\psi + \psi') \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \quad (2.116)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \frac{1}{2} (\psi - \psi') \quad \vartheta_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} - s_{j,i}) \quad (2.117)$$

Il confronto con la (2.110a) porta a identificare $\boldsymbol{\varepsilon}$ con il *tensore delle (piccole) deformazioni*. $\boldsymbol{\vartheta}$ è noto come *tensore di rotazione*. La (2.115) si scrive pertanto

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\vartheta} d\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{x} \quad s_i = s_{0i} + \vartheta_{ij} dx_j + \varepsilon_{ij} dx_j \quad (2.118)$$

Il significato geometrico dei tre addendi a secondo membro nella (2.118) è lo stesso di quello delle corrispondenti componenti di velocità, esaminato nel Paragrafo 2.2.3. È immediato riconoscere nel primo di essi la traslazione rigida dell'intorno. Il secondo rappresenta la rotazione rigida, come si può constatare ragionando in modo analogo a quanto fatto con riferimento alle (2.53). L'ultimo addendo si riferisce pertanto alla deformazione pura.

Allo scopo di stabilire il significato delle componenti di $\boldsymbol{\varepsilon}$ si consideri (Figura 2.23) il segmento P_0P , originariamente orientato come l'asse x_1 e di lunghezza dx_1 . Per effetto della deformazione il punto P subirà, rispetto a P_0 , lo spostamento relativo $d\mathbf{s} = (\partial s / \partial x_1) dx_1$, le cui componenti secondo i tre assi sono, rispettivamente

$$ds_1 = (\partial s_1 / \partial x_1) dx_1 \quad ds_2 = (\partial s_2 / \partial x_1) dx_1 \quad ds_3 = (\partial s_3 / \partial x_1) dx_1 \quad (a)$$

La lunghezza della fibra deformata, indicata con $d\xi_1$ in Figura 2.23, si esprime

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= dx_1 \sqrt{(1 + \partial s_1 / \partial x_1)^2 + (\partial s_2 / \partial x_1)^2 + (\partial s_3 / \partial x_1)^2} = \\ &= dx_1 \sqrt{1 + 2(\partial s_1 / \partial x_1) + (\partial s_1 / \partial x_1)^2 + (\partial s_2 / \partial x_1)^2 + (\partial s_3 / \partial x_1)^2} \end{aligned} \quad (b)$$

La (b) può essere sviluppata in serie di Mac Laurin e, per l'ipotesi di piccoli spostamenti, tale sviluppo può essere troncato ai termini lineari in $\partial s_i / \partial x_1$. Si ottiene allora

$$d\xi_1 = dx_1 (1 + \partial s_1 / \partial x_1) \quad (c1)$$

Peraltro dalla definizione (2.116) del tensore di piccole deformazioni conseguono

$$\varepsilon_{11} = \partial s_1 / \partial x_1 \quad (c2)$$

Le (c) permettono quindi di stabilire la relazione

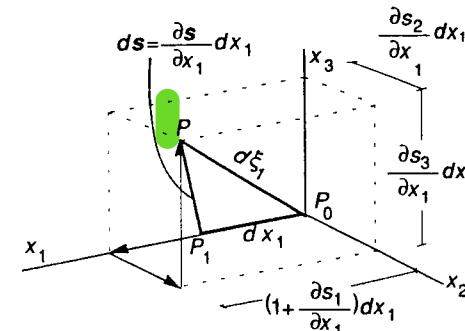


Figura 2.23

$$\varepsilon_{11} = \frac{d\xi_1 - dx_1}{dx_1} \quad (2.119a)$$

La quantità a secondo membro della (2.119a), nota come *deformazione diretta*, misura la variazione di lunghezza di una fibra unitaria originariamente disposta secondo l'asse x_1 (con la terminologia usata nel Capitolo 1, essa ne rappresenta la definizione nominale). Il ragionamento può ovviamente essere ripetuto senza variazione alcuna per fibre orientate secondo x_2 e x_3 . Si conclude quindi che **le componenti a indici uguali nella (2.116) hanno il significato di deformazioni dirette di fibre originariamente disposte secondo gli assi coordinati**.

Si considerino ora nell'intorno di P_0 due segmenti $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_0P_2}$ orientati secondo gli assi x_1 e x_2 (Figura 2.24a). Il processo deformativo li trasforma, rispettivamente, nei segmenti $\overline{P_0p_1}$ e $\overline{P_0p_2}$. L'angolo tra i due segmenti passa dal valore $\pi/2$ al valore ϑ ; a meno di infinitesimi esso può essere assimilato con l'angolo indicato con ϑ^* in figura, formato dalle proiezioni dei segmenti deformati sul piano (x_1, x_2). Anche le lunghezze $d\xi_i$ di questi segmenti si identificano, a meno di infinitesimi di ordine superiore, con quelle delle relative proiezioni. Detto γ_{12} lo *scorrimento angolare* tra le due fibre, **originariamente ortogonalì, si ha allora**

$$\gamma_{12} = \pi/2 - \vartheta = \pi/2 - \vartheta^* \quad (d1)$$

Inoltre, per le (c) si può scrivere

$$d\xi_1 = dx_1 (1 + \varepsilon_{11}) = d\xi_1^* \quad d\xi_2 = dx_2 (1 + \varepsilon_{22}) \approx d\xi_2^* \quad (d2)$$

La proiezione del processo deformativo sul piano (x_1, x_2) è illustrata in Figura 2.24b. Semplici considerazioni geometriche permettono di stabilire le relazioni

$$\sin \alpha_1 = \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\xi_1^*} \quad \sin \alpha_2 = \frac{\partial s_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\xi_2^*} \quad (e)$$

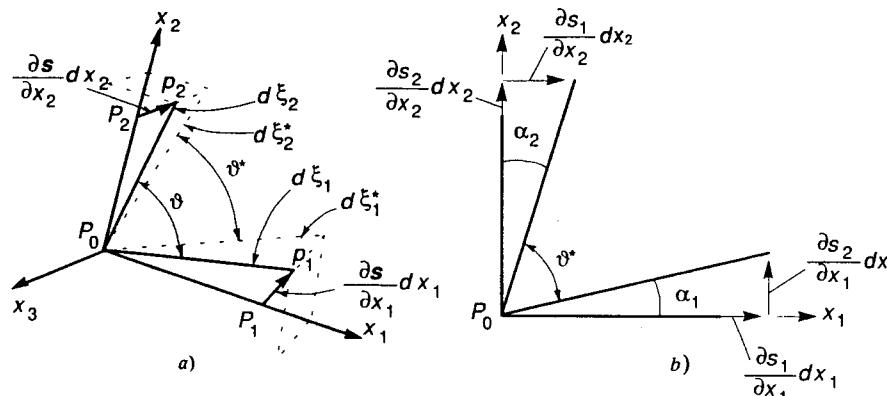


Figura 2.24

Se, come ipotizzato, i gradienti di spostamento sono abbastanza piccoli da essere assimilabili ad infinitesimi, si può porre

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \quad dx_1/d\xi_1^* \approx 1/(1 + \varepsilon_{11}) \approx 1$$

(e analoghe per l'indice γ_2). Dalle (e) si ottiene quindi

$$\alpha_1 \approx \partial s_2 / \partial x_1 \quad \alpha_2 \approx \partial s_1 / \partial x_2 \quad (f)$$

Peraltro, la (d1) e la Figura 2.24b mostrano che è $\gamma_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$. Ricordando sempre la (2.116), risulta allora

$$\gamma_{12} = \partial s_1 / \partial x_2 + \partial s_2 / \partial x_1 = 2\varepsilon_{12} \quad (2.119b)$$

Le componenti di ε ad indici tra loro diversi rappresentano pertanto la metà dello scorrimiento angolare tra fibre originariamente ortogonali e disposte secondo gli assi coordinati.

Deformazioni dirette e scorrimenti angolari sono quantità ingegneristicamente espressive e per questo motivo il tensore delle piccole deformazioni viene sovente espresso in loro termini. Indicando con $(0; x, y, z)$ la terna cartesiana di riferimento, si scrive quindi

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

dove, per la simmetria del tensore, si ha $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Il legame deformazioni spostamenti (2.110a) diviene allora

$$\varepsilon_x = \partial s_x / \partial x \quad \gamma_{xy} = \partial s_x / \partial y + \partial s_y / \partial x \quad (\text{e analoghe}) \quad (2.121)$$

In notazione ingegneristica, l'espressione del tensore di rotazione ϑ si scrive invece

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

dove le ω_i rappresentano le rotazioni rigide intorno agli assi coordinati, come illustrato in Figura 2.25.

Si osservi che la (2.116) coincide con la (2.105), cioè con l'espressione cui si riconduce il tensore di Green-Lagrange se si trascurano i termini di ordine superiore al primo nei gradienti di spostamento. Il significato delle componenti di ε è allora definito dalle (2.107), identiche alle (2.119). In effetti, tali relazioni erano state ottenute supponendo che la cinematica finita potesse essere assimilata a un atto di moto a partire dalla configurazione di riferimento, il che costituisce l'assunto 1 alla base dell'ipotesi di piccoli spostamenti.

Si osservi anche che la (2.115) si mantiene valida in presenza di grandi spostamenti. Essa infatti consegna unicamente dall'ipotesi di congruenza, per la quale un intorno originariamente infinitesimo rimane tale a deformazione avvenuta. È anche sempre possibile decomporre formalmente il tensore ϑ nelle sue parti simmetrica ed emisimmetrica, ma i due addendi rappresentano l'uno il contributo della deformazione pura e l'altro quello della rotazione rigida solo se gli spostamenti possono essere considerati come infinitesimi.

2.4.2 CAMBIAMENTO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Il tensore delle piccole deformazioni gode delle proprietà di ogni tensore doppio ε , con riferimento a esso, vale quanto precedentemente stabilito per lo sforzo di Cauchy. In particolare, al variare del riferimento le sue componenti si trasformano in accordo con le (2.8). Detta allora $(0; \xi_\alpha, \alpha = 1, 2, 3)$ una terna cartesiana ortogonale i cui assi presentino rispetto al riferimento $(0; x_i)$ coseni direttori $n_{\alpha i}$, si può scrivere

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{ij} n_{\alpha i} n_{\beta j} \quad (2.123)$$

Tale relazione consente il calcolo di deformazioni dirette e scorrimenti angolari per fibre comunque orientate.

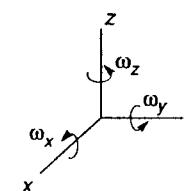


Figura 2.25

ESEMPIO 2.4 La (2.122) può essere utilizzata per la valutazione sperimentale dello stato di deformazione. La misurazione degli scorrimenti angolari non è operativamente agevole e occorre quindi poter risalire alle componenti del tensore dalle deformazioni dirette misurate in diverse direzioni.

Si illustra il procedimento con riferimento a uno stato di deformazione piano, per cui risultati

$$\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \quad (g)$$

Esso è caratterizzato da tre componenti non nulle, cui si può risalire da tre opportuni valori di deformazione diretta nel piano, forniti da un dispositivo sperimentale (noto come "rosetta"). In Figura 2.26 è illustrato il caso in cui le tre direzioni formano tra loro un angolo di 120° (direzioni ξ , η e ζ). Ricordando che per definizione è $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$, dalla (2.123) particolarizzata al caso piano si ottiene

$$\epsilon_\xi = \epsilon_x n_{\xi x}^2 + \epsilon_y n_{\xi y}^2 + \gamma_{xy} n_{\xi x} n_{\xi y} \quad (h1)$$

$$\epsilon_\eta = \epsilon_x n_{\eta x}^2 + \epsilon_y n_{\eta y}^2 + \gamma_{xy} n_{\eta x} n_{\eta y} \quad (h2)$$

$$\epsilon_\zeta = \epsilon_x n_{\zeta x}^2 + \epsilon_y n_{\zeta y}^2 + \gamma_{xy} n_{\zeta x} n_{\zeta y} \quad (h3)$$

Peraltro, per la particolare disposizione di Figura 2.26 si ha

$$n_{\xi x} = 1 \quad n_{\eta x} = -1/2 \quad n_{\zeta x} = 1/2$$

$$n_{\xi y} = 0 \quad n_{\eta y} = \sqrt{3}/2 \quad n_{\zeta y} = -\sqrt{3}/2$$

Sostituendo nelle (h) e risolvendo per le componenti del tensore si ottiene

$$\epsilon_x = \epsilon_\xi \quad \epsilon_y = \frac{1}{3} (-\epsilon_\xi + 2\epsilon_\eta + 2\epsilon_\zeta) \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_\zeta - \epsilon_\eta) \quad (i)$$

relazioni che permettono di calcolare le componenti non nulle del tensore a partire dalle deformazioni dirette misurate. Ad esempio, se il dispositivo sperimentale fornisce i valori

$$\epsilon_\xi = 2000 \times 10^{-6} \quad \epsilon_\eta = -1500 \times 10^{-6} \quad \epsilon_\zeta = 800 \times 10^{-6}$$

dalle (i) si ricava

$$\epsilon_x = 2000 \times 10^{-6} \quad \epsilon_y = -1133 \times 10^{-6} \quad \gamma_{xy} = 2656 \times 10^{-6}$$

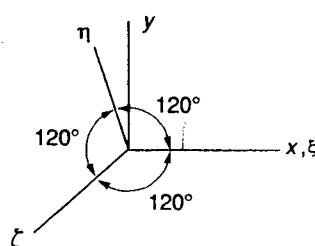


Figura 2.26

2.4.3 DEFORMAZIONI PRINCIPALI E INVARIANTI

In analogia con quanto fatto per il tensore degli sforzi, è possibile considerare il problema di autovalori

$$\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n}_\alpha = e \mathbf{n}_\alpha \quad (2.124a)$$

o, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x - e & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y - e & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z - e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.124b)$$

In virtù della simmetria di $\boldsymbol{\epsilon}$, esistono tre autovalori reali e_α ($\alpha = I, II, III$), cui possono essere associate tre direzioni mutuamente ortogonali \mathbf{n}_α . Queste costituiscono un riferimento privilegiato, ancora detto *terna principale*, nel quale il tensore di deformazione si presenta diagonale. Precisamente

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} e_I & 0 & 0 \\ 0 & e_{II} & 0 \\ 0 & 0 & e_{III} \end{bmatrix}$$

Dal momento che gli scorrimenti angolari risultano nulli, il riferimento principale costituisce una particolare terna triortogonale che si mantiene tale nel processo deformativo. Ritagliando intorno al punto un parallelepipedo di materiale con spigoli paralleli agli assi principali si ritroverà, a deformazione avvenuta, ancora un parallelepipedo i cui spigoli hanno subito allungamenti unitari pari a e_α (Figura 2.27).

La soluzione della (2.124) si riconduce alla ricerca delle radici dell'equazione di terzo grado

$$e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0 \quad (2.125)$$

dove si è posto

$$I_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$I_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy} \gamma_{yx} + \gamma_{yz} \gamma_{zy} + \gamma_{zx} \gamma_{xz}) \quad (2.126a)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\epsilon})$$

Le radici della (2.124) rappresentano le deformazioni principali, indipendenti dal siste-

ma di riferimento. Pure indipendenti saranno quindi i coefficienti (2.125a), cui ci si riferisce come agli **invarianti di deformazione** (rispettivamente, lineare, quadratico e cubico). Nel riferimento principale la loro espressione diviene

$$I_1 = e_1 + e_{II} + e_{III} \quad I_2 = e_1 e_{II} + e_{II} e_{III} + e_{III} e_1 \quad I_3 = e_1 e_{II} e_{III} \quad (2.126b)$$

2.4.4 VARIAZIONE DI VOLUME E VARIAZIONE DI FORMA

Si consideri il parallelepipedo di Figura 2.27, con spigoli paralleli agli assi principali. Questi valgano dx_α nella configurazione indeformata; a deformazione avvenuta la loro lunghezza risulterà pari a quella iniziale moltiplicata per $(1 + e_\alpha)$. Nelle due configurazioni il volume del parallelepipedo vale quindi

$$d\bar{V} = dx_1 dx_{II} dx_{III} \quad dV = dx_1(1 + e_1)dx_{II}(1 + e_{II})dx_{III}(1 + e_{III})$$

Si ottiene allora

$$dV/d\bar{V} = (1 + e_1)(1 + e_{II})(1 + e_{III}) = 1 + I_1 + I_2 + I_3$$

Tale relazione evidenzia l'ovvia circostanza fisica dell'indipendenza della variazione di volume dal riferimento. Per piccole deformazioni è peraltro $I_3 \ll I_2 \ll I_1$. Si può quindi scrivere

$$(dV - d\bar{V})/d\bar{V} \approx I_1 = e_1 + e_{II} + e_{III} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.127)$$

L'invariante lineare I_1 rappresenta quindi la *variazione di volume* dell'intorno del punto. Si ponga

$$\Theta = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.128a)$$

Il tensore

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \Theta \end{bmatrix} \quad (2.128b)$$

ha allora invariante primo nullo e configura quindi una deformazione che avviene a volume costante, caratterizzata da sole variazioni di forma dell'intorno. $\boldsymbol{\eta}$ è noto come *deviatore di deformazione*.

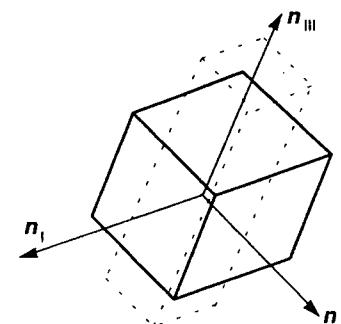


Figura 2.27

2.4.5 LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA INTERNA

Le deformazioni derivate dagli spostamenti attraverso le (2.121) costituiscono uno stato di deformazione congruente. Peraltro, valori di ε_{ij} indipendentemente assegnati non sono necessariamente congruenti. Si supponga infatti di suddividere il mezzo in elementi infinitesimi isolati e di attribuire a ognuno di essi arbitrarie deformazioni: non si potrà in genere ricostruire la continuità del mezzo con soli moti rigidi degli elementi. Questa operazione è possibile solo se le deformazioni soddisfano particolari condizioni di integrabilità, dette **condizioni di congruenza interna**.

È facile verificare per sostituzione diretta che **ogni tensore di deformazione** derivato attraverso la (2.121) **soddisfa le sei equazioni differenziali**

$$\begin{aligned} \partial^2 \varepsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y / \partial x^2 &= \partial^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y \\ \partial^2 \varepsilon_y / \partial z^2 + \partial^2 \varepsilon_z / \partial y^2 &= \partial^2 \gamma_{yz} / \partial y \partial z \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 + \partial^2 \varepsilon_x / \partial z^2 &= \partial^2 \gamma_{zx} / \partial z \partial x \\ \partial^2 \varepsilon_x / \partial y \partial z &= \frac{\partial}{\partial x} (\partial \gamma_{xy} / \partial z + \partial \gamma_{zx} / \partial y - \partial \gamma_{yz} / \partial x) \\ \partial^2 \varepsilon_y / \partial z \partial x &= \frac{\partial}{\partial y} (\partial \gamma_{xy} / \partial z - \partial \gamma_{zx} / \partial y + \partial \gamma_{yz} / \partial x) \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x \partial y &= \frac{\partial}{\partial z} (-\partial \gamma_{xy} / \partial z + \partial \gamma_{zx} / \partial y + \partial \gamma_{yz} / \partial x) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Si può dimostrare che, almeno nel caso di domini monoconnessi, le (2.129) sono anche condizioni *sufficienti* di congruenza. Esse cioè garantiscono l'esistenza di un campo di spostamenti $\mathbf{s} = (s_x \ s_y \ s_z)'$ dal quale le deformazioni sono derivabili attraverso le (2.121).

Per dimostrare l'asserto, si osservi che le condizioni dovranno tradurre il fatto che, dati due punti nel continuo, gli spostamenti e le rotazioni necessari a ricostruire la congruenza di una catena di elementi tra di essi dipendono solo dai due punti e non dal percorso che li congiunge. Dovranno cioè esprimere la circostanza che le quantità

$$ds_x, ds_y, ds_z \quad d\omega_x, d\omega_y, d\omega_z \quad (2.130a, b)$$

siano dei differenziali esatti. Nelle (2.130b) ω_i indicano le componenti non nulle del tensore di rotazione, come definite dalla (2.122).

È noto che affinché un'espressione del tipo

$$g_x dx + g_y dy + g_z dz \quad (2.131)$$

sia un differenziale esatto, deve essere

$$\partial g_x / \partial y = \partial g_y / \partial x \quad \partial g_y / \partial z = \partial g_z / \partial y \quad \partial g_z / \partial x = \partial g_x / \partial z \quad (2.132)$$

Si considerino le (2.130a). Esse si possono scrivere

$$ds_i = (\partial s_i / \partial x_j) dx_j = (\partial s_i / \partial x) dx + (\partial s_i / \partial y) dy + (\partial s_i / \partial z) dz \quad (i = x, y, z)$$

Ricordando la decomposizione del gradiente di spostamento ψ nelle sue parti simmetrica ed emisimmetrica, ingegneristicamente espresse dalle (2.120), (2.122), tale relazione si esplicita come segue

$$\begin{aligned} ds_x &= \epsilon_x dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yx} - \omega_z \right) dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{zx} + \omega_y \right) dz \\ ds_y &= \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + \omega_z \right) dx + \epsilon_y dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{zy} - \omega_x \right) dz \\ ds_z &= \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_y \right) dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} + \omega_x \right) dy + \epsilon_z dz \end{aligned} \quad (2.133)$$

Le condizioni di integrabilità (2.132) scritte con riferimento alle (2.133) forniscono le nove relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \quad \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} \quad \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.134)$$

Le (2.134) possono essere risolte per i gradienti di rotazione. Ricordando che il tensore delle piccole deformazioni è simmetrico ($\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \quad (2.135)$$

D'altra parte, le (2.130b) si possono scrivere

$$d\omega_i = (\partial \omega_i / \partial x_j) dx_j = (\partial \omega_i / \partial x) dx + (\partial \omega_i / \partial y) dy + (\partial \omega_i / \partial z) dz \quad (i = x, y, z)$$

Introducendo le (2.135) si perviene alle espressioni

$$\begin{aligned} d\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dz \\ d\omega_y &= \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right) dz \\ d\omega_z &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) dz \end{aligned} \quad (2.136)$$

Perché le $d\omega_i$ siano dei differenziali esatti, le condizioni di integrabilità (2.132) dovranno valere con riferimento alle (2.136). Si ottengono in tal modo nove equazioni differenziali del secondo ordine che coinvolgono le componenti del tensore di deformazione. Tre di queste risultano ripetute e possono quindi essere eliminate. Le sei rimanenti sono appunto le (2.129), che si configurano pertanto come condizioni *sufficienti* di congruenza.

Una dimostrazione più compatta, che richiede però di operare con alcuni strumenti di calcolo tensoriale, può essere trovata in [5].

È facile constatare come le (2.129) non siano sufficienti ad assicurare la congruenza di domini a connessione multipla. Si consideri, ad esempio, il mezzo continuo biconnesso in Figura 2.28: riconducendolo a un corpo semplicemente connesso mediante un taglio secondo la superficie Ω , si ottiene una situazione in cui le (2.129) garantiscono la continuità degli spostamenti in tutto il volume senza però che ciò implichi l'egualianza tra gli spostamenti dei punti separati dalla superficie Ω . In questo caso occorrerà anche imporre che gli spostamenti relativi dei punti di Ω separati dal taglio idealmente effettuato risultino nulli.

Le sei equazioni (2.129) equivalgono a tre soli legami differenziali tra le sei componenti indipendenti del tensore ϵ_{ij} . Ciò consiglia dal loro carattere di formulazione della congruenza alternativa alla (2.121), che stabilisce come le sei ϵ_{ij} derivino da tre componenti di spostamento s_i , e potrebbe essere formalmente dimostrato differenziando ulteriormente le (2.129) in modo da evidenziare tre identità.

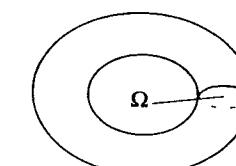


Figura 2.28

Le (2.129) sono spesso impiegate in luogo delle (2.121) quando la descrizione della cinematica del continuo non richiede esplicitamente l'introduzione degli spostamenti. È questo il caso di mezzi non vincolati, per i quali non si applicano le condizioni al contorno (2.110b) in quanto la loro superficie laterale è interamente caricata ($S = S_F$). La congruenza si riconduce allora alle sole (2.121), cui le (2.129) sono del tutto equivalenti, almeno per domini monoconnessi.

Si osservi infine che le (2.129) sono equazioni differenziali omogenee del secondo ordine. Deformazioni che siano funzioni lineari del punto sono quindi certamente congruenti.

Il riferimento a terne cartesiane ortogonali non è limitativo. I tensori delle piccole deformazioni e delle piccole rotazioni sono comunque definibili in termini di spostamenti. Espressioni generali del legame deformazioni-spostamenti, valide per qualunque sistema di coordinate curvilinee ortogonali, sono disponibili in letteratura [6]. Ad esempio, in coordinate cilindriche $(0; r, \vartheta, z)$ si ha, in luogo delle (2.121) (vedi [2])

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\partial s_r}{\partial r} & \epsilon_\vartheta &= \frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\vartheta}{\partial \vartheta} & \epsilon_z &= \frac{\partial s_z}{\partial z} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial s_r}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial r} \\ \gamma_{r\vartheta} &= \frac{\partial s_\vartheta}{\partial r} - \frac{s_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \vartheta} & \gamma_{\vartheta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial s_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial s_\vartheta}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.137a)$$

In problemi assalsimmetrici è $s_\vartheta = 0$ e le restanti componenti di spostamento non dipendono da ϑ . Le (2.137a) mostrano allora che gli scorrimenti angolari con indice ϑ risultano nulli, mentre le espressioni per le rimanenti componenti di deformazione divengono

$$\epsilon_r = \frac{\partial s_r}{\partial r} \quad \epsilon_\vartheta = \frac{s_r}{r} \quad \epsilon_z = \frac{\partial s_z}{\partial z} \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial s_r}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial r} \quad (2.137b)$$

In uno stato piano di deformazione è anche $s_z = 0$ e $s_r = s_r(r)$. Le sole componenti di deformazione non nulle sono allora

$$\epsilon_r = \frac{ds_r}{dr} \quad \epsilon_\vartheta = \frac{s_r}{r} \quad (2.138a)$$

In questo caso, le condizioni di congruenza interna (2.129) si riconducono all'unica equazione

$$\frac{d\epsilon_\vartheta}{dr} + \frac{\epsilon_\vartheta - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (2.138b)$$

Le (2.138) mantengono la loro validità anche per $s_r \neq 0$, purché costante.

ESERCIZI

2.1 Mostrare che lo stato di sforzo

$$\sigma = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

corrisponde a trazione uniaxiale. Determinare il valore della trazione e la direzione secondo cui agisce.

2.2 Calcolare le tensioni normali massima e minima e la tensione tangenziale massima per i seguenti stati di sforzo piano

- a) $\sigma_x = 135, \sigma_y = -55, \tau_{xy} = -30$ (MPa)
- b) $\sigma_x = 100, \sigma_y = 120, \tau_{xy} = 50$ (MPa)

2.3 Disegnare i diagrammi di Mohr completi per i tre stati di sforzo relativi ai due esercizi precedenti.

2.4 Valutare la pressione idrostatica e il deviatore per lo stato di sforzo dell'esercizio 1.

2.5 Determinare le componenti dello sforzo piano dell'Esercizio 2.2a in un riferimento $(O; \xi, \eta)$ ruotato di 30° in senso antiorario rispetto a $(O; x, y)$.

2.6 Il cilindro in Figura 2.E6 è vincolato sulla base $z = 0$ ed è soggetto unicamente al suo peso, pari a $p(\text{N/mm}^3)$ per unità di volume. Trovare una distribuzione di sforzi equilibrata e calcolare le reazioni vincolari che a essa conseguono.

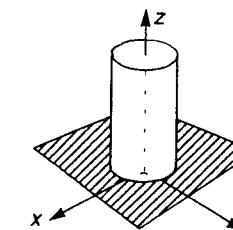


Figura 2.E6

2.7 La lastra in Figura 2.E7 è priva di forze di volume ed è soggetta alle trazioni superficiali seguenti

$$x = 0 : f_x = 0, f_y = 2 \frac{t}{h} y, f_z = 0$$

$$y = \pm \frac{h}{2} : f_x = -t, f_y = f_z = 0; \quad z = \pm \frac{b}{2} : f_x = f_y = f_z = 0$$

Trovare una distribuzione equilibrata di sforzi e calcolare le reazioni che ne conseguono sulla superficie vincolata $x = \ell$.

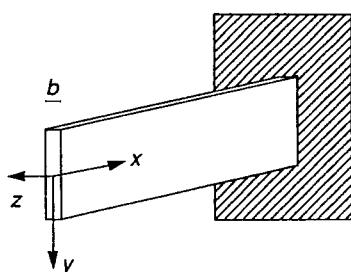


Figura 2.E7

2.8 Si immagini di attribuire a un mezzo continuo gli spostamenti

$$s_x = \frac{u}{a^3} (x^3 - 3x^2z + y^3), s_y = \frac{u}{a^3} (xyz - x^3), s_z = \frac{u}{a^3} (x^3 - y^3 + z^3)$$

Calcolare le componenti del tensore delle piccole deformazioni che ne conseguono.

2.9 L'elemento cubico di materiale in Figura 2.E9 subisce gli spostamenti

$$s_x = \frac{\eta}{h^2} zx^2, s_y = \frac{\eta}{h^2} zy^2, s_z = 0$$

Calcolare, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, il volume del solido deformato.

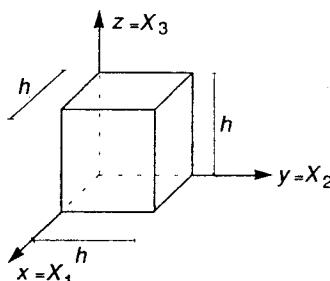


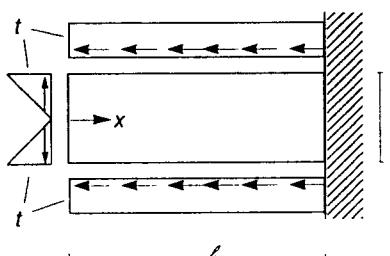
Figura 2.E9

2.10 Si considerino le componenti di deformazione

$$\epsilon_x = \eta \cos \frac{x}{a}, \epsilon_y = 0, \epsilon_z = -\eta \sin \frac{z}{a}$$

$$\gamma_{xy} = -\eta \sin \frac{x}{a}, \gamma_{yz} = \eta \cos \frac{y}{a}, \gamma_{zx} = 0$$

Mostrare che definiscono una distribuzione congruente e valutare, a meno di moti rigidi, gli spostamenti da cui derivano attraverso le (2.121).



2.11 Mostrare che gli spostamenti

$$s_x = \Omega(z-y), s_y = \Omega(x-z), s_z = \Omega(y-x)$$

corrispondono a un moto rigido. Calcolare le componenti del tensore delle piccole rotazioni (2.122).

2.12 Per il cubo in Figura 2.E9 si consideri un cambiamento di configurazione governato dalle traiettorie seguenti

$$x_1 = X_1 + kX_2, x_2 = X_2, x_3 = X_3$$

Disegnare la configurazione finale nel piano (X_1, X_2). Calcolare le componenti del tensore di deformazione di Green-Lagrange e valutare sia su questa base che con considerazioni geometriche dirette le variazioni di lunghezza degli spigoli e gli scorrimenti angolari tra di essi. Mostrare che per $k \rightarrow 0$ queste quantità si identificano con le componenti del tensore delle piccole deformazioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] COSSERAT E., COSSERAT F., *Theorie des corps déformables*, Hermann, Parigi, 1909.
- [2] FRANCIOSI V., *Scienza delle costruzioni*, vol. I, 2^a ed., Liguori, Napoli, 1965.
- [3] BALDACCI R., *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, UTET, Torino, 1970.
- [4] MALVERN L.E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [5] SOKOLNIKOFF I.S., *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.
- [6] LANGHAAR H.L., *Energy methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

Il legame costitutivo

3.1 MODELLI COSTITUTIVI ED EVIDENZA SPERIMENTALE

3.1.1 CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE

Sono state precedentemente introdotte le relazioni che governano la statica e la cinematica dei mezzi continui. Le prime instaurano un legame tra forze e sforzi presenti in una configurazione di equilibrio (che nell'ipotesi di piccoli spostamenti coincide con quella indeformata). Le seconde sono relazioni di carattere puramente geometrico che assicurano la congruenza del processo deformativo e non implicano alcuna ipotesi sulla natura delle deformazioni stesse. Statica e cinematica si presentano come due aspetti separati e in un certo senso duali, tra loro collegati solo attraverso il principio dei lavori virtuali, connessione che peraltro coinvolge solo la struttura formale delle equazioni.

È però evidente che tra i due mondi debba esistere un collegamento meccanico. Le deformazioni in un mezzo continuo possono essere dovute a varie cause (deformazioni in assenza di sforzo possono essere indotte, ad esempio, riscaldando uniformemente un corpo privo di vincoli), ma almeno una parte di esse sarà conseguenza degli sforzi presenti o della loro storia precedente. Il legame dipenderà dal comportamento del materiale di cui il mezzo è costituito e la problematica relativa alla sua definizione forma l'oggetto di questo capitolo.

Un modello matematico atto a descrivere il comportamento meccanico del materiale è detto *legame costitutivo*. Palesemente, la sua definizione non può prescindere dall'esperienza, che mette in luce comportamenti anche qualitativamente diversi in materiali diversi. Peraltro, è anche evidente come la sola esperienza non sia in grado di dare una risposta al problema. È comunque necessario un modello teorico che traduca in termini matematici le caratteristiche fenomenologiche del comportamento, entro cui inquadra i risultati sperimentali.

Questa esigenza è di carattere del tutto generale. Non è infatti pensabile che la formulazione di una legge fisica si basi unicamente su di una semplice interpolazione di dati. Per i legami costitutivi esiste però una difficoltà addizionale: mentre le deformazioni sono effettivamente misurabili, non lo sono gli sforzi, la cui esistenza è stata in un certo senso soltanto postulata e non è immediatamente verificabile in via diretta. Gli sforzi possono solo essere misurati o attraverso le deformazioni (strada chiaramente impraticabile se l'oggetto dell'indagine è un legame tra sforzi e deformazioni) o risalendo a essi dalle forze applicate attraverso l'equilibrio. Anche questa strada è soggetta a forti limitazioni, perché il solo equilibrio non è a rigore in grado di definire univocamente lo stato di sforzo che consegue alle forze applicate. Si è peraltro visto nel Capitolo 1 che esistono alcune strutture che possono essere ragionevolmente considerate come staticamente determinate. In particolare, in alcune di esse (provino uniassiale,

cilindro cavo in torsione, contenitori in pressione) si può ritenere che gli sforzi siano pressoché omogenei, il che permette di legare, attraverso l'equilibrio, la loro intensità a quella delle forze applicate.

Indagini condotte su queste strutture semplici permettono di stabilire la risposta del materiale in alcuni casi particolari, che in genere coinvolgono una o poche componenti di sforzo e deformazione. Si possono così evidenziare i principali aspetti qualitativi del comportamento fenomenologico e formulare un modello teorico che li recepisca, esprimendo il comportamento nel caso generale in funzione di un certo numero di parametri. Ulteriori esperimenti permettono quindi di determinare il valore di questi parametri e di verificare l'adeguatezza o meno del modello.

In questo capitolo alcuni legami costitutivi verranno studiati seguendo la strada fenomenologica sopra indicata. Va peraltro sottolineato come essa non sia sempre agevole da percorrere, né comunque destinata a produrre risultati soddisfacenti per ogni tipo di comportamento. A questo proposito, occorre almeno citare come in tempi relativamente recenti (nella seconda metà del XX secolo) l'interesse dei fisici matematici si sia rivolto verso una *teoria assiomatica* dei legami costitutivi, tendente a dedurre il maggior numero possibile di risultati da pochi postulati considerati di per sé evidenti [1]. Tali postulati hanno implicazioni molto generali ma sorprendentemente significative e ulteriori e più stringenti classificazioni sono ottenibili considerando comportamenti che presentino caratteristiche via via più specifiche, quali particolari dipendenze dalla storia precedente o particolari simmetrie di comportamento. Benché astratta, la teoria consente di formulare modelli costitutivi senza far appello all'esperienza se non per la quantificazione dei parametri. In effetti, molte caratteristiche del comportamento dei materiali che si ritenevano unicamente basate sull'evidenza sperimentale si sono in realtà rivelate semplici conseguenze dei postulati fondamentali.

La trattazione di questa teoria esula peraltro dagli scopi di questo testo. Si rivolge quindi adesso l'attenzione verso i principali comportamenti fenomenologici che semplici esperimenti sono in grado di evidenziare. La trattazione verrà qui limitata agli aspetti essenziali; un'esposizione più dettagliata ed esauriente può essere trovata in [2].

3.1.2 COMPORTAMENTI FONDAMENTALI

Molti degli aspetti che caratterizzano il comportamento di un materiale sono messi in luce anche da una semplice prova uniassiale, condotta, ad esempio, sul provino in Figura 1.10. La Figura 3.1 (identica alla Figura 1.11) illustra i risultati di tale prova per un acciaio da costruzione a temperatura ambiente. In Figura 3.1a è riportato il legame tra lo sforzo normale (1.16) e la corrispondente deformazione (1.15a); la Figura 3.1b illustra invece l'evoluzione del rapporto tra le deformazioni trasversale (ϵ_t , definita dalla (1.15b)) e longitudinale. La prova evidenzia i seguenti aspetti

1. Le deformazioni conseguono pressoché istantaneamente all'applicazione del carico.
2. In una prima fase il legame si presenta sensibilmente lineare ($\sigma = E\epsilon$, con E costante) e *reversibile*, nel senso che se la forza applicata viene rimossa ("scarico") la deformazione è interamente recuperata. Tale fase termina quando la deformazione raggiunge un certo valore ϵ_0 , cui corrisponde lo sforzo σ_0 .
3. Per $\epsilon > \epsilon_0$ il comportamento si presenta essenzialmente diverso. In primo luogo, a un determinato incremento di deformazione è associato un incremento di sforzo

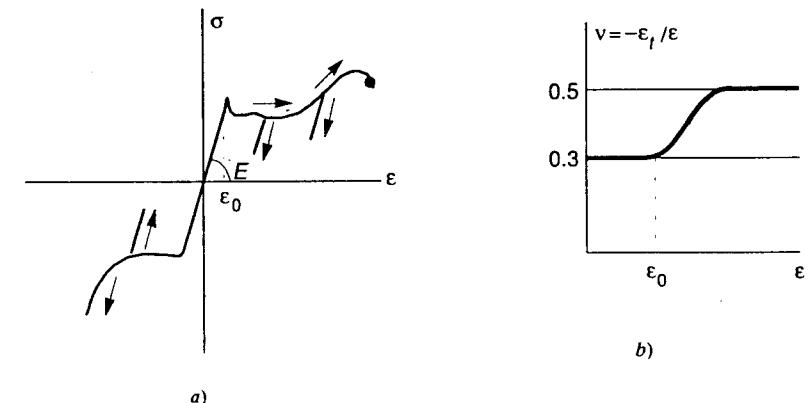


Figura 3.1

molto minore che nella fase precedente (addirittura pressoché nullo in un primo tratto, dove il materiale fluisce a sforzo praticamente costante). Inoltre le deformazioni sono ora in larga misura *permanent*, in quanto allo scarico solo una piccola parte di esse viene recuperata.

4. La barra allungandosi si contrae trasversalmente (Figura 3.1b). Il rapporto tra i valori assoluti delle deformazioni trasversale e longitudinale tende rapidamente al valore di 0.5. Dal momento che la (2.127) scritta per $\epsilon_z = \epsilon$, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_t$ esprime la variazione di volume nella forma

$$(dV - d\bar{V})/d\bar{V} = \epsilon + 2\epsilon_t = \epsilon - 2|\epsilon_t| \quad (3.1)$$

si evince che deformazioni di notevole entità si producono a volume costante. Tale caratteristica è attribuibile alla parte permanente della deformazione.

Molte di queste caratteristiche sono specifiche del materiale considerato (un particolare tipo di acciaio). Alcuni aspetti fenomenologici sono peraltro molto generali e devono venire recepiti dal modello costitutivo. Quanto segue considererà tali aspetti da un punto di vista puramente qualitativo, focalizzando l'attenzione su deformazioni di piccola entità (tra l'altro, curve come quelle di Figura 3.1, basate sulle misure nominali di sforzo e deformazione, sono adeguate solo in questo ambito). Si possono distinguere i seguenti comportamenti fondamentali.

A) Comportamento elastico

È caratterizzato da un legame uniassiale σ - ϵ non necessariamente lineare ma reversibile, in cui le deformazioni vengono completamente recuperate allo scarico (Figura 3.2). Lo **sforzo dipende quindi solo dal valore finale della deformazione** e il legame si esprime attraverso una relazione del tipo

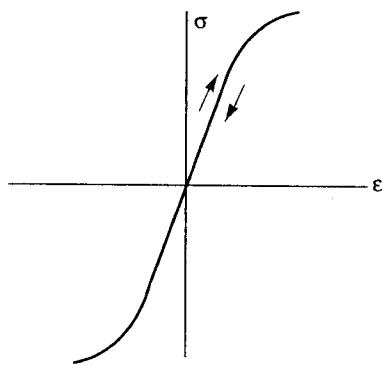


Figura 3.2

$$\sigma = \sigma(\epsilon)$$

(3.2a)

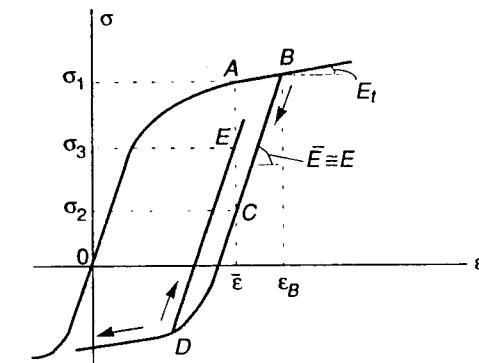


Figura 3.3

solitamente invertibile ($\epsilon = \epsilon(\sigma)$). La sua generalizzazione al caso pluriassiale richiede la definizione delle sei funzioni

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kt})$$

(3.2b)

e delle loro inverse (se esistono). Tali relazioni sono note come *funzioni di risposta*.

Diversi materiali si comportano elasticamente, almeno in una prima fase del processo di carico. Molti di essi presentano un comportamento che può con ottima approssimazione essere considerato lineare. Si può allora scrivere, rispettivamente per il provino uniazziale e per il caso generale

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

(3.3a, b)

B) Comportamento plastico

È caratterizzato dalla presenza di *deformazioni permanenti*, attribuibili a un riassetto irreversibile della struttura interna del materiale. Nel caso uniazziale questo comportamento è illustrato in Figura 3.3. Si può osservare come σ non dipenda solo dal valore finale di ϵ ma anche dalla *storia* seguita per raggiungerlo. Alla stessa ϵ possono infatti corrispondere (tra gli altri) gli sforzi σ_1 , σ_2 o σ_3 , a seconda che ϵ sia stato raggiunto lungo i percorsi OA , OBC o $OBDE$. Per tener conto della dipendenza dalla storia occorre introdurre delle variabili aggiuntive, dette *interne* perché non sempre misurabili direttamente.

In genere il materiale inizia a produrre deformazioni permanenti (o *plastiche*) solo una volta esaurita una fase elastica, per lo più lineare. Inoltre, allo scarico da una situazione plastica, il materiale torna a comportarsi elasticamente in un certo intervallo. Il comportamento si presenta quindi come *elasto-plastico* e la sua modellazione richiede che sia definito un dominio elastico istantaneo, con forma e dimensioni che possono dipendere dalla storia attraverso le variabili interne.

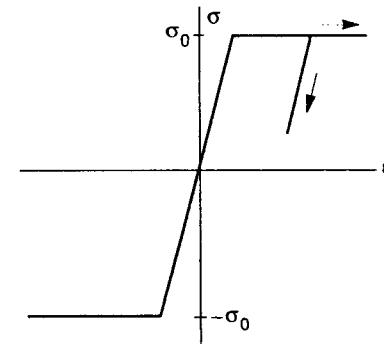


Figura 3.4

Raggiunto il limite di questo dominio, il legame può essere esplicitato solo in termini incrementali, in quanto a ogni punto la risposta dipende dal segno degli incrementi di deformazione. Ad esempio, l'incremento di sforzo dal punto B di Figura 3.3 sarà legato all'incremento di deformazione attraverso il coefficiente E , se la deformazione cresce rispetto a ϵ_B e attraverso \bar{E} (spesso assunto coincidente con la rigidezza elastica iniziale E) se questo diminuisce.

Il più semplice legame di questo tipo è quello detto *idealmente elasto-plastico*, illustrato in Figura 3.4 per il caso uniazziale. Per $|\sigma| = \sigma_0$ il materiale rifiuta incrementi di sforzo, anche se può fluire plasticamente a sforzo costante. Benché drasticamente semplificato, questo modello coglie adeguatamente alcuni aspetti importanti del comportamento di molti materiali reali, segnatamente metallici. Il confronto con la Figura 3.1a dimostra questa affermazione, almeno per deformazioni non eccessive.

C) Comportamento viscoso

Entrambi i comportamenti elastico e plastico sono *indipendenti dal tempo* in quanto prevedono, in accordo con l'osservazione 1 precedente, che la deformazione consegua pressoché istantaneamente allo sforzo. Questa circostanza non è sempre verificata. In acciai a elevata temperatura o in polimeri, ad esempio, sforzi e deformazioni variano nel tempo anche se le condizioni esterne permangono immutate.

Un tale comportamento è detto *viscoso* e due sono i principali esperimenti che permettono di investigarlo: la prova detta di *creep*, in cui si misurano le variazioni della deformazione nel tempo a sforzo costante, e quella di *rilassamento*, in cui si valutano le variazioni di sforzo a deformazione imposta. Qualitativamente, una prova di creep fornisce i risultati di Figura 3.5, dove le deformazioni sono diagrammate in funzione del tempo t per diversi livelli di sforzo ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$), mantenuto costante durante la prova. L'ordinata a $t = 0$ rappresenta la deformazione "istantanea" che si produce in concomitanza con l'applicazione del carico. Dopo un transitorio, generalmente breve, si raggiunge una fase in cui le curve presentano una pendenza pressoché costante. Per sforzi elevati, dopo un certo tempo (più o meno lungo a seconda del livello di sforzo) la pendenza cresce rapidamente, fino alla rottura del provino.

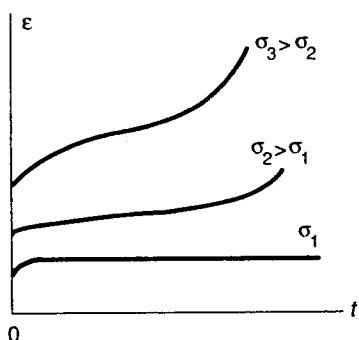


Figura 3.5

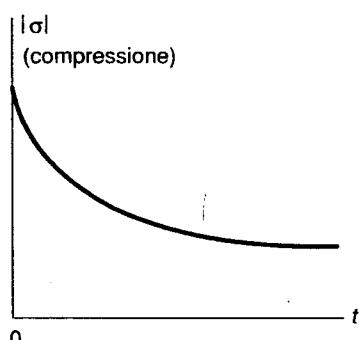


Figura 3.6

Se il carico viene rimosso, la parte elastica della deformazione è recuperata istantaneamente. Le deformazioni viscose possono o meno essere recuperate. Alcuni polimeri dopo un certo tempo ritornano alle condizioni iniziali, mentre nei metalli le deformazioni viscose sono in larga misura permanenti.

La Figura 3.6 mostra il risultato di una tipica prova di rilassamento. Il provino viene accorciato e mantenuto in tale stato deformativo; si vede come lo sforzo indotto dall'accorciamento decada nel tempo. Il fatto che un materiale presenti comportamento viscoso in condizioni di creep rende prevedibile il fenomeno del rilassamento, ma non è facile stabilire una corrispondenza quantitativa sulla sola base di curve sperimentali.

Un comportamento dipendente dal tempo presenta alcune analogie con quello di un fluido viscoso perfetto, il che giustifica la denominazione introdotta. I modelli costitutivi per questi comportamenti combinano le leggi che governano la risposta di tale fluido con quelle che predicono la parte indipendente dal tempo nella risposta del materiale. Si possono così formulare modelli *viscoelastici* o *elasto-viscoplastici*, a seconda che contengano solo parametri atti a descrivere proprietà elastiche e viscose o anche elementi che caratterizzano un comportamento plastico.

3.1.3 ROTTURA DEL MATERIALE

Le curve uniaxiali $\sigma-\epsilon$ si interrompono quando si verifica la rottura del provino, che si separa in due o più parti. In un materiale *fragile* la rottura segue quasi immediatamente l'esaurimento delle risorse elastiche. Un materiale è detto *duttile* quando invece la rottura è preceduta da apprezzabili deformazioni plastiche, come nell'esempio di Figura 3.1a. Alla prima categoria appartengono materiali quali il vetro, le rocce e i conglomerati, alla seconda tipicamente i metalli. Materiali fragili o duttili a trazione lo sono in genere anche a compressione, anche se le modalità di rottura possono presentare differenze sostanziali. In materiali che presentano un comportamento dipendente dal tempo, la rottura non è solo legata all'esaurimento della resistenza del materiale sotto carichi di breve durata, ma può avvenire anche per eccesso di deformazione viscosa sotto azioni esterne prolungate nel tempo.

In materiali da costruzione, la duttilità è una caratteristica auspicabile in quanto la rottura fragile rappresenta un fenomeno in genere improvviso, non preceduto da particolari segni premonitori. Le barre metalliche nelle strutture in calcestruzzo armato hanno lo scopo non solo di fornire quella resistenza a trazione che il conglomerato non possiede, ma anche di conferire duttilità al comportamento globale. Va anche detto che lo stesso materiale può risultare più o meno duttile in diverse situazioni ambientali. Un acciaio, duttile in condizioni normali, può divenire fragile a basse temperature, al punto che per macchinari destinati a operare in zone antartiche o nel nord del continente americano è prescritto l'uso di acciai speciali, in grado di assicurare comunque una duttilità adeguata.

In termini di modelli costitutivi, tali osservazioni si traducono nella definizione di opportuni *criteri di resistenza*. Per i normali materiali da costruzione è innanzitutto necessario introdurre un *limite elastico*, luogo degli stati di sforzo che esauriscono le risorse elastiche del materiale. Per materiali fragili, tale limite può in prima approssimazione essere considerato anche un limite di rottura. Per materiali duttili, invece, esso va riguardato solo come un *limite di snervamento*, raggiunto il quale si possono produrre deformazioni permanenti, plastiche o viscose. Come si vedrà nel prosieguo della trattazione,

zione, non è sempre necessario definire un vero e proprio limite di rottura; in molti casi infatti il collasso globale di una struttura precede l'esaurimento delle risorse locali del materiale in termini di duttilità. Il semplice esempio introduttivo studiato nel Paragrafo 1.1.2 illustra questa eventualità: al carico di collasso (1.14a) corrispondono deformazioni nei tre fili di entità ancora limitata.

Va anche detto che sotto cicli di carico che producono sforzi di segno alterno la rottura può verificarsi per il fenomeno noto come *fatica* del materiale. Il numero di cicli necessario dipende dal livello di sforzo raggiunto, ma anche se questo si mantiene ben al di sotto del limite elastico si può giungere a rottura, sia pure dopo un numero molto elevato di cicli. Se invece all'interno di ogni ciclo si producono deformazioni permanenti, il numero necessario per portare il materiale a rottura è drasticamente ridotto. Per strutture soggette ad azioni variabili e ripetute nel tempo occorre quindi introdurre opportuni criteri di verifica nei confronti di questa eventualità.

In linea di principio, la resistenza a trazione è deducibile in via teorica considerando gli effetti diretti dello sforzo applicato che esercita una trazione sui legami chimici tra le molecole del materiale. Questo calcolo porta però a valori di resistenza sorprendentemente elevati. Va infatti tenuto presente che lo sforzo $\sigma = F/A$ nel provino rappresenta soltanto una media tra valori locali altamente disomogenei. Concentrazioni di sforzo sono dovute non solo alla presenza di fori, rientranze o spigoli aguzzi (la cui presenza si cerca di evitare nel provino) ma anche a piccoli difetti, fessure o cricche che non si possono certamente escludere e causano picchi tutt'altro che trascurabili. Ben prima della rottura il materiale presenta quindi uno stato di fessurazione locale, più o meno evidente a livello macroscopico. La rottura si verifica quando queste fessure si propagano fino a coinvolgere l'intera sezione del provino.

Nello studio del comportamento dei materiali, la disciplina che si occupa della propagazione di difetti o fessure va sotto il nome di *Meccanica della Frattura*. La sua trattazione esula dagli scopi di questo testo. In via del tutto qualitativa si accenna peraltro al fatto che la propagazione o meno di una fessura è legata al rapporto tra l'energia richiesta per la propagazione e quella che viene rilasciata dal materiale con l'avanzamento della cricca. I materiali fragili hanno mezzi di difesa pressoché nulli contro la propagazione delle fessure (la fragilità è infatti spesso associata a scarsa resistenza a trazione), mentre i materiali duttili ne posseggono in misura maggiore. La duttilità non solo permette di ridistribuire le concentrazioni di sforzo su di una zona circostante il difetto, ma dissipa anche buona parte dell'energia prodotta dall'avanzamento di una fessura nella produzione di deformazioni permanenti, rendendone quindi disponibile una quantità minore per la propagazione.

Quanto sopra accennato si riferisce a materiali da costruzione. Materiali quali le gomme o certi tessuti biologici, benché fragili, posseggono un'elevata resistenza a trazione, che è loro conferita da un'elevata deformabilità elastica. La capacità di immagazzinare elasticamente energia va anche considerata per valutare la resistenza di una struttura in condizioni di impatto.

3.1.4 SIMMETRIE NEL COMPORTAMENTO

Le considerazioni fin qui svolte hanno solo permesso di stabilire alcune caratteristiche fenomenologiche molto generali di un comportamento, di fatto troppo generali perché si possa ritenere che la completa caratterizzazione di un legame costitutivo possa essere ottenuta solo su questa base ed il ricorso all'esperienza. Anche il comportamento più semplice, quello elastico lineare definito dalla (3.3b), richiederebbe, stante la presenza di sei componenti di sforzo e deformazione indipendenti, la determinazione di ben 36 costanti costitutive; appare problematico valutare attendibilmente queste costanti basandosi unicamente sui dati forniti da esperimenti.

Il numero dei parametri costitutivi necessario a descrivere il legame può però essere ridotto introducendo ipotesi specifiche per determinati comportamenti. Una riduzione viene ad esempio ottenuta in via puramente teorica se il materiale, come è spesso il caso, presenta delle simmetrie nel suo comportamento.

Un materiale come il legno fornirà chiaramente una risposta diversa (in termini sia di legame sforzi-deformazioni che di resistenza) a seconda che sia sollecitato nella direzione delle fibre o trasversalmente a esse. È però ragionevole ritenere che in un piano trasversale alle fibre esso presenti comportamento analogo in tutte le direzioni. Una lamina di materiale composito costituita da fibre unidirezionali annegate in una matrice, presenta un'evidente direzione privilegiata di comportamento; tuttavia un laminato realizzato sovrapponendo tali lame e attribuendo a ognuna di esse orientamenti opportuni, acquisirà una sostanziale simmetria nel piano, anche se il comportamento fuori dal piano resterà differente. Si osserva a tale proposito che una simmetria di questo tipo è stata implicitamente assunta nel tracciare il diagramma di Figura 3.1b, dove le deformazioni trasversali sono state considerate uguali in ogni direzione.

La presenza di simmetrie consente semplificazioni notevoli. Per un materiale elastico lineare, una volta valutate le costanti costitutive D_{ijkl} sulla base di una prova in una determinata direzione, quelle relative a una direzione diversa ma che presenti lo stesso comportamento si ottengono semplicemente scambiando gli indici. La più completa, detta *isotropia*, si ha quando il materiale presenta lo stesso comportamento in ogni direzione. Un conglomerato come il calcestruzzo, ad esempio forma di simmetria, può essere considerato macroscopicamente isotropo. Lo stesso può dirsi per un acciaio, anche se gli elementi strutturali in cui è impiegato (quali lamiere o profilati) sono ottenuti attraverso processi di lavorazione che possono introdurre direzioni preferenziali di comportamento. Tali effetti risultano però in genere poco influenti e l'ipotesi di isotropia è considerata accettabile. Si sottolinea che l'isotropia non deve essere confusa con una simmetria in termini di resistenza a trazione e compressione: un calcestruzzo presenta resistenze marcatamente diverse nei due casi; l'isotropia semplicemente implica che esse risultano uguali in ogni direzione.

3.2 IL LEGAME ELASTICO

3.2.1 ASPETTI ENERGETICI

3.2.1.1 Energia di deformazione

L'ipotesi su cui poggia la descrizione analitica del comportamento elastico è l'esistenza di un potenziale della deformazione. Si assume cioè che il processo deformativo compatti l'immagazzinamento di un'energia a spese della quale le deformazioni vengono recuperate una volta rimossa la causa deformante. Tale potenziale, detto *energia di deformazione*, è definito dall'espressione

$$\omega(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (3.4a)$$

Come è noto, perché la quantità $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ sia un differenziale esatto è necessario e sufficiente che risulti

$$\partial\sigma_{ij}/\partial\epsilon_{kt} = \partial\sigma_{kt}/\partial\epsilon_{ij} \quad (3.4b)$$

$\omega(\epsilon_{ij})$ dipende allora solo dal valore finale delle deformazioni e non dal percorso lungo cui sono state raggiunte, il che chiaramente comporta la reversibilità del processo deformativo. Nel caso uniaxiale, l'energia di deformazione è rappresentabile come l'area sottesa dalla curva $\sigma-\epsilon$ (tratteggiata verticalmente in Figura 3.7).

Dalle (3.4) si ottiene

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Ne consegue che il legame elastico (3.2b) assume la forma

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\omega}{\partial\epsilon_{ij}} \quad (3.5)$$

e si riconduce quindi alla definizione di $\omega(\epsilon_{ij})$.

Se il legame è anche lineare, la (3.5) deve produrre la (3.3b). Le costanti elastiche D_{ijkl} sono in numero di 81. Peraltro, essendo $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\epsilon_{kt} = \epsilon_{tk}$, uno scambio tra gli indici i, j o k, t non ne altera il valore. Per la (3.4b) dovrà inoltre risultare

$$\partial\sigma_{ij}/\partial\epsilon_{kt} = D_{ijkl} = \partial\sigma_{kl}/\partial\epsilon_{ij} = D_{klij} \quad (a)$$

Le costanti elastiche non sono quindi alterate neppure da uno scambio tra le coppie di indici $(ij), (kl)$. È quindi

$$D_{ijkl} = D_{jikl} \quad D_{ijkl} = D_{ijlk} \quad D_{klij} = D_{ijkl} \quad (3.6a-c)$$

e il numero massimo delle costanti elastiche indipendenti si riduce a 21.

In alternativa alla scrittura tensoriale (3.3b), il legame elastico lineare può essere espresso in forma matriciale scrivendo

$$\sigma = \mathbf{d}\epsilon \quad (3.7a)$$

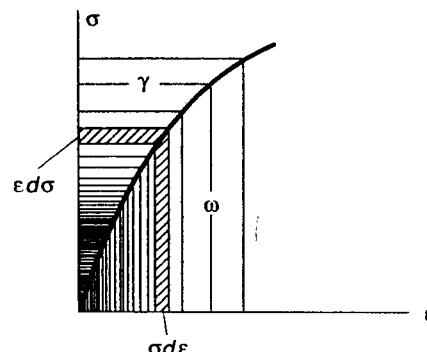


Figura 3.7

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2232} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.7b)$$

dove σ ed ϵ adesso indicano non più i tensori bensì i vettori delle sei componenti significative di sforzo e deformazione. Si osservi che in ϵ sono state introdotte le definizioni ingegneristiche per le componenti a indice diverso, pari al doppio di quelle tensoriali: il prodotto matriciale (3.7) produce allora lo stesso risultato della (3.3b), in cui i termini a indice diverso compaiono due volte. \mathbf{d} è la matrice 6×6 delle costanti elastiche che, in virtù della (3.6c) risulta simmetrica; precisamente

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} \quad (3.8)$$

L'energia di deformazione è adesso una forma quadratica e si scrive

$$\omega(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad \omega(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon' \mathbf{d} \epsilon \quad (3.9a, b)$$

In tal modo, infatti, la (3.5) si riconduce alle (3.3b) e (3.7).

Relazioni elastiche del tipo (3.2b) non implicano di per sé l'esistenza di un'energia di deformazione. Ad esempio, una matrice non simmetrica nella (3.7) darebbe luogo a un legame elastico-lineare, che peraltro prevederebbe una risposta dipendente dal percorso e non sarebbe esprimibile attraverso la (3.5). L'ipotesi dell'esistenza di un potenziale della deformazione caratterizza quindi il legame in maniera più stringente. Con maggior rigore terminologico, si definisce semplicemente *elastico* un legame comunque rispettoso delle (3.2b), mentre l'esistenza di ω dà luogo alla più ristretta categoria dei legami detti *iperelastici* [1]. Questi peraltro costituiscono l'ambito di quasi esclusivo interesse; legami semplicemente elastici hanno scarsa rilevanza e l'esistenza di un'energia di deformazione viene sempre assunta come ipotesi di base; in particolare, nel caso lineare la simmetria della matrice \mathbf{d} è data per scontata. Nel seguito, la distinzione verrà ignorata e l'esistenza di $\omega(\epsilon_{ij})$ sarà sempre presupposta.

3.2.1.2 Energia complementare

L'energia di deformazione $\omega(\epsilon_{ij})$ è funzione del punto attraverso le componenti del tensore di deformazione. Come è noto dall'analisi matematica, la (3.5) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le componenti di sforzo e deformazione se $\partial^2 \omega / \partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}$ è continua nell'intorno del punto e se il determinante dell'Hessiano non è nullo nel punto. In tal caso esiste anche la relazione inversa della (3.2b) e si può scrivere

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\sigma_{kl})$$

il che consente di esprimere ω in funzione degli sforzi.

È allora possibile introdurre una quantità coniugata all'energia di deformazione

attraverso la trasformata di Legendre [3]. Essa è denominata *energia complementare* ed è definita come segue

$$\gamma(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \omega(\sigma_{ij}) \quad (3.10)$$

Differenziando rispetto alle componenti di sforzo, si ottiene

$$\partial\gamma/\partial\sigma_{kl} = (\partial\sigma_{ij}/\partial\sigma_{kl})\epsilon_{ij} + \sigma_{ij}(\partial\epsilon_{ij}/\partial\sigma_{kl}) - \partial\omega/\partial\sigma_{kl}$$

Ricordando la (3.5), l'ultimo addendo a secondo membro può essere espresso nella forma

$$\partial\omega/\partial\sigma_{kl} = (\partial\omega/\partial\epsilon_{ij})(\partial\epsilon_{ij}/\partial\sigma_{kl}) = \sigma_{ij}(\partial\epsilon_{ij}/\partial\sigma_{kl})$$

e quindi si elide con il secondo addendo. Osservando ancora che risulta

$$\partial\sigma_{ij}/\partial\sigma_{kl} = 1 \quad \text{se } kl = ij \quad \partial\sigma_{ij}/\partial\sigma_{kl} = 0 \quad \text{altrimenti}$$

si perviene alla relazione

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial\gamma}{\partial\sigma_{ij}} \quad (3.11)$$

che esprime il legame elastico inverso rispetto alla (3.5).

Consegue dalla (3.11) che l'energia complementare può essere definita, in modo duale alla (3.4), nella forma seguente

$$\gamma(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (3.12)$$

Nel caso uniaxiale, γ è interpretabile come l'area tratteggiata orizzontalmente in Figura 3.7 (si sottolinea che queste rappresentazioni grafiche sono possibili solo nel caso uniaxiale). Per un materiale elastico-lineare, ω e γ risultano numericamente uguali, come è anche evidenziato dalla Figura 3.8. È però importante ricordare che mentre ω è funzione delle deformazioni, γ dipende dagli sforzi. Dalla (3.10) conseguono anche

$$\omega + \gamma = \sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \sigma'\epsilon \quad (3.13)$$

3.2.1.3 Esistenza e unicità della risposta elastica

Per quanto detto nel paragrafo precedente, qualora l'energia di deformazione e l'energia complementare siano entrambe definibili, risulta possibile scrivere il legame elastico sia nella forma *diretta* (3.5) che in quella *inversa* (3.11). Una volta assunta l'esistenza di ω come ipotesi di partenza, l'esistenza di γ è subordinata a condizioni di fatto poco restrittive, ma non a priori soddisfatte. In particolare è richiesto (oltre alla continuità delle derivate seconde di ω nell'intorno del punto) che risulti diverso da zero il determinante dell'Hessiano dell'energia di deformazione; precisamente, che sia

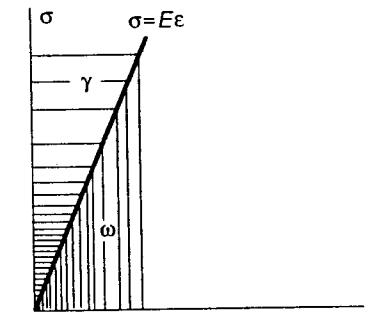


Figura 3.8

$$\det[\partial^2\omega/\partial\epsilon_{ij}\partial\epsilon_{kl}] \neq 0 \quad (3.14)$$

In tal caso è assicurata una corrispondenza biunivoca tra ϵ_{ij} e σ_{ij} nell'intorno del punto.

Situazioni in cui $\omega(\epsilon_{ij})$ è definita ma non lo è $\gamma(\sigma_{ij})$ sono concepibili. Nell'esempio uniaxiale di Figura 3.9a, ω è una funzione a un solo valore di ϵ ed il legame $\sigma = \sigma(\epsilon)$ è univocamente definito. Non lo è chiaramente il legame inverso: a valori di $\sigma > \sigma^*$ non corrisponde alcun valore di ϵ , mentre entrambe le soluzioni ϵ_1 ed ϵ_2 corrispondono al livello di sforzo $\sigma_1 < \sigma^*$. Analoghe considerazioni si applicano al caso di Figura 3.9b, dove a $\sigma = \sigma^*$ può corrispondere qualunque deformazione nell'intervallo $\epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_2$.

Tali comportamenti sono peraltro esclusi dalla ragionevole ipotesi ulteriore che $\omega(\epsilon_{ij})$ sia una funzione *strettamente convessa e definita positiva*:

$$\omega(\epsilon_{ij}) > 0 \quad \forall \epsilon_{ij} \neq 0 \quad \det[\partial^2\omega/\partial\epsilon_{ij}\partial\epsilon_{kl}] > 0 \quad (3.15)$$

Ciò equivale a richiedere che qualunque processo deformativo comporti l'introduzione di energia o, in altre parole, che per deformare un materiale elastico sia comunque

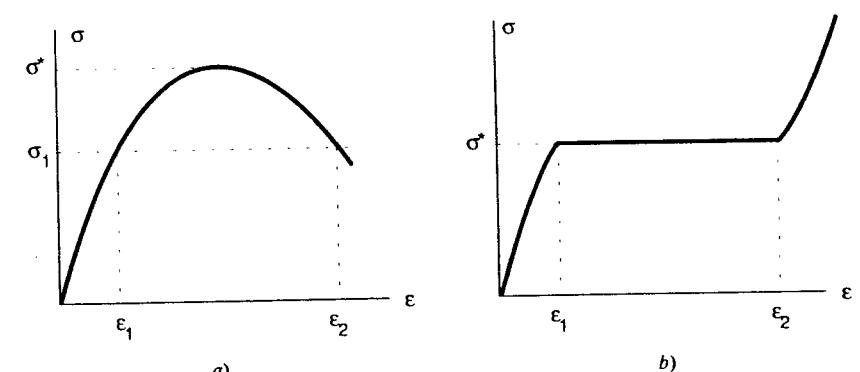


Figura 3.9

richiesto un lavoro positivo. In questa situazione, sia l'esistenza che l'unicità della risposta elastica sono assicurate. Va osservato che la stretta convessità di ω implica quella dell'energia complementare γ .

3.2.1.4 Deformazioni elastiche ed effetti anelasticci

Nello sviluppare le considerazioni precedenti è stato tacitamente assunto che le deformazioni fossero nella loro interezza di natura elastica. Non sempre questo è il caso. Ad esempio, un elemento infinitesimo isolato di materiale soggetto a una variazione di temperatura si deforma senza che ciò induca uno stato di sforzo. Peraltro, se più elementi vengono individualmente assoggettati a deformazione termica, non risulterà in generale possibile ricostruire la continuità del mezzo e soddisfare le condizioni di vincolo attribuendo a tali elementi solo moti rigidi. Deformazioni elastiche (e conseguenti sforzi) sono quindi richieste per ristabilire la congruenza.

Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti è possibile concepire le deformazioni totali come somma di due contributi, scrivendo

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \vartheta_{ij} \quad \epsilon = \mathbf{e} + \boldsymbol{\vartheta} \quad (3.16a, b)$$

dove si sono indicate con e_{ij} e ϑ_{ij} rispettivamente le porzioni elastica e anelastica (ad esempio, termica) della deformazione. Solo il primo di questi termini è associato agli sforzi attraverso il legame costitutivo. Le deformazioni anelastiche sono considerate note e non variano nel processo deformativo; sarà quindi

$$de_{ij} = d\epsilon_{ij} \quad (3.17)$$

L'energia di deformazione ω è dovuta ai soli contributi elastici. La (3.4) viene allora sostituita dalla definizione seguente

$$\omega(e_{ij}) = \int_0^{e_{ij}} \sigma_{ij} de_{ij} = \int_{\vartheta_{ij}}^{e_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (3.18)$$

dove e_{ij} è definito dalla (3.16) e si è fatto uso della (3.17). Attraverso manipolazioni analitiche qui omesse, la trasformazione di Legendre porta ancora alla definizione (3.12) per l'energia complementare, il cui valore peraltro risulta influenzato dalla presenza di deformazioni anelastiche. Per il caso uniassiale, le modifiche sono illustrate in Figura 3.10a. I legami elastici diretto e inverso sono ancora forniti, rispettivamente, dalle (3.5) e (3.11).

Di particolare interesse è il caso lineare. Dalle (3.18), (3.16) in questo caso conseguono

$$\omega(e_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} = \frac{1}{2} D_{ijkl} (e_{ij} - \vartheta_{ij})(e_{kl} - \vartheta_{kl}) \quad (3.19a)$$

$$\omega(\epsilon) = \frac{1}{2} \mathbf{e}' \mathbf{d} \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\epsilon - \boldsymbol{\vartheta})' \mathbf{d} (\epsilon - \boldsymbol{\vartheta}) \quad (3.19b)$$

mentre l'energia complementare ha l'espressione

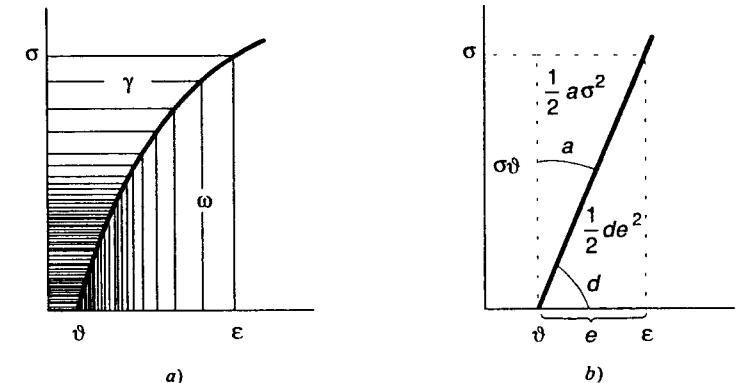


Figura 3.10

$$\gamma(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ij} \vartheta_{ij} \quad (3.20a)$$

$$\gamma(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma' \mathbf{a} \sigma + \sigma' \boldsymbol{\vartheta} \quad (3.20b)$$

dove i coefficienti A_{ijkl} rappresentano i parametri costitutivi relativi al legame inverso ($\mathbf{a} = \mathbf{d}^{-1}$). L'interpretazione grafica delle (3.19), (3.20) è fornita, sempre per il caso uniassiale, dalla Figura 3.10b.

Si noti che sviluppando gli ultimi addendi delle (3.19) si ottengono termini che coinvolgono le sole ϑ_{ij} . Questi possono essere eliminati in quanto ininfluenti sul legame (3.5) (l'energia di deformazione è definita infatti a meno di una costante arbitraria). Le (3.19) possono quindi essere sostituite dalle relazioni seguenti

$$\omega(e_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - D_{ijkl} \epsilon_{ij} \vartheta_{kl} = D_{ijkl} \epsilon_{ij} \vartheta_{kl} \quad \omega(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon' \mathbf{d} \epsilon - \epsilon' \mathbf{d} \boldsymbol{\vartheta} \quad (21a, b)$$

Dalle (3.5) e (3.11) si ottengono adesso i legami diretto e inverso nella forma

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial e_{ij}} = D_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \vartheta_{kl}) = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \sigma = \frac{d\omega}{d\epsilon} = \mathbf{d}(\epsilon - \boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{d}\epsilon \quad (3.22a, b)$$

$$e_{ij} = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \vartheta_{ij} \quad \epsilon = \frac{d\gamma}{d\sigma} = \mathbf{a}\sigma + \boldsymbol{\vartheta} \quad (3.23a, b)$$

Per $\epsilon = \mathbf{e}$, tali espressioni si riconducono a quelle relative a sole deformazioni elastiche. Si noti che, essendo $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{-1}$, le (3.23) sono definibili solo se la matrice \mathbf{d} non è singolare. Tale circostanza peraltro consente dall'ipotesi di stretta convessità di ω che, nel caso lineare, è assicurata dalla definizione positiva della forma quadratica associata a \mathbf{d} . La condizione (3.15) ora si scrive

$$\omega(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\vartheta})^T \mathbf{d} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{d} \boldsymbol{\epsilon} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.24)$$

e si supporrà sempre verificata nel seguito.

3.2.2 IL LEGAME ELASTICO-LINEARE ISOTROPO

3.2.2.1 Conseguenze dell'isotropia

Un materiale isotropo non presenta direzioni preferenziali di comportamento e il suo legame costitutivo dovrà risultare indipendente dal sistema di riferimento in cui le componenti di sforzo e deformazione sono rappresentate. Nel caso elastico, ciò implica che l'energia di deformazione dipenda dalla deformazione stessa solo attraverso i suoi invarianti (2.126). Per un materiale elastico e isotropo sarà quindi

$$\omega = \omega(I_1, I_2, I_3) \quad (3.25)$$

Gli invarianti I_i , $i = 1, 2, 3$, sono rispettivamente funzioni lineare, quadratica e cubica delle componenti di deformazione.

Per semplicità, verrà prima considerato il caso in cui non siano presenti deformazioni anelastiche. Nel caso lineare, ω è allora una forma quadratica e l'invariante cubico non può comparire. È facile verificare che l'unica possibile espressione è la seguente

$$\omega = aI_1^2 + bI_2 \quad (3.26)$$

Le costanti a e b rappresentano i parametri costitutivi. Il legame di un materiale elastico-lineare e isotropo è quindi governato da *due sole costanti indipendenti*.

La (3.26) viene solitamente scritta ridefinendo le costanti; è spesso usata la forma

$$\omega = \frac{1}{2} (\lambda + 2G)I_1^2 - 2GI_2 \quad (3.27)$$

dove λ e G sono note come *costanti di Lamè*. Dalla (3.5) si ottiene allora

$$\sigma_{ij} = (\lambda + 2G)I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.28)$$

Le (2.126) peraltro forniscono, rispettivamente per le componenti a indice uguale e a indice diverso delle deformazioni

$$\begin{aligned} \partial I_1 / \partial \epsilon_{11} &= \partial I_1 / \partial \epsilon_x = 1 & \partial I_2 / \partial \epsilon_{11} &= \partial I_2 / \partial \epsilon_x = \epsilon_y + \epsilon_z \\ \partial I_1 / \partial \epsilon_{12} &= \partial I_1 / \partial (\gamma_{xy}/2) = 0 & \partial I_2 / \partial \epsilon_{12} &= \partial I_2 / \partial (\gamma_{xy}/2) = -\frac{1}{2} \gamma_{yx} \\ &&& \text{(e analoghe)} \quad (3.29) \end{aligned}$$

In notazione ingegneristica, le (3.28) si scrivono quindi

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y + \lambda\epsilon_z \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \text{(e analoghe)} \quad (3.30a, b)$$

È importante sottolineare come le (3.30), che pur rappresentano una caratterizzazione molto precisa del legame, siano state derivate senza la necessità di alcun supporto sperimentale. Esse discendono da un modello teorico di comportamento in cui è stata ipotizzata l'esistenza di un'energia di deformazione, che deve avere l'espressione (3.26) nel caso lineare ed isotropo. A questo punto il ricorso all'esperienza è però necessario per determinare i valori delle costanti λ e G , oltre che per verificare l'adeguatezza del modello per materiali reali.

Le (3.30) mettono in luce una caratteristica importante del legame isotropo. Se le deformazioni sono riferite alla terna principale, si ha $\gamma_{ij} = 0$; le (3.30b) mostrano allora che è anche $\tau_{ij} = 0$. In un materiale elastico-lineare e isotropo, quindi, *le direzioni principali di sforzo e deformazione coincidono*. Ciò risulta verificato per ogni comportamento isotropo, anche non elastico.

3.2.2.2 Definizione ingegneristica delle costanti elastiche

Le costanti di Lamè non si prestano a un'interpretazione fisica immediata. Nella pratica ingegneristica si preferisce ricorrere alle seguenti definizioni alternative

$$E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (3.31a, b)$$

dove E è detto *modulo elastico diretto* (o di Young) e ν *coefficiente di contrazione trasversale* (o di Poisson). Risolvendo per le costanti di Lamè, si ottiene

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.32a, b)$$

Sostituendo nelle (3.30), il legame assume la forma

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y + \nu\epsilon_z] \quad (3.33a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \text{(e analoghe)} \quad (3.33b)$$

Il legame viene frequentemente scritto in termini delle tre *costanti ingegneristiche* E , ν , G . Quest'ultima è detta *modulo di elasticità tangenziale*. Due sole di esse sono però indipendenti, sussistendo il legame (3.32b). Dimensionalmente, E e G sono sforzi (N/mm^2 o MPa), mentre ν è un numero puro.

Risolvendo le (3.33) per le deformazioni, risulta

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z] \quad \gamma_{xy} = 2 \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \text{(e analoghe)} \quad (3.34a, b)$$

In una prova di trazione sono presenti l'unica componente di sforzo normale $\sigma = \sigma_z$ e le deformazioni dirette longitudinale $\epsilon = \epsilon_z$ e trasversale $\epsilon_t = \epsilon_x = \epsilon_y$. Con ovvi interscambi di indici, dalle (3.34a) si ottiene allora

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\nu \varepsilon_z$$

Il modulo elastico E rappresenta quindi il rapporto tra sforzo normale e deformazione longitudinale in una prova uniaxiale, mentre ν è (a meno del segno) il rapporto tra le deformazioni trasversale e longitudinale. La prova di trazione permette di determinare i loro valori: E è fornito dalla pendenza iniziale del diagramma $\sigma-\varepsilon$ di Figura 3.1a; ν è invece l'ordinata all'origine del grafico in Figura 3.1b. Entrambi i valori si mantengono costanti fintanto che il comportamento rimane lineare.

Una prova di torsione sul cilindro circolare cavo esaminato nel Paragrafo 1.2.2 consentirebbe la valutazione diretta di G , peraltro derivabile da E e ν attraverso la (3.32b). Come la (3.34b) mostra, G è infatti fornito dal rapporto tra lo sforzo tangenziale e lo scorrimento angolare.

L'isotropia consente di riferire i legami diretto ed inverso alla terna principale. Essi allora si scrivono

$$\begin{Bmatrix} S_I \\ S_{II} \\ S_{III} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_I \\ e_{II} \\ e_{III} \end{Bmatrix} \quad (3.35a)$$

$$\begin{Bmatrix} e_I \\ e_{II} \\ e_{III} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_I \\ S_{II} \\ S_{III} \end{Bmatrix} \quad (3.35b)$$

Diversi materiali presentano ovviamente diverse costanti elastiche. Tuttavia la condizione (3.24) stabilisce dei limiti ai valori che esse possono assumere. Se infatti l'energia di deformazione è definita positiva, tali dovranno risultare le matrici nelle (3.35). Con riferimento, ad esempio, alla (3.35b), questa condizione comporta le diseguaglianze

$$\frac{1}{E} > 0 \quad \frac{1-\nu^2}{E^2} > 0 \quad \frac{(1-2\nu)(1+\nu)^2}{E^3} > 0 \quad (3.36a-c)$$

Il che implica, ricordando anche la (3.32b)

$$E > 0 \quad G > E/3 \quad -1 < \nu < .5 \quad (3.37a-c)$$

Peraltro, valori negativi del coefficiente di Poisson non si riscontrano in materiali reali (le deformazioni trasversali in una prova uniaxiale sono sistematicamente di segno opposto a quelle longitudinali). Di fatto, il limite inferiore per ν è costituito dal valore zero, che caratterizza un materiale assolutamente privo di contrazione trasversale. Le (3.37) sono allora sostituite dalle diseguaglianze seguenti

$$E > 0 \quad E/3 < G \leq E/2 \quad 0 \leq \nu < .5 \quad (3.38a-c)$$

In virtù della (2.127), che definisce la deformazione volumetrica, il valore $\nu = .5$ corri-

sponde a un ipotetico materiale *incompressibile*, che può cioè deformarsi solo a volume costante. Valori tipici delle costanti elastiche per alcuni materiali da costruzione sono riportati in Tabella 3.1.

ESEMPIO 3.1 In un punto di una struttura in acciaio si abbiano le deformazioni

$$\varepsilon_x = .030\% \quad \varepsilon_y = .068\% \quad \varepsilon_z = -.038\% \quad \gamma_{xy} = -.050\% \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$$

Si vogliono calcolare gli sforzi che a esse conseguono attraverso il legame isotropo. Assumendo $E = 206\,000$ MPa e $\nu = .3$, risulta

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 396\,154 \text{ MPa} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 79\,231 \text{ MPa}$$

Dalle (3.33) si ottiene allora

$$\sigma_x = 118.8 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 179.1 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 11.1 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -39.6 \text{ MPa} \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Si osservi che le fibre in direzione z si accorcianno anche se soggette a trazione. Gli allungamenti indotti da una σ_z modesta sono infatti più che compensati dalla contrazione trasversale dovuta alle trazioni nelle altre due direzioni.

Si noti che se ν assumesse uno dei valori limite del suo intervallo di definizione (3.37c) il legame diretto (3.33) non sarebbe definibile. È ovvio che per un materiale rigorosamente incompressibile ($\nu = .5$) né l'esistenza né l'unicità della risposta elastica possono essere garantite: non esiste infatti alcuno sforzo associato a una variazione di volume, mentre a una deformazione puramente deviatorica corrispondono più stati di sforzo, che differiscono tra loro per una componente idrostatica di valore arbitrario. Tale situazione, anche se non consentita dalla (3.37c), è peraltro avvicinata in alcuni materiali reali, quali le gomme. La (3.34b) mostra invece come per $\nu = -1$ non si possano verificare scorrimenti angolari. Tale evenienza, tuttavia, ha rilevanza pressoché nulla essendo in realtà l'intervallo ammissibile per il coefficiente di Poisson definito dalla (3.38c).

È a volte conveniente ridefinire le costanti elastiche in modo da separare il legame isotropo in due parti, la prima relativa alle sole componenti idrostatiche di sforzo e deformazione e la seconda ai soli deviatori. Con la stessa notazione del Capitolo 2, si indichino con p , S_{ij} e Θ , η_{ij} le componenti idrostatiche e deviatoriche rispettivamente di sforzo e deformazione. Introducendo le loro definizioni (2.18, 2.19) e (2.128) nelle (3.34), si perviene alle relazioni

$$p = K\Theta \quad S_{ij} = 2G\eta_{ij} \quad (3.39a, b)$$

dove

$$K = \frac{E}{1-2\nu} = 3\lambda + 2G \quad (3.40)$$

Tabella 3.1

	E (MPa)	ν	G (MPa)
Acciaio	206 000	0.30	80 000
Alluminio	70 000	0.36	26 000
Rame	120 000	0.35	44 000
Calcestruzzo	20 000–30 000	0.12–0.14	9 000–13 000

è noto come **modulo volumetrico**. Per $\nu \rightarrow .5$ esso non è definibile, il che riflette l'incapacità del materiale di subire variazioni di volume. Sarebbero allora possibili solo deformazioni deviatoriche, che avvengono a volume costante. Si noti che, in accordo con la (2.128), le η_{ij} rappresentano le componenti tensoriali, il che giustifica la presenza del fattore due nella (3.39b).

3.2.2.3 Deformazioni termiche

Per quanto visto nel Paragrafo 2.1.4, in presenza di deformazioni anelastiche il legame si riconduce alle (3.22), (3.23). Ciò tuttavia non comporta alcuna modifica nella struttura delle matrici elastiche.

Di particolare interesse è il caso di deformazioni termiche, prodotte da una variazione di temperatura $\Delta T(x)$ nel mezzo. In un materiale isotropo, essa non produce scorrimenti angolari. Le deformazioni termiche presentano solo componenti dirette, uguali in ogni direzione e legate a ΔT attraverso il *coefficiente di dilatazione termica* α del materiale, che definisce la deformazione conseguente a una variazione di temperatura unitaria (dimensionalmente, α è un numero per grado centigrado). Le deformazioni termiche si scrivono quindi

$$\vartheta_{ij} = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad \vartheta = \alpha \Delta T [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (3.41a, b)$$

dove δ_{ij} è il tensore di Kronecker. Semplici passaggi permettono di sostituire le (3.33), (3.34) con le relazioni

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y + \nu\epsilon_z] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (3.42a, b)$$

(e analoghe)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z] + \alpha \Delta T \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (e analoghe) \quad (3.43a, b)$$

Si noti che il coefficiente di $\alpha \Delta T$ nella (3.42a) non è altro che il modulo volumetrico (3.40), il che riflette la natura puramente idrostatica delle deformazioni termiche nel caso isotropo. Nella forma (3.39) il legame si scrive, come è facile verificare

$$p = K(\Theta - \alpha \Delta T) \quad S_{ij} = 2G \eta_{ij} \quad (3.44a, b)$$

Il coefficiente di dilatazione termica α risulta in genere funzione della temperatura, anche se non varia in maniera determinante per escursioni termiche non eccessive. Per l'acciaio e il calcestruzzo il suo valore è dell'ordine di 10^{-5} per grado centigrado, almeno per temperature al di sotto dei $100^\circ C$.

Se le deformazioni termiche non possono prodursi liberamente danno luogo a sforzi anche notevoli. Si consideri, ad esempio, il caso di un provino in acciaio riscaldato uniformemente, in cui le deformazioni longitudinali siano completamente impeditte. Detto z l'asse del provino, lo sforzo è calcolabile ponendo nella (3.43a) $\epsilon_z = 0$, $\sigma_z = \sigma$ e $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Si ottiene

$$\sigma = -E \alpha \Delta T$$

Per l'acciaio è, come detto, $\alpha = 10^{-5}/^\circ C$ ed $E = 200\,000$ MPa (vedi Tabella 3.1). Lo sforzo di compressione risulta pertanto pari a $|\sigma| = 2\Delta T$. Variazioni di temperatura di solo $50^\circ C$ producono quindi sforzi dell'ordine di 100 MPa, tutt'altro che trascurabili.

In presenza di escursioni termiche elevate, non solo il valore di α deve essere modificato ma occorre anche tenere presente l'influenza della temperatura sulle costanti elastiche. Per temperature superiori ai $100-150^\circ C$ il modulo elastico dell'acciaio diminuisce sensibilmente e tale circostanza va tenuta in conto nell'analisi di particolari componenti strutturali, ad esempio contenitori di fluidi molto caldi, o in particolari situazioni, quali la verifica della resistenza in caso di incendio.

3.2.3 PRINCIPALI LEGAMI ANISOTROPI

L'isotropia rappresenta la più completa simmetria di comportamento e riconduce il legame elastico lineare a due sole costanti indipendenti. È questo un caso importante ma non esaustivo, esistendo ovviamente materiali di interesse la cui risposta non presenta queste caratteristiche. Si è visto che il numero massimo di costanti elastiche compatibile con l'esistenza di un'energia di deformazione è 21; tale numero tuttavia si riduce in presenza di simmetrie parziali. Alcuni legami lineari relativi a queste situazioni intermedie vengono ora presentati, rimandando a [4] per i dettagli sulla loro derivazione. Per semplicità, non si considerano deformazioni termiche.

Un materiale è detto *ortotropo* se il suo comportamento è simmetrico rispetto a tre assi (x, y, z) mutuamente ortogonali, noti come *direzioni principali del materiale*. La condizione che il legame risulti invariante rispetto a rotazioni di 180° attorno a tali assi stabilisce alcune relazioni tra le costanti. Si ha allora, in luogo delle (3.34)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E_x - \nu_{yx}\sigma_y/E_y - \nu_{zx}\sigma_z/E_z \\ \epsilon_y &= -\nu_{xy}\sigma_x/E_x + \sigma_y/E_y - \nu_{yz}\sigma_z/E_z \\ \epsilon_z &= -\nu_{xz}\sigma_x/E_x - \nu_{yz}\sigma_y/E_y + \sigma_z/E_z \end{aligned} \quad (3.45a)$$

$$\gamma = \tau_{xy}/G_{xy} \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G_{yz} \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G_{zx}$$

dove E_x indica il modulo elastico nella direzione principale x , ν_{xy} il coefficiente di contrazione trasversale in direzione y dovuta a uno sforzo uniaxiale in direzione x e G_{xy} il modulo di elasticità tangenziale in piani paralleli a (x, y) , adesso indipendente dalle altre costanti. Nelle (3.45a) compaiono 12 costanti, di cui però solo 9 sono indipendenti. L'esistenza di un'energia di deformazione richiede infatti che la matrice elastica risulti simmetrica; dovrà quindi essere

$$\nu_{yx}/E_y = \nu_{xy}/E_x \quad \nu_{xz}/E_x = \nu_{zx}/E_z \quad \nu_{yz}/E_z = \nu_{yz}/E_y \quad (3.45b)$$

Se il materiale presenta inoltre simmetria di rotazione attorno a uno di questi assi, ad esempio z , è detto *trasversalmente isotropo*. Il numero delle costanti indipendenti si riduce allora a 5 e il legame si scrive

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \mu\sigma_z) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_x + \sigma_y - \mu\sigma_z) \quad \gamma_{xy} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \quad (3.46a)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + n\sigma_z) \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{Z} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{Z} \tau_{zx} \quad (3.46b)$$

Questo legame è isotropo nel piano (x, y) , che è di simmetria per il materiale; in esso, il comportamento è governato dalle (3.46a), che si differenziano dalle usuali relazioni isotrope solo per il coefficiente μ che governa le contrazioni trasversali nel piano dovute a σ_z e che è numericamente diverso da ν . Il modulo diretto secondo z è adesso $E_z = E/n$, mentre Z indica il modulo di elasticità tangenziale in piani paralleli all'asse z . Le (3.46) rappresentano adeguatamente il comportamento di alcuni materiali stratificati (quali compositi o legno lamellare), in cui l'isotropia nel piano è approssimativamente ricostruita conferendo ai singoli strati orientazioni particolari.

Nella descrizione del comportamento di un materiale anisotropo, la terna $(0; x, y, z)$ rappresenta un riferimento fisico del materiale. In direzioni diversamente orientate, ad esempio in un riferimento ruotato $(0; \xi, \eta, \zeta)$, il legame si ottiene trasformando sforzi e deformazioni mediante le leggi (2.8) e (2.123) che governano le variazioni delle componenti dei tensori di riferimento. Se il legame è scritto nella forma

$$\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z) \quad (b)$$

dalle leggi di trasformazione

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{ij} n_{\alpha i} n_{\beta j}, \quad \sigma_{kl} = \sigma_{\gamma\delta} n_{k\gamma} n_{l\delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = \xi, \eta, \zeta) \quad (c)$$

si ottiene

$$\epsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta} \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{ijkl} n_{k\gamma} n_{l\delta} n_{\alpha i} n_{\beta j} \quad (d1, 2)$$

Si ricorda che (ad esempio) $n_{\alpha=1, i=2}$ indica il coseno direttore tra gli assi ξ e y .

Per semplicità, l'effetto della trasformazione verrà illustrato nel caso di un materiale ortotropo in condizioni di sforzo piano. Due delle direzioni principali del materiale, indicate con (x, y) , si trovano nel piano degli sforzi e si indichi con (ξ, η) un riferimento ruotato di un angolo φ in tale piano (Figura 3.11). Trascurando la componente di deformazione trasversale ϵ_z (diversa da zero ma non alterata dalla rotazione del riferimento) e ponendo

$$\epsilon_x = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]' \quad \epsilon_\xi = [\epsilon_\xi \ \epsilon_\eta \ \gamma_{\xi\eta}]'$$

(e analoghe per gli sforzi), il legame si può compattamente scrivere come segue

$$\epsilon_x = \mathbf{a}_x \sigma_x \quad \epsilon_\xi = \mathbf{a}_\xi \sigma_\xi$$

Nel riferimento principale, dalle (3.45) si ottiene

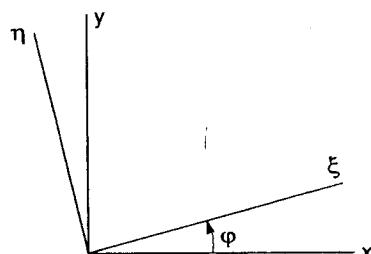


Figura 3.11

$$\mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu/E_y & 0 \\ -\nu/E_y & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

dove si è posto $\nu_{xy} = \nu$, $G_{xy} = G$ e si è tenuto conto della prima delle (3.45b). Introducendo la matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (e)$$

la legge di trasformazione (c) può compattamente scriversi

$$\epsilon_x = \mathbf{T} \sigma_\xi \quad \epsilon_\xi = \mathbf{T}' \epsilon_x$$

per cui la (d2) si esprime

$$\epsilon_\xi = \mathbf{T}' \mathbf{a}_x \mathbf{T} \quad (f)$$

Per $\varphi = 45^\circ$, si ottiene

$$\mathbf{a}_\xi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{13} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{bmatrix}$$

con

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1-2\nu}{E_y} + \frac{1}{G} \right) \quad a_{12} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1-2\nu}{E_y} - \frac{1}{G} \right)$$

$$a_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_y} - \frac{1}{E_x} \right) \quad a_{33} = \frac{1}{E_x} + \frac{1+2\nu}{E_y}$$

Il modulo diretto è adesso uguale nelle due direzioni ξ ed η . Queste, peraltro, non sono di simmetria per il materiale, come denunciato dal fatto che $a_{13} \neq 0$: uno sforzo uniaxiale in una di queste direzioni causa quindi anche scorrimenti angolari.

Una rotazione $\varphi = 90^\circ$ comporta invece

$$a_{11} = 1/E_y \quad a_{22} = 1/E_x \quad a_{12} = -\nu/E_y \quad a_{13} = 0 \quad a_{33} = 1/G$$

Essa corrisponde infatti a un semplice scambio di indici tra le due direzioni principali. Si lascia come esercizio verificare che nel caso isotropo ($E_y = E_x = E$, $G = E/2(1+\nu)$) dalla (f) si ottiene, per qualunque φ

$$\mathbf{T}' \mathbf{a}_x \mathbf{T} = \mathbf{a}_x$$

3.3 IL LIMITE ELASTICO

3.3.1 CONSIDERAZIONI GENERALI

Nessun materiale si comporta elasticamente oltre una certa soglia di sforzo. Una prova uniaxiale, ad esempio, consente di identificare sulla curva $\sigma-\epsilon$ un intervallo al di fuori del quale il legame elastico perde di significato. In un materiale fragile è lecito, almeno

in prima approssimazione, considerare gli estremi dell'intervallo come un limite di rottura. Materiali duttili presentano invece ulteriori risorse, che però possono essere tenute in conto solo modificando il legame; in questo caso l'esaurimento delle risorse elastiche si configura come un *limite di snervamento*.

Le informazioni fornite da una prova uniassiale, schematizzate in Figura 3.12, si riducono essenzialmente alla definizione di un intervallo elastico per gli sforzi normali, espresso matematicamente mediante una doppia diseguaglianza. Detti rispettivamente $\bar{\sigma}_T$ e $\bar{\sigma}_C$ (< 0) i limiti a trazione e compressione, si scrive allora

$$\bar{\sigma}_C \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_T \quad (3.48)$$

Ai fini di una verifica, tale informazione deve essere tradotta in un'opportuna misura globale del livello di sollecitazione, detta *grandezza indice del pericolo* (G.I.P.), che assuma ugual valore per stati di sforzo che, pur tra loro diversi, si ritengono ugualmente distanti dal limite elastico. Confrontando il valore della G.I.P. per un certo stato di sforzo con un valore di riferimento espresso in funzione di uno o più dati sperimentali, si può stabilire se (e con quale margine) il materiale si comporti elasticamente. La G.I.P. non è univocamente definibile a priori; esistono diverse possibili scelte, a ognuna delle quali corrisponde un diverso *criterio di resistenza elastica*. Un criterio semplice e maneggevole deve dipendere da un numero limitato di parametri determinabili sperimentalmente. Per sua natura, quindi, ogni criterio privilegia o penalizza in misura maggiore o minore determinati stati di sforzo e può risultare più o meno adeguato per diversi materiali.

Verranno qui esaminati solo pochi criteri che l'esperienza ha mostrato adatti per alcuni importanti materiali da costruzione. L'attenzione sarà limitata al caso isotropo, in cui il limite elastico (e quindi il criterio di resistenza) non dipende dalle direzioni secondo cui il materiale è sollecitato. La G.I.P. è in questo caso una misura scalare dello stato di sforzo, invariante rispetto al sistema di riferimento, il cui valore limite viene dedotto da esperimenti semplici su campioni del materiale impiegato.

3.3.2. CRITERI DI RESISTENZA PER MATERIALI FRAGILI

Spesso materiali fragili presentano una resistenza a trazione marcatamente inferiore, in valore assoluto, a quella a compressione. Un criterio di resistenza adeguato deve poter incorporare questo aspetto. Il criterio più semplice, associato ai nomi di *Galileo-Rankine-Navier*, assume come G.I.P. gli sforzi normali massimi e minimi evidenziabili, al variare del sistema di riferimento, su di una qualunque giacitura. Il criterio richiede che essi debbano essere compresi nell'intervallo (3.48) e si esprime pertanto

$$\bar{\sigma}_C \leq \sigma_{\min} \quad \sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}_T \quad (3.49)$$

La (3.34) peraltro mostra che σ_{\min} e σ_{\max} sono due delle tensioni principali. La (3.49) si riconduce quindi alle doppie diseguaglianze

$$\bar{\sigma}_C \leq s_\alpha \leq \bar{\sigma}_T, \quad \alpha = I, II, III \quad (3.50a)$$

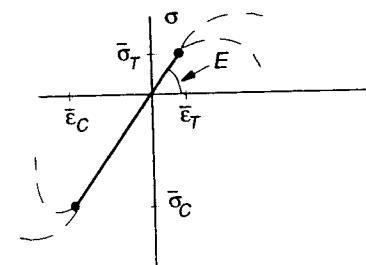


Figura 3.12

che definiscono un dominio a forma di cubo nello spazio delle tensioni principali. Nel caso di stati piani di sforzo è $s_{III} = 0$, valore certamente compreso nell'intervallo elastico; sono allora significative solo le condizioni seguenti

$$\bar{\sigma}_C \leq s_I \leq \bar{\sigma}_T \quad \bar{\sigma}_C \leq s_{II} \leq \bar{\sigma}_T \quad (3.50b)$$

Le (3.50b) definiscono nel piano $s_I - s_{II}$ il dominio illustrato in Figura 3.13a. I punti al suo interno corrispondono a stati di sforzo considerati sicuri secondo questo criterio. Per un materiale ugualmente resistente a trazione e compressione ($\bar{\sigma}_T = -\bar{\sigma}_C = \sigma_0$) il dominio si posiziona simmetricamente rispetto ai due assi (Figura 3.13b).

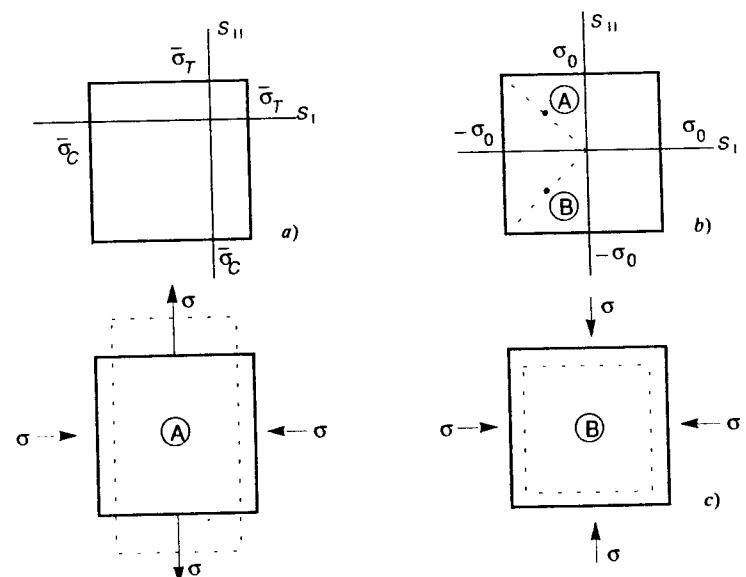


Figura 3.13

Il criterio di Galileo-Rankine produce risultati tutto sommato abbastanza attendibili per quei materiali che, come il calcestruzzo, presentano resistenza a trazione molto modesta. Peraltro, nel caso simmetrico di Figura 3.13b il criterio considera egualmente sicuri i due punti indicati con Ⓐ e Ⓑ, cui corrispondono gli stati di sforzo in Figura 3.13c. Intuitivamente, il secondo appare meno gravoso del primo, in quanto più simile alla condizione, da considerarsi senz'altro come molto sicura, di pressione idrostatica (che richiederebbe anche $s_{III} = -\sigma$). La stessa conclusione può essere raggiunta considerando il comportamento dal punto di vista deformativo: per effetto della contrazione trasversale gli sforzi di segno opposto del caso Ⓐ producono deformazioni che si sommano con lo stesso segno; esse invece si contrastano, elidendosi parzialmente, nel caso Ⓑ. Una modifica capace di incorporare questo aspetto è contenuta nel criterio che segue, associato ai nomi di *Grashof-De Saint Venant*.

Questo assume come G.I.P., in luogo degli sforzi, le deformazioni dirette massime e minime, che devono risultare contenute nell'intervallo $(\bar{\epsilon}_C, \bar{\epsilon}_T)$ in Figura 3.12. Anche queste sono due valori principali, per cui il criterio si esprime

$$\bar{\epsilon}_C \leq \epsilon_\alpha \leq \bar{\epsilon}_T, \quad \alpha = I, II, III \quad (3.51)$$

Nel caso isotropo è facile tradurre il criterio in termini di sforzi. Si noti che è $\bar{\epsilon}_C = \bar{\sigma}_C/E$, $\bar{\epsilon}_T = \bar{\sigma}_T/E$ (Figura 3.12). Utilizzando allora le (3.51b) ed eliminando il modulo elastico, si perviene alle sei diseguaglianze

$$\bar{\sigma}_C \leq s_\alpha - \nu s_\beta - \nu s_\gamma \leq \bar{\sigma}_T \quad (3.52a)$$

in cui gli indici α, β, γ assumono a turno i valori I, II, III. Nel caso piano ($s_{III} = 0$) le diseguaglianze divengono

$$\bar{\sigma}_C \leq s_I - \nu s_{II} \leq \bar{\sigma}_T \quad \bar{\sigma}_C \leq -\nu s_I + s_{II} \leq \bar{\sigma}_T \quad \bar{\sigma}_C \leq -\nu s_I - \nu s_{II} \leq \bar{\sigma}_T \quad (3.52b)$$

Nel piano $s_I - s_{II}$ il dominio risulta dall'intersezione dei due triangoli equilateri indicati con ABC e $A'B'C'$ in Figura 3.14. La forma e le dimensioni del dominio dipendono dai valori di $\bar{\sigma}_C$, $\bar{\sigma}_T$ e del coefficiente di Poisson. Per $\nu = 0$ le (3.52) si riconducono alle (3.50) e si ritrova il criterio di Rankine. Non tutte le diseguaglianze (3.52) risultano sempre significative. Nel caso di Figura 3.14a il dominio si riduce a un pentagono; per materiali simmetrici e valori di $\nu \leq 1/3$ si ha invece un rombo le cui diagonali sono inclinate di 45° rispetto agli assi (Figura 3.14b).

Il criterio di Grashof deve essere utilizzato con cautela. Nel caso di materiali simmetrici o quasi simmetrici esso fornisce in alcune circostanze risultati più aderenti alla realtà che non il criterio di Rankine (il cui dominio è indicato a tratteggio in Figura 3.14 per confronto), rispetto al quale penalizza gli stati di sforzo che presentano tensioni principali di segno diverso. In linea di principio, può essere utilizzato anche per materiali non simmetrici, ma se il rapporto tra $|\bar{\sigma}_C|$ e $\bar{\sigma}_T$ si discosta significativamente dall'unità fornisce risultati dubbi, quando non addirittura contraddittori. Per $|\bar{\sigma}_C| > \bar{\sigma}_T/\nu$ il dominio si riduce al solo triangolo ABC , che risulta interamente contenuto in $A'B'C'$ (Figura 3.14d). In tal caso il criterio porta alla conclusione evidentemente assurda che non è mai possibile raggiungere il valore $\bar{\sigma}_C$, neppure in compressione uniaxiale. Il criterio è quindi inapplicabile per materiali come i conglomerati, che presentano resistenza a trazione molto modesta.

Sotto alcuni aspetti analogo al criterio di Grashof è quello di *Beltrami*, che assume come G.I.P. l'energia di deformazione ω , nel caso elastico lineare definita dalle (3.19). Attraverso le (3.35) questa può essere espressa in termini di sforzi principali. Si ottiene

$$\omega = \frac{1}{E} [(s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2) - 2\nu(s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I)] \quad (3.53a)$$

o anche, in termini degli invarianti di sforzo (2.16)

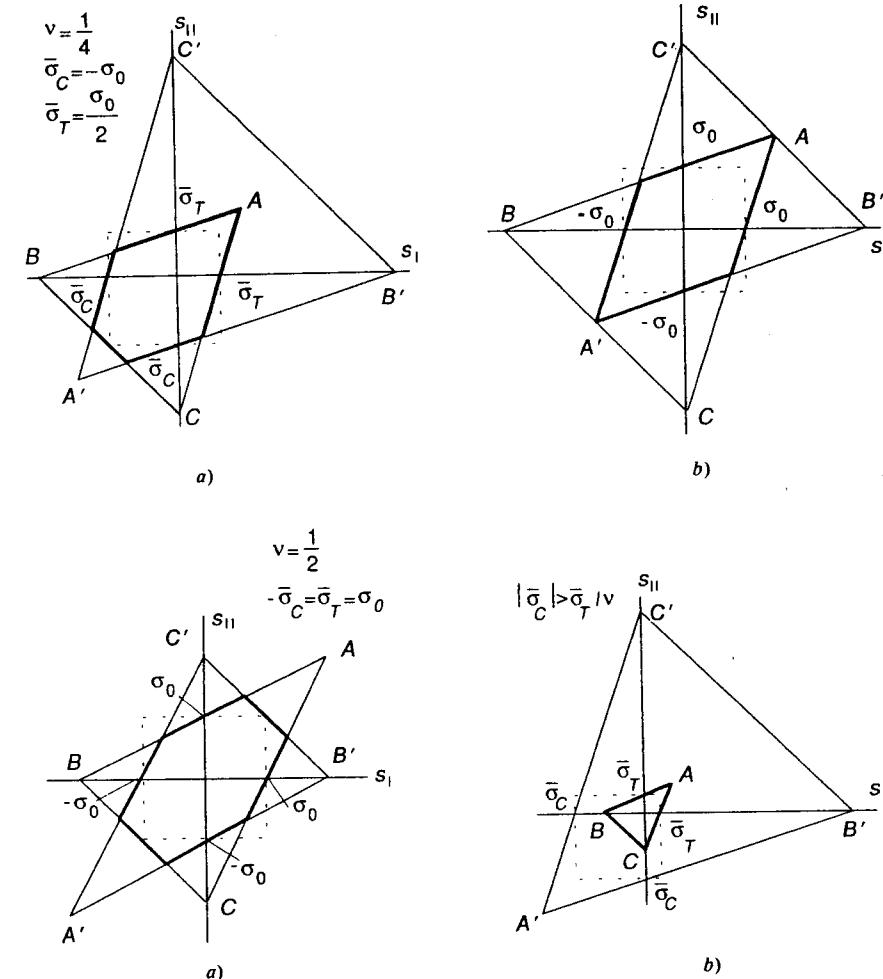


Figura 3.14

$$\omega = \frac{1}{E} [J_1^2 - 2(1 + \nu)J_2] \quad (3.53b)$$

Tale G.I.P. è una forma quadratica, come tale insensibile a un cambiamento di segno in tutte le componenti di sforzo. Il criterio è pertanto applicabile solo a materiali simmetrici.

ω va confrontato al valore limite sperimentale. Detta σ_0 la resistenza uniaxiale, da una prova di trazione ($s_I = \sigma_0$, $s_{II} = s_{III} = 0$) si ottiene $\omega = \sigma_0^2/E$. Il criterio è quindi espresso da una diseguaglianza quadratica che, nel caso generale e in quello piano ($s_{III} = 0$), si scrive come segue

$$J_1^2 - 2(1 + \nu)J_2 \leq \sigma_0^2 \quad s_I^2 + s_{II}^2 - 2\nu s_I s_{II} \leq \sigma_0^2 \quad (3.54a, b)$$

La (3.54b) definisce il dominio ellittico illustrato in Figura 3.15, dove è confrontato con quelli

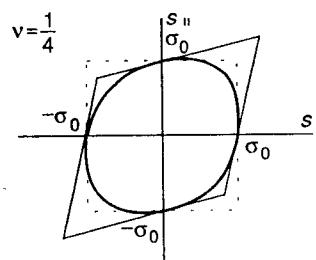


Figura 3.15

relativi ai criteri di Grashof e Rankine. Per sforzi principali di segno opposto, i criteri di Grashof e Beltrami forniscono risultati comparabili e tutto sommato ragionevoli. Per $s_I = s_{II}$ il criterio di Beltrami è ancora più penalizzante che non quello di Rankine. Come del resto la (3.52), la (3.54) produce risultati in grave contrasto con l'esperienza per materiali duttili in condizioni triassiali.

3.3.3 CRITERI DI SNERVAMENTO PER METALLI

In materiali duttili, come i metalli, l'esaurimento delle risorse elastiche va concepito come soglia di snervamento, fenomeno legato alla produzione di deformazioni permanenti attribuibili ad un riaspetto irreversibile del reticolo cristallino.

Esistono alcune caratteristiche proprie a molti materiali metallici che un criterio di snervamento deve incorporare. I risultati illustrati in Figura 3.1, ottenuti in condizioni uniassiali su di un provino in acciaio, evidenziano i seguenti aspetti:

- a) il limite di snervamento σ_0 è uguale, in valore assoluto, a trazione e compressione;
- b) le deformazioni permanenti, puramente deviatoriche, avvengono a volume costante.

La prima di queste osservazioni (confermata da esperimenti relativi ad altre condizioni di sforzo) indica che un criterio di snervamento per metalli deve presentarsi simmetrico. La seconda non ha implicazioni dirette; è però connessa con un'altra proprietà, pure verificata sperimentalmente: l'aggiunta di una pressione idrostatica $s_I = s_{II} = s_{III} = p$ non altera il limite di snervamento, neppure per valori di $|p|$ estremamente elevati.

Intuitivamente, il nesso tra questa proprietà e il carattere puramente deviatorico delle deformazioni plastiche può essere compreso ricordando che in materiali isotropi le componenti volumetriche e deviatoriche delle deformazioni sono associate solo alle corrispondenti componenti di sforzo. Pur non avendo al momento specificato se e in quale misura un metallo conservi l'isotropia al di fuori del campo elastico, è ragionevole pensare che deformazioni plastiche con componente volumetrica nulla comportino la non influenza delle pressioni idrostatiche quanto meno sul limite di snervamento.

Tale proprietà ha d'altra parte ricevuto ampia conferma sperimentale diretta. Negli anni '50 una serie di prove di trazione è stata eseguita da Bridgman [5] su provini immersi in una camera a pressione capace di sovrapporre fino a 25 000 atmosfere: il valore di σ_0 si è mantenuto quasi rigorosamente inalterato. Questa importante caratteristica del comportamento non è recepita dai precedenti criteri di resistenza.

Un criterio di snervamento per metalli deve quindi basarsi su di una G.I.P. invariante rispetto a un cambiamento di segno del tensore degli sforzi e indipendente dalla pressione idrostatica. Nello spazio delle tensioni principali esso sarà rappresentato da un dominio cilindrico il cui asse è la trisettore dell'ottante positivo (asse idrostatico $s_I = s_{II} = s_{III}$), che presenta intercette simmetriche rispetto a un qualunque segmento passante per l'origine.

Due sono i criteri che recepiscono questi aspetti e hanno ricevuto soddisfacenti conferme sperimentali. Il primo di essi, associato ai nomi di Tresca e Guest, assume come G.I.P. la tensione tangenziale massima definita dalla (2.35). Detto allora k un opportuno valore di riferimento, il criterio si esprime nella forma seguente

$$2\tau_{max} = \max\{|s_I - s_{II}|, |s_{II} - s_{III}|, |s_{III} - s_I|\} \leq k \quad (3.55a)$$

o, equivalentemente, mediante le sei diseguaglianze

$$-k \leq s_\alpha - s_\beta \leq k, \quad \alpha, \beta = I, II, III \quad (3.55b)$$

Per stati di sforzo piano ($s_{III} = 0$), le sei diseguaglianze divengono

$$-k \leq s_I - s_{II} \leq k \quad -k \leq s_I \leq k \quad -k \leq s_{II} \leq k \quad (3.56)$$

È immediato verificare che il criterio rispetta le condizioni di simmetria e indipendenza dalla componente idrostatica di sforzo. Nello spazio delle tensioni principali, le (3.55) definiscono un cilindro a base esagonale (Figura 3.16a); la sua intersezione col piano $s_{III} = 0$ è l'esagono di Figura 3.16b, che delimita il dominio elastico (3.56) per sforzi piani.

k rappresenta il valore assunto al limite elastico dalla G.I.P. in un esperimento opportuno. La prova concettualmente più spontanea è quella di pura torsione su di un cilindro cavo in parete sottile (vedi Paragrafo 1.2.2), che fornisce direttamente il valore di snervamento τ_0 della tensione tangenziale. È allora

$$k = 2\tau_0 \quad (3.57a)$$

Operativamente è più agevole una prova di trazione, che identifica lo sforzo di snervamento uniassiale σ_0 ; in questo caso, essendo $s_I = \sigma_0$, $s_{II} = s_{III} = 0$, si ha $2\tau_{max} = \sigma_0$ e quindi

$$k = \sigma_0 \quad (3.57b)$$

Il criterio di Tresca pertanto prevede che il rapporto tra le tensioni di snervamento tangenziale e uniassiale sia pari a 1/2. Ovviamente, un materiale non è tenuto a rispettare tale rapporto e il criterio risulterebbe inadeguato se si riscontrassero valori da esso molto discosti. In genere i metalli presentano rapporti τ_0/σ_0 accettabilmente vicini, anche se a volte leggermente superiori, a questo valore.

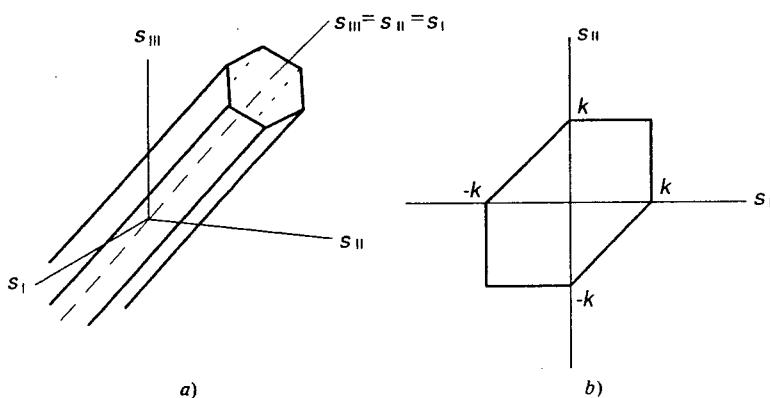


Figura 3.16

Un secondo criterio largamente usato in questo ambito è associato ai nomi di *Hüber-Henky-von Mises* (H.H.M.) e assume come G.I.P. l'invariante secondo del deviatore di sforzo, definito dalla (2.21b). In quanto forma quadratica nelle componenti di sforzo, la G.I.P. risulta simmetrica; in quanto associata alla sola parte deviatorica delle tensioni è anche indipendente dalla pressione idrostatica. Il criterio si esprime attraverso la diseguaglianza

$$3J'_2 = J_1^2 - 3J_2 = \frac{1}{2} [(s_1 - s_{II})^2 + (s_{II} - s_{III})^2 + (s_{III} - s_1)^2] \leq k^2 \quad (3.58)$$

Nel caso piano ($s_{III} = 0$), essa diviene

$$s_1^2 + s_{II}^2 - s_1 s_{II} \leq k^2 \quad (3.59)$$

Nello spazio delle tensioni principali, la (3.58) da luogo al cilindro a base circolare in Figura 3.17a, la cui intersezione col piano $s_{III} = 0$ è l'ellisse in Figura 3.17b.

k è sempre il valore assunto dalla G.I.P. in una situazione al limite elastico. Una prova di torsione ($s_1 = \tau_0$, $s_{II} = -\tau_0$, $s_{III} = 0$) e una di trazione ($s_1 = \sigma_0$, $s_{II} = s_{III} = 0$) portano, rispettivamente, ai valori

$$k = \sqrt{3} \tau_0 \quad k = \sigma_0 \quad (3.60a,b)$$

con un rapporto τ_0/σ_0 pari a $1/\sqrt{3} = .557$, leggermente più elevato di quello previsto dal criterio di Tresca e abbastanza conforme a quanto si riscontra in metalli reali.

La definizione della G.I.P. è senza dubbio molto formale. Sono però possibili interpretazioni alternative che permettono di coglierne meglio il significato. Si può ad esempio dimostrare che per un materiale elastico lineare e isotropo l'invariante secondo del deviatore di sforzo risulta proporzionale alla cosiddetta *energia di distorsione* (o di *variazione di forma*), identificabile una volta separati, nell'energia di deformazione ω , i contributi volumetrici e deviatorici. Le (3.39) permettono infatti di scrivere

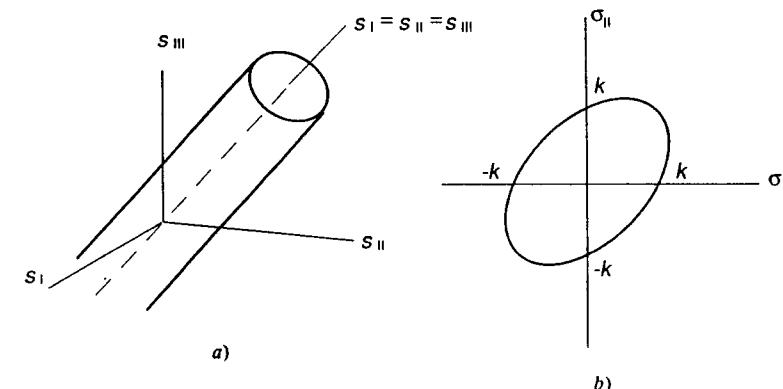


Figura 3.17

$$\omega = \frac{1}{2} K\Theta^2 + G\eta_{ij}\eta_{ij} = \omega_v + \omega_d \quad (3.61)$$

(si osservi il disaccoppiamento tra i due contributi). L'energia di distorsione è fornita dal secondo addendo, che può anche esprimersi nella forma seguente

$$\omega_d = \frac{1}{2} S_{ij}\eta_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\eta_{ij} = \frac{1}{2} (s_1\eta_1 + s_{II}\eta_{II} + s_{III}\eta_{III}) \quad (3.62a)$$

dove si sono indicati con η_α , $\alpha = I, II, III$, i valori principali del deviatore di deformazione. Nello scrivere la (3.62a) si è fatto uso della (3.39b) e dell'ortogonalità tra sforzi idrostatici e deformazioni deviatoriche conseguente all'isotropia. Utilizzando ora la (2.128) e la (3.35b), si perviene dopo alcuni passaggi all'egualianza

$$\omega_d = \frac{1}{G} J'_2 \quad (3.62b)$$

che conferisce significato meccanico alla G.I.P.. Il criterio di H.H.M. può così essere riguardato come una modifica di quello di Beltrami: l'esaurimento delle risorse elastiche non è più imputato all'energia di deformazione nella sua interezza, ma solo a quella sua parte che è responsabile della variazione di forma dell'intorno. Per un materiale incompressibile ($\nu = .5$) i due criteri ovviamente coincidono.

I criteri di Tresca e H.H.M. presentano caratteristiche analoghe. Se entrambi sono riferiti al valore di snervamento uniassiale σ_0 , il primo risulta più conservativo del secondo che, nel caso piano, si riconduce a un'ellisse circoscritta all'esagono di Tresca (Figura 3.18). Essendo entrambi governati da un solo parametro, i due criteri presentano scarti tra le soglie di snervamento previste in diverse condizioni, fino a circa il 15% nella situazione di puro taglio. Esperimenti condotti su materiali metallici (alcuni risultati, presi da [6], sono schizzati in Figura 3.18) sembrano maggiormente in accordo con il criterio di H.H.M.; va però detto che non è facile valutare con certezza il limite di snervamento per stati di sforzo pluriassiali e i dati sperimentali sono spesso ritenuti poco attendibili, soprattutto se si collocano esternamente all'ellisse di H.H.M. I due

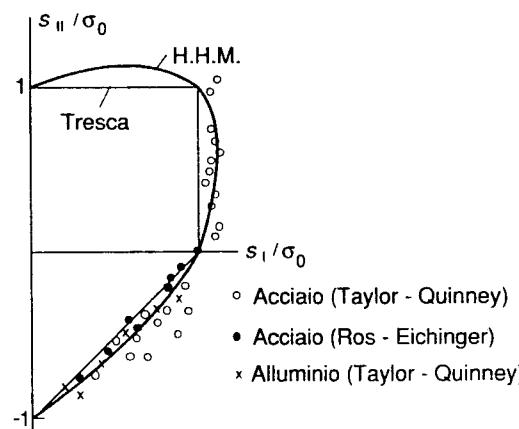


Figura 3.18

criteri sono considerati egualmente accettabili e trovano largo impiego; la scelta tra di essi è dettata unicamente da motivi di convenienza.

3.3.4 CONSIDERAZIONI E COMMENTI

La problematica relativa alla definizione del limite elastico dei materiali ha subito una certa evoluzione. In un passato anche relativamente recente i criteri di resistenza erano prevalentemente concepiti in vista della verifica di travi, dove lo sforzo si presenta localmente piano ed è caratterizzato da tensioni principali di segno opposto. Come il confronto in Figura 3.19 schematicamente illustra, in tale situazione molti dei criteri producono risultati tutto sommato equivalenti, almeno per materiali simmetrici. Ciò

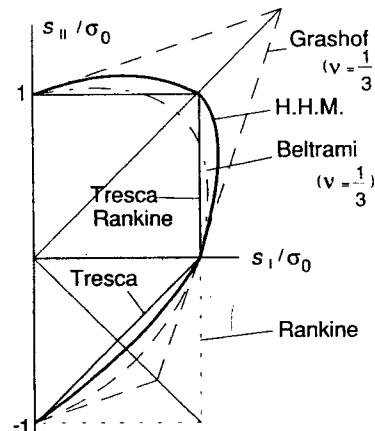


Figura 3.19

giustifica l'attenzione rivolta a criteri come quelli di Grashof e Beltrami, accettati da alcune normative, che pure danno luogo a risultati decisamente poco credibili in circostanze diverse. Questo fatto è già evidente per sforzi piani che si collochino nel quadrante positivo di Figura 3.19 e risulta ancora più drammatico per stati di sforzo triassiali.

La disponibilità di mezzi di calcolo automatico ha reso fattibile l'analisi di strutture anche notevolmente complesse, per le quali non sono a priori configurabili particolari caratteristiche della soluzione in termini di sforzo. È quindi necessario ricorrere a criteri che, almeno per un dato materiale, siano ragionevolmente attendibili in ogni circostanza. Per materiali metallici i criteri di snervamento di Tresca e H.H.M. rispondono bene a questa esigenza e sono di fatto privi di valide alternative. Per conglomerati come il calcestruzzo il criterio di Galileo-Rankine, pur con i limiti citati, appare ancora il solo capace di recepire la determinante differenza tra resistenza a trazione e compressione senza portare a palese contraddizione.

Chiaramente, i criteri qui esposti non esauriscono la casistica di quelli proposti e utilizzati in pratica. Esistono materiali (ad esempio, i suoli e le rocce) che presentano caratteristiche di comportamento diverse rispetto sia ai metalli che ai conglomerati, per i quali sono stati definiti e usati con successo altri criteri di resistenza elastica. Alcuni materiali, come il legno, i compositi o le rocce stesse, possono presentare marcate anisotropie che devono essere conglobate nel criterio. Esistono infine materiali per i quali criteri universalmente accettati come soddisfacenti non sembrano ancora disponibili.

ESEMPIO 3.2 Uno stato di sforzo piano abbia valori principali

$$s_I = 1.1\sigma_0 \quad s_{II} = .6\sigma_0 \quad s_{III} = 0 \quad (a)$$

dove σ_0 rappresenta il limite elastico uniaxiale. Il materiale (un metallo) sia simmetrico, con coefficiente di Poisson $v = .3$. Ci si chiede se il punto soggetto allo sforzo (a) si trova o meno in campo elastico secondo i cinque criteri precedentemente introdotti.

È immediato constatare che la risposta fornita dal criterio di Rankine è negativa. Le (a) infatti prevedono

$$\sigma_{max} = s_I = 1.1\sigma_0 > \sigma_0$$

il che viola la seconda delle (3.49). Per quanto riguarda invece il criterio di Grashof, le (3.52b) si scrivono

$$-\sigma_0 \leq .92\sigma_0 \leq \sigma_0 \quad -\sigma_0 \leq .27\sigma_0 \leq \sigma_0 \quad -\sigma_0 \leq -.51\sigma_0 \leq \sigma_0$$

e risultano tutte rispettate, indicando che il criterio considera il punto in campo elastico. Con riferimento al criterio di Beltrami, il primo membro della (3.54b) risulta, nel caso in esame

$$[(1.1)^2 + (.6)^2 - 2(.3)(1.1)(.6)]\sigma_0^2 = 1.174\sigma_0^2 > \sigma_0^2$$

La diseguaglianza quindi è violata.

Il criterio di Tresca, scritto per $k = \sigma_0$, fornisce lo stesso risultato di quello di Rankine, in quanto i valori (a) si collocano nel primo quadrante del piano delle tensioni principali non nulle. Il punto è invece in campo elastico secondo il criterio di H.H.M.; dalla (3.59) infatti si ottiene

$$[(1.1)^2 + (.6)^2 - (1.1)(.6)]\sigma_0^2 = .910\sigma_0^2 < \sigma_0^2$$

Si supponga ora di aggiungere allo stato di sforzo (a) una componente idrostatica $p = 1.5\sigma_0$. Le tensioni principali divengono

$$\sigma_1 = 2.6\sigma_0 \quad \sigma_{II} = 2.1\sigma_0 \quad \sigma_{III} = 1.5\sigma_0 \quad (b)$$

È adesso

$$\sigma_{max} = 2.6\sigma_0 > \sigma_0$$

Il criterio di Rankine è quindi violato in misura ben maggiore che non nel caso piano. Anche quello di Grashof è ora violato, risultando

$$\sigma_1 - \nu\sigma_{II} = 1.52\sigma_0 > \sigma_0$$

Il primo membro della (3.54a) risulta

$$[(2.6)^2 + (2.1)^2 + (1.5)^2 - 2(3)[(2.6)(2.1) + (2.1)(1.5) + (1.5)(2.6)]]\sigma_0^2 = 5.914\sigma_0^2 > \sigma_0^2$$

Anche il criterio di Beltrami è quindi violato in misura maggiore che non nel caso precedente.

I risultati forniti dai criteri di Tresca e H.H.M. si mantengono inalterati, essendo essi insensibili alla componente idrostatica. Si lascia la verifica come esercizio.

Una misura del margine rispetto al limite elastico (o dell'entità della sua violazione) è dato dal rapporto s tra i valori limite ed effettivo della G.I.P. Per i cinque criteri qui considerati, si può scrivere

$$\text{Rankine: } s = \max \left\{ \frac{\bar{\sigma}_C}{\sigma_{min}}, \frac{\bar{\sigma}_T}{\sigma_{max}} \right\} \quad \text{Grashof: } s = \max \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}_C}{\varepsilon_{min}}, \frac{\bar{\varepsilon}_T}{\varepsilon_{max}} \right\}$$

$$\text{Beltrami: } s = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2(1+\nu)\sigma_2^2}} \quad \text{Tresca: } s = \frac{k}{2\tau_{max}} \quad \text{H.H.M.: } s = \frac{k}{\sqrt{3J_2}}$$

(si osservi che, per rendere i risultati tra loro confrontabili, entrambi i membri delle (3.54a) e (3.58) sono stati sostituiti dalle loro radici quadrate, operazione ininfluente sui criteri). Il punto si trova in campo elastico per $s > 1$; quando risulta $s < 1$ il criterio è invece violato, in misura tanto maggiore quanto più s è piccolo.

Nel caso in esame è $\bar{\sigma}_T = \sigma_0$, $\bar{\sigma}_C = -\sigma_0$ e $k = \sigma_0$. I risultati precedenti si traducono allora nei valori di s in Tabella 3.2. Si osserva che nel caso piano essi non sono tra loro molto discosti (il motivo può essere colto riportando il punto rappresentativo dello sforzo (a) in Figura 3.19). Peraltra, il criterio di Grashof prevede un margine di sicurezza superiore a quello di H.H.M., ritenuto il più generoso tra quelli accettabili per materiali metallici (lo scarto tra quest'ultimo valore e quello previsto dal criterio di Tresca, vicino al valore massimo relativo alla situazione di puro taglio, è ancora considerato entro i

Tabella 3.2 Valori di s relativi all'Esempio 3.2

Stato di sforzo	Criterio di resistenza elastica				
	Rankine	Grashof	Beltrami	Tresca	H.H.M.
a)	.909	1.087	.923	.909	1.048
b)	.385	.658	.411	.909	1.048

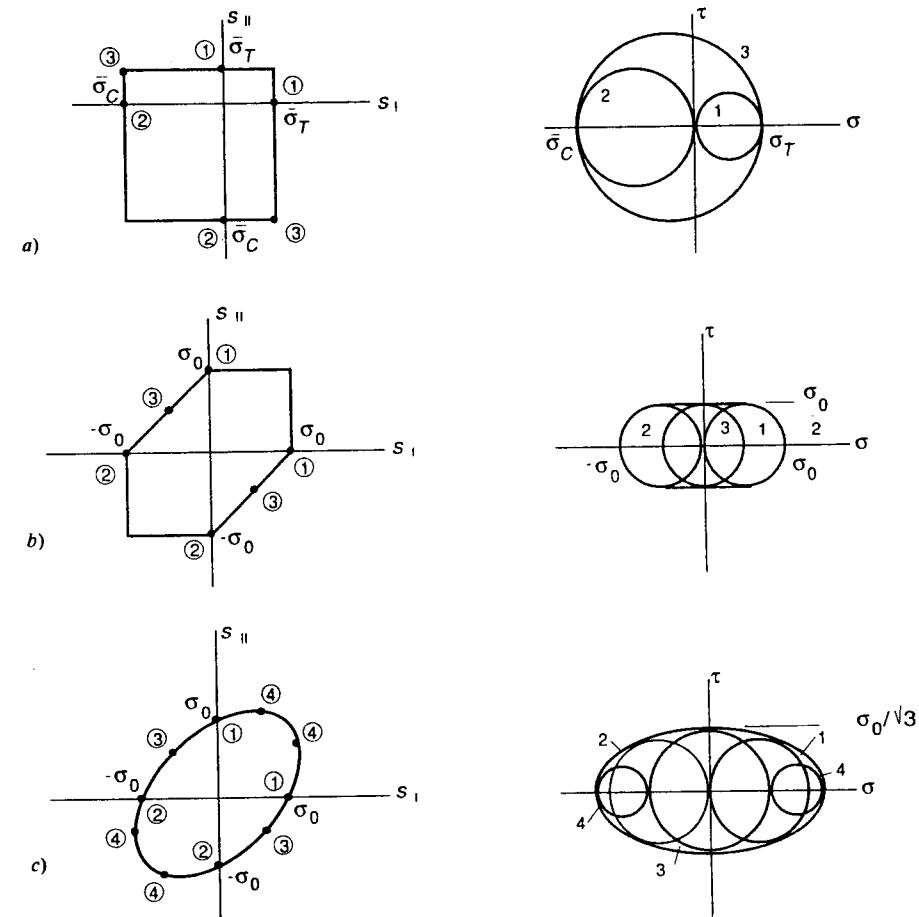


Figura 3.20

limiti dell'incertezza sperimentale). Nel caso (b) invece, i primi tre criteri indicano violazioni di entità irrealistica, sottolineando come essi non siano assolutamente applicabili per metalli in condizioni di sforzo triassiale.

3.3.5 RAPPRESENTAZIONE NEL PIANO DI MOHR

Per stati di sforzo piani, i criteri possono essere graficamente rappresentati, oltre che nel piano delle tensioni principali, anche nel piano di Mohr $\sigma - \tau$. Tale rappresentazione è fornita dall'inviluppo dei cerchi di Mohr relativi agli stati di sforzo appartenenti alla frontiera del dominio elastico. Gli sforzi che corrispondono a cerchi interni o tangenti a tale inviluppo sono da considerarsi sicuri secondo tale criterio.

Il contorno del dominio così definito prende il nome di *curva limite*. In Figura 3.20 sono tracciate quelle relative ai criteri di Rankine, Tresca e H.H.M. Nel primo caso, la curva limite coincide con il cerchio di Mohr relativo alla condizione

$$s_1 = \bar{\sigma}_T \quad s_{II} = \bar{\sigma}_C$$

indicata con ③ in Figura 3.20a, all'interno della quale tutti i cerchi relativi a stati di sforzo ammissibili sono certamente contenuti. Per il criterio di Tresca il dominio si ottiene traslando parallelamente all'asse σ il cerchio di Mohr relativo allo stato uniaxiale entro i valori estremi, $\pm \sigma_0$ (Figura 3.20b). Nel caso di H.H.M. la curva limite è approssimativamente rappresentata dall'involucro dei cinque cerchi relativi alle due situazioni limite uniaxiali (trazione ① e compressione ②), a quella di puro taglio ③ e a quelle indicate con ④ in Figura 3.20c ($s_{II} = s_1/2 = \pm \sigma/\sqrt{3}$ e viceversa).

Questa rappresentazione può risultare utile qualora non sia disponibile un adeguato criterio di resistenza elastica per un determinato materiale ma si posseggano dati sperimentali relativi al limite elastico per un certo numero di condizioni di sforzo. La curva limite può allora essere tracciata in via approssimata come involucro dei cerchi di Mohr relativi ai dati disponibili. Tale procedimento è a volte indicato come *criterio di Mohr*, anche se, non introducendo nessuna grandezza indice del pericolo, non si configura come un vero e proprio criterio di resistenza elastica. La Figura 3.21 illustra la curva limite tracciabile in questo modo sulla base delle prove uniaxiali a trazione e compressione per un materiale non simmetrico per il quale si ritenga troppo generoso il criterio di Galileo-Rankine.

3.4 IL LEGAME ELASTO-PLASTICO INCREMENTALE

3.4.1 FORMULAZIONE DEL LEGAME UNIASSIALE

3.4.1.1 Caratteristiche del comportamento

Una volta esaurita la fase elastica, un materiale duttile presenta ulteriori risorse deformative. La descrizione analitica di un comportamento elasto-plastico, formulabile solo in termini incrementali, è decisamente più complessa che non nel caso elastico e le relazioni che esprimono il legame non sono di interpretazione altrettanto immediata. Peraltro, molte delle caratteristiche essenziali del comportamento e molte delle operazioni necessarie a tradurle in una legge costitutiva sono già presenti in un legame formulato limitatamente al caso uniaxiale, più facilmente interpretabile. Per tale motivo, ci si rivolge prima alla definizione di questo particolare legame, da cui si passerà poi alla formulazione in termini tensoriali mediante opportune generalizzazioni.

Gli aspetti fondamentali del comportamento uniaxiale vengono ridiscussi con riferimento alla curva $\sigma-\epsilon$ di Figura 3.22 (analogia a quella di Figura 3.3). Si immagini di percorrere la storia $OABCDE$. Fino al punto A (cioè fino a che non si raggiunge lo

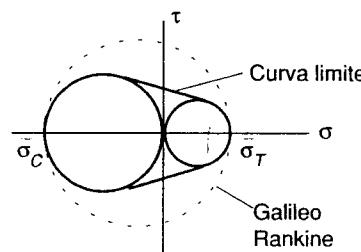


Figura 3.21

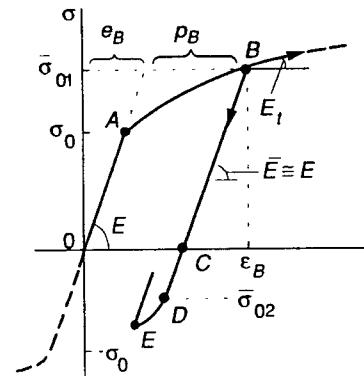


Figura 3.22

sforzo $\sigma = \sigma_0$ di snervamento a trazione) il comportamento è elastico-lineare con $\sigma = E\epsilon$. Quando la curva si inoltra sul tratto AB si generano deformazioni permanenti. Se si scarica dal punto B ($\sigma = \bar{\sigma}_{01}$) solo parte della deformazione precedentemente prodotta viene recuperata. Al punto C (scarico completo) sarà presente una deformazione residua pari a $\epsilon_B - \bar{\sigma}_{01}/\bar{E}$, dove \bar{E} indica la pendenza del segmento CB . Proseguendo lo scarico, il diagramma si mantiene rettilineo fino al punto D , raggiunto il quale iniziano a prodursi deformazioni permanenti di segno opposto alle precedenti. Il corrispondente livello di sforzo $\sigma = \bar{\sigma}_{02}$ è in generale diverso dal valore $\sigma = -\sigma_0$ di snervamento a compressione per il materiale vergine. Un intervallo come BD può essere considerato elastico, nel senso che variazioni di sforzo $\Delta\sigma$ al suo interno corrispondono a variazioni di deformazione $\Delta\epsilon$ reversibili e legate a $\Delta\sigma$ attraverso la rigidezza \bar{E} . A molti fini pratici, è lecito assumere $\bar{E} = E$, vale a dire una pendenza allo scarico costante e pari a quella del tratto elastico iniziale.

Da queste osservazioni si evince che una descrizione analitica del legame richiede innanzitutto che nella deformazione ϵ siano distinguibili i contributi *elastico* e e *permanente* o *plastico* p . Nel caso uniaxiale (e in generale nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti) questi contributi concorrono additivamente a formare ϵ . Si può allora scrivere

$$\epsilon = e + p \quad (3.63)$$

Nell'ipotesi che la pendenza allo scarico si mantenga invariata ($\bar{E} = E$), con riferimento a e vale il legame elastico-lineare

$$\sigma = Ee = E(\epsilon - p) \quad (3.64)$$

Se σ viene rimosso, la deformazione elastica viene interamente recuperata mentre p permane. Si osservi che la deformazione plastica entra nelle (3.63), (3.64) sotto la forma di un generico contributo anelastico.

La natura irreversibile delle deformazioni plastiche esige che, almeno per la parte che

le coinvolge, il legame costitutivo dipende dalla storia di carico e sia quindi formulato in termini incrementali. Gli incrementi di sforzo e di deformazione saranno nel seguito indicati con $\dot{\sigma}$ ed $\dot{\epsilon}$. La notazione alluderebbe a velocità piuttosto che a incrementi, ma è introdotta solo con intenti semplificativi. Il comportamento elasto-plastico è indipendente dal tempo, che gioca solo il ruolo di variabile ordinatrice; la velocità con cui si verifica il processo di carico non ha importanza reale, anche se deve essere tale da non indurre fenomeni dinamici.

Per definire il legame, occorre distinguere tra due situazioni. Se il processo incrementale ha inizio da un punto interno all'intervallo elastico istantaneo (ad esempio, da un punto sul segmento *BD* in Figura 3.22, con esclusione degli estremi), la risposta incrementale è puramente elastica ($\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$). A partire da uno degli estremi dell'intervallo invece, nel processo incrementale potranno prodursi deformazioni plastiche $\dot{\epsilon}_p$, a trazione o a compressione, e la risposta sarà diversa a seconda che queste effettivamente si producano o che si abbia scarico. Ad esempio, a partire dal punto *B* in Figura 3.22 valgono le seguenti alternative

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \quad \text{se } \dot{\epsilon} > 0 \quad \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad \text{se } \dot{\epsilon} < 0 \quad (3.65a, b)$$

dove E_t , detto *modulo tangente*, è la pendenza in *B* della curva σ - ϵ per ϵ crescenti.

L'intervallo elastico istantaneo è definito dalle diseguaglianze

$$\bar{\sigma}_{02} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_{01} \quad (3.66a)$$

Gli estremi dell'intervallo dipendono in generale dalla storia precedente, in particolare da quella delle deformazioni plastiche:

$$\bar{\sigma}_{0i} = \bar{\sigma}_{0i}(\text{storia di } p), \quad i = 1, 2 \quad (3.66b)$$

Un materiale simmetrico ha valori iniziali $\bar{\sigma}_{01,2} = \pm \sigma_0$, dove σ_0 indica lo sforzo di snervamento uniaxiale per il materiale vergine.

Prima di affrontare la formalizzazione analitica del legame incrementale, è importante stabilire in quali circostanze esso sia univocamente definibile; quando cioè a qualunque incremento di deformazione $\dot{\epsilon}$ corrisponda un unico incremento di sforzo $\dot{\sigma}$ attraverso il *legame diretto* $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\epsilon})$, e viceversa per il *legame inverso* $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\dot{\sigma})$. La curva uniaxiale permette di distinguere i cinque casi illustrati in Figura 3.23. Per ognuno di essi si osserva quanto segue.

a) $E_t > 0$ (incrudimento). La Figura 3.23a mostra che valgono le alternative

$$\dot{\epsilon} \geq 0 \rightarrow \dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} \quad \dot{\epsilon} \leq 0 \rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad (3.67a)$$

$$\dot{\sigma} \geq 0 \rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E_t \quad \dot{\sigma} \leq 0 \rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E \quad (3.67b)$$

I legami diretto ed inverso sono quindi entrambi univocamente definiti.

b) $E_t = 0$ (plasticità perfetta). Dalla Figura 3.23b si evince

$$\dot{\epsilon} > 0 \rightarrow \dot{\sigma} = 0 \quad \dot{\epsilon} \leq 0 \rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad (3.68a)$$

Il legame diretto è quindi univocamente definito. Non altrettanto si può dire del legame inverso. Risulta infatti

$$\dot{\sigma} > 0 \text{ non ammissibile; } \dot{\sigma} = 0 \rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0 \text{ qualunque; } \dot{\sigma} < 0 \rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E \quad (3.68b)$$

A $\dot{\sigma} > 0$ non è quindi associato attraverso il legame costitutivo alcun incremento di deformazione, mentre per $\dot{\sigma} = 0$ solo il segno e non il valore di $\dot{\epsilon}$ risulta definito.

c) $0 > E_t > -\infty$ (incrudimento negativo o *softening*). In questo caso (Figura 3.23c) il legame diretto è ancora univocamente definito da relazioni formalmente identiche alle (3.67a), anche se adesso risulta in ogni caso $\dot{\epsilon} \leq 0$. Non è invece definito il legame inverso in quanto a $\dot{\sigma} > 0$ non è associata alcuna soluzione, mentre con $\dot{\sigma} < 0$ sono compatibili entrambe le risposte

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E < 0 \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E_t > 0 \quad (3.69)$$

I casi d) ed e) (softening critico e sub-critico) configurano situazioni in cui la curva σ - ϵ cade verticalmente o più che verticalmente. È facile verificare sulla base delle Figure 3.23d,e che in tali circostanze neppure il legame diretto è univocamente definito.

Con l'eccezione di questi ultimi due casi (peraltro patologici) il legame diretto risulta univocamente definito, mentre quello inverso lo è solo per $E_t > 0$. Il risultato si riassume scrivendo

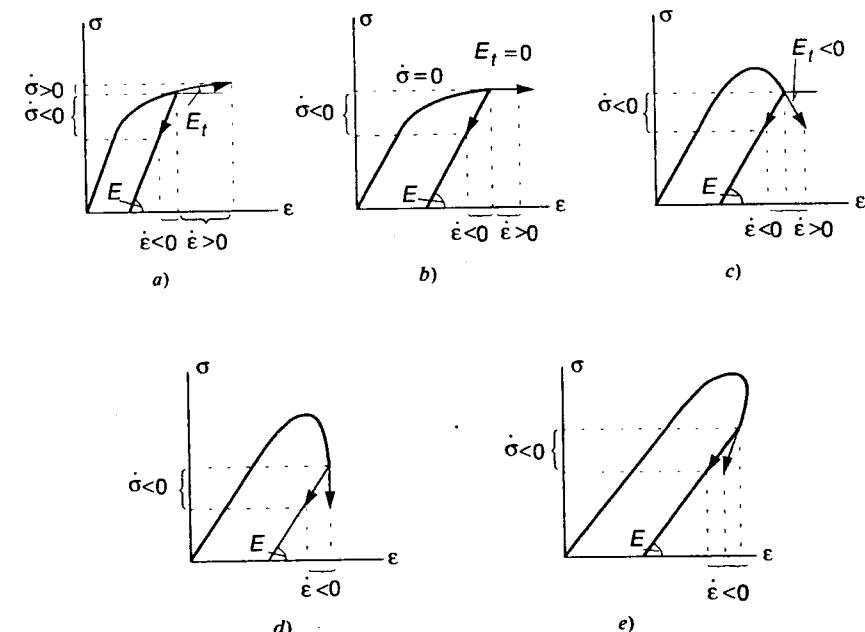


Figura 3.23

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E_t \dot{\epsilon} & \text{se } \dot{\epsilon} \geq 0 \\ E \dot{\epsilon} & \text{se } \dot{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (E > E_t > -\infty) \quad (3.70a)$$

$$\dot{\epsilon} = \begin{cases} \dot{\sigma}/E_t & \text{se } \dot{\sigma} \geq 0 \\ \dot{\sigma}/E & \text{se } \dot{\sigma} \leq 0 \end{cases} \quad (E > E_t > 0) \quad (3.70b)$$

Il legame si presenta comunque sotto forma di alternative che riflettono la nonlinearietà intrinseca del comportamento elasto-plastico, non eliminabile neppure a livello incrementale.

In quanto sopra, è stato implicitamente assunto che la deviazione dal comportamento elastico sia tale da introdurre comunque una diminuzione di rigidezza. Sono stati cioè esclusi i comportamenti (detti di *locking*) illustrati in Figura 3.24, che richiederebbero una trattazione duale. La delimitazione $E > E_t$ nelle (3.70) ha appunto lo scopo di escludere tali comportamenti.

3.4.1.2 Descrizione analitica del comportamento uniassiale

Nello scrivere le (3.70) si è ipotizzato che all'inizio del processo incrementale il materiale fosse potenzialmente plasticizzabile a trazione ($\sigma = \bar{\sigma}_{01}$). Ovviamente, per $\sigma = \bar{\sigma}_{02}$ valgono considerazioni analoghe che si traducono in opportuni cambiamenti di segno. Per un punto all'interno del dominio elastico istantaneo (quando cioè le (3.66a) sono soddisfatte come diseguaglianze strette) la risposta incrementale è comunque puramente elastica.

Per tradurre tali alternative in una formulazione analitica, conviene innanzi tutto esprimere la deformazione plastica come differenza tra i contributi accumulati a trazione e compressione nella storia precedente. Si scrive allora

$$p = \lambda_1 - \lambda_2 = [1 \ -1] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \quad (3.71)$$

relazione che definisce anche la matrice \mathbf{N} . Le λ_i , $i = 1, 2$, sono appunto le deformazioni plastiche individualmente accumulate nelle due direzioni (Figura 3.25a). Per loro natura, esse sono *non-negative* e *non decrescenti*. È, in particolare

$$\dot{\lambda}_i \geq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.72)$$

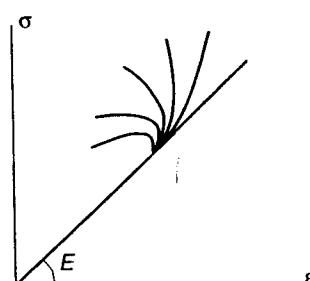


Figura 3.24

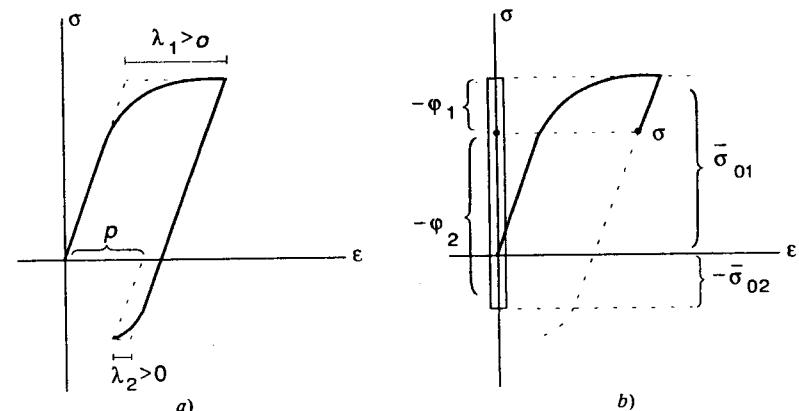


Figura 3.25

(il che implica anche la non-negatività dei valori totali). Le alternative previste dal legame incrementale si traducono ora nella condizione che una componente λ_i possa essere maggiore di zero solo se lo sforzo si trova sul corrispondente limite ($\sigma = \bar{\sigma}_{0i}$) del dominio (3.66a) e si mantiene su di esso nel processo incrementale.

Si consideri la seguente definizione del dominio elastico istantaneo, formalmente diversa dalla (3.66a) anche se del tutto equivalente

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \sigma - \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{01} \\ -\bar{\sigma}_{02} \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \varphi = \mathbf{N}' \sigma - \bar{\sigma}_0 \leq 0 \quad (3.73)$$

dove le φ_i , $i = 1, 2$, sono dette *funzioni di plasticità*. Come appare da Figura 3.25b, i loro valori assoluti misurano la distanza del punto rappresentativo dello stato di sforzo dai limiti del dominio elastico, rispettivamente a trazione e compressione. Se si producono deformazioni plastiche in una delle due direzioni ($\dot{\lambda}_i > 0$) il punto deve corrispondere a $\varphi_i = 0$ sia all'inizio che durante il processo incrementale, nel quale sarà quindi $\dot{\varphi}_i = 0$. In caso di scarico si avrà invece $\dot{\varphi}_i < 0$. Le possibili alternative si possono quindi riassumere come segue

$$\dot{\lambda}_i \geq 0 \quad \text{se} \quad \varphi_i = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}_i = 0 \quad \dot{\lambda}_i = 0 \quad \text{altrimenti} \quad (3.74)$$

Condizioni che possono anche scriversi

$$\varphi_i \leq 0, \quad \dot{\lambda}_i \geq 0, \quad \varphi_i \dot{\lambda}_i = \dot{\varphi}_i \dot{\lambda}_i = 0 \quad \varphi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \varphi' \dot{\lambda} = \dot{\varphi}' \dot{\lambda} = 0 \quad (3.75a, b)$$

A proposito delle (3.75b), si noti che le restrizioni in segno sui vettori φ e $\dot{\lambda}$ comportano che il loro prodotto scalare possa essere nullo solo se gli addendi che lo compongono sono individualmente tali.

Come evidenziato dalla (3.66b), i limiti del dominio elastico istantaneo dipendono dalla storia di deformazione plastica. Si supponga di tenerne conto attraverso i valori *totali* di λ_i , scrivendo

$$\bar{\sigma}_{0i} = \bar{\sigma}_{0i}(\lambda_j) \quad \bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\lambda) \quad (3.76)$$

Le componenti di λ assumono allora il ruolo di *variabili interne*, che sovraintendono alle modifiche di comportamento indotte da precedenti plasticizzazioni. Le (3.76) configurano una particolare dipendenza dalla storia e non rappresentano la più generale definizione possibile. Esse consentono però di incorporare molti comportamenti significativi, ivi compresi quelli che prevedono variazioni del dominio elastico per deformazioni plastiche cicliche: in tal caso, infatti, i valori di λ_1 e λ_2 si incrementano ad ogni ciclo, anche se la deformazione plastica, espressa dalla (3.71) come loro differenza, oscilla tra valori ben definiti.

Le (3.73), (3.76) permettono allora di scrivere

$$\dot{\varphi}_i = \pm (\dot{\sigma} - \dot{\bar{\sigma}}_{0i}) = \pm \left(\dot{\sigma} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \bar{\sigma}_{0i}}{\partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \right) = \pm \dot{\sigma} - \sum_{j=1}^2 H_{ij} \dot{\lambda}_j \quad (3.77a)$$

$$\dot{\varphi} = \mathbf{N}' \dot{\sigma} - \mathbf{H} \dot{\lambda} \quad (3.77b)$$

dove \mathbf{H} è nota come *matrice di incrudimento*. Le sue componenti sono definite nella (3.77a).

Il legame elasto-plastico uniassiale si esprime adesso attraverso le relazioni

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\rho}) \quad \dot{\rho} = \mathbf{N} \dot{\lambda} \quad (3.78a, b)$$

$$\varphi = \mathbf{N}' \sigma - \bar{\sigma}_0(\lambda) \quad \dot{\varphi} = \mathbf{N}' \dot{\sigma} - \mathbf{H} \dot{\lambda} \quad (3.78c, d)$$

$$\varphi \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \varphi' \dot{\lambda} = 0 \quad \dot{\varphi}' \dot{\lambda} = 0 \quad (3.78e-h)$$

Le (3.78a, b) non sono altro che le (3.64), (3.71) scritte in termini incrementalni. La (3.78h) è in realtà una conseguenza della (3.78g), essendo certamente verificata se questa vale a ogni istante dell'evoluzione elastoplastica del materiale [7]. La sua introduzione esplicita presenta tuttavia alcuni vantaggi.

Il ruolo delle variabili interne λ può essere meglio compreso nel caso di *incrudimento lineare*, per il quale le funzioni di plasticità (3.73) assumono la forma

$$\varphi = \mathbf{N}' \sigma - \mathbf{H} \lambda - \sigma_0 \quad (3.79)$$

con \mathbf{H} adesso costante. σ_0 , pure costante, contiene i valori assoluti dei limiti di primo snervamento (per materiali simmetrici si ha $\sigma_0 = \sigma_0[1 \ 1]'$). La curva $\sigma-\epsilon$ assume l'aspetto lineare a tratti illustrato in Figura 3.26. Dal confronto tra le (3.79) e (3.73) appare che i limiti di snervamento istantanei sono ora

$$\bar{\sigma}_0(\lambda) = \sigma_0 + \mathbf{H} \lambda \quad \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{01} \\ \bar{\sigma}_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

Gli elementi diagonali di \mathbf{H} controllano le variazioni dei limiti di snervamento a trazione o compressione dovute a deformazioni plastiche dello stesso segno. I termini a indice diverso invece controllano le modifiche ai limiti in una direzione per effetto di plasticizzazioni nel verso opposto.

Alcuni comportamenti tipici sono illustrati in Figura 3.26. Il primo di essi, noto come incrudimento *isotropo*, prevede che il dominio elastico si amplifichi omoteticamente per effetto di plasticizzazioni; nel secondo caso (incrudimento *cinematico*) il dominio trasla mantenendo costante la sua ampiezza. È facile verificare che queste due leggi sono governate dalle matrici

$$\mathbf{H}_{\text{isol.}} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{\text{cin.}} = h \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.81a, b)$$

dove h è una costante positiva legata alla pendenza del ramo incrudente.

Il comportamento di Figura 3.26c incorpora alcune caratteristiche di un incrudimento *ciclico*, che pure prevede un'amplificazione del dominio. Esso è in un certo senso intermedio ai due precedenti ed è infatti governato da una matrice ottenibile come combinazione lineare delle (3.81), che può scriversi

$$\mathbf{H}_{\text{ciclico}} = h \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \quad -1 < \beta < 1 \quad (3.81c)$$

Per $\beta = 0$ il limite di snervamento in una direzione non è influenzato da plasticizzazioni nel verso opposto (incrudimento alla Koiter, Figura 3.26d). Per $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ si ritrova il comportamento idealmente elasto-plastico di Figura 3.4.

A proposito della legge di incrudimento cinematico, si osservi che inserendo la matrice (3.81b), unitamente alla (3.71), nella (3.80), si ottiene

$$\bar{\sigma}_{01} = \sigma_0 + hp \quad \bar{\sigma}_{02} = -\sigma_0 + hp \quad (3.82)$$

Le deformazioni plastiche assumono quindi esse stesse il ruolo di variabili interne. Questa ipotesi non consente di modellare comportamenti che prevedano alterazioni del dominio elastico anche per effetto di deformazioni plastiche che si elidano completamente su di un ciclo.

La scrittura del legame incrementale (3.78) si semplifica se l'attenzione è limitata al caso in cui il materiale sia potenzialmente plasticizzabile, del resto il solo significativo. Chiaramente (escludendo l'eventualità, priva di interesse pratico, che il dominio degeneri in un unico punto) tale situazione non può contemporaneamente verificarsi nelle due direzioni. D'altra parte, non potendo le funzioni di plasticità assumere valori

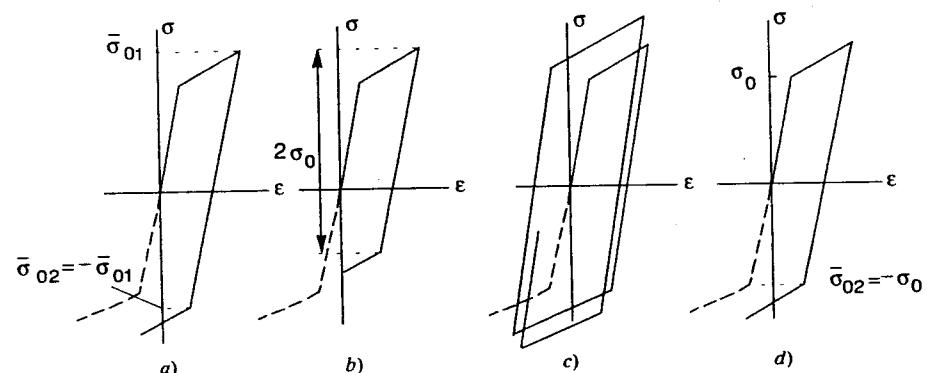


Figura 3.26

positivi, $\varphi_i = 0$ implica che nel processo incrementale debba essere $\dot{\varphi}_i \leq 0$; inoltre, per la (3.75) potrà essere $\dot{\lambda}_i > 0$ solo se vale il segno di egualanza. Considerando allora solo quella componente φ_i di φ che è nulla all'inizio del processo incrementale, le (3.78) vengono sostituite dalle relazioni seguenti

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - N_i \dot{\lambda}_i) \quad \dot{\varphi}_i = N_i \dot{\sigma} - H_{ii} \dot{\lambda}_i \quad (3.83a, b)$$

$$\dot{\varphi}_i \leq 0 \quad \dot{\lambda}_i \geq 0 \quad \dot{\varphi}_i \dot{\lambda}_i = 0 \quad (3.83c-e)$$

dove

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \\ -1 & \text{se } i = 2 \end{cases} \quad (3.83f)$$

Le (3.83) consentono di esplicare i legami diretto ed inverso, quando definibili. Eliminando $\dot{\sigma}$ attraverso la (3.83a) e osservando che risulta comunque $(N_i)^2 = 1$, la (3.83b) diviene

$$\dot{\varphi}_i = N_i E \dot{\epsilon} - (H_{ii} + E) \dot{\lambda}_i \quad (3.84)$$

Dal momento che $\dot{\lambda}_i$ è non-negativo, per $(H_{ii} + E) > 0$ il valore di $\dot{\varphi}_i$ non può mai eccedere quello del suo primo addendo. Se questo è negativo o nullo, la (3.83e) richiede $\dot{\lambda}_i = 0$; se invece è positivo, deve essere $\dot{\varphi}_i = 0$, il che permette di calcolare $\dot{\lambda}_i$ senza ambiguità. In entrambi i casi dalla (3.83a) si ottiene l'espressione esplicita per il legame diretto, che si traduce nelle alternative seguenti

$$\text{se } N_i E \dot{\epsilon} \leq 0: \quad \dot{\lambda}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = N_i E \dot{\epsilon} \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad (3.85a)$$

$$\text{se } N_i E \dot{\epsilon} > 0: \quad \dot{\varphi}_i = 0, \quad \dot{\lambda}_i = \frac{1}{H_{ii} + E} N_i E \dot{\epsilon} > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma} = E \frac{H_{ii}}{H_{ii} + E} \dot{\epsilon} \quad (3.85b)$$

sotto la condizione

$$H_{ii} > -E \quad (3.85c)$$

Il legame *inverso* può essere esplicitato con ragionamento analogo, direttamente basato sull'espressione (3.83b) di $\dot{\varphi}_i$. È ora richiesto che sia $H_{ii} > 0$, perché solo in tal caso $\dot{\lambda}_i$ risulta definito senza ambiguità. Ci si riconduce alle alternative seguenti

$$\text{se } N_i \dot{\sigma} \leq 0: \quad \dot{\lambda}_i = 0; \quad \dot{\varphi}_i = N_i \dot{\sigma} \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \quad (3.86a)$$

$$\text{se } N_i \dot{\sigma} > 0: \quad \dot{\varphi}_i = 0; \quad \dot{\lambda}_i = \frac{1}{H_{ii}} N_i \dot{\sigma} > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \frac{H_{ii} + E}{H_{ii}} \dot{\sigma} \quad (3.86b)$$

sotto la condizione

$$H_{ii} > 0 \quad (3.86c)$$

Il confronto con le (3.70) (che, si ricorda, erano state scritte per $N_i = +1$) mostra che sussistono le seguenti relazioni tra il coefficiente d'incrudimento diretto H_{ii} e il modulo tangente E_t

$$E_t = E \frac{H_{ii}}{H_{ii} + E} \quad H_{ii} = E_t \frac{E}{E - E_t} \quad (3.87a, b)$$

$H_{ii} = 0$ corrisponde al caso di plasticità perfetta ($E_t = 0$), mentre per $H_{ii} \rightarrow -E$ ci si riconduce al valore di softening detto critico ($E_t \rightarrow -\infty$). Se $H_{ii} \rightarrow \infty$, la pendenza del ramo incrudente si avvicina a quella del tratto elastico iniziale ($E_t \rightarrow E$). Le (3.85c), (3.86c) definiscono quindi gli stessi ambiti di validità delle (3.70). E_t o il suo inverso sono definibili ogni qualvolta $E + H_{ii}$ o H_{ii} sono diversi da zero, anche se negativi. I legami non sono però univocamente definibili: ad esempio, per $-E < H_{ii} < 0$ entrambi i valori (3.69) di $\dot{\epsilon}$ possono corrispondere a $\dot{\sigma} < 0$ attraverso il legame costitutivo.

Il parametro di incrudimento H_{ii} rappresenta la pendenza della curva *rígido-plastica* $\sigma-p$, ottenuta depurando il contributo elastico dalla curva $\sigma-\epsilon$. L'operazione è illustrata in Figura 3.27 per il caso di incrudimento lineare.

3.4.2 IL LEGAME ASSOCIATO

3.4.2.1 Formulazione

Si definisce ora il legame elasto-plastico incrementale in termini tensoriali, estendendo opportunamente quanto sviluppato con riferimento al caso uniaxiale. Tale generalizzazione richiede alcune ipotesi aggiuntive, ma i concetti su cui si basa mantengono sostanzialmente inalterato il loro significato.

Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti le deformazioni elastiche e plastiche contribuiscono additivamente alla deformazione totale. Supponendo che, come fatto nel caso uniaxiale, le proprietà elastiche non siano influenzate dalla storia, si può allora scrivere in luogo delle (3.63), (3.64)

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} + p_{ij} \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.88a, b)$$

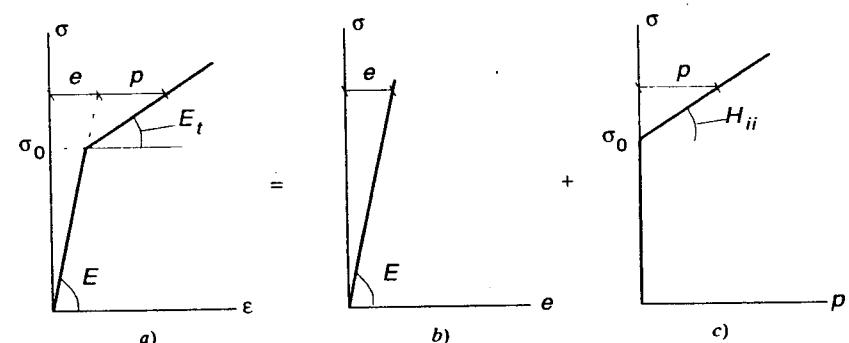


Figura 3.27

dove D_{ijkl} è il tensore elastico definito nel Paragrafo 3.2. In termini incrementali, queste relazioni si sintetizzano come segue

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}) \quad (3.88c)$$

La formulazione analitica del legame richiede inoltre che vengano definiti:

- a) un *dominio elastico istantaneo*, che identifichi gli stati di sforzo che corrispondono a situazioni potenzialmente plasticizzabili;
- b) una *legge di scorrimento*, che governi gli incrementi di deformazione plastica.

In analogia con le (3.73), il dominio elastico istantaneo viene definito imponendo che una o più (diciamo Y) *funzioni di plasticità* siano non-positive. Precisamente

$$\varphi_\alpha(\sigma_{ij}, x_h) \leq 0, \quad \alpha = 1, \dots, Y \quad (3.89)$$

dove le x_h sono variabili interne che controllano le modifiche nel dominio elastico indotte dalla plasticizzazione.

Il legame detto *associato* [8] ipotizza che a ogni istante le (3.89) definiscano un dominio *convesso* nello spazio delle componenti di sforzo (Figura 3.28). Ipotizza inoltre la seguente *legge di scorrimento*

$$\dot{p}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^Y \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}_\alpha \quad (3.90)$$

con

$$\dot{\lambda}_\alpha \geq 0 \quad \text{se} \quad \varphi_\alpha = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}_\alpha = 0 \quad \dot{\lambda}_\alpha = 0 \quad \text{altrimenti} \quad (3.91a)$$

o, equivalentemente

$$\varphi_\alpha \leq 0 \quad \dot{\lambda}_\alpha \geq 0 \quad \varphi_\alpha \dot{\lambda}_\alpha = \dot{\varphi}_\alpha \dot{\lambda}_\alpha = 0 \quad (3.91b)$$

L'analogia formale con le (3.74), (3.75) è evidente (anche in questo caso, l'ultima delle (3.91b) non è a rigore necessaria, ma risulta conveniente introdurla esplicitamente).

Si evince dalle relazioni precedenti che se le (3.89) sono tutte soddisfatte come diseguaglianze strette la risposta incrementale è puramente elastica; il punto rappresentativo dello stato di sforzo si trova allora all'interno del dominio elastico istantaneo (punto $\sigma_{ij}^{(1)}$ in Figura 3.28). Deformazioni plastiche si possono produrre solo se il punto si trova sulla frontiera del dominio e si mantiene su di essa nel processo incrementale ($\varphi_\alpha = \dot{\varphi}_\alpha = 0$ per qualche α). Le (3.90), (3.91) mostrano allora che gli incrementi di deformazione plastica sono diretti come *una normale uscente al dominio* nel punto di sforzo all'inizio del processo. Se in corrispondenza di tale punto una sola funzione di plasticità è nulla (punto $\sigma_{ij}^{(2)}$ in Figura 3.28) la normale è univocamente definita. Se più φ_α sono invece contemporaneamente uguali a zero (punto $\sigma_{ij}^{(3)}$), le \dot{p}_{ij} devono risultare contenute nel cono definito dalle normali nel punto. Per questo motivo la (3.90) è anche nota come *legge di normalità*, mentre alle (3.91) ci si riferisce come alle *regole di consistenza di Prager*.

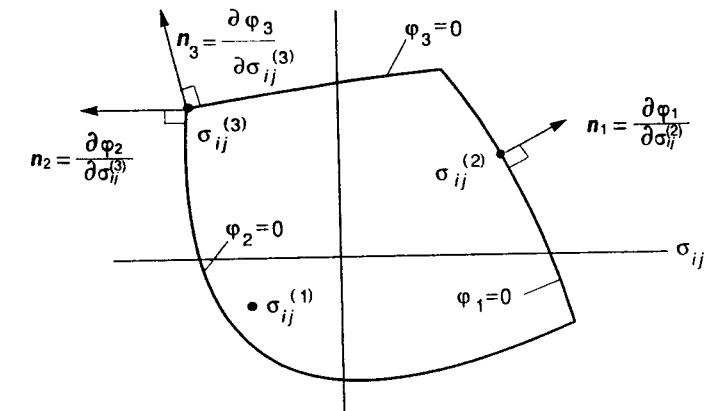


Figura 3.28

Le (3.88-3.91) (introdotte in [9]) definiscono il legame elasto-plastico incrementale in modo formalmente identico a quello uniaxiale. È possibile ricondursi alla forma (3.83) considerando solo le funzioni di plasticità potenzialmente *attivabili*, vale a dire nulle all'inizio del processo incrementale

$$\varphi_\beta = 0, \quad \beta = 1, \dots, \bar{Y} \quad (\bar{Y} \leq Y) \quad (3.92)$$

In tal caso infatti la (3.89) richiede che sia $\dot{\varphi}_\beta \leq 0$ ed il legame si riassume nelle relazioni seguenti

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{hk} - \sum_{\beta=1}^{\bar{Y}} \mathbf{n}_\beta \dot{\lambda}_\beta \right) \quad (3.93a)$$

$$\dot{\varphi}_\beta \leq 0; \quad \dot{\lambda}_\beta \geq 0; \quad \dot{\varphi}_\beta \dot{\lambda}_\beta = 0 \quad (3.93b)$$

dove per semplicità si è posto (Figura 3.28)

$$\mathbf{n}_\beta = \{ \dots \partial \varphi_\beta / \partial \sigma_{hk} \dots \}^t \quad (3.93c)$$

Nella (3.89) le variabili interne x_h definiscono diversi tipi di leggi di incrudimento. Il comportamento più semplice, detto *idealmente elasto-plastico*, prevede un dominio elastico fisso nello spazio degli sforzi, con funzioni di plasticità indipendenti da variabili interne. È allora

$$\varphi_\alpha(\sigma_{ij}) \leq 0, \quad \alpha = 1, \dots, Y \quad (3.94)$$

A ogni istante il dominio elastico coincide pertanto con quello definito dal *criterio di snervamento* del materiale. Per materiali metallici i due criteri più usati sono quelli di H.H.M. e Tresca, le cui funzioni di plasticità si scrivono

$$\text{H.H.M.:} \quad \varphi(\sigma_{ij}) = \sqrt{3 J_2} - k \leq 0 \quad (Y = 1) \quad (3.95a)$$

$$\text{Tresca: } \varphi(\sigma_{ij}) = \tau_{\max} - \frac{1}{2} k \leq 0 \quad (Y=6) \quad (3.95b)$$

La (3.95a) è ottenuta dalla (3.58) mediante ovvie manipolazioni. La (3.95b) riassume in notazione compatta le sei diseguaglianze (3.55). I domini elasticici sono quelli illustrati, rispettivamente, nelle Figura 3.17 e 3.16 e, nel caso ora considerato di plasticità perfetta, non si modificano per effetto della plasticizzazione.

Quando il dominio elastico è definito da un'unica diseguaglianza ($Y=1$), la condizione di plasticità è detta *regolare*. Il criterio di Tresca ($Y=6$) è un esempio di condizione *singolare*. Tale distinzione non comporta sostanziali differenze di comportamento [8], anche se la trattazione di condizioni di plasticità singolari è formalmente più complessa a livello di simbologia. Per semplicità, ma senza effettiva perdita di generalità, verranno ora considerate solo condizioni regolari, in particolare quella di H.H.M..

Se nella (3.95a) k viene valutato sulla base di una prova uniaxiale ($k=\sigma_0$), la funzione di plasticità di H.H.M. si scrive, nel caso di plasticità ideale

$$\varphi(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_0 \quad (3.96)$$

dove

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{3J'_2} = \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} \right)^{1/2} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.97a)$$

o anche, in termini delle componenti tensoriali S_{ij} del deviatore di sforzo (2.19)

$$f(\sigma_{ij}) = f(S_{ij}) = \left(\frac{1}{3} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} \quad (3.97b)$$

In caso di incrudimento, φ dipenderà da una o più variabili interne. Le due leggi più frequentemente usate sono le seguenti

$$\text{Incrudimento isotropo: } \varphi(\sigma_{ij}, \alpha) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_0(\alpha) \quad (3.98a)$$

con f ancora dato dalla (3.97); σ_0 dipende ora dalla variabile interna α , funzione della storia di deformazione plastica, che viene spesso identificata con la quantità nota come *lavoro plastico* o *energia dissipata*. Questa rappresenta il lavoro interno associato alla parte irreversibile del processo deformativo ed è definita dalla relazione

$$\alpha = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt \quad (3.98b)$$

$$\text{Incrudimento cinematico lineare: } \varphi(\sigma_{ij}, p_{ij}) = f(\sigma_{ij} - cp_{ij}) - \sigma_0 \quad (3.99)$$

dove c è una costante (in genere positiva). In questo caso le variabili interne si identificano con il valore corrente delle deformazioni plastiche.

L'evoluzione dei domini elasticici è simile a quella vista nel caso uniaxiale per le leggi di incrudimento lineari governate, rispettivamente, dalle matrici (3.81a) e (3.81b). Per stati di sforzo piano (per i quali la condizione di primo snervamento si riconduce all'ellisse di Figura 3.17b), essa è illustrata in Figura 3.29 nello spazio delle tensioni principali. Nel caso idealmente elasto-plastico il dominio è fisso (Figura 3.29a). L'incrudimento isotropo prevede (se σ_0 è funzione crescente di α) un'amplificazione omotetica del dominio (Figura 3.29b), mentre l'incrudimento cinematico configura traslazioni rigide dell'ellisse, il cui centro si colloca a ogni istante nel punto cp_{ij} (Figura 3.29c). I due effetti possono essere combinati scrivendo

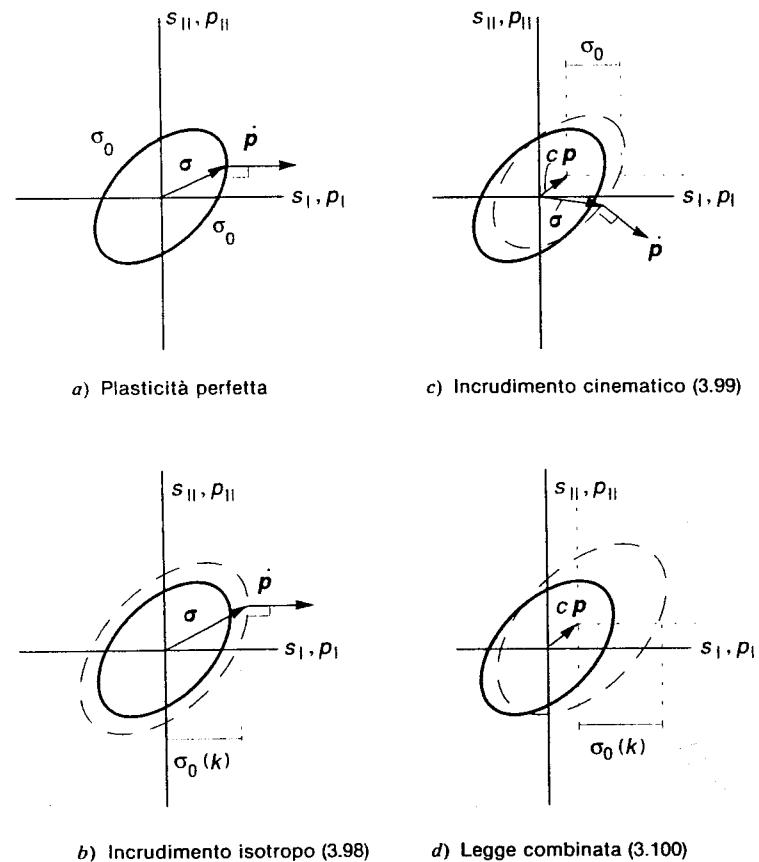


Figura 3.29

$$\varphi(\sigma_{ij}, p_{ij}, \boldsymbol{\kappa}) = f(\sigma_{ij} - cp_{ij}) - \sigma_0(\boldsymbol{\kappa}) \quad (3.100)$$

Si ottiene allora l'evoluzione in Figura 3.29d. La (3.100) può modellare un incrudimento ciclico non dissimile da quello illustrato in Figura 3.26c per il caso uniaxiale.

L'incremento $\dot{\varphi}$ della funzione di plasticità può essere calcolato sulla base della (3.100), che congloba come casi particolari tutti i comportamenti esaminati. Si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ij}} \dot{p}_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \dot{\boldsymbol{\kappa}} \quad (3.101)$$

Sempre per la (3.100) è anche

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ij}} = -c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \boldsymbol{\kappa}}$$

Dalla (3.90) particolarizzata al caso di condizione di plasticità regolare e dalla (3.98b) si ottiene inoltre

$$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}$$

L'espressione (3.101) di $\dot{\varphi}$ può allora scriversi

$$\dot{\varphi} = \mathbf{n}' \dot{\sigma} - h \dot{\lambda} \quad (3.102)$$

dove si è posto, come peraltro già fatto nello scrivere le (3.93)

$$\mathbf{n} = \{\dots \partial \varphi / \partial \sigma_{ij} \dots\}' = \{\dots \partial f / \partial \sigma_{ij} \dots\}' \quad (3.103a)$$

e inoltre

$$h = c \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \sigma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = c \mathbf{n}' \mathbf{n} + (\partial \sigma_0 / \partial \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{n}' \mathbf{n} \quad (3.103b)$$

h definisce il parametro di incrudimento che governa il processo incrementale a un dato istante. Nel caso di condizioni di plasticità regolari, le (3.93) possono quindi scriversi nella forma matriciale seguente

$$\dot{\sigma} = \mathbf{d}(\dot{\epsilon} - \mathbf{n} \dot{\lambda}) \quad \dot{\varphi} = \mathbf{n}' \dot{\sigma} - h \dot{\lambda} \quad (3.104a, b)$$

$$\dot{\varphi} \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0; \quad \dot{\varphi} \dot{\lambda} = 0 \quad (3.104c-e)$$

dove \mathbf{d} è la matrice delle costanti elastiche. Le (3.104) governano la risposta elasto-plastica incrementale in un punto in cui sia, all'inizio del processo, $\varphi = 0$.

Il legame associato costituisce certamente la più importante e più largamente utilizzata modelizzazione del comportamento elasto-plastico, ma non la più generale possibile. In linea di principio, il dominio elastico potrebbe non essere convesso. Più rilevante è il caso in cui gli incrementi di deformazione plastica non rispettano la legge di normalità (3.90); questa è allora sostituita dalla relazione

$$\dot{p}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^Y \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}_{\alpha} \quad (3.105)$$

Le funzioni $g_{\alpha}(\sigma_{ij})$ sono dette *potenziali plastici* e devono essere definite in numero pari a quello delle funzioni di plasticità, in quanto le altre relazioni costitutive (in particolare le (3.91)) si mantengono inalterate. Nel legame associato i potenziali plastici coincidono con le funzioni di plasticità.

Legami non associati sono richiesti da alcuni materiali, ad esempio suoli o rocce, per i quali la legge di normalità conduce a risultati a volte difformi dall'esperienza. Tali casi, peraltro, vanno riguardati come eccezioni all'interno di un contesto in cui la (3.90) appare del tutto ragionevole. Si ricorda a questo proposito che i risultati uniaxiali in Figura 3.1b (che trovano conferma in ambito ben più generale) mostrano come in materiali metallici le deformazioni plastiche avvengano a volume costante. Questo aspetto è recepito dalle (3.90) usate congiuntamente alle condizioni di plasticità di H.H.M. o di Tresca. Entrambe sono infatti indipendenti dalla pressione idrostatica: in uno spazio deformativo sovrapposto a quello degli sforzi le loro normali sono pertanto contenute in un sottospazio puramente deviatorico, ortogonale all'asse delle deformazioni volumetriche.

3.4.2.2 Esistenza e unicità della risposta incrementale

Anche se sono state esplicitate limitatamente alla condizione di H.H.M. e a particolari leggi di incrudimento, le (3.104) possono essere considerate come una formulazione generale del legame elasto-plastico incrementale associato per funzioni di plasticità regolari. In effetti, l'unica ipotesi richiesta, peraltro comunemente accettata, è che φ sia esprimibile nella forma (3.102) come funzione lineare di $\dot{\sigma}$ e $\dot{\lambda}$.

Seguendo quanto sviluppato in [9], ci si propone ora di stabilire se e quando le (3.104) definiscono univocamente le risposte incrementali diretta ($\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\epsilon})$) o inversa ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\dot{\sigma})$) del materiale. Per quanto visto nel caso uniaxiale, è intuitivo che il risultato dipenderà dal valore del parametro di incrudimento h .

Eliminando dalla (3.104b) $\dot{\sigma}$ mediante la (3.104a), l'espressione di $\dot{\varphi}$ diviene

$$\dot{\varphi} = \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} - (h + \mathbf{n}' \mathbf{d} \mathbf{n}) \dot{\lambda} \quad (3.106)$$

Per ogni $\dot{\epsilon}$ dovranno essere rispettate le (3.104c-e). È allora facile constatare che se il termine in parentesi nella (3.106) è positivo, se cioè risulta

$$h > -\mathbf{n}' \mathbf{d} \mathbf{n} = h_{cr} \quad (3.107)$$

tali condizioni definiscono univocamente la risposta incrementale del materiale a qualsiasi $\dot{\epsilon}$ in termini di $\dot{\lambda}$ e quindi, per la (3.104a), di $\dot{\sigma}$. In questo caso, infatti, risultano definite senza ambiguità le seguenti alternative

$$\text{se } \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} \leq 0: \quad \dot{\lambda} = 0, \quad \dot{\varphi} = \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma} = \mathbf{d} \dot{\epsilon} \quad (3.108a)$$

$$\text{se } \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} > 0: \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\lambda} = (h + \mathbf{n}' \mathbf{d} \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma} = \mathbf{d} \dot{\epsilon} \quad (3.108b)$$

dove

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{d} - \mathbf{d} \mathbf{n} (h + \mathbf{n}' \mathbf{d} \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}' \mathbf{d} \quad (3.109a)$$

è la matrice delle rigidezze elasto-plastiche, o *tangenti*, del materiale all'inizio del processo incrementale. In termini tensoriali tali rigidezze si esprimono come segue

$$(D_t)_{ijkl} = D_{ijkl} - \left(h + D_{mnpq} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{pq}} \right)^{-1} D_{ijrs} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{rs}} D_{ktlu} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{tu}} \quad (3.109b)$$

Il legame diretto è quindi univocamente definito se h soddisfa la diseguaglianza stretta (3.107).

Analoghe considerazioni valgono per il legame inverso. L'espressione (3.104b) di $\dot{\varphi}$ permette di stabilire che la risposta incrementale a ogni $\dot{\sigma}$ è univocamente definita purché risulti

$$h > 0 \quad (3.110)$$

In tal caso infatti valgono le alternative

$$\text{se } \mathbf{n}'\dot{\sigma} \leq 0: \quad \dot{\lambda} = 0, \quad \dot{\varphi} = \mathbf{n}'\dot{\sigma} \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon} = \mathbf{a}\dot{\sigma} \quad (3.111a)$$

$$\text{se } \mathbf{n}'\dot{\sigma} > 0: \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\lambda} = h^{-1}\mathbf{n}'\dot{\sigma} > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\epsilon} = \mathbf{a},\dot{\sigma} \quad (3.111b)$$

dove si è posto, come nel Paragrafo 3.2.1.4, $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{-1}$ e la matrice

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a} = \mathbf{n}h^{-1}\mathbf{n}' \quad (3.112a)$$

raccoglie i valori di cedevolezza tangente. In termini tensoriali, questi si esprimono

$$(A_t)_{ijkl} = A_{ijkl} + h^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.112b)$$

Il legame inverso è quindi univocamente definito sotto la condizione (3.110).

Le (3.108), (3.111) sono del tutto analoghe alle (3.85), (3.86) cui si riconducono nel caso uniaxiale. Valgono quindi le stesse considerazioni svolte in quella sede. $h > 0$ configura un comportamento incrudente, per il quale le (3.104) definiscono in modo univoco la risposta incrementale sia diretta che inversa. Per $h = 0$ si ha plasticità ideale o perfetta e il legame inverso non è più definibile. In tal caso $\mathbf{n}'\dot{\sigma} > 0$ non è ammissibile; per $\mathbf{n}'\dot{\sigma} = 0$ il punto rappresentativo dello stato di sforzo si mantiene sulla superficie di snervamento $\varphi = 0$; a tali incrementi possono corrispondere attraverso le (3.104) più $\dot{\epsilon}$ che si differenziano tra loro per la parte plastica $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{n}\dot{\lambda}$, con $\dot{\lambda}$ arbitrario purché non-negativo (Figura 3.30). Il valore $h = h_{cr} = -\mathbf{n}'\mathbf{d}\mathbf{n}$ configura la situazione di softening critico, per cui anche il legame diretto cessa di essere univocamente definito. Si noti che il parametro di incrudimento h (espresso dalla (3.103b) per la condizione di H.H.M. (3.100)) dipende in generale dal valore degli sforzi all'inizio del processo incrementale e dalla storia precedente; lo stesso materiale può quindi presentare incrudimento diverso in situazioni diverse.

Le matrici \mathbf{d}_t o \mathbf{a}_t sono definibili ogniqualsvolta $h + \mathbf{n}'\mathbf{d}\mathbf{n}$ o h sono diversi da zero, anche se negativi. È però possibile che a determinati $\dot{\epsilon}$ o $\dot{\sigma}$ non corrisponda attraverso le (3.104) alcuna risposta, o corrispondano più risposte in alternativa. Ad esempio, per

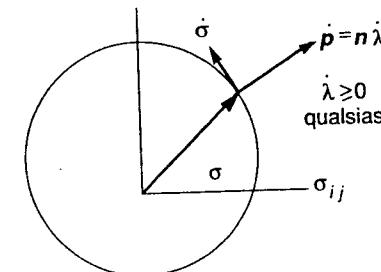


Figura 3.30

$h_{cr} < h < 0$ il legame diretto è univocamente definito, ma non quello inverso: le (3.104) non ammettono soluzione per $\mathbf{n}'\dot{\sigma} > 0$, mentre se questa quantità è negativa sia $\dot{\lambda} = 0$ ($\dot{\epsilon} = \mathbf{a}\dot{\sigma}$) che $\dot{\lambda} = h^{-1}\mathbf{n}'\dot{\sigma}$ ($\dot{\epsilon} = \mathbf{a},\dot{\sigma}$) sono compatibili con il legame costitutivo.

Quando entrambe definite, \mathbf{d}_t e \mathbf{a}_t sono inverse l'una dell'altra. Precisamente

$$\mathbf{a}_t = (\mathbf{d}_t)^{-1} \quad \mathbf{d}_t = (\mathbf{a}_t)^{-1} \quad (3.113)$$

La (3.113) può essere verificata moltiplicando tra loro le espressioni (3.109) e (3.112) delle due matrici. Ricordando che $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{-1}$, si ottiene la matrice identica.

ESEMPIO 3.3 Si consideri un materiale elasticamente isotropo ($\nu = 1/3$) e idealmente elasto-plastico, governato dalla condizione di H.H.M. (3.96), (3.97). All'inizio del processo incrementale le componenti di sforzo valgono

$$\sigma_x = \sigma_0 \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

il che comporta $f(\sigma) = \sigma_0$ ($\varphi = 0$) e

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma_0} \mathbf{M}\sigma = \frac{1}{2} [2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$$

Nel processo incrementale si abbiano le deformazioni

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon} > 0 \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$$

e si voglia calcolare la risposta che ne consegue.

Le componenti tangenziali di sforzo e di incremento di deformazione sono tutte nulle. In virtù dell'espressione di \mathbf{n} , pure gli eventuali incrementi di deformazione plastiche $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{n}\dot{\lambda}$ non presenteranno scorrimenti angolari; pertanto nel processo incrementale anche deformazioni elastiche e sforzi avranno le componenti a indice diverso uguali a zero. La terna (x, y, z) è quindi principale sia per gli sforzi che per le deformazioni e si può operare al suo interno, ponendo

$$\sigma = \sigma_0[1 \ 0 \ 0]' \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}[1 \ 1 \ 0]' \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2} [2 \ -1 \ -1]'$$

Per $\nu = 1/3$, la matrice elastica e isotropa si scrive, nel riferimento principale

$$\mathbf{d} = \frac{3}{4} E \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

È allora

$$\mathbf{n}'\mathbf{d} = \frac{3}{8} E \{2 -1 -1\} \quad \mathbf{n}'\mathbf{d}\mathbf{n} = \frac{9}{8} E \quad \mathbf{n}'\mathbf{d}\dot{\epsilon} = \frac{3}{8} E\dot{\epsilon} > 0$$

Si evince dalle alternative (3.108) che il processo incrementale sarà effettivamente sede di deformazione plastica. Dalle (3.108b) (scritta per $h = 0$), (3.90) e (3.88) si ottiene, successivamente

$$\dot{\lambda} = (\mathbf{n}'\mathbf{d}\mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}'\mathbf{d}\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}}{3} \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{n}\dot{\lambda} = \frac{\dot{\epsilon}}{6} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\epsilon} - \dot{\mathbf{p}} = \frac{\dot{\epsilon}}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dot{\sigma} = \mathbf{d}\dot{\mathbf{e}} = E \frac{\dot{\epsilon}}{8} \begin{Bmatrix} 16 \\ 19 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

L'incremento di sforzo può essere alternativamente valutato come $\dot{\sigma} = \mathbf{d}_t\dot{\epsilon}$, dove \mathbf{d}_t è data dalla (3.109a) e risulta, nel caso in esame

$$\mathbf{d}_t = \frac{E}{8} \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Il risultato è ovviamente immutato. Per esteso, gli incrementi di sforzo si scrivono

$$\dot{\sigma}_x = 2E\dot{\epsilon} \quad \dot{\sigma}_y = \frac{19}{8} E\dot{\epsilon} \quad \dot{\sigma}_z = \frac{13}{8} E\dot{\epsilon} \quad \dot{\tau}_{xy} = \dot{\tau}_{yz} = \dot{\tau}_{zx} = 0$$

Si noti che la matrice \mathbf{d}_t è singolare. La sua inversa \mathbf{a}_t non è quindi definibile, come atteso per un comportamento idealmente elasto-plastico. \mathbf{d}_t peraltro non è nulla; nel processo incrementale lo sforzo varia, pur mantenendosi sulla superficie $\varphi = 0$. È infatti immediato verificare che risulta $\mathbf{n}'\dot{\sigma} = 0$.

3.4.2.3 Il postulato di Drucker

Il legame associato è stato introdotto sulla base di ipotesi spesso ragionevoli ma puramente formali, quali la convessità del dominio elastico istantaneo e la legge di normalità (3.90) per gli incrementi di deformazione plastica. Si può però formulare un'ipotesi di natura meccanica sul comportamento del materiale che, se rispettata, implica che il legame costitutivo abbia l'espressione (3.104), per di più con un parametro di incrudimento h certamente non-negativo. Tale ipotesi, nota come postulato di Drucker [10], si esprime attraverso le seguenti diseguaglianze

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{p}_{ij} \geq 0 \quad \forall \sigma_{ij}^* \text{ tale che } \varphi(\sigma_{ij}^*) \leq 0 \quad (3.114a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{p}_{ij} \geq 0 \quad (3.114b)$$

dove le quantità senza asterisco sono tra loro associate attraverso il legame costitutivo.

È facile rendersi conto (Figura 3.31) che la prima di tali diseguaglianze risulterebbe violata se non valesse la legge di normalità (3.90) o se il dominio $\varphi \leq 0$ non fosse convesso. La (3.114a) implica quindi il legame associato (3.104).

La diseguaglianza (3.114b) impone invece incrudimento comunque non-negativo. Per le (3.104b, e) si può infatti scrivere

$$\dot{\varphi}\dot{\lambda} = \dot{\lambda}\mathbf{n}'\dot{\sigma} - h\dot{\lambda}^2 = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - h\dot{\lambda}^2 = 0 \quad (3.115a)$$

In virtù delle (3.90) e (3.114b) ci si riconduce allora alla condizione

$$h\dot{\lambda}^2 = \dot{\sigma}_{ij}\dot{p}_{ij} \geq 0 \quad (3.115b)$$

che, come asserito, implica

$$h \geq 0 \quad (3.116)$$

Il postulato di Drucker definisce una categoria di materiali che godono di particolari e importanti proprietà. In particolare, la (3.116) assicura che il legame incrementale diretto $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\epsilon})$ è sempre univocamente definito, anche se non lo è necessariamente quello inverso, essendo compatibile con le (3.114) il caso $h = 0$.

Nella sua formulazione originaria, il postulato è stato dedotto da ipotesi sulla *stabilità del materiale*. Drucker ha definito *stabile nel piccolo* un materiale se un disturbo infinitesimo comporta comunque un lavoro non-negativo. Se vale cioè la diseguaglianza

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij} \geq 0 \quad (3.117a)$$

Il materiale è invece detto *stabile nel grande* se per una qualunque storia $\sigma_{ij}(t)$ di sforzi vale la condizione (ovviamente più restrittiva della precedente)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij} dt \geq 0 \quad (3.117b)$$

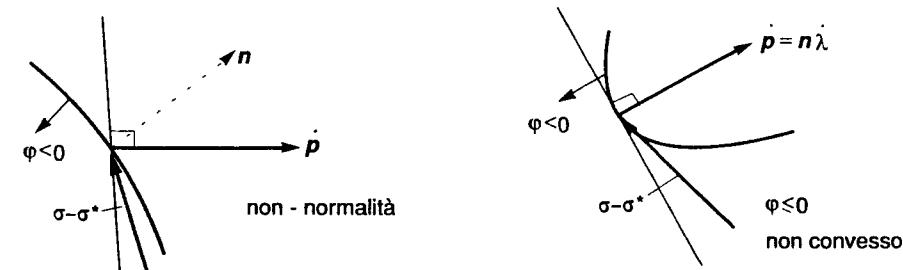


Figura 3.31

La seconda delle (3.114) si configura come una condizione di stabilità nel piccolo su di un ciclo. Applicando e rimuovendo il "disturbo" $\dot{\sigma}_{ij}$, la parte elastica della deformazione viene infatti recuperata e la (3.117a) si riconduce alla (3.114b).

La (3.114a) si ottiene invece considerando la storia in Figura 3.32: da un punto σ_{ij}^* all'interno del dominio elastico istantaneo si raggiunge elasticamente il punto $\dot{\sigma}_{ij}$ sulla frontiera del dominio stesso ($\varphi(\sigma_{ij}) = 0$); successivamente si applica un piccolo incremento $\dot{\sigma}_{ij}dt$, cui corrisponde un incremento di deformazione plastica $\dot{p}_{ij}dt$; quindi si ritorna elasticamente a σ_{ij}^* . La deformazione elastica viene ancora recuperata e (a meno di un termine del secondo ordine) il lavoro sul ciclo si esprime

$$\int_{\text{ciclo}} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt = \int_{\text{ciclo}} \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{p}_{ij} dt$$

Appare allora come la (3.117b) implichi la (3.114a).

Un diagramma uniassiale σ - ϵ mostra immediatamente come la (3.114b) escluda un comportamento softening ($h < 0$). Dal punto P in Figura 3.33 sono infatti possibili due risposte incrementali, indicate con \textcircled{A} e \textcircled{B} : la prima di queste prevede $\dot{\sigma} < 0$ ed $\dot{\epsilon} > 0$, il che viola la diseguaglianza.

La definizione di stabilità così introdotta da Drucker ha natura statica. Dal momento che la stabilità è un concetto intrinsecamente dinamico, tale terminologia incontra obiezioni anche fondate. Le (3.114) comunque consentono un'efficace caratterizzazione del comportamento, anche al di fuori dell'ambito elasto-plastico. In campo elastico, ad esempio, la (3.114a) impone la convessità (non necessariamente stretta, essendo consentito il segno di egualianza) dell'energia di deformazione e in effetti il postulato di Drucker ha implicazioni analoghe a quelle della convessità di ω . Si sottolinea, peraltro, come esso non vada considerato come una legge di natura, necessariamente soddisfatta, ma solo come la definizione di una particolare e importante categoria di comportamenti che gode di proprietà interessanti.

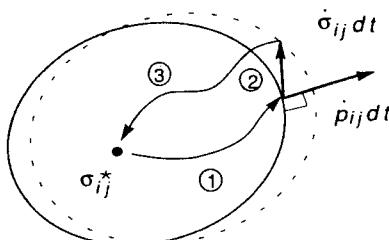


Figura 3.32

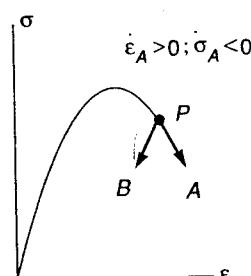


Figura 3.33

Si consideri ora uno stato di sforzo σ_{ij} per cui sia $\varphi(\sigma_{ij}) = 0$ e, a partire da esso, due processi incrementali $(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}, \dot{p}_{ij}^{(1)})$ e $(\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}, \dot{p}_{ij}^{(2)})$. Dal postulato di Drucker conseguono le diseguaglianze

$$(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} - \dot{\sigma}_{ij}^{(2)}) (\dot{p}_{ij}^{(1)} - \dot{p}_{ij}^{(2)}) \geq 0 \quad (3.118a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} \dot{p}_{ij}^{(1)} + \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} \dot{p}_{ij}^{(2)} - 2 \dot{\sigma}_{ij}^{(1)} \dot{p}_{ij}^{(2)} \geq 0 \quad (3.118b)$$

Ricordando la definizione (3.104b) di $\dot{\varphi}$ si può infatti scrivere

$$\dot{\varphi}^{(A)} \dot{\lambda}^{(B)} = \dot{\sigma}_{ij}^{(A)} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}^{(B)} - h \dot{\lambda}^{(A)} \dot{\lambda}^{(B)}, \quad A, B = 1, 2$$

relazione che per la (3.90) diviene

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(A)} \dot{p}_{ij}^{(B)} = h \dot{\lambda}^{(A)} \dot{\lambda}^{(B)} + \dot{\varphi}^{(A)} \dot{\lambda}^{(B)}, \quad A, B = 1, 2$$

Sostituendo nelle (3.118) si ottiene nei due casi

$$(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} - \dot{\sigma}_{ij}^{(2)}) (\dot{p}_{ij}^{(1)} - \dot{p}_{ij}^{(2)}) = (\dot{\varphi}^{(1)} \dot{\lambda}^{(1)} + \dot{\varphi}^{(2)} \dot{\lambda}^{(2)} - (\dot{\varphi}^{(1)} \dot{\lambda}^{(2)} + \dot{\varphi}^{(2)} \dot{\lambda}^{(1)}) + h (\dot{\lambda}^{(1)} - \dot{\lambda}^{(2)})^2 \quad (3.119a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} \dot{p}_{ij}^{(1)} + \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} \dot{p}_{ij}^{(2)} - 2 \dot{\sigma}_{ij}^{(1)} \dot{p}_{ij}^{(2)} = (\dot{\varphi}^{(1)} \dot{\lambda}^{(1)} + \dot{\varphi}^{(2)} \dot{\lambda}^{(2)} - 2 \dot{\varphi}^{(1)} \dot{\lambda}^{(2)} + h (\dot{\lambda}^{(1)} - \dot{\lambda}^{(2)})^2 \quad (3.119b)$$

A secondo membro delle (3.119) il primo addendo è nullo per la (3.104e). Il secondo è certamente non-negativo in quanto le (3.104c, d) impongono $\dot{\varphi}^{(A)} \leq 0$ e $\dot{\lambda}^{(B)} \geq 0$ nel processo incrementale. Se il materiale rispetta il postulato di Drucker vale la (3.116) e anche il terzo addendo è non-negativo. Le (3.118) sono così dimostrate. Si noti che la dimostrazione è valida anche se uno o entrambi i processi incrementali sono puramente elastici, se cioè $\dot{p}_{ij}^{(1)}$ e/o $\dot{p}_{ij}^{(2)}$ sono uguali a zero.

3.4.2.4 Dipendenza dalla temperatura

Per semplicità il legame elasto-plastico è stato scritto supponendo che il processo incrementale avvenga a temperatura costante ($\dot{T} = 0$). Se questo non è il caso occorre quanto meno tener conto degli incrementi di deformazione termica. La (3.104a) allora diviene

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\vartheta}_{kl} - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\lambda} \right); \quad \dot{\sigma} = \mathbf{d}(\dot{\epsilon} - \dot{\vartheta} - \mathbf{n} \dot{\lambda}) \quad (3.120a)$$

Per un materiale termicamente isotropo, $\dot{\vartheta}_{ij}$ è dato dalla (3.41) scritta in forma incrementale. Precisamente

$$\dot{\vartheta}_{ij} = \alpha \dot{T} \delta_{ij}; \quad \dot{\vartheta} = \alpha \dot{T} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (3.120b)$$

Le rimanenti relazioni costitutive (3.104b-e) restano inalterate e pure invariate si mantengono nella sostanza tutte le conclusioni che ne discendono. \dot{T} appare ora come un parametro di carico nel processo incrementale, che interviene sugli incrementi di sforzo attraverso le (3.120).

Le (3.120) presuppongono che la temperatura non abbia un'influenza diretta sui parametri costitutivi. In plasticità classica tale assunto è spesso accettato, anche se la sua validità diviene discutibile nel caso di storie termiche che presentano variazioni notevoli.

Pur prescindendo da fenomeni viscosi, importanti nella maggior parte dei materiali metallici a temperature elevate, le proprietà del materiale (rigidezze elastiche, coefficiente di dilatazione termica, limite di snervamento, legge di incrudimento, ecc.) presentano variazioni con la temperatura che non possono sempre essere trascurate. La formulazione del legame deve quindi essere modificata in modo più o meno sostanziale per tener conto di questi aspetti.

Come esempio di tali modifiche si cita ora il caso più semplice, ma importante, che prevede che il solo limite di snervamento sia funzione della temperatura. Con riferimento alla condizione di H.H.M., in luogo della (3.100) adesso si scrive

$$\varphi(\sigma_{ij}, p_{ij}, \mathbf{x}, T) = f(\sigma_{ij} - cp_{ij}) - \sigma_0(\mathbf{x}, T) \quad (3.121a)$$

La funzione di plasticità ora dipende esplicitamente da T e la (3.101) viene quindi sostituita dalla relazione

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ij}} \dot{p}_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{n}' \dot{\sigma} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \dot{T} - h \dot{\lambda} \quad (3.121b)$$

dove \mathbf{n} e h sono ancora date dalle (3.103). Le (3.121) sono state proposte da Prager (vedi [11]). Con le (3.120) e (3.104c-e) esse danno luogo a una formulazione del legame incrementale che gode delle stesse proprietà delle (3.104), cui si riconducono nel caso di temperatura costante.

3.5 CENNI SUI COMPORTAMENTI DIPENDENTI DAL TEMPO

3.5.1 MODELLI REOLOGICI

Molti degli aspetti essenziali del comportamento dei materiali possono essere visualizzati con l'ausilio di semplici modelli meccanici. La molla di Figura 3.34a è il modello relativo al comportamento elastico lineare; la sua rigidezza K instaura infatti un legame di proporzionalità tra la forza applicata F_e la variazione di lunghezza u_e

$$F_e = Ku_e \quad (3.122a)$$

Un comportamento rigidamente plastico è invece rappresentato dal blocco ad attrito (o elemento di Coulomb) in Figura 3.34b: esso non consente spostamento fintanto che è $F_p < R$, dove R indica la massima reazione che l'attrito può fornire; per $F_p = R$ sono possibili spostamenti di entità arbitraria, purché nel verso di F_p ; per $F_p > R$ l'equilibrio non sussiste. Il modello quindi prevede

$$\dot{u}_p = 0 \quad \text{se } F_p < R; \quad \dot{u}_p \geq 0 \quad \text{se } F_p = R \\ (F_p > R \text{ non ammissibile}) \quad (3.122b)$$

Esso incorpora anche l'irreversibilità propria del comportamento plastico: se, dopo che è stata prodotta una $u_p > 0$, la forza viene diminuita, incrementi di spostamento in direzione opposta sono possibili solo per $F_p = -R$.

Il comportamento idealmente elasto-plastico risulta dalla composizione in serie dei due modelli (Figura 3.35a). Essi sono individualmente soggetti alla stessa forza

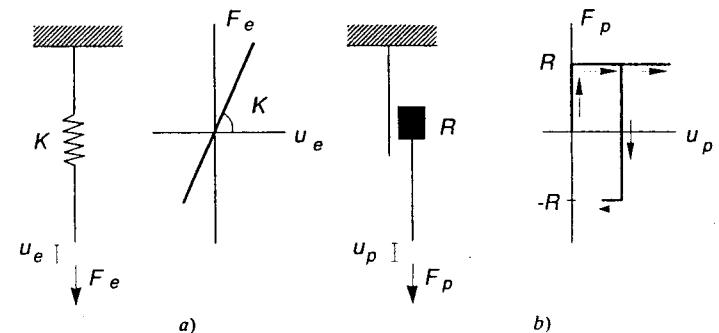


Figura 3.34

$F = F_e = F_p$; fintanto che questa è minore di R la sola molla si deforma, con spostamento proporzionale alla forza applicata; per $F = R$ il blocco scorre, impedendo alla forza di aumentare di valore; allo scarico solo lo spostamento elastico viene recuperato.

Una composizione in parallelo riproduce invece il comportamento rigido-linearmemente incrudente (Figura 3.35b). Ora i due modelli elementari hanno lo stesso spostamento ($u = u_e = u_p$) mentre la forza applicata si ripartisce tra di essi ($F = F_e + F_p$). Fintanto che è $F < R$ il blocco ad attrito impedisce lo spostamento e la molla è a riposo. Quando F supera il valore di R il blocco scorre, consentendo alla molla di allungarsi di una quantità proporzionale a $F - R$. È allora

$$u = 0 \quad \text{se } F \leq R \quad u = \frac{F - R}{K} \quad \text{se } F \geq R \quad (a)$$

Il comportamento elastico-linearmemente incrudente è rappresentato dal modello in Figura 3.35c. Per equilibrio, sia la molla inferiore che la parte superiore sono soggetti alla stessa forza F . Se questa è minore di R solo la prima si deforma. È quindi

$$u = \frac{F}{K_1} \quad \text{se } F \leq R \quad (b1)$$

Per $F > R$ il blocco ad attrito scorre e la molla superiore viene impegnata da $F - R$. Lo spostamento è costituito dalla somma dei contributi delle due parti e risulta

$$u = \frac{F}{K_1} + \frac{F - R}{K_2} = \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} F - \frac{1}{K_2} R \quad \text{se } F \geq R \quad (b2)$$

È intuitivo come modelli complessi, che combinino in vario modo i due elementi fondamentali in Figura 3.34, siano in grado di rappresentare svariati comportamenti elasto-plastici. Dal momento che i parametri costitutivi K_i e R_i sono costanti, il diagramma $F - u$ risulta lineare a tratti; un modello sufficientemente ricco consente peraltro di approssimare un andamento curvo con precisione adeguata.

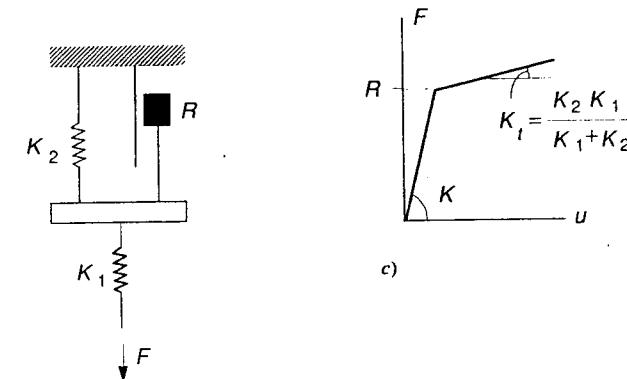
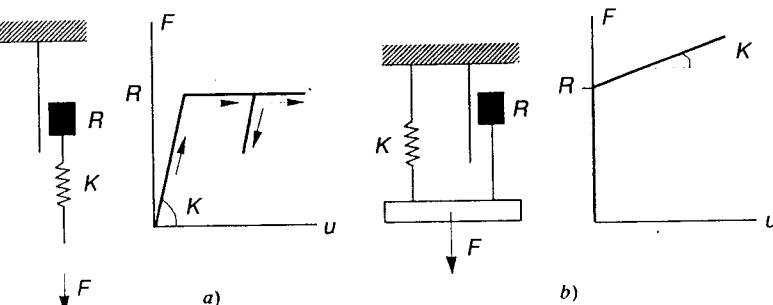


Figura 3.35

Per comportamenti indipendenti dal tempo, i modelli meccanici presentano forse il vantaggio di una certa immediatezza di comprensione ma non si configurano come valida alternativa pratica in vista della formulazione analitica del legame costitutivo. Essi sono però utili a questo scopo nel caso di comportamenti viscosi, ambito nel quale prendono il nome di *modelli reologici*, essendo appunto la reologia la disciplina che studia le proprietà e il comportamento delle sostanze che fluiscono nel tempo anche se le condizioni esterne si mantengono invariate.

Il dispositivo di Figura 3.36 è il modello reologico del materiale *linearmente viscoso*. È costituito da un pistone che scorre in un cilindro contenente un liquido a viscosità perfetta che fluisce attorno al pistone man mano che questo si sposta. La *costante di viscosità* V lega la forza applicata F_v alla *velocità* del pistone. Precisamente

$$F_v = V \frac{du_v}{dt} \quad (3.122c)$$

Il modello descrive piuttosto il comportamento di un fluido che non quello di un materiale solido dipendente dal tempo. In ogni istante esso risponde alla stessa forza esattamente allo stesso modo, indipendentemente dalla storia precedente di cui non

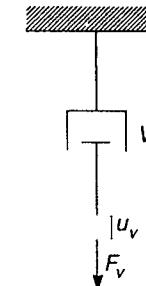


Figura 3.36

conserva alcun ricordo. All'applicazione del carico non corrisponde una risposta istantanea; lo spostamento procede solo gradualmente e richiede tempo per svilupparsi. Se il carico viene rimosso lo spostamento non viene recuperato neppure in minima parte: qualunque sia la storia di carico, a $F_v = 0$ corrisponde infatti, attraverso la (3.122c), $u_v = \text{cost}$. Non è possibile imporre al modello spostamenti istantanei; uno spostamento finito può essere raggiunto solo in un certo intervallo di tempo, al prezzo di forze tanto più elevate quanto più breve è l'intervallo stesso.

Il comportamento di materiali reali è meglio rappresentato da modelli reologici *viscoelastici*, che combinano l'elemento viscoso con la molla. I due più semplici, noti come modelli di *Maxwell* e di *Kelvin-Voigt* (o semplicemente di *Voigt*), sono illustrati in Figura 3.37. Essi compongono i due elementi fondamentali rispettivamente in serie e in parallelo.

Nel modello di Maxwell (Figura 3.37a) la forza è a ogni istante uguale nei due elementi, mentre lo spostamento è la somma dei contributi elastico e viscoso

$$F_e = F_v = F \quad u = u_e + u_v \quad (c1)$$

Peraltro, le (3.122a, c) forniscono

$$u_e = \frac{F}{K} \quad \frac{du_v}{dt} = \frac{F}{V} \quad (c2)$$

Le (c) consentono di scrivere l'equazione differenziale che governa l'evoluzione del modello. Risulta

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{V} \quad (3.123)$$

Nel modello di Voigt (Figura 3.37b) la forza è invece suddivisa nei due elementi, che subiscono lo stesso spostamento. In luogo delle (c1) si ha quindi

$$F = F_e + F_v \quad u_e = u_v = u \quad (d1)$$

dove, sempre per le (3.122a, c), si pone

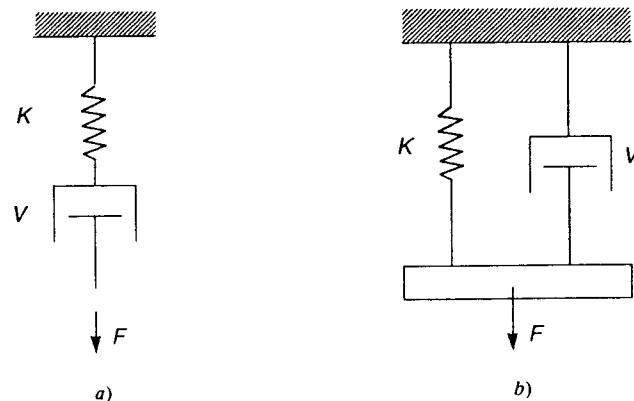


Figura 3.37

$$F_e = Ku \quad F_v = V \frac{du}{dt} \quad (d2)$$

L'equazione differenziale è adesso

$$F = Ku + V \frac{du}{dt} \quad (3.124)$$

Si valuta ora la risposta dei due modelli nelle condizioni di puro *creep* e puro *rilassamento*. Queste due prove sono state descritte nel Paragrafo 3.1.2 e i loro risultati sono frequentemente utilizzati per quantificare i parametri costitutivi. Si ricorda che la prova di creep misura l'evoluzione nel tempo dello spostamento sotto carico costante, quella di rilassamento l'evoluzione della forza a spostamento imposto.

La risposta in condizione di creep è illustrata in Figura 3.38a. La forza viene portata *rapidamente* al suo valore finale \bar{F} , intendendo con "rapidamente" un tempo sufficientemente breve da poter supporre che l'elemento viscoso non si attivi in fase di carico, anche se non tale da indurre apprezzabili effetti dinamici (nella prima illustrazione in Figura 3.38a, il processo di carico corrisponde al segmento molto ripido per $t \leq 0$). Il modello di Maxwell associa istantaneamente al carico lo spostamento elastico $\bar{u} = \bar{F}/K$; successivamente è $d\bar{F}/dt = 0$ e dalla (3.123) si ottiene

$$u(t) = \bar{F} \left(\frac{1}{K} + \frac{t}{V} \right) \quad (3.125a)$$

Lo spostamento procede quindi linearmente nel tempo. Nel modello di Voigt invece, l'elemento viscoso non consente spostamenti istantanei e, di conseguenza, a $t = 0$ la molla è scarica. Essa viene gradualmente impegnata con il procedere dello spostamento viscoso. L'equazione della curva $u = u(t)$ si ottiene integrando la (3.124) scritta per $F = \bar{F}$. Il suo integrale generale, somma di quello dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare, risulta

$$u(t) = A e^{-Kt/V} + \frac{\bar{F}}{K}$$

La costante A è fissata dalla condizione iniziale $u(0) = 0$. Si ottiene

$$u(t) = \frac{\bar{F}}{K} \{ 1 - e^{-Kt/V} \} \quad (3.125b)$$

Lo spostamento avvicina asintoticamente il valore $\bar{u} = \bar{F}/K$ per cui il carico sarebbe interamente sopportato dall'elemento elastico. Appare dalla (3.125b) come ogni assegnata percentuale di questo valore venga raggiunta tanto più rapidamente quanto più elevata è la rigidezza K dell'elemento elastico o quanto più bassa la costante V di quello viscoso.

La Figura 3.38b illustra invece la risposta prevista in condizione di rilassamento, imponendo cioè che lo spostamento raggiunga rapidamente il valore \bar{u} e si mantenga quindi costante. Il modello di Maxwell associa istantaneamente a \bar{u} la forza $\bar{F} = Ku$ nella molla; essa decade nel tempo in quanto lo spostamento che man mano si sviluppa nell'elemento viscoso diminuisce l'impegno di quello elastico. L'andamento di $F(t)$ si ottiene integrando la (3.123) scritta per $u = \bar{u}$ sotto la condizione iniziale $F(0) = K\bar{u}$. Risulta

$$F(t) = K\bar{u} e^{-Kt/V} \quad (3.126a)$$

Del tutto diverso è il comportamento del modello di Voigt. Nel breve transitorio in cui u raggiunge il suo valore finale, la forza F diviene estremamente elevata. Successivamente, essa è interamente sopportata dalla molla, in quanto per $u = \text{cost}$ l'elemento viscoso prevede $F_v = 0$; è quindi $F = K\bar{u} = \text{cost}$ per $t \geq 0$. La risposta a rilassamento dell'elemento di Voigt è frequentemente scritta nella forma seguente

$$F(t) = \bar{u}(K + V \cdot \delta(t)) \quad (3.126b)$$

dove $\delta(t)$ è la funzione di Dirac; precisamente

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0; \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \forall \epsilon > 0$$

Nella (3.126b) essa è introdotta a rappresentare il picco di forza che consegue a un transitorio di ampiezza evanescente [12].

La Figura 3.38c illustra come si prevede venga recuperato lo spostamento viscoso se, a un certo istante \bar{t} , il carico è rapidamente rimosso da una condizione di creep. I calcoli sono lasciati come esercizio.

Uno sguardo anche solo superficiale alla Figura 3.38 mostra come i due modelli forniscano risposte marcatamente diverse. Non è ovviamente necessario assumere nei due casi gli stessi valori per la rigidezza K della molla e la costante V dell'elemento viscoso, ma le differenze appaiono qualitative più che quantitative e non possono certo essere rimosse semplicemente aggiustando i parametri costitutivi. Anche il confronto con i risultati sperimentali è piuttosto deludente. Per quanto riguarda la condizione di

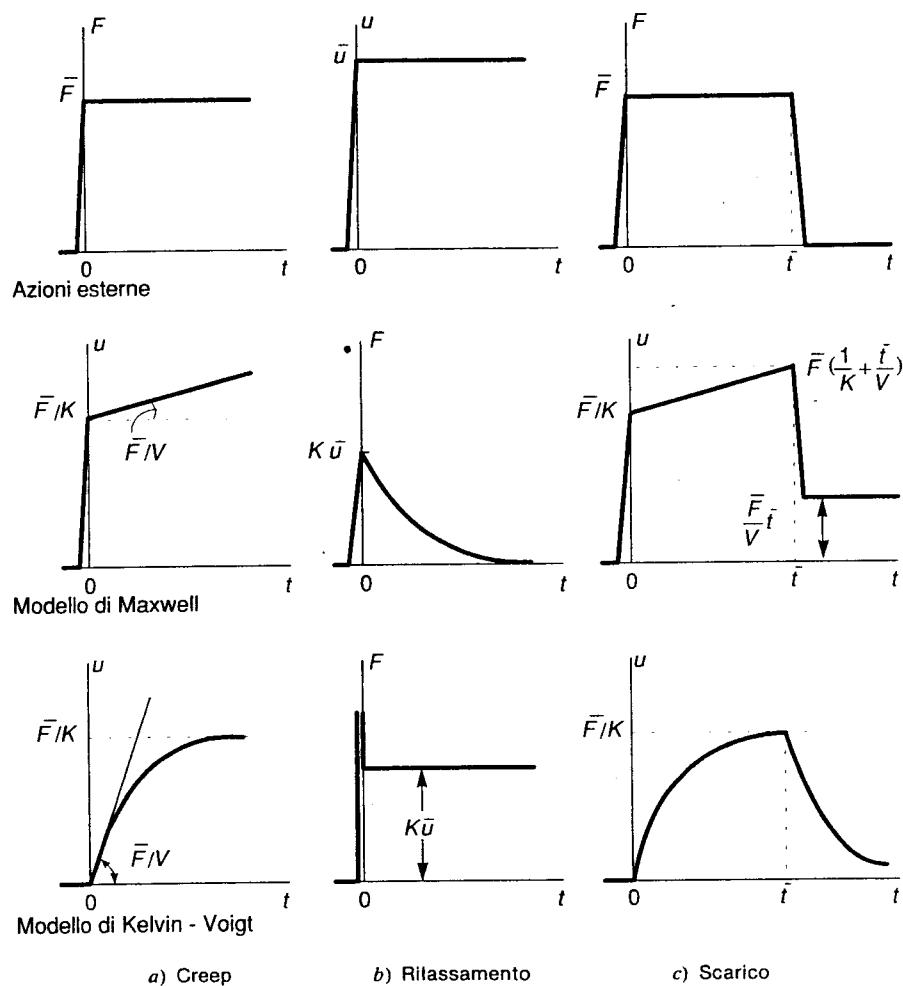


Figura 3.38

creep (i risultati di un esperimento tipico sono schizzati in Figura 3.5), il modello di Voigt potrebbe essere tarato in modo da approssimare il transitorio iniziale (la risposta istantanea può essere recuperata con valori di K molto elevati) ma non le fasi successive; il modello di Maxwell può approssimare solo la seconda fase (il cosiddetto *creep secondario*), dove effettivamente l'andamento di $u(t)$ è pressoché lineare. In condizioni di rilassamento il modello di Maxwell produce risultati qualitativamente simili a quelli di Figura 3.6, anche se la forza tende a zero per $t \rightarrow \infty$; un carico residuo, il cui valore peraltro è raggiunto immediatamente, è invece previsto dal modello di Voigt. Questo prevede anche un completo recupero dello spostamento viscoso, in accordo con quanto

si osserva in molti polimeri ma non in materiali metallici; il modello di Maxwell comporta invece un recupero solamente parziale, ma immediato.

Opportune combinazioni dei due modelli consentono tuttavia di rappresentare comportamenti più realistici. Una semplice composizione in serie è illustrata in Figura 3.39, unitamente alla risposta prevista in una prova di creep seguita da scarico; il risultato riproduce accettabilmente i principali aspetti qualitativi della risposta di alcuni materiali reali.

In materiali metallici le deformazioni viscose si palesano in genere solo dopo il superamento di una determinata soglia nel livello di sforzo. Il comportamento è allora detto *elasto-viscoplastico* e i relativi modelli rheologici includono anche l'elemento di Coulomb. Il modello più semplice è illustrato in Figura 3.40 e si differenzia da quello di Maxwell perché l'elemento viscoso è inattivo per $F \leq R$. Quando la forza applicata supera questo valore, il blocco scorre con velocità controllata dall'elemento viscoso, che assorbe il carico in eccesso rispetto alla reazione fornita dall'attrito. Gli spostamenti anelasticci hanno carattere permanente: allo scarico viene recuperato solo il contributo della molla.

ESEMPIO 3.4 Si consideri la storia di carico

$$\frac{F(t)}{R} = \begin{cases} t/t_0 & 0 \leq t \leq 2t_0 \\ 2.0 & 2t_0 \leq t \leq 4t_0 \\ 0.5 & t \geq 4t_0 \end{cases} \quad t_0 = \alpha \frac{V}{K} \quad (3.127a, b)$$

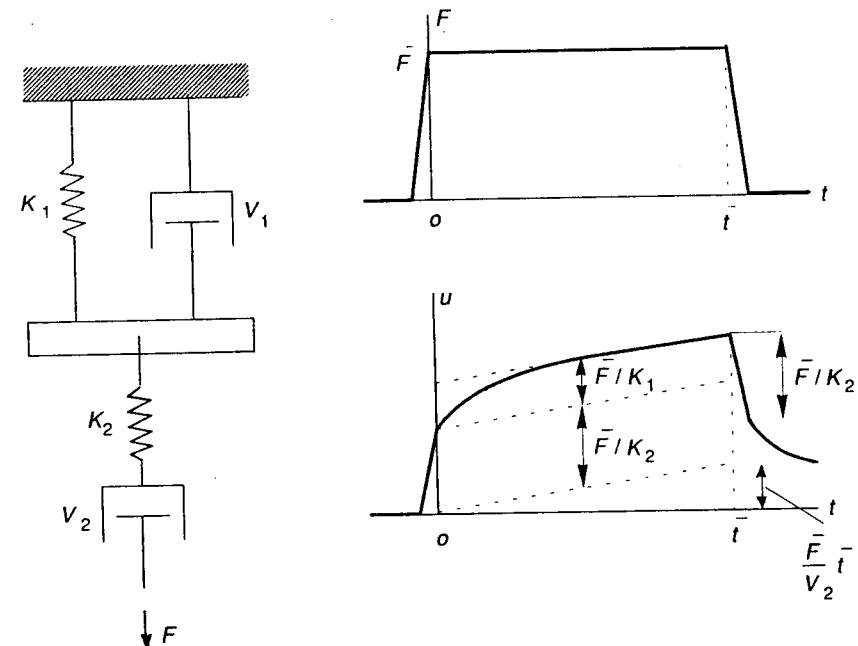


Figura 3.39

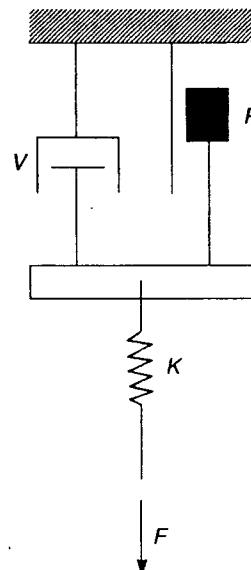


Figura 3.40

dove t_0 è un tempo di riferimento, legato al parametro adimensionale α attraverso la (3.127b). Si vuole calcolare l'evoluzione dello spostamento nel tempo prevista dal modello di Maxwell e da quello elasto-viscoplastico di Figura 3.40.

Nel primo caso la soluzione si ottiene integrando, in ognuno dei tre intervalli temporali in cui è suddivisa la storia di carico, l'equazione differenziale (3.123) sotto condizioni iniziali che impongono spostamento nullo per $t = 0$, continuità dello spostamento per $t = 2t_0$ e discontinuità pari al recupero dello spostamento elastico per $t = 4t_0$. Risulta, a calcoli svolti

$$\frac{K}{R} u(t) = \begin{cases} .5(t/t_0)[2 + \alpha(t/t_0)] & 0 \leq t \leq 2t_0 \\ 2 + \alpha(t/t_0) & 2t_0 \leq t \leq 4t_0 \\ .5[1 + 4\alpha + \alpha(t/t_0)] & t \geq 4t_0 \end{cases} \quad (3.128a)$$

Lo spostamento del modello di Figura 3.40 risulta invece dalla somma del contributo elastico (3.122a) e di quello viscoso (3.122c), in cui però F deve essere depurato dalla resistenza del blocco ad attrito. Precisamente

$$u = u_e + u_v \quad u_e = \frac{F}{K} \quad \frac{du_v}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{se } F \leq R \\ (F - R)/V & \text{se } F > R \end{cases} \quad (e)$$

Per $t \leq t_0$ la sola molla si deforma. Nell'intervallo $t_0 \leq t \leq 4t_0$ allo spostamento elastico occorre aggiungere l'integrale dell'ultima delle (e), con costanti di integrazione definite da condizioni di continuità per lo spostamento. Al tempo $t = 4t_0$ il carico viene rapidamente diminuito a un valore minore di R ; il contributo elastico viene recuperato ma l'elemento viscoso si disattiva e lo spostamento residuo si mantiene costante. Il calcolo fornisce

$$\frac{K}{R} u(t) = \begin{cases} t/t_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ .5[2(t/t_0) + \alpha(t/t_0 - 1)^2] & t_0 \leq t \leq 2t_0 \\ .5[4 - 3\alpha + 2\alpha(t/t_0)] & 2t_0 \leq t \leq 4t_0 \\ .5[1 + 5\alpha] & t \geq 4t_0 \end{cases} \quad (3.128b)$$

L'evoluzione nel tempo della risposta prevista dai due modelli per $\alpha = 5$ è illustrata in Figura 3.41, unitamente alla storia di carico (tratteggiata). La scala è tale per cui quest'ultima coincide con la risposta della molla, permettendo di valutare per differenza il contributo anelastico. Esso è ovviamente maggiore nel modello di Maxwell, che prevede che l'elemento viscoso sia sempre attivo.

Gli aspetti essenziali di comportamenti uniassiali anche complessi possono pertanto essere ricostruiti mediante opportune combinazioni di tre elementi fondamentali. Per tradurre il modello reologico in un legame costitutivo occorre interpretare F e u come i tensori di sforzo e di deformazione σ_{ij} e ε_{ij} , eventualmente decomponendoli nei loro contributi elastico, plastico e viscoso. La rigidezza K della molla si identifica allora con il tensore elastico D_{ijkl} e la resistenza R del blocco ad attrito con il limite di snervamento $\varphi(\sigma_{ij}) = 0$ di un materiale idealmente plastico, cui occorre aggiungere la relativa legge di scorrimento, ad esempio associata. In luogo di V si ha ora un tensore quadruplo V_{ijkl} di costanti di viscosità. Le (3.122) sono allora sostituite dalle relazioni

$$\sigma_{ij}^e = D_{ijkl} e_{kl} \quad (3.129a)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_{ij} = 0 & \text{se } \varphi(\sigma_{ij}^p) < 0 \\ \dot{p}_{ij} = (\partial\varphi/\partial\sigma_{ij}^p)\dot{\lambda} & \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\varphi} \leq 0, \quad \dot{\varphi}\dot{\lambda} = 0 \quad \text{se } \varphi(\sigma_{ij}^p) = 0 \end{cases} \quad (3.129b)$$

$$\sigma_{ij}^v = V_{ijkl}\dot{v}_{kl} \quad (3.129c)$$

dove si è indicata con v_{ij} la deformazione viscosa e con un punto la derivata rispetto al tempo. A differenza di quanto avviene in legami elasto-plastici, il tempo gioca adesso un ruolo effettivo, in quanto la risposta è influenzata dalla velocità a cui avviene il processo deformativo. Le (3.129) sottintendono un'ipotesi (peraltro comunemente ac-

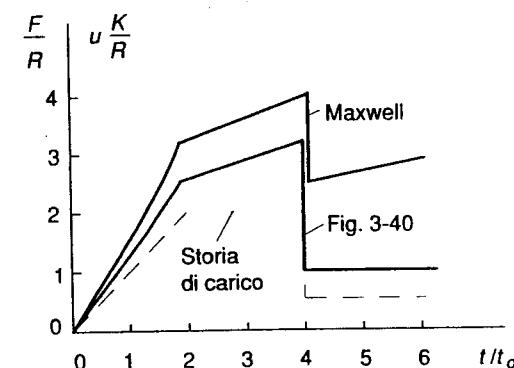


Figura 3.41

cettata) sulla struttura microscopica del materiale, che è considerata meccanicamente equivalente ad un reticolo di modelli reologici fondamentali [12].

Per un materiale elasticamente isotropo, la (3.129a) può essere scritta nella forma (3.39), che identifica il comportamento del materiale con quello di due "molle": la prima lega le componenti idrostatiche di sforzo e deformazione attraverso il modulo volumetrico (3.40), la seconda i deviatori attraverso $2G$. In materiali metallici le deformazioni anelastiche, siano esse plastiche o viscose, sono puramente deviatoriche (è comunque intuitibile come, in generale, deformazioni di notevole entità possano prodursi solo a volume costante); la parte anelastica del legame è allora una relazione tra soli deviatori, il che consente notevoli semplificazioni. In particolare, se l'isotropia si conserva anche al di fuori del campo elastico, i parametri costitutivi si riconducono alle costanti del modello reologico.

L'approccio assume che sia possibile ricostruire comportamenti comunque complessi compонendo un numero adeguato di costituenti semplici. Questo purtroppo non risponde al vero: anche modelli molto ricchi non sono in grado di rappresentare tutti gli aspetti di determinati comportamenti. Esistono inoltre dei limiti, sia operativi che concettuali, alla complessità di un modello. Se i parametri costitutivi sono in numero molto elevato, risultano difficili da quantificare e onerosi da gestire nel calcolo. In aggiunta, modelli apparentemente diversi possono rivelarsi del tutto equivalenti tra loro; i tre modelli viscoelastici di Figura 3.42, ad esempio, forniscono, per opportuni valori delle costanti, la stessa risposta di quello in Figura 3.39.

L'applicazione diretta del metodo è di fatto confinata a modelli relativamente semplici, che presentano limitazioni più o meno marcate in diverse circostanze. Un modello tarato sui risultati di una prova di creep si rivela in genere inadeguato se le azioni esterne configurano una condizione vicina al rilassamento, e viceversa. Il modello di Figura 3.39 può essere accettabile per la storia di carico a fianco indicata, ma non lo è assolutamente se la forza cambia di segno. Anche l'espeditivo (oltretutto concettualmente discutibile) di introdurre nonlinearità di vario tipo nel comportamento degli elementi fondamentali non è in grado di superare completamente queste limitazioni [2]. Ogni risultato del calcolo deve quindi essere sopesato con cura in termini di adeguatezza del modello.

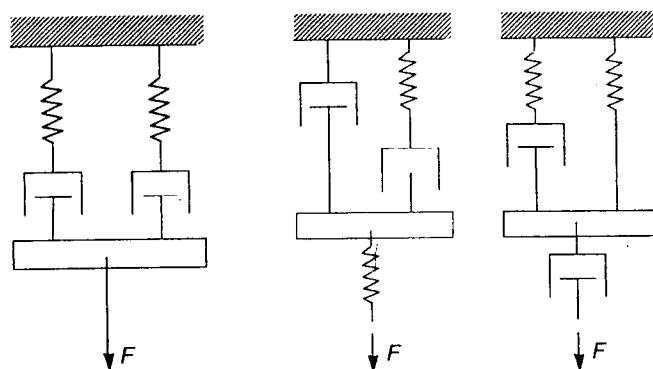


Figura 3.42

È questa comunque forse la sola strada percorribile in presenza di comportamenti quali quello elasto-viscoplastico, per cui non sono ancora disponibili formulazioni alternative, ben fondate e operativamente efficienti, del legame costitutivo. Il ricorso a modelli reologici presenta peraltro vantaggi, non solo operativi, anche nel caso viscoelastico lineare, che pur ammette modelli costitutivi validi e ben consolidati. Uno degli approcci cui si accennerà nel paragrafo che segue trae infatti origine dai modelli reologici di Maxwell e Voigt, che assumono quindi importanza anche come fondamento di una vera e propria teoria costitutiva.

3.5.2 IL LEGAME VISCOELASTICO LINEARE

3.5.2.1 La formulazione differenziale

I modelli reologici di Maxwell e Voigt possono essere assunti come elementi fondamentali per la costruzione di modelli complessi, atti a rappresentare comportamenti viscoelastici molto generali. In Figura 3.43a è illustrato quello noto come *modello di Voigt generalizzato*. Esso è costituito da un singolo elemento di Maxwell e da un certo numero di elementi di Voigt collegati in serie; lo spostamento del modello risulta allora dalla somma dei contributi degli elementi che lo compongono, tutti soggetti a ogni istante alla stessa forza.

In condizioni di creep, la risposta del modello si ottiene sommando alla (3.125a) un numero di soluzioni (3.125b) pari a quello degli elementi di Voigt considerati. Ponendo

$$\tau_i = V_i/K_i \quad (3.130)$$

e

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (3.131a)$$

si ottiene

$$u(t) = \bar{F}(1/K_0 + t/V_0 + \psi(t)) \quad (3.131b)$$

La (3.131a) è nota come *funzione di creep*. Se $1/V_0 = 0$ (se cioè l'elemento di Maxwell si identifica con la sola molla), lo spostamento risulta compreso tra i valori

$$u(0) = \frac{\bar{F}}{K_0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{F} \sum_{i=0}^n \frac{1}{K_i} \quad (3.132a, b)$$

per $t \rightarrow \infty$ esso avvicina quindi un valore finito. Se invece $1/V_0 > 0$, lo spostamento cresce illimitatamente nel tempo e viene a identificarsi con il secondo addendo nella (3.131b), detto *risposta a lungo termine*. In ogni caso, K_0 governa la risposta istantanea del modello. Le τ_i definite dalla (3.130b) sono note come *tempi di ritardo*; esse rappresentano il tempo necessario perché la risposta di ogni elemento di Voigt raggiunga una quota pari a $1 - 1/e$ del suo valore finale. Il modello di Figura 3.43a presenta uno spettro discreto di tempi di ritardo; le cedevolezze $1/K_i$, $i = 1, \dots, n$, delle molle negli elementi di Voigt determinano l'ampiezza dei contributi corrispondenti ad ogni τ_i nella funzione di creep.

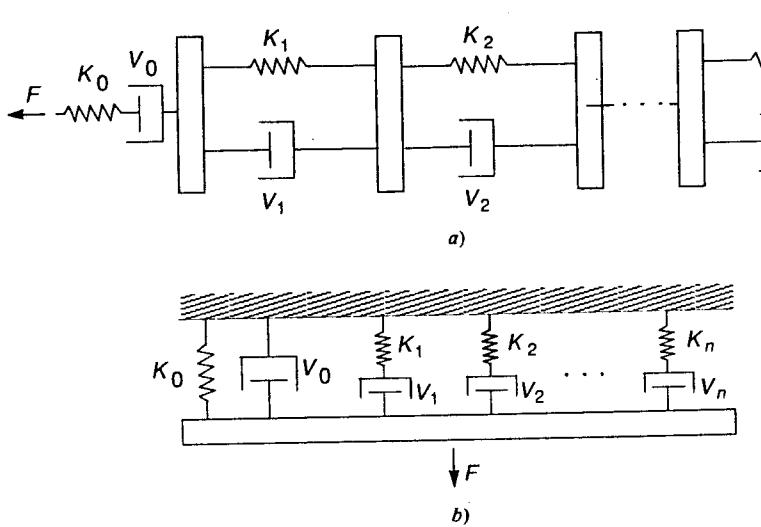


Figura 3.43

Combinando in parallelo un singolo elemento di Voigt e un certo numero di elementi di Maxwell si ottiene invece il *modello di Maxwell generalizzato* (Figura 3.43b). Gli elementi ora si spostano tutti in egual misura, mentre la forza si distribuisce tra di essi. La risposta del modello in condizioni di rilassamento si evince dalle (3.126). Introducendo la *funzione di rilassamento*

$$\chi(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{-t/\tau_i} \quad (3.133a)$$

questa si scrive

$$F(t) = \bar{u}(K_0 + V_0 \delta(t) + \chi(t)) \quad (3.133b)$$

Nella (3.133b), il secondo termine rappresenta il picco di forza che si riscontra nel transitorio necessario allo spostamento per raggiungere il suo valore finale e riflette l'incapacità del modello a recepire spostamenti istantanei, di fatto possibili solo se $V_0 = 0$. Tale contributo comunque svanisce nell'istante immediatamente successivo al transitorio iniziale; i valori entro cui la forza è compresa risultano, come è facile verificare

$$F(\varepsilon) = \bar{u} \sum_{i=0}^n K_i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = K_0 \bar{u} \quad (3.134a, b)$$

dove $\varepsilon > 0$ è un tempo comunque piccolo. K_0 governa il valore della forza presente a completo rilassamento. Le τ_i sono sempre definite dalla (3.130b), ma prendono ora il nome di *tempi di rilassamento*. Il modello di Maxwell generalizzato presenta uno spettro discreto di tempi di rilassamento.

Il fatto che elementi collegati in serie siano tutti soggetti alla stessa forza ha permesso di costruire per semplice addizione la risposta del modello di Voigt generalizzato in condizioni di creep. Analogamente, il fatto che elementi collegati in parallelo subiscano uno stesso spostamento ha consentito di produrre con identico procedimento la

risposta del modello di Maxwell generalizzato in condizioni di rilassamento. È intuitivo come un'opportuna scelta dei parametri K_i e V_i consenta di rappresentare attraverso le (3.131) e (3.133) comportamenti viscoelastici molto generali. È anche possibile considerare un numero infinito di elementi di Voigt o di Maxwell, pervenendo a modelli che presentano uno spettro continuo di tempi di ritardo o di rilassamento, così come combinare questi ultimi con i precedenti. Queste estensioni, come il passaggio dalle due condizioni qui considerate a storie di carico generali, richiedono operazioni matematiche troppo complesse per essere sviluppate in questa sede (per una trattazione completa si rimanda a [12]). In ogni caso, la formulazione del legame viscoelastico lineare è ricondotta alla definizione delle funzioni di creep e di rilassamento; alcuni approcci [13] partono direttamente da queste definizioni, senza ricorrere all'ausilio di modelli reologici.

È stata anche dimostrata l'equivalenza dei due modelli; si può cioè esprimere la funzione di rilassamento in termini dei parametri del modello di Voigt e quella di creep in termini di quelli del modello di Maxwell [12]. La costruzione diretta della funzione di rilassamento a partire da una determinata espressione della funzione di creep (e viceversa) è in realtà problematica, ma le due funzioni risultano correlate da un'equazione integrale. I due modelli di Figura 3.43 costituiscono quindi basi equivalenti per la formulazione del legame costitutivo detto *viscoelastico lineare*.

La formulazione del legame direttamente derivata dalle (3.131) o (3.133) non è però sempre la più vantaggiosa. Manipolazioni matematiche qui omesse (i dettagli possono essere trovati in [12]) dimostrano che il legame può essere alternativamente espresso nella forma equivalente

$$A^0 F + A^1 \frac{dF}{dt} + A^2 \frac{d^2 F}{dt^2} + \dots = B^0 u + B^1 \frac{du}{dt} + B^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots \quad (3.135)$$

Le costanti A^i , B^i potrebbero essere valutate a partire dai parametri del modello reologico, anche se le loro espressioni sono complesse al punto da scoraggiare il calcolo. Esse possono tuttavia essere quantificate direttamente, adattando la (3.135) ai risultati sperimentali.

Il passaggio dal legame uniaxiale (3.135) alla forma tensoriale richiede ancora di sostituire F e u con i tensori σ_{ij} e ϵ_{ij} ; le costanti divengono adesso dei tensori del quarto ordine e il legame si scrive

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^0 \sigma_{kl} + A_{ijkl}^1 \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + A_{ijkl}^2 \frac{\partial^2 \sigma_{kl}}{\partial t^2} + \dots &= \\ = B_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} + B_{ijkl}^1 \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t} + B_{ijkl}^2 \frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial t^2} + \dots & \end{aligned} \quad (3.136)$$

È questa la *formulazione differenziale* del legame viscoelastico lineare. Nel caso di materiali isotropi, la (3.136) si riconduce alle due relazioni seguenti

$$A_d^0 S_{ij} + A_d^1 \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + A_d^2 \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial t^2} + \dots = B_d^0 \eta_{ij} + B_d^1 \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t} + B_d^2 \frac{\partial^2 \eta_{ij}}{\partial t^2} + \dots \quad (3.137a)$$

$$A_v^0 p + A_v^1 \frac{\partial p}{\partial t} + A_v^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dots = B_v^0 \Theta + B_v^1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + B_v^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \dots \quad (3.137b)$$

dove, al solito, S_{ij} e η_{ij} indicano i deviatori di sforzo e deformazione e p , Θ le relative componenti idrostatiche. Il comportamento isotropo è quindi governato da due serie di costanti. L'ipotesi di incompressibilità del materiale (frequentemente utilizzata in viscoelasticità) permette di considerare la sola (3.137a).

3.5.2.2 La formulazione integrale

Come il suo stesso nome denuncia, il comportamento viscoelastico si presenta intermedio tra quelli elastico e viscoso. Si è visto che quest'ultimo non conserva alcuna memoria del suo passato, dipendendo la sua risposta solo da ciò che avviene all'istante considerato. Un legame elastico richiede unicamente la conoscenza della configurazione iniziale indeformata, o *stato naturale*, del mezzo. Nel legame elastico lineare (3.3b) interviene infatti solo il valore finale della deformazione e non la sua storia.

Se però l'evoluzione del processo deformativo influenza la risposta in termini di sforzo, un incremento infinitesimo di deformazione all'istante τ

$$d\epsilon_{ij}(\tau) = \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} \right)_\tau d\tau \quad (\tau < t) \quad (3.138a)$$

contribuisce allo sforzo all'istante t . Tale contributo dipende dalla *memoria* che il materiale conserva sull'intervallo temporale $(t - \tau)$ e, ipotizzando linearità di comportamento, si esprime

$$d\sigma_{ij}(t) = X_{ijkl}(t - \tau) d\epsilon_{kl}(\tau) \quad (138b)$$

Supponendo che l'evoluzione abbia inizio all'istante $t = 0$ e sovrapponendo gli effetti, si perviene a scrivere

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t X_{ijkl}(t - \tau) \left(\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \tau} \right)_\tau d\tau \quad (3.139)$$

L'istante $t = 0$ segna l'inizio della storia di deformazione. È allora $\epsilon_{ij}(0) = 0$ e, se integrata per parti, la (3.139) diviene

$$\sigma_{ij}(t) = X_{ijkl}(0) \epsilon_{kl}(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial X_{ijkl}}{\partial \tau} \right)_\tau \epsilon_{kl}(t - \tau) d\tau \quad (3.140a)$$

Il tensore quadruplo X_{ijkl} è noto come *tensore di rilassamento*. Si noti che la caratteristica essenziale del comportamento viscoelastico risiede nella sua variabilità nel tempo: se fosse infatti $X_{ijkl}(t) = D_{ijkl} = \text{cost.}$, la (3.140a) si ricondurrebbe alla (3.3b).

L'espressione inversa della (3.140a) si ottiene con identico procedimento. Scambian-
do i ruoli interpretati da sforzi e deformazioni, risulta

$$\epsilon_{ij}(t) = \Psi_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial \Psi_{ijkl}}{\partial \tau} \right)_\tau \sigma_{kl}(t - \tau) d\tau \quad (3.140b)$$

Ψ_{ijkl} è noto come *tensore di creep*. Se questo fosse costante nel tempo, la (3.140b) si ricondurrebbe al legame elastico lineare nella sua forma inversa $\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}$.

Le (3.140) rappresentano la *formulazione integrale* del legame viscoelastico lineare. Se gli integrali sono interpretati nel senso di Stieltjes, deformazioni e sforzi possono anche presentare discontinuità nella loro evoluzione. È ancora possibile dimostrare l'equivalenza delle due relazioni, anche se per l'esistenza di entrambe sono richieste alcune condizioni, non particolarmente restrittive ma comunque più stringenti che non nel caso elastico. È anche importante osservare che lo stato naturale, in cui il mezzo è ipotizzato trovarsi all'istante $t = 0$, rappresenta una definizione in una certa misura convenzionale; non è a rigore essenziale che deformazioni o sforzi siano effettivamente nulli in tale istante, ma solo che il materiale non conservi memoria di eventi anteriori a $t = 0$.

Nel caso isotropo, le (3.140) divengono

$$S_{ij}(t) = 2G\eta_{ij}(t) + \int_0^t \left[\frac{\partial X_d}{\partial \tau} \right]_\tau \eta_{ij}(t - \tau) d\tau \quad (3.141a)$$

$$\eta_{ij}(t) = \frac{S_{ij}(t)}{2G} + \int_0^t \left[\frac{\partial \Psi_d}{\partial \tau} \right]_\tau S_{ij}(t - \tau) d\tau \quad (3.141b)$$

$$p(t) = K\Theta(t) + \int_0^t \left[\frac{\partial X_v}{\partial \tau} \right]_\tau \Theta(t - \tau) d\tau \quad (3.142a)$$

$$\Theta(t) = \frac{p(t)}{K} + \int_0^t \left[\frac{\partial \Psi_v}{\partial \tau} \right]_\tau p(t - \tau) d\tau \quad (3.142b)$$

I tensori di rilassamento e di creep si riconducono allora a due sole funzioni del tempo (i loro valori iniziali sono stati identificati con le costanti del legame elastico lineare isotropo (3.39)). Per materiali incompressibili, sopravvivono le sole (3.141).

3.5.2.3 Considerazioni conclusive

Le due formulazioni del legame viscoelastico lineare, introdotte in modo sintetico nei paragrafi precedenti, configurano due approcci concettualmente diversi al problema. Quella differenziale si basa su modelli reologici e (anche se il ricorso a modelli non è a rigore indispensabile) trae la sua legittimità dal fatto che ricostruisce comportamenti anche complessi componendo opportunamente quelli di costituenti elementari linearmente elastici e viscosi, individualmente governati da legami costitutivi validi e ben definiti. La formulazione integrale ha invece natura più matematica; essa definisce particolari *funzioni di memoria* attraverso le quali l'evoluzione precedente del mezzo ne influenza la risposta a un dato istante e i cui effetti la linearità del comportamento consente di sovrapporre. I due approcci si sono sviluppati parallelamente e in modo sostanzialmente separato ma, sotto ipotesi abbastanza poco restrittive, le due formulazioni sono riconducibili l'una all'altra. Benché equivalenti, esse si traducono pur sempre in scritture diverse delle equazioni costitutive; la scelta della forma più opportuna nei diversi casi è spesso dettata unicamente da motivi di convenienza.

È anche evidente come entrambe le formulazioni presentino una struttura duale. Le

relazioni possono infatti essere classificate in due gruppi, l'uno riferito al fenomeno di creep a sforzo costante, l'altro al fenomeno di rilassamento sotto spostamenti imposti. Le equazioni appartenenti ad un gruppo trovano le loro "inverse" in quelle dell'altro, ma la dipendenza dal tempo del legame rende il concetto stesso di inversione delicato. Si possono in generale distinguere due tipi di equazioni: quelle che riguardano lo stesso gruppo di fenomeni, qui presentate sia pure in modo sommario, e quelle che correlano i due gruppi, di cui ci si è limitati ad affermare l'esistenza. Una completa discussione della struttura della teoria può essere trovata in [13]. Il comportamento viscoelastico lineare trova comunque in queste formulazioni una teoria costitutiva coerente e ben fondata, di dignità pari a quelle presentate in precedenza e con maggior approfondimento in questo capitolo. Anche se è evidente che non tutti i materiali reali possono essere ricondotti in questo ambito, il legame viscoelastico lineare può rappresentare adeguatamente molti comportamenti dipendenti dal tempo di interesse ingegneristico.

ESERCIZI

- 3.1 Una sfera omogenea costituita da un materiale elastico lineare e isotropo ($E = 120\ 000 \text{ MPa}$, $\nu = .35$) è soggetta a una pressione idrostatica $p = 60 \text{ MPa}$. Di quanto diminuisce il suo volume?
- 3.2 Il contenitore in Figura 1.26 abbia raggio medio $R = 200 \text{ mm}$, spessore di parete $b = 10 \text{ mm}$ e sia soggetto a una pressione interna $p = 10 \text{ MPa}$. Il materiale sia elastico lineare e isotropo, con $E = 206\ 000 \text{ MPa}$ e $\nu = .3$. Trascurando gli sforzi radiali, calcolare le deformazioni in direzione circonferenziale, longitudinale e radiale nella porzione cilindrica del contenitore.
- 3.3 Con riferimento al materiale elastico-lineare trasversalmente isotropo definito dal legame (3.46):
- Determinare le condizioni che le costanti devono rispettare perché l'energia di deformazione sia definita positiva.
 - Assumendo $n = 5$, $\nu = 1/3$ e $\mu = 1/2$, calcolare le deformazioni dirette nelle tre direzioni e la variazione di volume indotte dagli stati di sforzo
1. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ 2. $\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ 3. $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\sigma_z = -\sigma$
 $(\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ nei tre casi})$

- 3.4 Un materiale presenta il legame ortotropo piano (3.47) con

$$E_x = E \quad E_y = 2E \quad G = E/3 \quad \nu = .5$$

Si consideri uno sforzo uniaxiale ($\sigma_\xi = \sigma$; $\sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0$) con ξ ruotato di un angolo φ rispetto a x . Calcolare le componenti di deformazione ε_ξ per $\varphi = 30^\circ$, 45° e 120° .

- 3.5 Nello stato tensionale dell'esercizio precedente, gli assi (ξ, η) sono principali di sforzo. Per quali valori di φ sono anche principali di deformazione?

- 3.6 Pur presentando lo stesso comportamento nelle direzioni x e y , il legame piano

$$\mathbf{a}_x = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (E1)$$

è isotropo solo se $\alpha = 2$ (altrimenti risulta $G \neq E/2(1+\nu)$). Calcolare le costanti elastiche relative ad una direzione inclinata di 45° rispetto ad x , in generale e per $\alpha = 3$, $\nu = 0$.

- 3.7 Si consideri il legame (E1) con $\nu = 0$ e lo stato di sforzo

$$\sigma_x = \sigma[5 \quad 3 \quad -\sqrt{3}]^t$$

le cui direzioni principali sono inclinate di 30° rispetto a (x, y) . Determinare in funzione di α l'inclinazione della terna principale di deformazione.

- 3.8 Il contenitore in pressione di Figura 1.26 sia costituito da un materiale elastico lineare e isotropo che presenta limite di snervamento uniaxiale pari a $\sigma_0 = 250 \text{ MPa}$. Lo spessore della parete sia $b = 20 \text{ mm}$ e si considerino per il raggio medio i tre valori $R = 200$, 400 e 600 mm .

- a) Trascurando il contributo degli sforzi radiali, calcolare con il criterio di H.H.M. i valori della pressione interna che nei tre casi esauriscono le risorse elastiche nella porzione cilindrica del contenitore.
- b) Considerando anche la componente di sforzo $\sigma_r = -p$ sulla superficie interna, valutare di quanto diminuisce la pressione al limite elastico.

3.9 Un materiale elastico lineare e isotropo ($\nu = 1/3$) presenti in un punto le deformazioni

$$\epsilon_x = \frac{4}{3} (\tau_0/E) \quad \epsilon_y = \frac{8}{3} (\tau_0/E) \quad \epsilon_z = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{3} (\tau_0/E) \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

dove τ_0 è la tensione tangenziale di snervamento. Il criterio di resistenza elastica di Guest-Tresca è verificato?

3.10 Un materiale elastico lineare e isotropo ($\nu = 1/4$) presenti in un punto le deformazioni

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{1}{3} (\sigma_0/E) \quad \epsilon_z = 0 \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \frac{2}{3} (\sigma_0/E)$$

dove σ_0 è il limite di snervamento uniaxiale. Il punto è in campo elastico secondo il criterio di H.H.M.?

3.11 Un materiale elastico lineare e isotropo con coefficiente di Poisson $\nu = .3$ presenti limiti uniaxiali a trazione e compressione pari, rispettivamente, a $\bar{\sigma}_T = 30$ MPa e $\bar{\sigma}_C = -50$ MPa.

- a) Una stato di sforzo piano che presenti valori principali $s_I = 20$ e $s_{II} = -40$ MPa è considerato elastico dal criterio di Rankine. Lo è anche dal criterio di Grashof?
- b) Quale intervallo elastico prevedono i due criteri nel caso in cui le due tensioni principali siano uguali tra loro ($s_I = s_{II} = s$)?

3.12 Una barra elasto-plastica abbia il seguente comportamento bilineare, della forma (3.79)

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \sigma - \frac{E}{10} \begin{bmatrix} 1 & -.8 \\ -.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} - \sigma_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La barra sia soggetta alla storia ciclica di carico

$$\sigma = 0, \quad 1.5 \sigma_0, \quad -1.5 \sigma_0, \quad 1.5 \sigma_0, \dots$$

Per i primi tre cicli completi, calcolare al termine di ogni passo di carico la deformazione plastica p , la deformazione totale ϵ , i limiti di snervamento modificati $\bar{\sigma}_{01}$, $\bar{\sigma}_{02}$ e l'ampiezza $\bar{\sigma}_{01} + \bar{\sigma}_{02}$ dell'intervallo elastico.

3.13 Spesso la curva uniaxiale del materiale è approssimata da espressioni empiriche i cui parametri sono definiti in modo da interpolare al meglio i dati sperimentali. Una delle espressioni più usate per metalli incrudenti (proposta da Ramberg-Osgood, vedi [6]) è la seguente

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + k \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$$

Determinare i valori dei parametri k e n relativi alle due seguenti coppie di dati

1) $\sigma/E = .002$, $\epsilon = .005$ $\sigma/E = .005$, $\epsilon = .1$

2) $\sigma/E = .002$, $\epsilon = .003$ $\sigma/E = .005$, $\epsilon = .1$

3.14 Un materiale elasto-plastico governato dalla (3.99) (Condizione di plasticità di H.H.M., incrudimento cinematico lineare) sia stato snervato in condizioni uniaxiali subendo le deformazioni plastiche

$$p_{xx} = \alpha \sigma_0/c \quad p_{yy} = p_{zz} = -\alpha \sigma_0/2c \quad p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0$$

- a) Calcolare il massimo valore di α per cui lo stato privo di sforzi è elastico.
- b) Calcolare in funzione di α i nuovi limiti di snervamento nella condizione di puro taglio $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

3.15 Si consideri un materiale elasticamente isotropo ($\nu = 1/3$) e idealmente elasto-plastico, governato dalla condizione di H.H.M. (3.96). Lo stato di sforzo in un punto sia

$$\sigma_x = 2\sigma_0/\sqrt{3} \quad \sigma_y = \sigma_0/\sqrt{3} \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Si abbiano le deformazioni incrementali

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon} (> 0) \quad \dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$$

Valutare i contributi elastico e plastico di cui questa deformazione è costituita e l'incremento di sforzo che ne consegue.

3.16 Un elemento di Voigt sia soggetto alla storia di carico

$$F(t) = \bar{F} \begin{cases} t/t_0 & t \leq t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad \left(t_0 = \frac{V}{K} \right)$$

Calcolarne l'evoluzione della risposta nel tempo.

3.17 Calcolare la risposta del modello elasto-viscoplastico di Figura 3.40 soggetto alla forza $F = 3R/2$ rapidamente applicata e mantenuta costante.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MALVERN L.E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [2] DRUCKER D.C., *Introduction to the mechanics of deformable solids*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [3] LANGHAAR H.L., *Energy methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [4] CHEN W.F., SALECH A.F., *Constitutive equations for engineering materials*, Volume 1, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [5] BRIDGMAN P.W., *Studies in large plastic flow and fracture with special emphasis on the effects of hydrostatic pressure*, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [6] MENDELSON A., *Plasticity: theory and application*, MacMillan, New York, 1968
- [7] MAIER G., MUNRO J., Mathematical programming methods in engineering plastic analysis, *Applied Mechanics Reviews*, 35, p. 1631, 1982.

- [8] KOITER W.T., General theorems for elastic-plastic solids, in: *Progress in solid mechanics*, editori Sneddon e Hill, p. 166, North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [9] MAIER G., Sui legami associati tra sforzi e deformazioni incrementali in elastoplasticità, *Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 100, p. 809, 1966.
- [10] DRUCKER D.C., A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, in: *Proceedings of the 1st US National Congress of Applied Mechanics*, p. 487, ASME, New York, 1972.
- [11] NAGHDI P.M., Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity in: *Proceedings of the 2nd Symposium on naval structural mechanics*, p. 121, Brown University, Providence, Rhode Island, 1960.
- [12] BLAND D.R., *The theory of linear viscoelasticity*, Pergamon Press, Londra, 1960
- [13] GROSS B., *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity*, Hermann, Parigi, 1953.

Il problema elastico

4.1 FORMULAZIONE E PROPRIETÀ

4.1.1 POSIZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri un mezzo continuo soggetto a forze di massa F_i e a deformazioni anelastiche ϑ_{ij} (ad esempio, termiche) nel volume V , a trazioni superficiali f_i sul contorno caricato S_F e a spostamenti impressi \bar{s}_i sul contorno vincolato S_u (Figura 4.1). Ci si propone di determinare la risposta del mezzo a queste *azioni esterne*, precisamente il vettore di spostamento $s_i(\mathbf{x})$ e i tensori di deformazione $\epsilon_{ij}(\mathbf{x})$ e di sforzo $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ in ogni punto del corpo.

Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti, la statica e la cinematica del mezzo risultano governate, rispettivamente, dalle equazioni di equilibrio (2.111) e di congruenza (2.110), qui riscritte sempre con riferimento a una terna cartesiana ortogonale

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } V \quad \sigma_{ij} n_i = f_j \quad \text{su } S_F \quad (4.1a, b)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \quad \text{in } V \quad s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } S_u \quad (4.2a, b)$$

Il mezzo sia costituito da un materiale elastico-lineare. Verrà quindi il legame costitutivo (3.22), che esprime la relazione tra sforzi e deformazioni nella forma

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \vartheta_{kl}) = D_{ijkl} e_{kl} \quad (4.3)$$

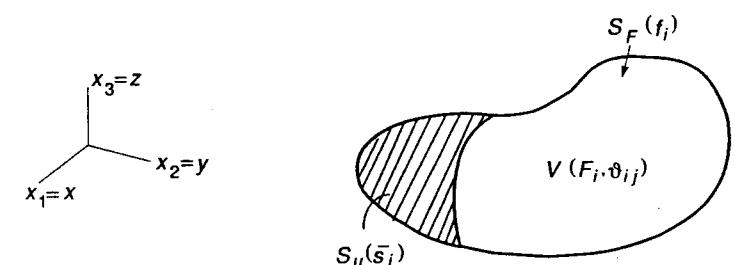


Figura 4.1

dove, in accordo con la (3.24), le costanti elastiche D_{ijkl} assicurano la definizione positiva dell'energia di deformazione. Risulta cioè

$$\omega = \frac{1}{2} D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} > 0 \quad \forall e_{ij} = \epsilon_{ij} - \vartheta_{ij} \neq 0 \quad (4.4)$$

In alcuni casi il mezzo non presenta superficie vincolata e su tutto il contorno S sono note le trazioni superficiali. È allora possibile eliminare gli spostamenti dalle incognite del problema, sostituendo le (4.2a) con le condizioni di congruenza interna (2.129). Gli spostamenti possono essere successivamente valutati integrando le (4.2a); essi risulteranno ovviamente definiti a meno di un arbitrario moto rigido del mezzo.

4.1.2 UNICITÀ DI SOLUZIONE

Per qualunque combinazione di azioni esterne, il problema governato dalle (4.1-4.4) ammette una e una sola soluzione. L'unicità è facilmente dimostrata: si supponga che esistano due soluzioni $(s_i^{(1)}, \epsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)})$ e $(s_i^{(2)}, \epsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)})$ del problema per le stesse azioni esterne F_i, ϑ_{ij} in V, f_i su S_F e \bar{s}_i su S_u e si indichi con $\Delta(\cdot)$ la differenza tra le due soluzioni. Precisamente

$$\Delta s_i = s_i^{(1)} - s_i^{(2)} \quad \Delta \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} - \epsilon_{ij}^{(2)} \quad \Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \quad (4.5)$$

Data la linearità delle (4.1-4.3), per tali differenze valgono le relazioni

$$\Delta \sigma_{ij,i} = 0 \quad \text{in } V \quad \Delta \sigma_{ij} n_i = 0 \quad \text{su } S_F \quad (4.6a)$$

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta s_{i,j} + \Delta s_{j,i}) \quad \text{in } V \quad \Delta s_i = 0 \quad \text{su } S_u \quad (4.6b)$$

$$\Delta \sigma_{ij} = D_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (4.6c)$$

La (4.6a) mostra che le $\Delta \sigma_{ij}$ costituiscono uno stato di autotensione, in equilibrio con forze di superficie e volume nulle. Le $\Delta \epsilon_{ij}$ d'altro canto sono deformazioni puramente elastiche e congruenti, derivabili da spostamenti che si annullano sulla superficie vincolata. L'identità dei lavori virtuali (2.112), se scritta con riferimento alle differenze (4.5), fornisce allora

$$\int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dV = 0 \quad (4.7a)$$

Introducendo la (4.6c), tale relazione diventa

$$\int_V D_{ijkl} \Delta \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{kl} dV = 2 \int_V \omega(\Delta \epsilon_{ij}) dV = 0 \quad (4.7b)$$

Dal momento che, come la (4.4) ricorda, l'energia di deformazione ω è definita positiva, la (4.7) può essere soddisfatta solo per $\Delta \epsilon_{ij} = 0$, il che implica, per la (4.6c), $\Delta \sigma_{ij} = 0$. La

soluzione in termini di sforzi e deformazioni è quindi unica. Essa non è necessariamente unica in termini di spostamenti; dovendo però questi corrispondere alle stesse deformazioni, due soluzioni possono al più differire per un moto rigido, comunque inessenziale e in genere impedito dai vincoli su S_u .

La validità di questo risultato, noto come *teorema di Kirchhoff*, è limitata all'ambito di applicabilità dell'ipotesi di piccoli spostamenti. È importante osservare che nella sua dimostrazione giocano un ruolo essenziale sia il principio dei lavori virtuali che la definizione positiva dell'energia di deformazione. Il teorema dimostra che una soluzione, se esiste, è unica, ma non prova l'esistenza della soluzione stessa. La dimostrazione di esistenza si presenta più complessa e richiede il ricorso a strumenti matematici notevolmente più avanzati. Ci si limita qui a prendere atto che essa è stata fornita da diversi autori in modo del tutto soddisfacente ai fini ingegneristici (si vedano, a tale proposito, i riferimenti in [1]).

4.1.3 FORMULAZIONI AGLI SPOSTAMENTI E AGLI SFORZI

Il problema elastico-lineare può essere formulato sia in termini di soli spostamenti che (almeno per mezzi privi di vincoli) di soli sforzi. La derivazione di tali equazioni è qui illustrata limitatamente al caso isotropo e supponendo le deformazioni interamente elastiche ($\vartheta_{ij} = 0$), ma generalizzazioni sono certamente possibili.

Si considera prima la formulazione agli spostamenti. Il legame deformazioni-spostamenti (4.2a) permette di scrivere la relazione lineare e isotropa (3.30) nella forma seguente

$$\sigma_x = 2G \frac{\partial s_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) \quad (\text{e analoghe}) \quad (4.8)$$

dove G e λ , si ricorda, sono le costanti di Lamè. Le (4.8) consentono di esprimere le condizioni di equilibrio in termini di spostamenti. Con riferimento alla prima delle equazioni indefinite (4.1a) si ottiene in tal modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= \\ = G \left(\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) + F_x &= \\ = G \nabla_2 s_x + 3(\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + F_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.9a)$$

dove si è indicato con $\nabla_2(\cdot)$ l'operatore di Laplace

$$\nabla_2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} \quad (a)$$

e, in accordo con la (2.128a), con 3Θ la variazione di volume (invariante lineare del

tensore delle piccole deformazioni) che in termini di spostamenti si scrive

$$3\Theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \partial s_x / \partial x + \partial s_y / \partial y + \partial s_z / \partial z = s_{k,k} \quad (b)$$

Analogamente, per la prima delle condizioni di equilibrio al contorno (4.1b) si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= \\ = G \left[2 \frac{\partial s_x}{\partial x} n_x + \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) n_z \right] + 3\lambda\Theta n_x &= f_x \end{aligned} \quad (4.9b)$$

con Θ sempre definito dalla (b). Le altre relazioni si riconducono a espressioni analoghe, con ovvie permutazioni di indici. Dividendo per G e ricordando che per le (3.32) si può scrivere

$$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad \frac{\lambda+G}{G} = \frac{1}{1-2\nu} \quad (c)$$

le (4.9) divengono, in notazione tensoriale

$$\nabla_2 s_i + \frac{1}{1-2\nu} s_{k,ki} + \frac{F_i}{G} = 0 \quad \text{in } V \quad (4.10a)$$

$$(s_{i,j} + s_{j,i})n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} s_{k,k} n_i = \frac{f_i}{G} \quad \text{su } S_F \quad (4.10b)$$

dove Θ è stato espresso in funzione delle derivate degli spostamenti attraverso la (b). Il problema è quindi ricondotto alla determinazione delle tre componenti di spostamento $s_i(x_j)$ che soddisfano le (4.10) e le condizioni al contorno di congruenza

$$s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } S_u \quad (4.10c)$$

Le (4.10) sono note come *equazioni di Navier*.

Nel caso di un corpo privo di vincoli e soggetto a forze di volume e superficie ovunque note e globalmente equilibrate, le condizioni al contorno (4.2b) non si applicano. Il legame deformazioni spostamenti può allora essere sostituito dalle condizioni di congruenza interna (2.129). Queste sono esprimibili in termini di sforzi mediante il legame elastico nella sua forma inversa (3.23). Effettuato il calcolo, i cui dettagli sono qui omessi per brevità, le sei condizioni di congruenza si riconducono alle equazioni

$$\nabla_2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0 \quad \text{in } V \quad (4.11)$$

dove $\nabla_2(\cdot)$ è ancora l'operatore di Laplace. Le (4.11) sono note come *equazioni di Mitchell-Beltrami*. Unitamente alle equazioni di equilibrio indefinite (4.1a) e al contorno (4.1b) (che ora si applicano all'intera superficie laterale del mezzo) governano la soluzione in termini di sforzi. Il problema non è sovradeterminato, dal momento che

le sei equazioni (4.11) (come del resto le (2.129) da cui traggono origine) equivalgono a tre soli legami differenziali indipendenti.

Nel caso di forze di volume costanti, i mezzi elasticamente isotropi godono di un'interessante proprietà. Differenziando ognuna delle (4.10a) rispetto ad x_i e sommando i risultati, per la (b) e la definizione di operatore di Laplace si ottiene

$$\nabla_2 s_{i,i} + \frac{1}{1-2\nu} s_{k,kii} = \frac{6(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla_2 \Theta = -\frac{F_{i,i}}{G} = 0 \quad \text{in } V$$

Il secondo membro è infatti ovviamente nullo per F_i costanti. La componente idrostatica di deformazione è quindi *armonica* sul volume del continuo (una funzione g tale per cui $\nabla_2 g = 0$ è detta armonica). Per la (3.39a), tale sarà pure la corrispondente componente di sforzo p , definita dalla (2.18). Nel caso di forze volume costanti è quindi

$$\nabla_2 \Theta = 0 \quad \nabla_2 p = 0 \quad \text{in } V \quad (4.12a, b)$$

Si osservi che, ai fini della scrittura delle condizioni al contorno, questo non deve essere considerato come necessariamente suddiviso in due porzioni distinte, su una delle quali sono note le trazioni superficiali applicate e sull'altra gli spostamenti imposti. Sono possibili casi come quello illustrato in Figura 4.2a: il mezzo può liberamente scorrere su di un piano parallelo a $x = 0$ ma non può spostarsi trasversalmente a esso. Se il vincolo è privo di attrito, le condizioni da imporsi su tale porzione del contorno sono evidentemente

$$s_x = 0 \quad \tau_{xy} = f_y \quad \tau_{xz} = f_z \quad (4.13a-c)$$

La (4.13a) è la condizione di congruenza che impone l'annullarsi della componente di spostamento normale al piano; le (4.13b, c) sono le ultime due condizioni di equilibrio (4.1b) particolarizzate all'esempio in esame ($n_x = 1, n_y = n_z = 0$).

Il più generale vincolo di questo tipo impone ad un punto P del contorno di non staccarsi da una determinata superficie, sulla quale, peraltro, può scorrere (Figura 4.2b). Sia

$$f(x) = f(x, y, z) = 0 \quad (4.14)$$

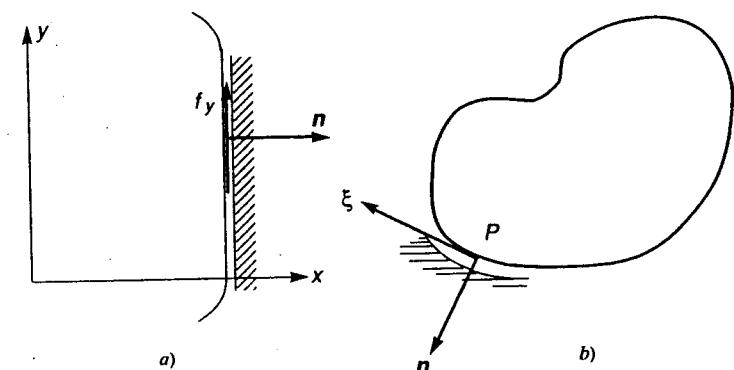


Figura 4.2

l'equazione di questa superficie e (n, ξ, η) un riferimento locale, con n normale al contorno nel punto e i rimanenti assi contenuti nel piano tangente al contorno stesso. Verranno allora condizioni analoghe alle (4.13), che si scrivono

$$s_n = 0 \quad \tau_{n\xi} = f_\xi \quad \tau_{n\eta} = f_\eta \quad (4.15a-c)$$

La condizione di congruenza (4.15a) richiede che il punto P rispetti la (4.14) anche a spostamento avvenuto. Deve risultare allora

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{s}) = f(x + s_x, y + s_y, z + s_z) = 0 \quad (4.16a)$$

Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti si può scrivere

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + (\partial f / \partial x_i) dx_i \quad (4.16b)$$

per cui la condizione diviene

$$(\partial f / \partial x_i) dx_i = (\partial f / \partial x) dx + (\partial f / \partial y) dy + (\partial f / \partial z) dz = 0 \quad (4.17)$$

È facile constatare che il primo membro della (4.17) risulta proporzionale alla componente di spostamento s_n in direzione normale al contorno.

Le condizioni di equilibrio (4.15b, c) si riportano al riferimento originario utilizzando la legge di variazione delle componenti di un tensore doppio (2.8). Esse possono poi esprimersi in termini di spostamenti mediante le (4.8).

4.1.4 RISOLUZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO

Benché ben posto, il problema elastico non è in generale facilmente risolvibile in forma chiusa. Per molti importanti casi particolari, soluzioni analitiche sono state peraltro ottenute, sfruttando quelle caratteristiche del problema specifico che consentono di semplificare la formulazione così da renderla matematicamente trattabile.

È possibile derivare soluzioni mediante un metodo *inverso*. Come le equazioni di Navier chiaramente mostrano, il problema elastico sarebbe molto semplice se i dati fossero rappresentati dagli spostamenti e le incognite dalle forze di volume e di superficie. Assumendo una qualsiasi distribuzione di spostamenti congruenti (e conseguenti deformazioni e sforzi), le (4.10) consentono di valutare le forze di cui tale ipotesi rappresenta la risposta. Un'applicazione acritica di tale procedimento ben difficilmente porterebbe a identificare soluzioni di problemi di una qualche rilevanza pratica. Si rivela però spesso produttivo il ricorso a metodi *semi-inversi*, in cui consapevoli ipotesi dettate dalla natura del problema consentono di proporre una soluzione di tentativo, in genere solo parzialmente definita. Le equazioni che governano il problema elastico permettono allora sia di verificare la correttezza delle ipotesi che di completare la soluzione o, quantomeno, di ricondurre il problema a una formulazione più semplice. Va a questo proposito ricordato il teorema di Kirchhoff, che assicura l'unicità della soluzione: è quindi sufficiente verificare il soddisfacimento delle (4.1-4.3) (o di una delle equivalenti formulazioni (4.10) o (4.11, 4.1)) per poter considerare il problema completamente risolto.

La soluzione di casi particolari permette spesso di risalire a quella di problemi più complessi. A tal fine è importante osservare che la linearità di tutte le equazioni che

governano il problema consente la *sovraposizione degli effetti*: la risposta di un mezzo elastico-lineare soggetto ad un qualsiasi combinazione di azioni esterne può ottenersi sovrapponendo le risposte relative a ogni azione individualmente considerata.

Pure importante a fini applicativi è il cosiddetto *principio di equivalenza elastica*. In molti casi, esso consente di prescindere dall'effettiva distribuzione locale delle forze applicate su di una porzione limitata di volume o di superficie, in quanto a una distanza sufficiente da tale zona la risposta è di fatto definita solo dalle loro risultanti. Questo principio, spesso associato al nome di De Saint Venant, è stato introdotto da questo studioso con riferimento a solidi cilindrici caricati sulle facce estreme ed esteso da Boussinesq a casi più generali (per una discussione più dettagliata, si veda [2]). Al di là della sua rilevanza diretta, dovuta al fatto che nella maggior parte dei problemi concreti le informazioni sulle azioni esterne sono al più disponibili in termini di risultanti, il principio facilita la soluzione di casi specifici consentendo di considerare, a parità di risultanti, quelle particolari distribuzioni di azioni esterne per le quali il calcolo della soluzione risulti più semplice: si può ritenere che tale soluzione valga anche per il problema originario a partire da una certa distanza dalla zona caricata.

ESEMPIO 4.1 Si consideri (Figura 4.3a) una barra cilindrica verticale soggetta solamente al suo peso e vincolata al suolo in modo che tutte le componenti di spostamento risultino ivi impediti (l'esempio è tratto da [3]). Detta $\rho = \text{cost}$ la densità del materiale e g l'accelerazione di gravità, il solido sarà quindi soggetto alle forze di volume

$$F_x = F_y = 0 \quad F_z = -\rho g = \text{cost} \quad (d1)$$

e a trazioni superficiali nulle sul contorno caricato, costituito dalla superficie laterale Γ e dalla faccia $z = \ell$. Precisamente

$$f_x = f_y = f_z = 0 \quad \text{su } \Gamma \text{ e } z = \ell \quad (d2)$$

Sulla base vincolata si applicano invece le condizioni di congruenza, che impongono

$$s_x = s_y = s_z = 0 \quad \text{su } z = 0 \quad (d3)$$

L'effettivo andamento delle reazioni sulla sezione vincolata è parte della soluzione del problema. L'equilibrio globale peraltro richiede che la loro risultante sia una forza verticale e baricentrica, di valore pari a

$$Q = \rho g A \ell \quad (e)$$

Si consideri il problema di Figura 4.3b, in cui il vincolo è stato eliminato e sostituito con una distribuzione uniforme di azioni verticali di intensità Q/A , equivalente quindi al problema originario come risultante. Si ha adesso, in luogo delle (d3)

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = \rho g \ell \quad (f)$$

La soluzione di questo secondo problema è pressoché immediata. Le equazioni indefinite di equilibrio (4.1a) si scrivono ora

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z = 0 \quad \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{zy} / \partial z = 0$$

$$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y + \partial \sigma_z / \partial z = \rho g \quad \text{in } V$$

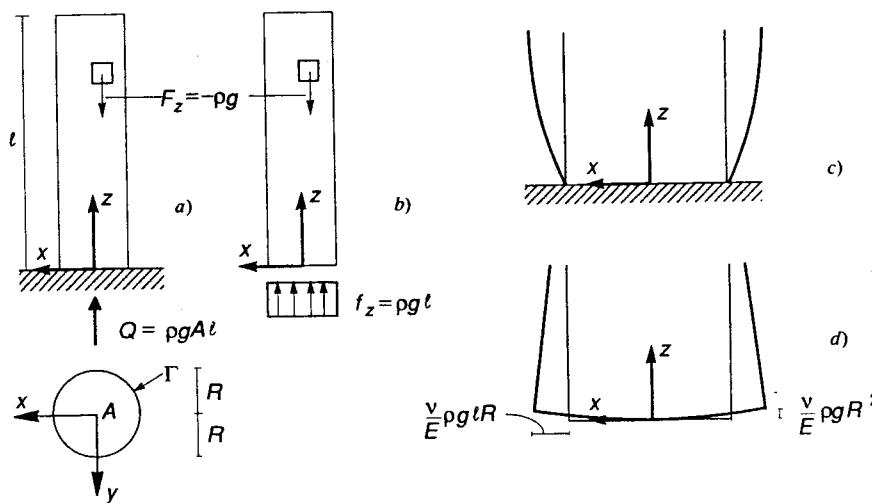


Figura 4.3

mentre le (4.1b), che adesso si applicano sull'intero contorno, divengono

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0 \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0 \quad \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0 \quad \text{su } z = l \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = -\rho g l \quad \text{su } z = 0$$

È facile constatare che tali relazioni sono soddisfatte dagli sforzi

$$\sigma_z = -\rho g(l-z) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (g1)$$

che costituiscono quindi una particolare soluzione equilibrata (vedi Esercizio 2.6). Dalle (g1) si ottengono, attraverso il legame elastico, le deformazioni

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\nu}{E} \rho g(l-z) \quad \epsilon_z = -\frac{1}{E} \rho g(l-z) \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (g2)$$

Esse risultano congruenti: essendo funzioni lineari del punto, esse infatti certamente soddisfano le (2.129).

Per il teorema di Kirchhoff, le (g) costituiscono quindi l'unica soluzione del problema di Figura 4.3b, peraltro diverso dal problema originario. Le deformazioni (g2), in quanto congruenti, sono derivabili attraverso le (2a) da spostamenti continui, che però non possono essere ricondotti mediante soli moti rigidi al soddisfacimento delle (d3). Integrando le (g2) si ottiene infatti, a meno di contributi rigidi

$$s_x = \frac{\nu}{E} \rho g(l-z)x \quad s_y = \frac{\nu}{E} \rho g(l-z)y \quad s_z = -\frac{\rho g}{2E} [l^2 - (l-z)^2 - \nu(x^2 + y^2)] \quad (g3)$$

Sulla base vincolata $z = 0$ tali spostamenti divengono

$$s_x = \frac{\nu}{E} \rho g l x \quad s_y = \frac{\nu}{E} \rho g l y \quad s_z = \frac{1}{2} \frac{\nu}{E} \rho g (x^2 + y^2)$$

Il loro andamento, illustrato in Figura 4.3d, rispetta le (d3) solo nel caso, molto particolare, di materiale privo di contrazione trasversale ($\nu = 0$). Peraltro, il principio di equivalenza elastica assicura che differenze sensibili risulteranno confinate in una zona prossima alla base vincolata e la soluzione (g) può essere considerata corretta a partire da una certa distanza dal vincolo.

Si osservi che, a parità di risultanti, la differenza tra due diverse distribuzioni di azioni esterne è autoequilibrata. Il principio di equivalenza elastica afferma quindi anche che sistemi autoequilibrati di forze agenti su una porzione limitata del mezzo hanno conseguenze che si smorzano rapidamente, tanto da poter essere considerate ininfluenti a una distanza sufficientemente grande dalla zona perturbata. Una precisa quantificazione dei termini "ininfluente" e "distanza sufficientemente grande" non è facile in generale. Ai fini pratici, quanto meno per solidi compatti e costituiti da materiale isotropo, si assume che a una distanza dell'ordine della massima dimensione lineare della zona caricata la soluzione dipenda solo dalla risultante delle azioni esterne e non dalla loro modalità di applicazione.

4.2 PROBLEMI PIANI

4.2.1 POSIZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri un mezzo continuo di forma cilindrica. La sua sezione trasversale, di area A e contorno Γ , sia posta nel piano (x, y) (Figura 4.4). Le azioni esterne nel piano siano indipendenti da z ; in notazione matriciale, si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \text{ in } A \quad \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \text{ su } \Gamma_F \quad \bar{\mathbf{s}}(x, y) = \begin{pmatrix} \bar{s}_x \\ \bar{s}_y \end{pmatrix} \text{ su } \Gamma_u \quad (4.18a)$$

Si supponga inoltre che le forze sia di volume che di superficie non abbiano componenti secondo z

$$F_z = 0 \quad \text{in } A \quad f_z = 0 \quad \text{su } \Gamma_F \quad (4.18b)$$

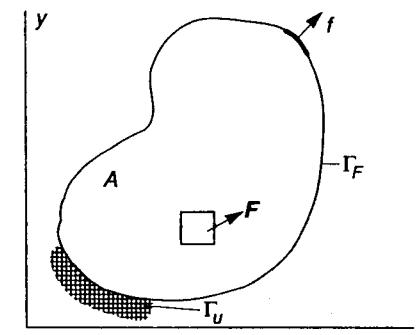


Figura 4.4

e che le condizioni di congruenza su Γ_u non coinvolgano la componente di spostamento s_z . Per semplicità, non viene in un primo tempo considerata la presenza di deformazioni anelastiche.

È spontaneo chiedersi se non sia possibile semplificare il problema riconducendolo alla sola sezione trasversale. Ci si propone, in altre parole, di formulare il problema elastico in termini delle sole variabili nel piano, che si ipotizzano indipendenti da z e si riconducono a otto sole componenti di spostamento, deformazione e sforzo. Precisamente

$$\mathbf{s}(x, y) = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.19a-c)$$

Il problema si suppone governato solo dalle seguenti equazioni di equilibrio indefinite al contorno

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + F_x = 0 \quad \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + F_y = 0 \quad \text{in } A \quad (4.20a)$$

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = f_x \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = f_y \quad \text{su } \Gamma_F \quad (4.20b)$$

dalle relazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \partial s_x / \partial x \quad \varepsilon_y = \partial s_y / \partial y \quad \gamma_{xy} = \partial s_x / \partial y + \partial s_y / \partial x \quad \text{in } A \quad (4.21a)$$

$$s_x = \bar{s}_x \quad s_y = \bar{s}_y \quad \text{su } \Gamma_u \quad (4.21b)$$

nonché da un legame elastico-lineare esprimibile attraverso una relazione algebrica del tipo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.22a, b)$$

dove \mathbf{d} è una matrice 3×3 , simmetrica e definita positiva, di costanti elastiche e \mathbf{a} è la sua inversa.

Prima di domandarsi se e sotto quali condizioni sia effettivamente possibile ricondursi a questa formulazione semplificata, è opportuno osservare che il problema definito dalle (4.20-4.22) è ben posto: si potrebbe infatti dimostrare che esso ammette una e una sola soluzione.

Tale soluzione, peraltro, potrebbe non rispettare la forma originaria (4.1-4.3) delle equazioni governanti il problema, senza di che non è lecito affermare la correttezza della semplificazione. Va detto a questo proposito che le (4.19) non devono essere intese come rappresentative di tutte le componenti di spostamento, deformazione e sforzo diverse da zero (ipotesi che si rivelerebbe troppo restrittiva per problemi concreti) ma solo come definizione delle variabili primarie che governano la risposta del solido. Le ulteriori variabili devono però essere tali da ricondurre alcune delle (4.1-4.3) alle (4.20-4.22) e le rimanenti a identità comunque verificate. L'indipendenza da z di $\boldsymbol{\sigma}$, le (4.18b) e l'annullarsi del coseno direttore n_z su Γ mostrano che le equazioni di equilibrio (4.1) sono certamente rispettate se si assume

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y) \quad (4.23a, b)$$

In tale circostanza infatti, le ultime delle (4.1) divengono delle identità mentre le rimanenti si identificano con le (4.20).

Per l'isotropia del materiale, dalle (4.23a) segue

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \quad (4.24)$$

Stante l'indipendenza da z delle componenti di spostamento nel piano, il legame deformazioni-spostamenti impone allora $\partial s_z / \partial x = \partial s_z / \partial y = 0$ e quindi $s_z = s_z(z)$. È pertanto possibile la presenza di una $\varepsilon_z = \partial s_z / \partial z$ non nulla, purché funzione solo di z . Tale dipendenza non è però consentita dal legame elastico, dal momento che tutte le componenti di sforzo sono al più funzioni di x e y . Dovrà quindi essere

$$\varepsilon_z = C \quad s_z = Cz \quad (4.25a, b)$$

dove C è una costante. L'origine dell'asse z è stata collocata sulla sezione di simmetria del solido cilindrico (Figura 4.5) dove, a meno di eventuali traslazioni rigide, deve essere $s_z = 0$.

Nulla è stato ancora detto delle condizioni al contorno sulle due facce $z = \pm \ell/2$ del solido. Esse sono dettate dalle condizioni di equilibrio (4.1b) che consentono di determinare le trazioni superficiali richieste dalla soluzione ipotizzata. Essendo sulle sezioni estreme $n_x = n_y = 0$ e $n_z = \pm 1$, per le (4.23) dovrà essere

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = \pm \sigma_z \quad \text{su } z = \pm \ell/2 \quad (4.26)$$

dove le f_i possono rappresentare sia forze applicate che reazioni vincolari. Qualora risulti possibile assicurare il rispetto delle (4.23-4.26), il problema è effettivamente riconducibile senza approssimazioni alla formulazione piana (4.20-4.22).

Se il contorno della sezione non è vincolato ($\Gamma = \Gamma_F$), è sempre possibile formulare il problema in termini di soli sforzi e deformazioni. Le (4.21a) sono allora sostituite da una singola equazione di congruenza interna; precisamente

$$\partial^2 \varepsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y / \partial x^2 = \partial^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y \quad (4.27)$$

in cui si riconosce la prima delle (2.129). Anche il problema governato dalle (4.20a), (4.20b) (che ora si applicano sull'intero contorno Γ), (4.22) e (4.27) è ben posto. Le (4.23) escludono ancora incompatibilità in termini di equilibrio e la (4.24) segue

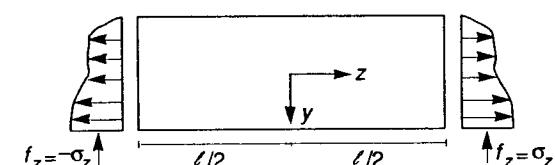


Figura 4.5

ancora dalla (4.23a). Restano da verificare le cinque ultime (2.129), due delle quali risultano identicamente soddisfatte. Le tre rimanenti si riconducono alle condizioni

$$\partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 = \partial^2 \varepsilon_z / \partial y^2 = \partial^2 \varepsilon_z / \partial x \partial y = 0 \quad (4.28)$$

La componente di deformazione ε_z , indipendente da z per gli stessi motivi che hanno precedentemente condotto alla (4.25a), dovrà quindi dipendere linearmente da x e y . La congruenza richiede pertanto

$$\varepsilon_z = C + C_1 x + C_2 y \quad (4.29)$$

Tale espressione non si identifica con la (4.25a). In effetti le deformazioni definite dalle (4.19b), (4.24) e (4.29) sono sì congruenti, ma gli spostamenti da cui discendono attraverso le (4.2a) non rispettano necessariamente le ipotesi di partenza, in particolare l'indipendenza da z delle componenti nel piano.

Va tuttavia rilevato come la formulazione ora non richieda l'intervento esplicito degli spostamenti né, di conseguenza, ipotesi a priori su di essi. Nel rispetto delle (4.23), (4.24) e (4.29) il problema può quindi essere formulato nel piano. Gli spostamenti saranno valutati successivamente, integrando la (4.2a) con riferimento alla soluzione trovata.

La presenza di σ_z ed ε_z diversi da zero non consente in realtà di formulare il problema nel solo piano (x, y), come si evidenzia scrivendo il legame elastico (3.33, 3.34) con riferimento alle sole componenti non nulle. Si ha, rispettivamente per le forme diretta e inversa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (4.30a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (4.30b)$$

Alle equazioni che governano il problema nel piano, il legame elastico ne aggiunge quindi una sola, a fronte di due ulteriori incognite. Il problema risulta definito solo se il valore della σ_z o della ε_z è determinabile o ipotizzabile a priori. Vengono adesso discussi i due casi fondamentali, cui si perviene assumendo $\varepsilon_z = 0$ o $\sigma_z = 0$, noti, rispettivamente, come problema piano nelle deformazioni e negli sforzi.

4.2.2 PROBLEMA PIANO NELLE DEFORMAZIONI

Si assume

$$s_z = 0 \quad \varepsilon_z = 0 \quad (4.31a, b)$$

Lo stato di deformazione è allora piano e il legame costitutivo (4.30a) si suddivide in due parti indipendenti. La prima è formata dalle tre equazioni

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] & \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (4.32a-c)$$

e la seconda dalla relazione

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.33)$$

L'ultima eguaglianza si ottiene eliminando le deformazioni mediante le (4.32a, b). La (4.33) evidenzia come la σ_z , pur in generale non nulla, non si configuri come una variabile primaria, essendo essa valutabile a valle della soluzione del problema nel piano.

Il legame elastico può essere scritto nella forma (4.22). La matrice d è immediatamente deducibile dalle (4.32) e a si ottiene per inversione. Risulta

$$\begin{aligned} d &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \\ a &= \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34a, b)$$

La soluzione nel piano è indipendente da z ; tale sarà quindi pure la σ_z (4.33), in accordo con la (4.23b). La formulazione è dunque corretta se sono presenti vincoli sulle sezioni estreme che impongono $s_z = 0$ fornendo le reazioni (4.26). Tali vincoli sono costituiti da piani lisci, che impediscono lo spostamento in direzione normale senza contrastare la deformazione della sezione nel suo piano (Figura 4.6).

Sulla sezione di simmetria $z = 0$, s_z è comunque nullo; nel caso ipotetico di un solido infinitamente lungo ogni sezione può essere considerata di simmetria, per cui (con alcune eccezioni che verranno discusse in sede di applicazioni) la condizione $s_z = 0$ può

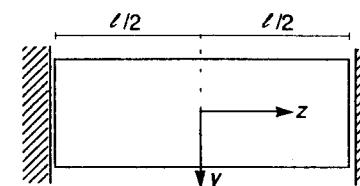


Figura 4.6

considerarsi ovunque rispettata indipendentemente dalla presenza di vincoli. Il problema piano nelle deformazioni trova largo impiego nell'analisi elastica di solidi cilindrici di lunghezza notevole rispetto alle dimensioni della sezione. Per il principio di equivalenza elastica, la soluzione può essere considerata ovunque accettabile, a eccezione delle zone prossime alle sezioni estreme.

È spesso importante considerare la presenza di deformazioni termiche. In un mezzo isotropo, esse sono date dalle (2.41), che comportano

$$\vartheta_x = \vartheta_y = \vartheta_z = \alpha \Delta T \quad \vartheta_{xy} = \vartheta_{yz} = \vartheta_{zx} = 0 \quad (4.35a, b)$$

La condizione (4.31b), che impone l'annullarsi della deformazione totale ε_z , richiede allora in tale direzione una deformazione elastica $\varepsilon_z = -\vartheta_z$, mentre nulli saranno i contributi elastici agli scorrimenti angolari con indice z . Le (4.32) vanno ora sostituite dalle (3.42), particolarizzate al caso qui considerato. Si ottengono le relazioni elastiche nel piano

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha\Delta T] \quad (4.36a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha\Delta T] \quad (4.36b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (4.36c)$$

nonché l'espressione di σ_z

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{1+\nu}{\nu} \alpha\Delta T \right] = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha\Delta T \quad (4.37)$$

Il problema è ancora governato dalle relazioni precedenti. Solamente le (4.22) sono adesso sostituite dalle equazioni

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\Delta T\boldsymbol{\tau}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\Delta T\boldsymbol{\rho} \quad (4.38a, b)$$

con \mathbf{d} ed \mathbf{a} sempre espesse dalle (4.34) e

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{E}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{a}\boldsymbol{\tau} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.39a, b)$$

Può anche darsi la circostanza che ε_z , pur non nulla, abbia un valore costante determinabile a priori. Anche questo caso (cui talvolta ci si riferisce come al problema "generalizzato" di deformazione piana) può essere facilmente ricondotto nell'ambito della formulazione generale, con ovvie modifiche che intervengono solo a livello di legame costitutivo. Chiaramente, le (4.31) vengono ora sostituite dalle (4.25), in cui C rappresenta una costante nota.

4.2.3 PROBLEMA PIANO NEGLI SFORZI

Si assume adesso, in luogo delle (4.31)

$$\sigma_z = 0 \quad (4.40)$$

ipotesi che configura uno stato di sforzo piano. Il legame elastico (4.30b) si traduce allora nelle relazioni

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu\sigma_x + \sigma_y) \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (4.41a-c)$$

nonché nella definizione di ε_z

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.42)$$

dove l'ultima eguaglianza si ottiene sostituendo $\sigma_x + \sigma_y$ dalle (4.41a, b). Il legame nel piano è ancora espresso dalle (4.22), con un'opportuna ridefinizione delle matrici. Adesso \mathbf{a} è immediatamente deducibile dalle (4.41) e \mathbf{d} è la sua inversa. Si ottiene

$$\mathbf{d} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.43a, b)$$

Le (4.43) definiscono il legame (4.22) che, unitamente alle (4.20), (4.21), permette la formulazione del problema piano negli sforzi. È importante osservare che ε_z conseguente dalla soluzione nel piano attraverso la (4.42). Con l'eccezione di casi particolari, la sua espressione risulterà in contrasto sia con la (4.25a) che con la meno restrittiva (4.29), quando applicabile. A differenza dell'analogo nelle deformazioni, il problema piano negli sforzi fornisce quindi in genere solo una *soluzione approssimata*, che soddisfa l'equilibrio ma comporta una violazione della congruenza, e che può essere considerata valida solo con riferimento a valori medi delle variabili nel piano.

La formulazione piana negli sforzi trova peraltro largo impiego nell'analisi di lastre sottili caricate nel loro piano (Figura 4.7). In tal caso, la condizione $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$ risulterà verificata sulle sezioni estreme $z = \pm h/2$ che sono scariche. La piccolezza dello spessore suggerisce che esse siano ovunque trascurabili. Per lo stesso motivo, pure

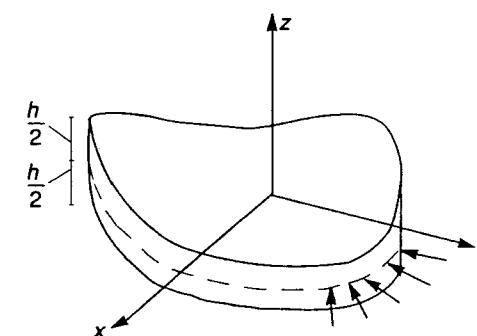


Figura 4.7

trascutibili possono essere ritenute le variazioni con z delle componenti nel piano; identificare tali componenti con il loro valor medio comporta allora approssimazioni del tutto accettabili ai fini applicativi. Anche la teoria della trave piana, che verrà sviluppata nel Capitolo 7, assume ragionevole trattare il problema come piano nelle tensioni.

In presenza di deformazioni termiche, le (4.22) sono ancora sostituite dalle (4.38); le matrici \mathbf{d} e \mathbf{a} sono adesso definite dalle (4.43) e, in luogo delle (4.39), si ha

$$\rho = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \tau = \mathbf{d}\rho = \frac{E}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.44a, b)$$

come è facile verificare particolarizzando le (3.43) al caso in esame. Inoltre, la (4.42) è ora sostituita dalla seguente espressione di ε_z

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T \quad (4.45)$$

4.2.4. FORMULAZIONE IN TERMINI DI FUNZIONE DI SFORZO

Le due formulazioni si basano sulle stesse equazioni di equilibrio e di congruenza. Le sole differenze sono infatti confinate all'interno del legame elastico e ci si propone adesso di esplorare le loro implicazioni.

Tale indagine verrà svolta limitatamente al caso di contorno non vincolato ($\Gamma = \Gamma_F$). Si può allora applicare, in luogo del legame deformazioni-spostamenti, la condizione di congruenza interna (4.27). Procedendo come nel caso tridimensionale per le equazioni di Mitchell-Beltrami (4.11), questa può essere espressa in termini di sforzi introducendo il legame elastico. Per il problema piano nelle deformazioni, dalle (4.22b), (4.34b) si ottiene allora

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sommando a entrambi i membri la quantità

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (a)$$

tale relazione diviene

$$\nabla_2(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.46a)$$

dove $\nabla_2(\cdot)$ indica, al solito, l'operatore di Laplace.

Nel caso piano negli sforzi si ricorre invece alle (4.22b), (4.43b). La (4.27) ora si scrive

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sommando ancora la quantità (a) a entrambi i membri e riordinando i termini, si perviene all'equazione

$$\nabla_2(\sigma_x + \sigma_y) = (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.46b)$$

Le (4.46) si differenziano tra loro solamente per un fattore a secondo membro, che dipende dal coefficiente di Poisson del materiale. Se questo è privo di contrazione trasversale ($\nu = 0$), le (4.46), e quindi i due problemi, si identificano.

Il secondo membro delle (4.46) può essere espresso in termini di forze di volume. Differenziando infatti la prima delle (4.20a) rispetto a x , la seconda rispetto a y e sommando, si ottiene

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (4.47)$$

Le (4.46) si scrivono allora nella forma seguente

$$\nabla_2(\sigma_x + \sigma_y) = -k \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \quad (4.48a)$$

dove si è posto

$$k = \frac{1}{1-\nu} \quad \text{oppure} \quad k = 1+\nu \quad (4.48b)$$

rispettivamente per il problema piano nelle deformazioni e per quello piano negli sforzi. Se le forze di volume sono ovunque costanti nel mezzo, il secondo membro della (4.48a) si annulla. In tale importante circostanza è quindi lecito parlare semplicemente di un problema piano, governato dalle equazioni indefinite di equilibrio

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + F_x = 0 \quad \partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + F_y = 0 \quad \text{in } A \quad (4.49a, b)$$

dall'equazione di congruenza di Mitchell-Beltrami

$$\nabla_2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{in } A \quad (4.50)$$

e dalle condizioni di equilibrio al contorno

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = f_x \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = f_y \quad \text{su } \Gamma \quad (4.51a, b)$$

Per forze di volume costanti la soluzione nel piano è identica nei due casi. Vi saranno chiaramente differenze nelle componenti trasversali: nel problema piano nelle deformazioni sarà infatti $\varepsilon_z = 0$, con σ_z dato dalla (4.33); in quello piano negli sforzi sarà invece $\sigma_z = 0$ e si avrà la ε_z definita dalla (4.42) (in generale in disaccordo con le rimanenti condizioni di congruenza). È interessante notare come si possa ricondursi alla (4.50)

particularizzando al caso piano la (4.12b), anch'essa valida per forze di volume costanti. Per problemi piani p è infatti proporzionale a $\sigma_x + \sigma_y$.

Il problema governato dalle (4.49-4.51) può essere ricondotto a una forma più compatta e matematicamente trattabile introducendo una funzione $\varphi(x, y)$ sufficientemente regolare, da cui gli sforzi vengono derivati mediante le relazioni seguenti

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - F_x y - F_y x \quad (4.52a-c)$$

La $\varphi(x, y)$ è detta *funzione (o potenziale) di sforzo*; è anche nota come *funzione di Airy*, dal nome dello studioso cui è dovuta la sua introduzione.

Le (4.52) rendono le equazioni indefinite di equilibrio (4.49) identicamente soddisfatte, come è facile constatare operando la sostituzione. Nel dominio A il problema rimane quindi governato dalla sola condizione di congruenza (4.50), che si riconduce all'equazione

$$\nabla_4 \varphi = 0 \quad \text{in } A \quad (4.53)$$

dove si è indicato con $\nabla_4(\)$ l'operatore doppio di Laplace. Precisamente

$$\nabla_4(\) = \nabla_2(\nabla_2(\)) = \frac{\partial^4(\)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(\)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\)}{\partial y^4}$$

Una funzione φ che soddisfi la (4.53) è detta *biarmonica*.

La (4.53) è soggetta alle condizioni al contorno (4.51), esprimibili in termini di φ introducendovi le (4.52). È possibile dimostrare che tali condizioni impongono i valori di φ e della sua derivata $\partial \varphi / \partial n$ in direzione normale al contorno, che risultano funzioni delle trazioni superficiali ovunque note su Γ . Le (4.51), (4.52) sono cioè equivalenti a relazioni del tipo

$$\varphi = F(f_x, f_y) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G(f_x, f_y) \quad \text{su } \Gamma \quad (4.54a, b)$$

dove F e G sono funzioni note. Il problema (4.53), (4.54) è matematicamente ben posto.

Si noti che le (4.52) esprimono gli sforzi come derivate seconde di φ ; questa è quindi definita a meno di una funzione lineare ininfluente.

L'equivalenza tra le (4.51), (4.52) e le (4.54) viene illustrata per il caso di forze di volume nulle. Si introduca (Figura 4.8a) un riferimento locale (n, t) i cui assi, rispettivamente normale e tangente al contorno nel generico punto P , sono orientati in modo da sovrapporsi per rotazione rigida a (x, y) . I coseni direttori della normale sono esprimibili come segue (Figura 4.8b)

$$n_x = \cos \alpha = dy/ds \quad n_y = |\sin \alpha| = -dx/ds \quad (4.55a, b)$$

dove s indica un'ascissa curvilinea che percorre il contorno nel verso positivo di t .

Introducendo ora nelle (4.51) le (4.52) scritte per $F_x = F_y = 0$ e le (4.55) si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = f_x \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -f_y \quad (4.56)$$

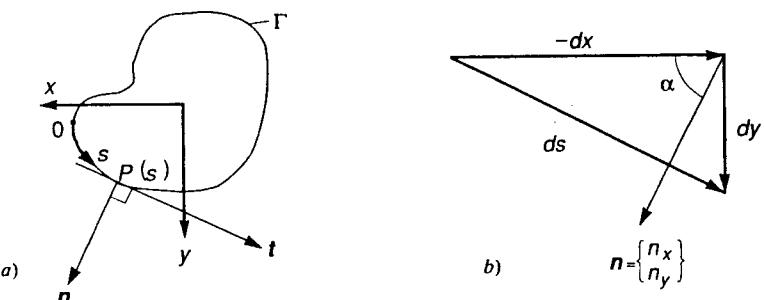


Figura 4.8

Scelto un arbitrario punto O come origine di s , si avrà nel generico punto $P(s)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_0 + \int_0^s f_x ds' \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 - \int_0^s f_y ds' \quad (4.57)$$

Posto

$$R_x(s) = \int_0^s f_x(s') ds' \quad R_y(s) = \int_0^s f_y(s') ds' \quad (4.58)$$

e indicati con C_x e C_y i valori assunti dalle derivate di φ in O , le (4.57) divengono

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = C_y + R_x(s) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = C_x - R_y(s) \quad (4.59)$$

Come le (4.58) mostrano, R_x e R_y rappresentano le componenti nelle due direzioni x e y della risultante delle trazioni superficiali applicate sul tratto OP .

Le (4.59) permettono di calcolare il valore di φ e delle sue derivate normale in ogni punto del contorno. Si può scrivere infatti

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \varphi(0) + \int_0^s d\varphi = \varphi(0) + \int_0^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) = \\ &= C_0 + C_x[x(s) - x(0)] + C_y[y(s) - y(0)] - \int_0^s R_y(s') dx + \int_0^s R_x(s') dy \end{aligned} \quad (4.60a)$$

dove si è posto $C_0 = \varphi(0)$. È anche

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = C_x n_x(s) + C_y n_y(s) + R_x(s) n_y(s) - R_y(s) n_x(s) \quad (4.60b)$$

I termini contenenti le costanti C_0 , C_x e C_y possono essere eliminati. La linearità delle equazioni consente infatti di riguardare la soluzione come sovrapposizione di quelle relative a due problemi, entrambi governati dalla condizione di biarmonicità (4.53) e con condizioni al contorno espresse in termini per l'uno di dette costanti e per l'altro dei contributi dei carichi. La soluzione del primo problema, precisamente

$$\nabla_4 \hat{\varphi} = 0 \quad \text{in } A \quad \hat{\varphi} = C_0 + C_x(x - x_0) + C_y(y - y_0), \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n} = C_x n_x + C_y n_y \quad \text{su } \Gamma$$

è, come facile constatare, la funzione lineare

$$\hat{\varphi}(x, y) = C_0 + C_x(x - x_0) + C_y(y - y_0) \quad (4.61)$$

Tale contributo corrisponde a sforzi ovunque nulli ed è quindi ininfluente. È pertanto sufficiente considerare il secondo problema, che associa alla (4.53) le condizioni al contorno

$$\varphi = - \int_0^s R_y dx + \int_0^s R_x dy \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = R_x n_y - R_y n_x \quad \text{su } \Gamma \quad (4.62a, b)$$

relazioni che esplicitano le (4.54).

Si preferisce a volte scrivere le (4.62) in una forma di più immediata interpretazione meccanica. A tal fine si noti (Figura 4.9) che la risultante delle trazioni superficiali applicate sul tratto OP ha componente $T(s)$ in direzione della tangente al contorno in P pari a

$$T(s) = -R_x(s)n_y(s) + R_y(s)n_x(s) \quad (4.63a)$$

Il termine noto nella (4.62b) si identifica quindi, a meno del segno, con tale componente.

Il secondo membro della (4.62a) è invece uguale al momento $M(s)$ rispetto a P delle trazioni superficiali agenti sul tratto OP . Il suo valore può essere calcolato basandosi sulla Figura 4.10. In virtù anche della definizione (4.58) di R_x e R_y , risulta

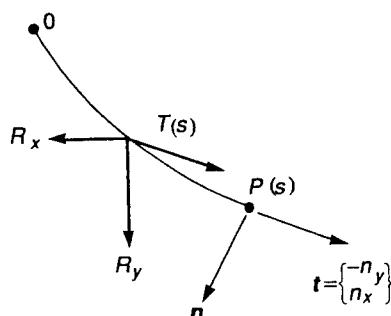


Figura 4.9

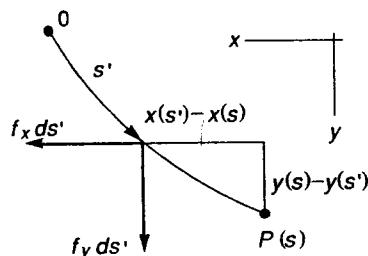


Figura 4.10

$$\begin{aligned} M(s) &= \int_0^s [f_x(s')[y(s) - y(s')] - f_y(s')[x(s) - x(s')]] ds' = \\ &= y(s) \int_0^s f_x ds' - x(s) \int_0^s f_y ds' - \int_0^s (f_x y - f_y x) ds' = \\ &= R_x(s)y(s) - R_y(s)x(s) - \int_0^s (f_x y - f_y x) ds' \end{aligned} \quad (4.63b)$$

D'altro canto, ricordando che per definizione si ha

$$R_x(0) = R_y(0) = 0 \quad dR_x = f_x ds', \quad dR_y = f_y ds'$$

e integrando per parti, il secondo membro della (4.62a) si esprime

$$\begin{aligned} - \int_0^s R_y dx + \int_0^s R_x dy &= \int_0^s (x dR_y - y dR_x) - R_y(s)x(s) + R_x(s)y(s) = \\ &= R_x(s)y(s) - R_y(s)x(s) - \int_0^s (f_x y - f_y x) ds' = M(s) \end{aligned}$$

il che dimostra quanto asserito. In assenza di forze di volume, la formulazione in termini di funzione di sforzo si riconduce quindi al problema seguente

$$\nabla_4 \varphi = 0 \quad \text{in } A \quad \varphi = M, \quad \partial \varphi / \partial n = -T \quad \text{su } \Gamma \quad (4.64)$$

con T e M definiti dalle (4.63).

Le (4.64) sono a volte utilizzate per risolvere il problema mediante metodi numerici. Una dettagliata soluzione per differenze finite è presentata in [4].

4.2.5 IL PROBLEMA PIANO IN COORDINATE POLARI

In alcuni problemi piani risulta conveniente ricorrere a una rappresentazione in termini di coordinate polari. La posizione nel piano di un punto P è identificata dalla sua distanza r (raggio) dall'origine G e dall'angolo ϑ (anomalia) tra il segmento GP e l'asse x (Figura 4.11a). Le componenti degli spostamenti nel piano sono ora s_r e s_ϑ , rispettivamente in direzione radiale e tangenziale, mentre gli sforzi sono quelli illustrati in Figura 4.11b, cui corrispondono analoghe componenti di deformazione. Tra queste quantità sussiste ancora il legame elastico (4.22), con matrici d e a sempre definite dalle (4.34) o dalle (4.43), a seconda che si tratti di un problema piano nelle deformazioni o negli sforzi. Pure in direzione radiale e tangenziale sono decomposte le forze di volume e di superficie.

Le equazioni indefinite di equilibrio (3.20a) sono ora sostituite dalle prime due delle (2.38e) particolarizzate al caso piano, in cui è $\tau_{\vartheta\vartheta} = \tau_{r\vartheta} = 0$. Si ottiene

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + F_r = 0 \quad \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta}}{r} + F_\vartheta = 0 \quad \text{in } A \quad (4.65)$$

Il legame deformazioni spostamenti è invece fornito dalle tre delle (2.137a) che definiscono le deformazioni nel piano. Precisamente

$$\epsilon_r = \frac{\partial s_r}{\partial r} \quad \epsilon_\vartheta = \frac{s_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\vartheta}{\partial \vartheta} \quad \gamma_{r\vartheta} = \frac{\partial s_\vartheta}{\partial r} - \frac{s_\vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \vartheta} \quad \text{in } A \quad (4.66)$$

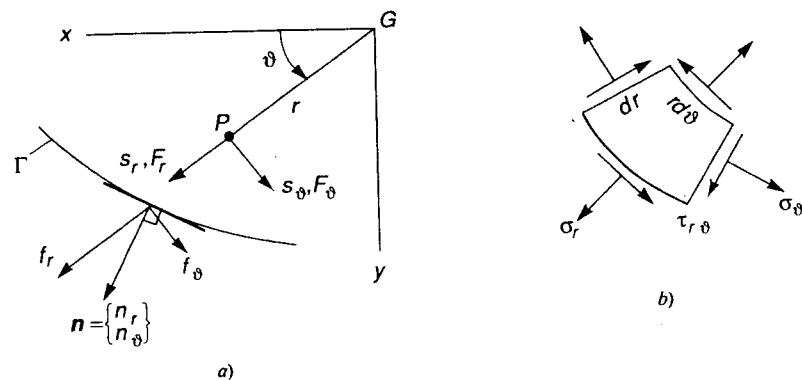


Figura 4.11

Le condizioni al contorno subiscono solamente modifiche formali dettate dal nuovo riferimento. Si avrà, rispettivamente per il contorno caricato e vincolato

$$\sigma_r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta = f_r \quad \tau_{r\theta} n_r + \sigma_\theta n_\theta = f_\theta \quad \text{su } \Gamma_F \quad (4.67)$$

$$s_r = \bar{s}_r \quad s_\theta = \bar{s}_\theta \quad \text{su } \Gamma_u \quad (4.68)$$

Nel caso di contorno privo di vincoli le (4.68) non applicano e le (4.67) valgono ovunque su Γ . È allora possibile [4] sostituire le (4.66) con l'unica condizione di congruenza interna

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \vartheta} \quad (4.69)$$

Particolarmente semplice è il caso assialsimmetrico, relativo a un mezzo cilindrico che presenta simmetria polare rispetto all'asse z e soggetto ad azioni esterne puramente radiali ($F_\theta = 0$, $f_\theta = 0$, $\bar{s}_\theta = 0$). Per ovvi motivi di simmetria, la soluzione sarà caratterizzata da spostamenti tangenziali nulli ($s_\theta = 0$) e pure nulli risulteranno gli sforzi taglienti e gli scorrimenti angolari nel piano ($\tau_{r\theta} = 0$, $\gamma_{r\theta} = 0$), mentre le quantità superstiti saranno indipendenti dall'anomalia. Il problema è allora governato da equazioni differenziali ordinarie. Le equazioni indefinite di equilibrio si riconducono alla (2.38g) e il legame deformazioni-spostamenti alle due (2.138a), sostituibili, nel caso di contorno non vincolato, con l'unica equazione di congruenza interna (2.138b).

4.3 SOLUZIONI DI PROBLEMI PARTICOLARI

4.3.1 LA LASTRA RETTANGOLARE CARICATA NEL SUO PIANO

Come primo esempio di soluzione del problema elastico si considera la lastra rettangolare di cui la Figura 4.12 illustra la geometria. Si suppone che essa sia priva di vincoli e soggetta unicamente a trazioni superficiali sui bordi (forze di volume nulle).

Il problema è considerato come piano negli sforzi e viene affrontato, seguendo quanto sviluppato in [4], mediante un metodo inverso che procede attraverso le seguenti fasi: si introduce un'espressione polinomiale per la funzione di sforzo $\varphi(x, y)$ che soddisfi la (4.53); si determinano quindi attraverso le (4.52) gli sforzi a essa corrispondenti

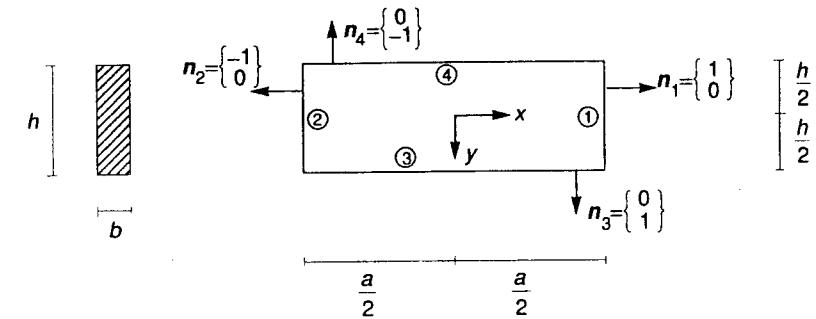


Figura 4.12

denti e infine, sulla base delle condizioni di equilibrio al contorno (4.51) si valutano le trazioni superficiali che definiscono il problema di cui l'ipotesi di partenza costituisce la soluzione. La particolare geometria del problema semplifica notevolmente queste ultime condizioni: sui lati indicati con ① e ② in Figura 4.12, di ascissa pari a $\pm a/2$, è infatti $n_x = \pm 1$ e $n_y = 0$; sui lati ③ e ④ è invece $n_x = 0$ e $n_y = \pm 1$. Le (4.51) allora divengono

$$x = \pm a/2: \quad f_x = \pm \sigma_x \quad f_y = \pm \tau_{xy} \quad (4.70a)$$

$$y = \pm h/2: \quad f_x = \pm \tau_{xy} \quad f_y = \pm \sigma_y \quad (4.70b)$$

La più semplice espressione di φ che comporti sforzi non nulli è la funzione quadratica

$$\varphi(x, y) = a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 y^2 \quad (4.71)$$

chiaramente biarmonica per qualunque valore delle costanti a_i . In assenza di forze di volume, dalle (4.52) allora discende

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2a_3 \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a_1 \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -a_2 \quad (4.72a-c)$$

È facile ora risalire attraverso le (4.70) alle corrispondenti condizioni di carico, che sono illustrate in Figura 4.13 per ognuno dei coefficienti individualmente considerato. Si noti che, essendo gli sforzi costanti, tali risulteranno pure le ϵ_z definite dalla (4.42). La condizione di congruenza (4.25a) è dunque rispettata e la soluzione trovata è in questo caso esatta.

Si consideri ora per la funzione di sforzo l'espressione cubica

$$\varphi(x, y) = b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3 \quad (4.73)$$

che pure soddisfa la (4.53) per ogni valore delle costanti. Dalle (4.52) si ottiene

$$\sigma_x = 2b_3 x + 6b_4 y \quad \sigma_y = 6b_1 x + 2b_2 y \quad \tau_{xy} = -2(b_2 x + b_3 y) \quad (4.74a-c)$$

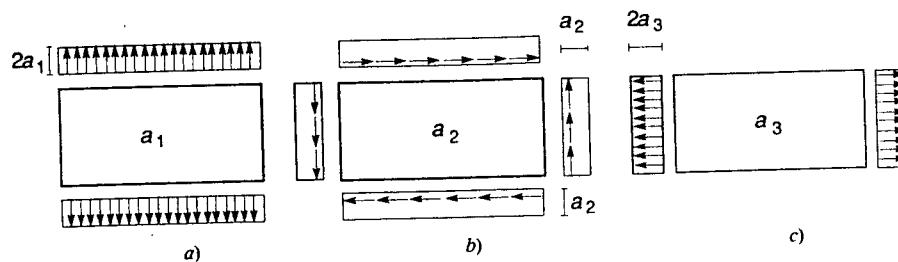


Figura 4.13

Si riconoscono nelle (4.74) quattro casi indipendenti, ognuno associato a una costante. In particolare, supponendo $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ si ottiene

$$\sigma_x = 6b_4y \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (4.75a)$$

Per $b_1 = b_3 = b_4 = 0$ si ha invece

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 2b_2y \quad \tau_{xy} = -2b_2x \quad (4.75b)$$

Le trazioni superficiali che corrispondono alle (4.75) sono illustrate in Figura 4.14 (i due restanti casi comportano solamente uno scambio tra gli assi x e y). Le deformazioni ϵ_z sono adesso funzioni lineari del punto, in accordo con la condizione di congruenza (4.29). La soluzione è quindi ancora esatta. Tuttavia, dal momento che ϵ_z non risulta costante, gli spostamenti nel piano non sono indipendenti da z .

Si procede ora con un polinomio di quarto grado per la funzione di sforzo. Precisamente

$$\varphi(x, y) = c_1x^4 + c_2x^3y + c_3x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 \quad (4.76)$$

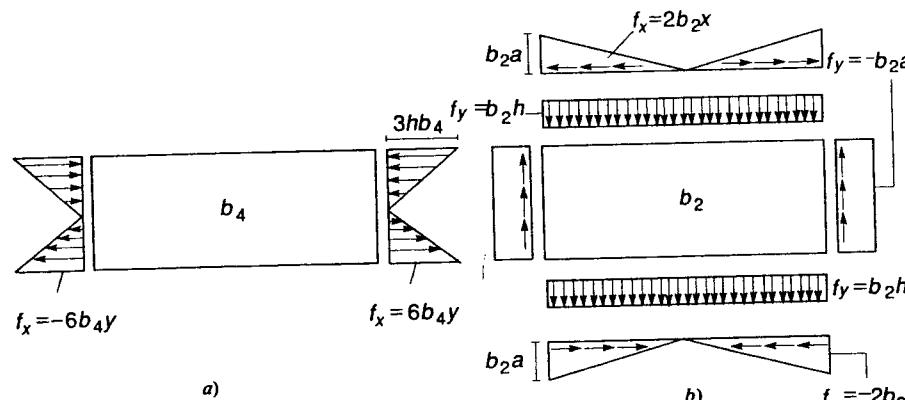


Figura 4.14

La condizione di biarmonicità instaura adesso un legame tra le costanti. Con riferimento alla (4.76), la (4.53) infatti si scrive

$$\nabla_4 \varphi = 8(3c_1 + c_3 + 3c_5) = 0 \quad (g1)$$

Il che implica

$$c_3 = -3(c_1 + c_5) \quad (g2)$$

La più generale espressione biarmonica di quarto grado per φ è quindi

$$\varphi(x, y) = c_1x^4 + c_2x^3y - 3(c_1 + c_5)x^2y^2 + c_4xy^3 + c_5y^4 \quad (4.77)$$

Dalle (4.52) si ottiene allora

$$\sigma_x = -6c_1x^2 + 6c_4xy + 6c_5(2y^2 - x^2) \quad (4.78a)$$

$$\sigma_y = 6c_1(2x^2 - y^2) + 6c_2xy - 6c_5y^2 \quad (4.78b)$$

$$\tau_{xy} = -3c_2x^2 + 12(c_1 + c_5)xy - 3c_4y^2 \quad (4.78c)$$

Considerando individualmente ognuna delle costanti, si possono ancora distinguere quattro casi indipendenti. In Figura 4.15 sono illustrate le trazioni superficiali relative alla sola c_4 diversa da zero, caso per cui le (4.78) si particolarizzano come segue

$$\sigma_x = 6c_4xy \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -3c_4y^2 \quad (4.79)$$

Le deformazioni ϵ_z risultano ora quadratiche. La congruenza è quindi violata e le soluzioni vanno intese solamente come approssimazioni, peraltro accettabili con riferimento ai valori medi o se lo spessore è piccolo.

In modo analogo si tratta il polinomio di quinto grado

$$\varphi(x, y) = d_1x^5 + d_2x^4y + d_3x^3y^2 + d_4x^2y^3 + d_5xy^4 + d_6y^5 \quad (4.80)$$

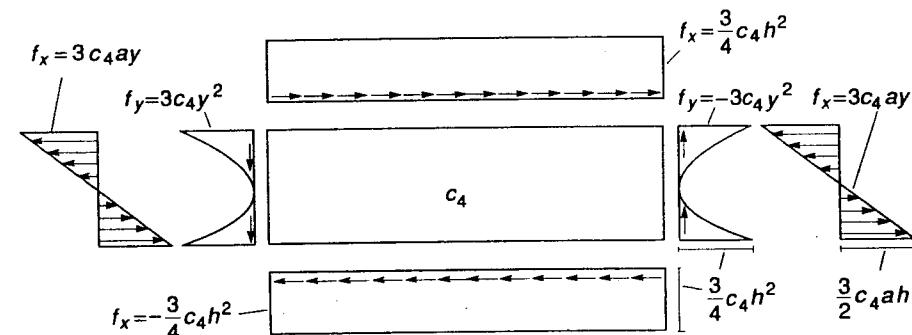


Figura 4.15

La condizione (4.53) ora diviene

$$\nabla_4 \varphi = 24[(5d_1 + d_3 + d_5)x + (d_2 + d_4 + 5d_6)y] = 0 \quad (h1)$$

e richiede

$$d_1 = -\frac{1}{5}(d_3 + d_5); \quad d_6 = -\frac{1}{5}(d_2 + d_4) \quad (h2)$$

Il più generale polinomio biarmonico di quinto grado si scrive dunque

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{5}(d_3 + d_5)x^5 + d_2x^4y + d_3x^3y^2 + d_4x^2y^3 + d_5xy^4 - \frac{1}{5}(d_2 + d_4)y^5 \quad (4.81)$$

e dipende ancora da quattro costanti indipendenti, che definiscono altrettanti problemi. A titolo d'esempio, si considera il caso in cui la sola d_4 sia diversa da zero. È allora

$$\varphi(x, y) = d_4 \left(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right) \quad (4.82a)$$

$$\sigma_x = d_4(6x^2y - 4y^3) \quad \sigma_y = 2d_4y^3 \quad \tau_{xy} = -6d_4xy^2 \quad (4.82b-d)$$

Le trazioni superficiali corrispondenti sono illustrate in Figura 4.16. Anche in questo caso la soluzione è approssimata e può essere ritenuta accettabile solo per piccoli spessori.

Per l'importanza che alcune delle soluzioni ora trovate rivestono nelle applicazioni, si derivano anche gli spostamenti a esse relativi. Con riferimento alle (4.72), il legame elastico (4.41) definisce le seguenti deformazioni nel piano

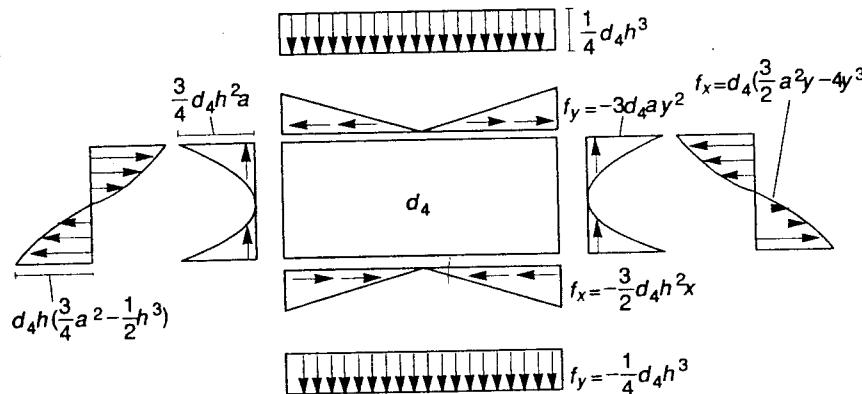


Figura 4.16

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{2}{E} (a_3 - \nu a_1) = \frac{\partial s_x}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{2}{E} (a_1 - \nu a_3) = \frac{\partial s_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} a_2 = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (a)$$

Dalla (4.42) si ottiene inoltre

$$\epsilon_z = -2 \frac{\nu}{E} (a_1 + a_3) \quad (b)$$

Dal momento che tale valore è costante, gli spostamenti nel piano sono funzioni delle sole x e y e possono essere calcolati integrando le (a). A meno di moti rigidi, si ottiene

$$s_x = \frac{1}{E} [2(a_3 - \nu a_1)x - (1+\nu)a_2y] \quad s_y = \frac{1}{E} [2(a_1 - \nu a_3)y - (1+\nu)a_2x] \quad (c)$$

mentre la componente di spostamento secondo z è data dalla (4.25b), che per la (b) diviene

$$s_z = -2 \frac{\nu}{E} (a_1 + a_3)z \quad (d)$$

Per il caso di Figura 4.14a, le (4.41), (4.42) scritte con riferimento alle (4.75a) producono le deformazioni

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= b_4 \frac{6}{E} y = \frac{\partial s_x}{\partial x} & \epsilon_y &= -b_4 \nu \frac{6}{E} y = \frac{\partial s_y}{\partial y} & \epsilon_z &= -b_4 \nu \frac{6}{E} y = \frac{\partial s_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= 0 = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} & \gamma_{yz} &= 0 = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} & \gamma_{zx} &= 0 = \frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (e)$$

È facile verificare che esse sono derivabili dagli spostamenti seguenti

$$s_x = b_4 \frac{6}{E} xy \quad s_y = -b_4 \frac{3}{E} [x^2 + \nu(y^2 - z^2)] \quad s_z = -b_4 \nu \frac{6}{E} yz \quad (f)$$

Le (4.75a), (e) e (f) definiscono la soluzione completa del problema di Figura 4.14a. Valendo la (4.29) in luogo della più restrittiva (4.25a), la soluzione in termini di spostamenti, pur esatta, prevede una dipendenza da z della s_y , oltre che una dipendenza da y della s_z .

Con riferimento agli ultimi due casi, si osservi che la condizione di congruenza (4.27) è soddisfatta dalla soluzione trovata; integrando le (4.21a) si possono quindi calcolare le componenti di spostamento nel piano che a tale soluzione corrispondono, ovviamente pure approssimate. La violazione della congruenza in direzione trasversale non consente tuttavia di valutare s_z .

Il procedimento inverso sopra descritto permette di definire le soluzioni di vari problemi piani negli sforzi. Molti di questi, peraltro, appaiono di dubbia utilità diretta. Vanno però segnalate quantomeno le eccezioni dei problemi di Figura 4.13c e 4.14a, corrispondenti a lastre soggette, rispettivamente, ad azione assiale e momento flettente costanti. Queste quantità, per unità di spessore, risultano

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} f_x dy = 2ha_3 \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} yf_x dy = \frac{1}{2} b_4 h^3 \quad (4.83a, b)$$

Tali valori discendono, a rigore, dalle distribuzioni (rispettivamente costante e lineare con y) delle trazioni superficiali f_x previste dalla soluzione. Tuttavia, il principio di equivalenza elastica consente in ogni caso di ritenere la soluzione valida a una distanza dalle sezioni estreme circa pari ad h , quindi quasi ovunque se $a \gg h$. Il procedimento fornisce pertanto la soluzione (in questo caso esatta) dell'importante problema della trave tensio-inflessa di sezione rettangolare; si vedrà nel capitolo successivo come essa particolarizzi un risultato valido per qualunque sezione trasversale.

Sfruttando la possibilità di sovrapporre gli effetti, altri problemi di interesse possono essere risolti combinando i casi prima illustrati. Si consideri una funzione polinomiale definita dalle (4.71), (4.73) e (4.75) in termini dei seguenti coefficienti non nulli

$$a_2 = -\frac{3}{2} t \quad b_4 = \frac{a}{h^2} t \quad c_4 = \frac{2}{h^2} t \quad (4.84a)$$

Si ha allora, per la funzione di sforzo e le tensioni nel piano

$$\varphi(x, y) = t \left(-\frac{3}{2} xy + \frac{a}{h^2} y^3 + \frac{2}{h^2} xy^3 \right) \quad (4.84b)$$

$$\sigma_x = 6t \frac{y}{h^2} (a + 2x) \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{3}{2} t \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (4.84c)$$

Le corrispondenti azioni esterne sono illustrate in Figura 4.17, in termini sia di trazioni superficiali che di risultanti per unità di spessore. Queste sono definite dalle relazioni

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dy = th \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} y f_x dy = t ah = Ta \quad (4.85)$$

Un'opportuna sovrapposizione dei casi illustrati in Figura 4.13b, 4.14a e 4.15 ha quindi consentito di risolvere la lastra-trave di sezione rettangolare sollecitata sulle facce estreme dalle azioni indicate in Figura 4.17b. Tale situazione è nota come problema della flessione con taglio costante e le (4.84c) ne danno la soluzione, valida indipendentemente dall'effettiva distribuzione locale delle trazioni superficiali a una certa distanza dalle sezioni estreme. La soluzione è approssimata in quanto la presenza di un termine del quarto ordine nella (4.84b) comporta una violazione della congruenza. Come si

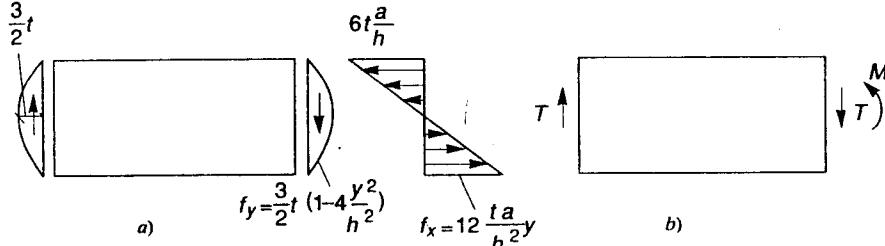


Figura 4.17

vedrà nel prossimo capitolo, questo problema viene di regola affrontato con un metodo approssimato che fornisce soluzioni equilibrate ma non congruenti. Nel caso di sezioni rettangolari, tale procedimento riconduce alle (4.84c).

Si assuma ora per la funzione di sforzo un polinomio di quinto grado con i seguenti coefficienti non nulli

$$a_1 = -\frac{1}{4} p \quad b_2 = \frac{3}{4} \frac{p}{h} \quad d_4 = -\frac{1}{h^3} p \quad (4.86a)$$

Si ottiene

$$\varphi(x, y) = p \left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{h} x^2 y - \frac{1}{h^3} x^2 y^3 + \frac{1}{5h^3} y^5 \right) \quad (4.86b)$$

e quindi

$$\sigma_x = \frac{2p}{h^3} (2y^3 - 3x^2y) \quad \sigma_y = \frac{p}{2} \left(-1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right) \quad (4.87a, b)$$

$$\tau_{xy} = -6 \frac{px}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.87c)$$

Attraverso le (4.70), le (4.87) si traducono nelle seguenti trazioni superficiali

$$x = \pm \frac{a}{2} : \begin{cases} f_x = \mp \frac{2p}{h^3} \left(\frac{3}{4} a^2 y - 2y^3 \right) \\ f_y = -3p \frac{a}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{cases} \quad (4.88a)$$

$$y = \frac{h}{2} : \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad y = -\frac{h}{2} : \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = -p \end{cases} \quad (4.88b, c)$$

Le risultanti delle (4.88a) sulla sezione $x = a/2$ sono, per unità di spessore

$$T = - \int_{-h/2}^{h/2} f_y dy = \frac{1}{2} pa \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} y f_x dy = -\frac{1}{8} pa^2 \left(1 - \frac{2h^2}{5a^2} \right) \quad (4.89a, b)$$

valide, a meno del segno del momento, anche per $x = -a/2$.

Combinando opportunamente i casi di Figura 4.13a, 4.14b e 4.16 si è quindi ottenuta la soluzione del problema illustrato in Figura 4.18, dove, in virtù della simmetria rispetto all'asse y , sulla sezione di sinistra sono riportate le trazioni superficiali e su quella di destra le loro risultanti. Il problema configura una lastra-trave soggetta a un carico trasversale uniforme di intensità p , con vincoli agli estremi che forniscono le reazioni (4.89). Va però osservato che mentre le reazioni verticali $T = pa/2$ sono imposte comunque dall'equilibrio globale e sono quindi fornite anche da vincoli fissi, non

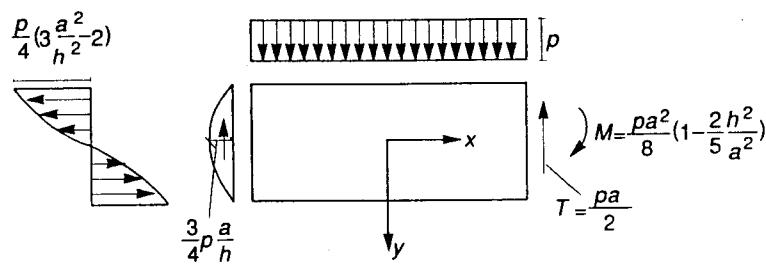


Figura 4.18

è immediato stabilire il vincolo cui corrispondono i momenti (4.89b); a questi sono infatti associate rotazioni medie delle sezioni estreme a priori non nulle e valutabili solo completando la soluzione fino alla definizione degli spostamenti nel piano.

È però facile risalire alla soluzione di una trave semplicemente appoggiata agli estremi (Figura 4.19a), dove i momenti dovranno risultare nulli. È sufficiente a tal fine sovrapporre al problema di Figura 4.18 quello di Figura 4.14a, assumendo per b_4 il valore necessario a cancellare i momenti previsti dalla (4.89b). Per la (4.83b), tale valore risulta

$$b_4 = \frac{1}{4} p \frac{a^2}{h^3} \left(1 - \frac{2h^2}{5a^2}\right) \quad (4.90)$$

Gli sforzi ora si ottengono sovrapponendo alle (4.87) le (4.75a). Tale operazione altera solo il valore della σ_x , che diviene

$$\sigma_x = 6p \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{h} + p \left(4 \frac{y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h}\right) \quad (4.91)$$

Unitamente alle (4.87b, c), la (4.91) definisce la soluzione in termini di sforzi per il problema di Figura 4.19a.

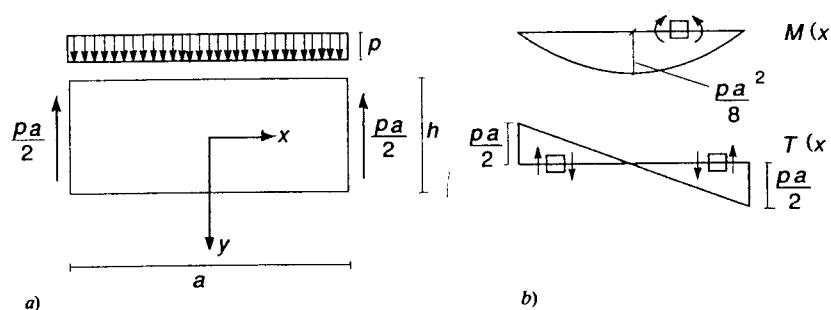


Figura 4.19

Una visualizzazione più espressiva del regime tensionale si ottiene traducendo le σ_x e τ_{xy} in termini di azioni interne, rappresentate per ogni ascissa x dal momento flettente $M(x)$ e dall'azione tagliante $T(x)$. Si ottiene

$$M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_x dy = \frac{pa^2}{8} \left(1 - 4 \frac{x^2}{a^2}\right) \quad T(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy = -px \quad (4.92a, b)$$

I loro diagrammi sono illustrati in Figura 4.19b e, come ovvio, coincidono con quelli che si otterrebbero con considerazioni di equilibrio diretto sulla trave isostatica di Figura 4.19a.

A fini interpretativi, è anche illuminante esprimere gli sforzi σ_x e τ_{xy} in funzione delle loro risultanti. Il confronto con le (4.92) mostra che la (4.91) e la (4.87c) possono scriversi come segue

$$\sigma_x(x, y) = 12 \frac{M(x)}{h^3} y + p \left(4 \frac{y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h}\right) = \sigma_x^M(x, y) + \bar{\sigma}_x(y) \quad (4.93a)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = 6 \frac{T(x)}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) \quad (4.93b)$$

La suddivisione operata nella (4.93a) è giustificata dal fatto che solo il primo addendo contribuisce al momento flettente. Il secondo addendo (Figura 4.20a) è infatti uno stato di coazione, corrispondente ad azione assiale e momento nulli su ogni sezione. In aggiunta alle (4.93), sono presenti anche gli sforzi σ_y definiti dalla (4.87b). Essi sono indipendenti da x e comprimono le fibre in direzione y , assumendo il massimo valore assoluto, pari a p , in corrispondenza del lembo superiore della lastra e annullandosi su quello inferiore, come illustrato in Figura 4.20b.

La soluzione è valida a partire da una certa distanza dagli estremi, purché i vincoli ivi presenti siano tali da fornire le reazioni (4.89a) senza contrastare la rotazione delle

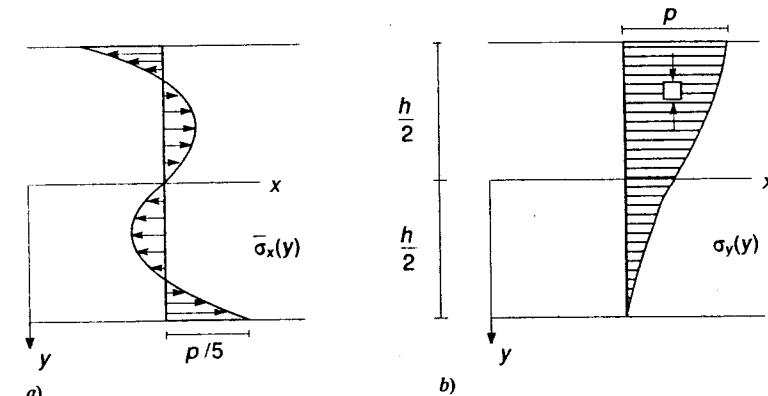


Figura 4.20

sezioni. Essa è quindi di interesse per rapporti a/h abbastanza elevati da garantire la presenza di una sufficiente porzione di lastra in cui il principio di equivalenza elastica sia applicabile. In tale circostanza è lecito trascurare i contributi illustrati in Figura 4.20. Ciò risulta evidente se si confrontano i loro valori di picco (rispettivamente $p/5$ e p) con quello del primo addendo σ_x^M nella (4.93a), che vale

$$|\sigma_x^M|_{\max} = \sigma_x^M \left(x = 0, y = \frac{h}{2} \right) = p \frac{3a^2}{4h^2} \quad (4.94a)$$

Risulta

$$\frac{|\sigma_x|_{\max}}{|\sigma_x^M|_{\max}} = \frac{4}{15} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad \frac{|\sigma_y|_{\max}}{|\sigma_x^M|_{\max}} = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (4.94b, c)$$

I contributi in Figura 4.20 hanno quindi effetti limitati rispettivamente all'1% e al 5% già per $a/h = 5$ e diminuiscono rapidamente al crescere di tale rapporto. Appare quindi legittima un'approssimazione che consideri su di un generico tronco di trave solamente gli sforzi indicati in Figura 4.21.

Il problema della trave riveste notevole importanza applicativa e verrà affrontato nel Capitolo 7 sulla base di ipotesi di natura cinematica. Le soluzioni qui trovate si rivelano utili anche ai fini di una migliore comprensione delle approssimazioni connesse con tale teoria.

4.3.2 CILINDRO ASSIALSIMMETRICO IN DEFORMAZIONE PIANA

Un problema di relativamente semplice soluzione è illustrato in Figura 4.22: un cilindro di raggio esterno b e raggio interno a è soggetto a pressioni interna ed esterna p e q e a una variazione di temperatura $\Delta T(r)$, indipendente dall'anomalia. Il cilindro si trova in condizione di deformazione piana ($\varepsilon_z = 0$).

Per la simmetria polare rispetto a z , la soluzione risulterà indipendente dall'anomalia e saranno nulle sia le tensioni tangenziali $\tau_{r\theta}$ che gli scorimenti angolari $\gamma_{r\theta}$ nel piano.

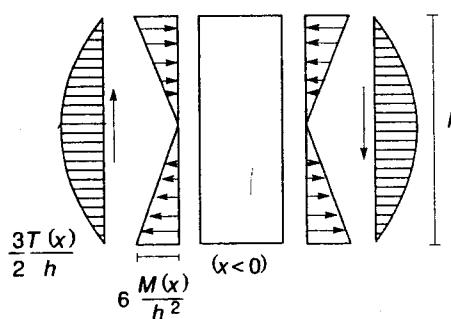


Figura 4.21

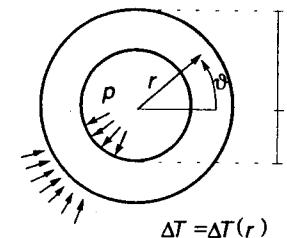


Figura 4.22

Il problema è governato da equazioni differenziali ordinarie. Precisamente, l'equazione indefinita di equilibrio (2.38g) che, in assenza di forze di volume si scrive

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0 \quad (4.95)$$

e l'equazione di congruenza interna (2.138b)

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (4.96)$$

Al contorno si applicano le condizioni di equilibrio

$$\sigma_r(a) = -p \quad \sigma_r(b) = -q \quad (4.97a, b)$$

Verrà inoltre il legame elastico per problemi piani nelle deformazioni, fornito dalle (4.38b), (4.39b) e (4.34b), che, nel caso assialsimmetrico, si riconduce alle due sole equazioni

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta + (1-\nu)\Theta] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} [-\nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta + (1-\nu)\Theta] \end{aligned} \quad (4.98a, b)$$

dove si è posto

$$\Theta(r) = \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T(r) \quad (4.99)$$

Il problema è abbastanza semplice da poter essere risolto per integrazione diretta. Differenziando la (4.98b) si ottiene

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu \frac{d(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr} + (1-\nu) \frac{d\Theta}{dr} \right\}$$

D'altra parte, dalle (4.98) e (4.95) si ottiene anche

$$\frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{d\sigma_r}{dr}$$

La condizione di congruenza interna (4.96) si riconduce quindi all'equazione differenziale

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_\theta) = - \frac{d\Theta}{dr}$$

il cui integrale generale si scrive

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2K - \Theta \quad (4.100)$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione indefinita di equilibrio (4.95), questa diviene

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = \frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{r} - 2 \frac{\sigma_r}{r} = \frac{2K - \Theta}{r} - 2 \frac{\sigma_r}{r}$$

o anche, moltiplicando per r

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2\sigma_r = 2K - \Theta$$

Integrando, si ottiene

$$\sigma_r = K + \frac{C}{r^2} - \frac{1}{r^2} \int_a^r r\Theta dr \quad (4.101)$$

Le due costanti di integrazione K e C sono fissate dalle condizioni al contorno (4.97), che richiedono

$$\sigma_r(a) = K + \frac{C}{a^2} = -p \quad (4.102a)$$

$$\sigma_r(b) = K + \frac{C}{b^2} - \frac{1}{b^2} \int_a^b r\Theta dr = -q \quad (4.102b)$$

La (4.102a) impone $C = -a^2(K + p)$. La (4.102b) allora fornisce per K il valore

$$K = \frac{1}{b^2 - a^2} \left\{ -qb^2 + pa^2 + \int_a^b r\Theta dr \right\} \quad (4.103)$$

La soluzione in termini di sforzi è adesso completamente determinata. Inserendo nelle (4.100), (4.101) i valori delle costanti, si ottiene

$$\sigma_r(r) = -p \frac{a^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \int_a^r r\Theta(r) dr + K \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (4.104a)$$

$$\sigma_\theta(r) = p \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int_a^r r\Theta(r) dr - \Theta(r) + K \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (4.104b)$$

con K espresso dalla (4.103). La componente di sforzo in direzione normale al piano è fornita dalla (4.37) e risulta

$$\sigma_z(r) = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - (1 - \nu)\Theta = 2\nu K - \Theta(r) \quad (4.104c)$$

Il campo di spostamenti è caratterizzato dalla componente radiale $s_r(r)$, la sola non nulla. Essa può essere calcolata a partire dalle deformazioni nel piano (4.98) mediante il legame deformazioni-spostamenti (2.138a). Eliminando per semplicità l'indice r , questo si scrive

$$\varepsilon_r = \frac{ds}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \frac{s}{r} \quad (4.105a, b)$$

Per le (4.104a, b), dalla (4.98b) si ottiene

$$\varepsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} \left\{ p \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int_a^r r\Theta dr + K(1 - 2\nu) + K \frac{a^2}{r^2} \right\}$$

e quindi, in virtù della (4.105b)

$$s = a \frac{1 + \nu}{E} \left\{ \frac{a}{r} \left[p + \frac{1}{a^2} \int_a^r r\Theta dr + K \right] + \frac{r}{a} K(1 - 2\nu) \right\} \quad (4.106)$$

È a volte conveniente riferire le dimensioni lineari al raggio interno del cilindro. Posto allora

$$\beta = \frac{b}{a} \quad \varrho = \frac{r}{a} \quad u = \frac{s}{a} \quad (4.107a-c)$$

le (4.103), (4.104) e (4.106) divengono

$$K = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left\{ p - q\beta^2 + \int_1^\beta \varrho \Theta(\varrho) d\varrho \right\} \quad (4.108a)$$

$$\sigma_r(\varrho) = -\frac{p}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} \int_1^\varrho \varrho \Theta(\varrho) d\varrho + K \left(1 - \frac{1}{\varrho^2} \right) \quad (4.108b)$$

$$\sigma_\theta(\varrho) = \frac{p}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \int_1^\varrho \varrho \Theta(\varrho) d\varrho - \Theta(\varrho) + K \left(1 + \frac{1}{\varrho^2} \right) \quad (4.108c)$$

$$u(\varrho) = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{1}{\varrho} \left[p + \int_1^{\varrho} \varrho \Theta(\varrho) d\varrho + K \right] + \varrho K(1-2\nu) \right\} \quad (4.108d)$$

mentre la σ_z mantiene la sua espressione (4.104c). Si passa ora all'esame di casi particolari.

A) Cilindro soggetto a sola pressione interna

Ponendo $q=0$ e $\Theta=0$, si ottiene dalla (4.103)

$$K = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad p = \frac{p}{\beta^2 - 1} \quad (4.109)$$

e le componenti di sforzo si specializzano nelle espressioni seguenti

$$\sigma_r = -p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 - r^2}{r^2} = -\frac{p}{\beta^2 - 1} \frac{\beta^2 - \varrho^2}{\varrho^2} \quad (4.110a)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 + r^2}{r^2} = \frac{p}{\beta^2 - 1} \frac{\beta^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \quad (4.110b)$$

$$\sigma_z = 2\nu p \frac{a^2}{b^2 - a^2} = 2\nu \frac{p}{\beta^2 - 1} = \text{cost} \quad (4.110c)$$

Si osservi che per $p > 0$ la componente trasversale σ_z è positiva e corrisponde quindi a trazione in direzione z . L'espressione (4.106) dello spostamento radiale è ora

$$s(r) = p \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{b^2}{r} + r(1-2\nu) \right] \quad (4.111)$$

In particolare, in corrispondenza dei raggi interno ed esterno risulta

$$s(a) = p \frac{1+\nu}{E} \frac{a}{b^2 - a^2} [b^2 + a^2(1-2\nu)] \quad s(b) = 2p \frac{1-\nu^2}{E} \frac{a^2 b}{b^2 - a^2} \quad (4.112a, b)$$

L'andamento degli sforzi nel piano è illustrato in Figura 4.23 per $\beta = 2$ ($b = 2a$). In tal caso dalla (4.110c) si ottiene $\sigma_z = \frac{2}{3} \nu p$.

Si indichino con t e R lo spessore e il raggio medio del tubo. Precisamente

$$t = b - a \quad R = \frac{1}{2} (a + b)$$

È allora $b^2 - a^2 = 2Rt$. Se il tubo ha spessore piccolo ($t \ll R$) è lecito porre $a^2/R^2 \approx 1$, $b^2 - R^2 \approx Rt$ e $b^2 + R^2 \approx 2R^2$. In corrispondenza del raggio medio le (4.110) forniscono allora

$$\sigma_r = -\frac{p}{2} \quad \sigma_\theta = p \frac{R}{t} \quad \sigma_z = \nu p \frac{R}{r}$$

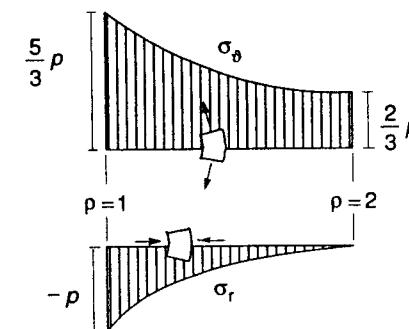


Figura 4.23

La seconda di tali relazioni coincide con la formula di Mariotte (1.35a), ottenuta nel Paragrafo 1.3.2 con considerazioni di puro equilibrio riferite a un contenitore in pressione. Il rapporto tra sforzi assiale e circonferenziale è ora pari al coefficiente di Poisson del materiale ν , salvo che per il caso di materiale incompressibile, risulta diverso da quello previsto dalle (1.35); sono peraltro diversi i due problemi, avendo ora imposto la condizione di deformazione piana $\epsilon_z = 0$. In tubi sottili il rapporto R/t è elevato e σ_r diviene trascurabile nei confronti delle altre componenti di sforzo.

B) Cilindro soggetto a sola pressione esterna

Per $p = 0$, $\Theta = 0$ si ottiene, in luogo delle (4.110)

$$\sigma_r = -q \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{r^2 - a^2}{r^2} = -q \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} \quad (4.113a)$$

$$\sigma_\theta = -q \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{r^2 + a^2}{r^2} = -q \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2} \quad (4.113b)$$

$$\sigma_z = -2\nu q \frac{b^2}{b^2 - a^2} = -2\nu q \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = \text{cost} \quad (4.113c)$$

L'espressione dello spostamento radiale diviene

$$s(r) = -q \frac{1+\nu}{E} \frac{ab^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{a}{r} + \frac{r}{a} (1-2\nu) \right] \quad (4.114)$$

In corrispondenza dei raggi interno ed esterno si ha quindi

$$s(a) = -2q \frac{1-\nu^2}{E} \frac{ab^2}{b^2 - a^2} \quad (4.115a, b)$$

$$s(b) = -q \frac{1+\nu}{E} \frac{ab^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} (1-2\nu) \right]$$

L'andamento degli sforzi nel piano è illustrato in Figura 4.24, sempre per il caso $\beta = 2$. In direzione assiale ora risulta $\sigma_z = -\frac{8}{3} \nu q$, valore negativo, che configura compressione delle fibre in direzione z (come del resto sempre per $q > 0$).

C) Cilindro soggetto a pressione interna ed esterna

La soluzione si ottiene per semplice sovrapposizione delle due precedenti. In termini di sforzi risulta

$$\sigma_r = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left[(p - \beta^2 q) - (p - q) \frac{\beta^2}{\varrho^2} \right] \quad (4.116a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left[(p - \beta^2 q) + (p - q) \frac{\beta^2}{\varrho^2} \right] \quad (4.116b)$$

$$\sigma_z = 2\nu \frac{p - \beta^2 q}{\beta^2 - 1} \quad (4.116c)$$

Si vuole ora valutare il limite di resistenza elastica sulla base del criterio di Guest-Tresca (3.56). Le (4.116) rappresentano gli sforzi principali e τ_{\max} è pari alla metà della massima differenza tra due di esse. Ponendo

$$\pi = q/p \quad (4.117)$$

dalle (4.116) si ottiene

$$\frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) = p(1 - \pi) \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\varrho^2} \quad (4.118a)$$

$$\frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_z) = \frac{1}{2} p \left[(1 - \pi) \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\varrho^2} + (1 - 2\nu) \frac{1 - \beta^2 \pi}{\beta^2 - 1} \right] \quad (4.118b)$$

$$\frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_r) = \frac{1}{2} p \left[(1 - \pi) \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\varrho^2} - (1 - 2\nu) \frac{1 - \beta^2 \pi}{\beta^2 - 1} \right] \quad (4.118c)$$

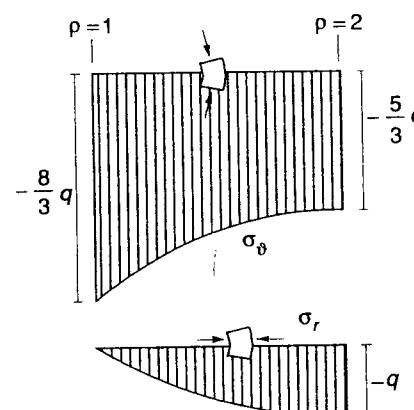


Figura 4.24

L'attenzione verrà limitata al caso $p > 0$, $0 \leq \pi \leq 1$. È allora facile constatare che il massimo di tali differenze corrisponde sempre al raggio interno $\varrho = 1$ ed è dato o dalla prima o dalla terza delle (4.118). Esplicitamente

$$\pi \leq \frac{\beta^2 + 1 - 2\nu}{2\beta^2(1 - \nu)} : \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r)_{\varrho=1} = p(1 - \pi) \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \quad (4.119a)$$

$$\pi \geq \frac{\beta^2 + 1 - 2\nu}{2\beta^2(1 - \nu)} : \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_r)_{\varrho=1} = \\ = \frac{p}{2} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \left[(1 - \pi) - (1 - 2\nu) \frac{1 - \beta^2 \pi}{\beta^2 - 1} \right] \quad (4.119b)$$

Le τ_{\max} sono diagrammate in funzione di π in Figura 4.25, per $\nu = 1/3$ e alcuni valori di β . Con l'eccezione di rapporti π molto prossimi all'unità, la tensione tangenziale massima corrisponde alla (4.119a). Detto allora τ_0 il limite di snervamento, la pressione interna al limite elastico vale

$$p_E = \tau_0 \frac{\beta^2 - 1}{(1 - \pi) \beta^2} \quad (4.120a)$$

Se invece π è sufficientemente elevato, si applica la (4.119b) e il valore di p_E deve essere desunto da essa. In particolare, per $\pi = 1$ si ottiene

$$\tau_{\max} = p \frac{1 - 2\nu}{2} \quad p_E = \tau_0 \frac{2}{1 - 2\nu} \quad (4.120b)$$

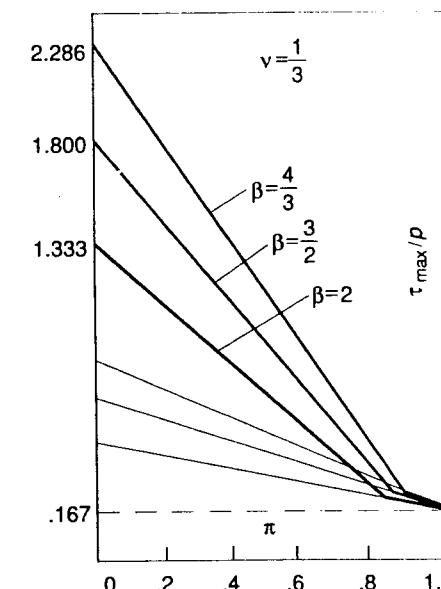


Figura 4.25

D) Il tubo cerchiato

Come la Figura 4.25 evidenzia, a parità di pressione interna la tensione tangenziale massima è notevolmente ridotta in presenza di una concomitante pressione esterna. È allora possibile migliorare il regime statico di un cilindro soggetto a pressione interna ricorrendo all'espedito di forzare l'uno nell'altro due tubi, il primo dei quali abbia raggio esterno c_1 leggermente maggiore del raggio interno c_2 del secondo (Figura 4.26a). Ciò può essere realizzato, ad esempio, riscaldando il cilindro esterno fino a produrre le dilatazioni termiche sufficienti all'inserimento.

Per ristabilire la congruenza, i due cilindri si scambiano una pressione q (Figura 4.26b), il cui valore si determina imponendo che lo spostamento relativo egualgi la sovrapposizione iniziale δ . Detti s_1 e s_2 gli spostamenti nei due tubi, con i simboli di Figura 4.26 tale condizione si scrive

$$s_2(c_2) - s_1(c_1) = \delta \quad (4.121)$$

Coerentemente con l'ipotesi di piccoli spostamenti, si assume $c_1 = c_2 = c$, determinando così attraverso la (4.121) la pressione q necessaria a produrre uno spostamento relativo pari a δ in due cilindri tali per cui il raggio esterno del primo si confonde con il raggio interno del secondo.

Il cilindro ① (di raggio interno a e raggio esterno c) è soggetto a pressione esterna; lo spostamento $s_1(c)$ è quindi dato dalla (4.115b) scritta per $b = c$. Analogamente, per il cilindro ②, soggetto a pressione interna, vale la (4.112a) con $a = c$. Si ottiene allora

$$s_1(c) = -q \frac{1+\nu}{E} \frac{c}{c^2-a^2} [a^2 + (1-2\nu)c^2] \quad (4.122a)$$

$$s_2(c) = q \frac{1+\nu}{E} \frac{c}{b^2-c^2} [b^2 + (1-2\nu)c^2] \quad (4.122b)$$

Si ponga, in analogia con le (4.107)

$$\eta = \delta/a \quad \alpha = c/a \quad (4.123a, b)$$

Alcuni passaggi, qui omessi, riconducono la condizione di congruenza (4.121) alla forma seguente

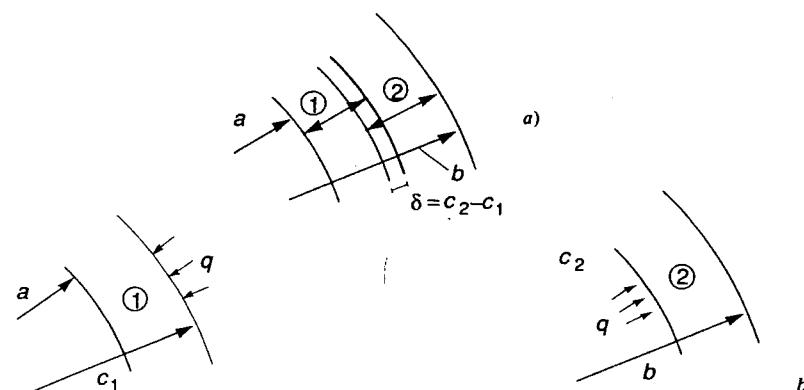


Figura 4.26

$$\eta = \frac{1}{a} (s_2(c) - s_1(c)) = 2q \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\alpha^3(\beta^2-1)}{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha^2-1)} \quad (4.124)$$

Il legame tra la pressione q e la sovrapposizione iniziale è quindi

$$q = \frac{E\eta}{1-\nu^2} \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha^2-1)}{2\alpha^3(\beta^2-1)} \quad (4.125)$$

Le componenti di sforzo nei due cilindri si ottengono dalle (4.113) e (4.110), previa sostituzione di c per il raggio esterno o interno. Risulta, nei due casi

$$a \leq r \leq c : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = -q \frac{c^2}{c^2-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) = -q \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2} \right) \\ \sigma_\theta = -q \frac{c^2}{c^2-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) = -q \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.126a)$$

$$(1 \leq \varrho \leq \alpha) : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = -2\nu q \frac{c^2}{c^2-a^2} = -2\nu q \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \end{array} \right. \quad (4.126b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = -q \frac{c^2}{b^2-c^2} \frac{b^2-r^2}{r^2} = -q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho^2}-1 \right) \\ \sigma_\theta = q \frac{c^2}{b^2-c^2} \frac{b^2+r^2}{r^2} = q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho^2}+1 \right) \\ \sigma_z = 2\nu q \frac{c^2}{b^2-c^2} = 2\nu q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \end{array} \right. \quad (4.127a)$$

$$c \leq r \leq b : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = -q \frac{c^2}{b^2-c^2} \frac{b^2-r^2}{r^2} = -q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho^2}-1 \right) \\ \sigma_\theta = q \frac{c^2}{b^2-c^2} \frac{b^2+r^2}{r^2} = q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho^2}+1 \right) \\ \sigma_z = 2\nu q \frac{c^2}{b^2-c^2} = 2\nu q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \end{array} \right. \quad (4.127b)$$

$$(\alpha \leq \varrho \leq \beta) : \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = -q \frac{c^2}{b^2-c^2} \frac{b^2-r^2}{r^2} = -q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho^2}-1 \right) \\ \sigma_\theta = q \frac{c^2}{b^2-c^2} \frac{b^2+r^2}{r^2} = q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \left(\frac{\beta^2}{\varrho^2}+1 \right) \\ \sigma_z = 2\nu q \frac{c^2}{b^2-c^2} = 2\nu q \frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2} \end{array} \right. \quad (4.127c)$$

con q espresso dalla (4.125) e β e ϱ sempre definiti dalle (4.107). Tali componenti costituiscono uno stato di coazione, in equilibrio sotto azioni esterne nulle. I loro andamenti sono illustrati in Figura 4.27 per il caso

$$\nu = 1/3 \quad \beta = 2 \quad \alpha = 1.5 \quad (4.128a)$$

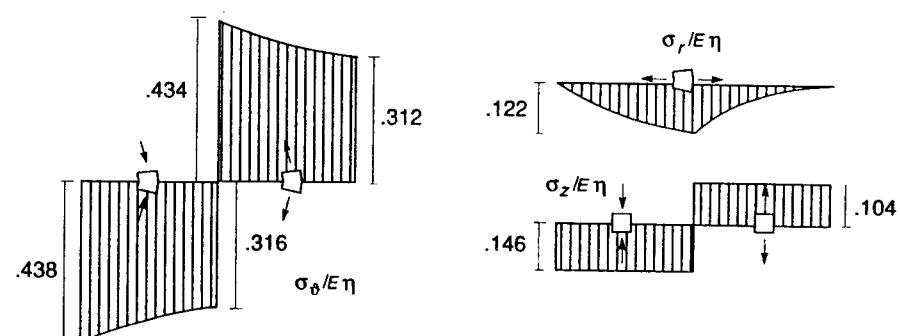


Figura 4.27

per il quale dalla (4.125) si ottiene

$$q = (35/288)E\eta = .122 E\eta \quad (4.128b)$$

A queste autotensioni vanno ora sovrapposti gli sforzi (4.110) indotti dalla pressione interna p sull'intero cilindro. Limitandosi per semplicità al solo caso definito dai dati (4.128), le componenti nel piano risultano nei due tratti

$$\sigma_r(\varrho) = \begin{cases} -\frac{p}{3} \left(\frac{4}{\varrho^2} - 1 \right) - \frac{7}{32} \left(1 - \frac{1}{\varrho^2} \right) E\eta & 1.0 \leq \varrho \leq 1.5 \\ -\left(\frac{p}{3} + \frac{5}{32} E\eta \right) \left(\frac{4}{\varrho^2} - 1 \right) & 1.5 \leq \varrho \leq 2.0 \end{cases} \quad (4.129a)$$

$$\sigma_\theta(\varrho) = \begin{cases} \frac{p}{3} \left(\frac{4}{\varrho^2} + 1 \right) - \frac{7}{32} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2} \right) E\eta & 1.0 \leq \varrho \leq 1.5 \\ \left(\frac{p}{3} + \frac{5}{32} E\eta \right) \left(\frac{4}{\varrho^2} + 1 \right) & 1.5 \leq \varrho \leq 2.0 \end{cases} \quad (4.129b)$$

Se la pressione q all'interfaccia è sufficientemente piccola nei confronti di quella interna, sarà $2\tau_{\max} = |\sigma_\theta - \sigma_r|$. In tale ipotesi, dalle (4.129) si ottiene

$$\tau_{\max}(\varrho) = \begin{cases} \left(\frac{4}{3} p - \frac{7}{32} E\eta \right) \frac{1}{\varrho^2} & 1.0 \leq \varrho \leq 1.5 \\ \left(\frac{4}{3} p + \frac{5}{8} E\eta \right) \frac{1}{\varrho^2} & 1.5 \leq \varrho \leq 2.0 \end{cases} \quad (4.130)$$

Il valore ottimale della sovrapposizione iniziale η può ora essere calcolato imponendo l'egualianza delle τ_{\max} nei due tratti. Ciascuna delle (4.130) assume il valore massimo in corrispondenza del raggio più interno del suo intervallo di definizione ($\varrho = 1.0$ e $\varrho = 1.5$ rispettivamente); si perviene quindi alla condizione

$$\frac{4}{3} p - \frac{7}{32} E\eta = \frac{16}{27} p + \frac{5}{18} E\eta$$

Ricordando anche la (4.128b), si ottiene allora

$$\eta = 1.492 \frac{p}{E} \quad q = .181 p \quad (4.131a, b)$$

Il rapporto $\pi = q/p = .181$ che risulta dalla (4.131b) è ampiamente contenuto nell'intervallo di validità della (4.119a); la tensione tangenziale massima è quindi effettivamente fornita dalla (4.130) anche per il cilindro interno, soggetto a pressione su entrambe le sue superfici. Sostituendo il valore (4.131a) di η nelle (4.129) si ottiene la distribuzione degli sforzi nel piano per il cilindro cerchiato. Risulta

$$\sigma_r(\varrho) = \begin{cases} -\frac{p}{143} \left(\frac{144}{\varrho^2} - 1 \right) & 1.0 \leq \varrho \leq 1.5 \\ -\frac{p}{143} \left(\frac{324}{\varrho^2} - 81 \right) & 1.5 \leq \varrho \leq 2.0 \end{cases} \quad (4.132a)$$

$$\sigma_\theta(\varrho) = \begin{cases} \frac{p}{143} \left(\frac{144}{\varrho^2} + 1 \right) & 1.0 \leq \varrho \leq 1.5 \\ \frac{p}{143} \left(\frac{324}{\varrho^2} + 81 \right) & 1.5 \leq \varrho \leq 2.0 \end{cases} \quad (4.132b)$$

mentre le (4.130) divengono

$$\tau_{\max}(\varrho) = \begin{cases} \frac{144}{143} \frac{p}{\varrho^2} & 1.0 \leq \varrho \leq 1.5 \\ \frac{324}{143} \frac{p}{\varrho^2} & 1.5 \leq \varrho \leq 2.0 \end{cases} \quad (4.133)$$

Tali andamenti sono diagrammati in Figura 4.28, dove sono anche riportati a tratteggio quelli relativi al tubo non cerchiato, che si desumono dalla Figura 4.23. Il benefico effetto della cerchiatura sul livello di sollecitazione è evidente: la pressione al limite elastico si incrementa del 32%, passando da $p_E = .750 \tau_0$ a $p_E = .993 \tau_0$.

E) Cilindro soggetto a gradienti termici

Come ultimo caso si studia il cilindro unicamente soggetto a una variazione radiale di temperatura $\Delta T(r)$. Per $p = q = 0$, le (4.108) si riconducono alle relazioni seguenti

$$K = \frac{1}{\beta^2 - 1} \int_1^\beta \varrho \Theta d\varrho \quad (4.134)$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{\varrho^2} \int_1^\varrho \varrho \Theta d\varrho + K \left(1 - \frac{1}{\varrho^2} \right) \quad \sigma_\theta = \frac{1}{\varrho^2} \int_1^\varrho \varrho \Theta d\varrho - \Theta + K \left(1 + \frac{1}{\varrho^2} \right) \quad (4.135a, b)$$

$$\sigma_z = 2\nu K - \Theta \quad (4.135c)$$

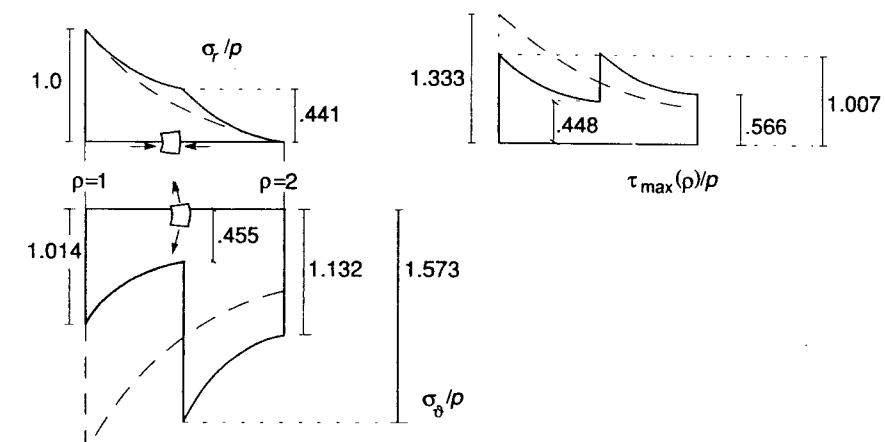


Figura 4.28

dove Θ è proporzionale a ΔT attraverso la (4.99).

Siano Θ_a e Θ_b i valori che Θ assume in corrispondenza dei raggi interno ed esterno. In una situazione di regime, tale quantità varia lungo lo spessore del cilindro seguendo la legge logaritmica

$$\Theta(\varrho) = \Theta_a - (\Theta_a - \Theta_b) \frac{\ln \varrho}{\ln \beta} \quad (4.136)$$

illustrata in Figura 4.29 per $\beta = 2$.

La (4.136) permette di esplicitare le (4.134), (4.135) per il caso in esame. Ricordando l'integrale indefinito

$$\int \varrho \ln \varrho d\varrho = \frac{\varrho^2}{2} \left(\ln \varrho - \frac{1}{2} \right)$$

si perviene, dopo alcuni passaggi, alle espressioni

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} (\Theta_a - \Theta_b) \left\{ \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} - \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} - \frac{\ln \varrho}{\ln \beta} \right\} \quad (4.137a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2} (\Theta_a - \Theta_b) \left\{ \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} - \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2} - \frac{1 + \ln \varrho}{\ln \beta} \right\} \quad (4.137b)$$

$$\sigma_z = -(\Theta_a - \Theta_b) \left\{ \nu \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} - \frac{\nu}{2 \ln \beta} - \frac{\ln \varrho}{\ln \beta} \right\} - (1 - \nu) \Theta_a \quad (4.137c)$$

che definiscono la soluzione in termini di sforzi. Se richiesto, lo spostamento radiale può essere calcolato particolarizzando la (4.108d) in modo analogo.

Si osservi che gli sforzi nel piano dipendono dalla differenza tra le temperature interna ed esterna; in presenza di un'escursione termica uniforme ($\Theta_a = \Theta_b$) risulterebbe diversa da zero la sola σ_z .

In Figura 4.30 sono illustrati gli andamenti degli sforzi lungo lo spessore nel caso di sola temperatura interna ($\Theta_b = 0$) e relativamente ai dati $\beta = 2$ e $\nu = 1/3$. È anche diagrammato in funzione del raggio il valore della tensione tangenziale massima; il punto più sollecitato corrisponde ancora al raggio interno, dove si raggiunge il limite elastico per $|\sigma_z - \sigma_r| = 2\tau_0$.

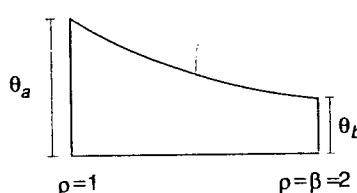


Figura 4.29

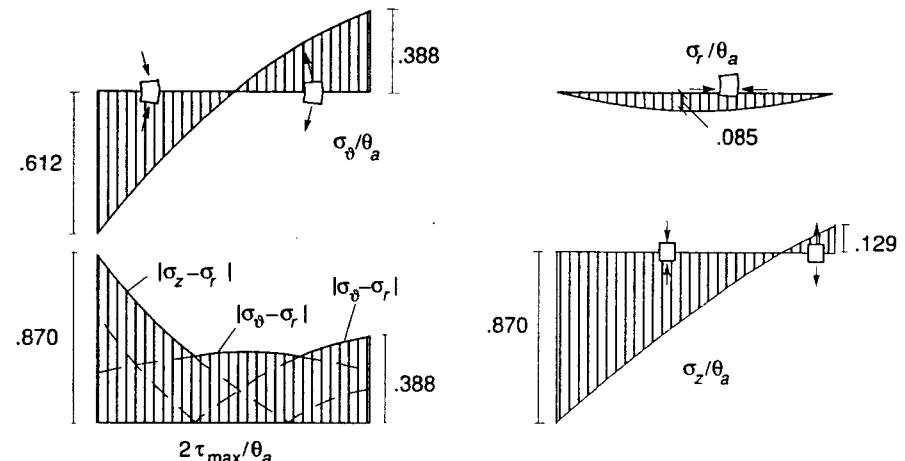


Figura 4.30

In tutti i casi qui considerati, il cilindro era privo di forze di volume. Le σ_r , σ_θ ottenute risolvono allora anche il problema piano negli sforzi relativo a una lastra a corona circolare sollecitata radialmente sui bordi ed eventualmente soggetta a gradienti di temperatura pure radiali. Sarà adesso $\sigma_z = 0$, mentre diversa da zero risulterà la ε_z definita dalla (4.45). Con la simbologia qui adottata, tale relazione si scrive

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1-\nu}{E} \Theta \quad (4.138)$$

Un caso di particolare interesse è rappresentato da una lastra circolare unicamente soggetta a compressione radiale q sul bordo esterno (Figura 4.31). Gli sforzi nel piano si ottengono ponendo $a = 0$ nelle (4.113a, b). È allora

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -q \quad (4.139a)$$

Le relazioni elastiche ed il legame deformazioni-spostamenti relativi al caso piano negli sforzi consentono immediatamente di calcolare le quantità cinematiche non nulle. Si ottiene

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{1-\nu}{E} q \quad \varepsilon_z = 2 \frac{\nu}{E} q \quad (4.139b, c)$$

$$s_r = -\frac{1-\nu}{E} qr \quad s_z = 2 \frac{\nu}{E} qz \quad (4.139d, e)$$

In assenza di gradienti termici ($\Theta = 0$) le (4.116) e (4.138) consentono comunque di scrivere

$$\varepsilon_z = -2 \frac{\nu}{E} \frac{p - \beta^2 q}{\beta^2 - 1} \quad (4.140)$$

Tale valore, in quanto costante, rispetta la condizione di congruenza (4.25a). La soluzione piana negli sforzi è pertanto esatta e valida anche per spessori non piccoli.

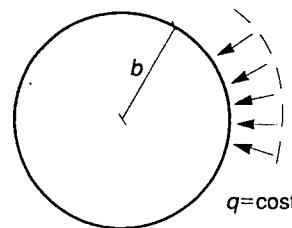


Figura 4.31

È importante osservare a questo proposito come anche per dimensioni notevoli in direzione z il problema non si riconduca al caso piano nelle deformazioni, in apparente contrasto con quanto asserito nel Paragrafo 4.2.2. Tale affermazione è infatti valida solo se le ε_z ottenute tramite la (4.45) (o la (4.138) per il caso qui in esame) dalla soluzione nel piano non risultano congruenti: in un cilindro molto lungo rispetto alle dimensioni della sezione esse allora si contrastano fino a elidersi, se non in prossimità delle sezioni estreme. Se la congruenza è invece rispettata, come è il caso della (4.140), le ε_z sono libere di svilupparsi; la condizione piana nelle deformazioni si ritrova solo se esse sono impeditate da vincoli alle estremità, come illustrato in Figura 4.6.

4.3.3 IL PROBLEMA DI BOUSSINESQ NEL PIANO

Come ultimo esempio di soluzione si considera il problema in Figura 4.32. Un semispazio elastico, omogeneo e isotropo, privo di forze di volume, è soggetto a un carico lineare q (dimensionalmente, una forza per unità di lunghezza) uniformemente distribuito in direzione z e normale al piano che delimita il semispazio stesso. Il problema è considerato piano nelle deformazioni. Il sistema di riferimento usato è pure indicato in Figura 4.32.

Il problema viene affrontato con un metodo semi-inverso: si suppone che σ_r sia l'unica componente non nulla di sforzo nel piano. È allora

$$\sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0 \quad (4.141)$$

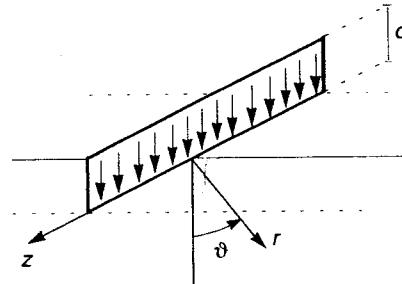


Figura 4.32

La seconda delle equazioni indefinite di equilibrio (4.65) è identicamente soddisfatta, mentre la prima si semplifica nell'espressione seguente

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} = 0 \quad (4.142a)$$

Dal legame elastico (4.22b), (4.34b) si ottengono le deformazioni

$$\epsilon_r = \frac{1+\nu}{E} (1-\nu) \sigma_r \quad \epsilon_\vartheta = -\frac{1+\nu}{E} \nu \sigma_r \quad (4.142b)$$

Esse devono rispettare la condizione di congruenza interna (4.69) scritta per $\gamma_{r\vartheta} = 0$. Introducendo le (4.142b), questa diviene

$$\frac{1-\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \vartheta^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} - \frac{1+\nu}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0 \quad (4.142c)$$

È facile verificare che le (4.142) sono tutte soddisfatte se si assume

$$\sigma_r = C \frac{\cos \vartheta}{r} \quad (4.143)$$

dove C è una costante. La (4.143) rispetta anche le condizioni di equilibrio sul contorno scarico $\vartheta = \pm \pi/2$, dove tutte le componenti di sforzo risultano nulle. Non è però possibile scrivere una condizione di equilibrio locale per $r = 0$, dove è applicato il carico q e la (4.143) prevede una singolarità per σ_r .

Tale circostanza non è inaspettata. Nella rappresentazione nel piano, il carico si configura come concentrato (Figura 4.33a), situazione a rigore non consentita dalle ipotesi alla base della trattazione (il limite (2.1b) non risulta infatti definito). Il problema andrebbe affrontato considerando q come la risultante per unità di lunghezza di una distribuzione di forze di superficie agenti su di una piccola striscia di ampiezza $2d$ attorno all'asse $r = 0$ (Figura 4.33b).

Il principio di equivalenza elastica assicura peraltro che a una certa distanza $\bar{r} \gg d$ dalla zona caricata, l'effettiva distribuzione del carico risulta ininfluente. È allora possibile scrivere una condizione di equilibrio globale imponendo che risulti uguale e contraria a q la risultante delle componenti verticali di σ_r su di una sezione cilindrica di raggio $r = \text{cost}$ (Figura 4.34a). Per unità di lunghezza si ottiene

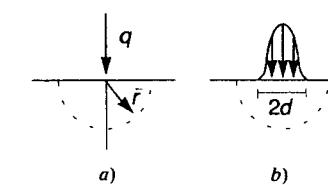


Figura 4.33

$$-q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta \sigma_r r d\vartheta = C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \vartheta d\vartheta = C \frac{\pi}{2}$$

relazione che permette di valutare la costante C . La (4.143) diviene dunque

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi} q \frac{\cos \vartheta}{r} \quad (4.144)$$

L'andamento dello sforzo radiale sull'asse $\vartheta = 0$ è illustrato in Figura 4.34b. Per altri valori di ϑ , esso risulta ridotto proporzionalmente a $\cos \vartheta$. È inoltre presente la componente di sforzo normale in direzione z , definita dalla (4.33) che, nel caso in esame, fornisce

$$\sigma_z = \nu \sigma_r = -\frac{2\nu}{\pi} q \frac{\cos \vartheta}{r} \quad (4.145)$$

Utilizzando la legge di trasformazione (2.8), gli sforzi nel piano possono essere riferiti a un sistema cartesiano ortogonale in cui l'asse y coincide con la retta d'azione di q . Si ottiene, a calcoli svolti

$$\sigma_x = -\frac{2q}{\pi y} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \quad \sigma_y = -\frac{2q}{\pi y} \cos^4 \vartheta \quad \tau_{xy} = -\frac{2q}{\pi y} \sin \vartheta \cos^3 \vartheta \quad (4.146)$$

dove ora si intende $\vartheta = \arctan(x/y)$. Gli andamenti delle (4.146) su di una generica retta $y = a$ parallela alla traccia nel piano del contorno del semispazio sono illustrati in Figura 4.35. I valori positivi corrispondono alle convenzioni in figura.

Introducendo la (4.144), le componenti di deformazione (4.142b) si scrivono

$$\varepsilon_r = -\kappa \frac{\cos \vartheta}{r} \quad \varepsilon_\vartheta = \nu \kappa \frac{\cos \vartheta}{r} \quad (4.147a, b)$$

dove si è posto

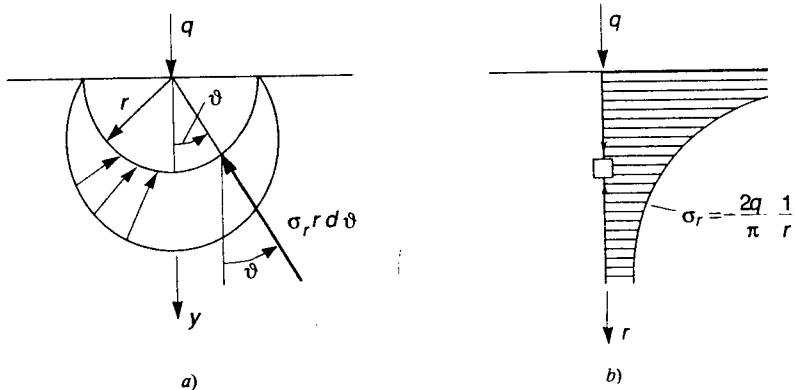


Figura 4.34

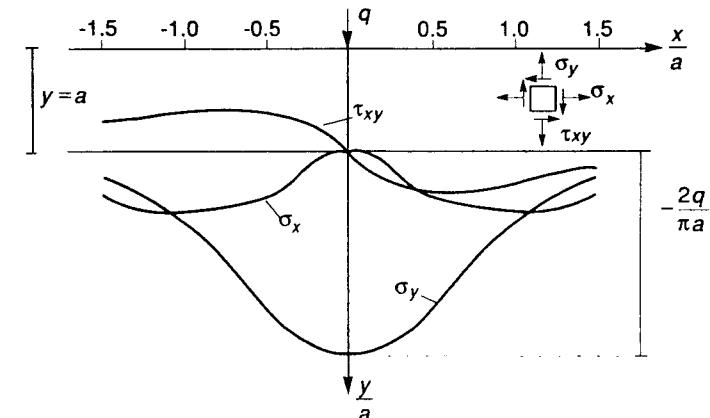


Figura 4.35

$$\kappa = \frac{2}{\pi} \frac{1-\nu^2}{E} q \quad (4.148)$$

Gli spostamenti si determinano integrando le (4.66). Dalle due prime si ottiene

$$s_r = -\kappa \cos \vartheta \ln r + F(\vartheta) \quad (4.149a)$$

$$s_\vartheta = \kappa (\nu + \ln r) \sin \vartheta - \int F(\vartheta) d\vartheta + G(r) \quad (4.149b)$$

dove F e G sono funzioni di integrazione. La terza delle (4.66), scritta per $\gamma_{rz} = 0$, fornisce adesso

$$\kappa(1-\nu) \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{dF}{d\vartheta} + \int F(\vartheta) d\vartheta \right] + \frac{dG}{dr} - \frac{G}{r} = 0$$

da cui si ricava

$$F(\vartheta) = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta - \kappa \frac{1-\nu}{2} \vartheta \sin \vartheta; \quad G(r) = Cr$$

Le componenti di spostamento (4.149) risultano allora

$$s_r = -\kappa (\cos \vartheta \ln r + \frac{1-\nu}{2} \vartheta \sin \vartheta) + A \cos \vartheta + B \sin \vartheta \quad (4.150a)$$

$$s_\vartheta = \kappa \left(\nu + \ln r + \frac{1-\nu}{2} \right) \sin \vartheta - \kappa \frac{1-\nu}{2} \vartheta \cos \vartheta - A \sin \vartheta + B \cos \vartheta + Cr \quad (4.150b)$$

La soluzione del problema elastico è caratterizzata dalla stazionarietà di questi funzionali nei rispettivi domini di definizione. Per dimostrare l'asserto, si farà ricorso al teorema della divergenza in una forma analoga alla (2.59), qui riscritta con riferimento alle quantità ora in gioco

$$\int_S \sigma_{ij} n_i s_j dS = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV + \int_V \sigma_{ij,i} s_j dV \quad (4.163)$$

dove a primo membro è stata conglobata in un unico termine l'intera superficie laterale del mezzo, sia essa caricata o vincolata.

4.4.1.2 Stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale

La variazione prima del funzionale (4.160) si scrive

$$\delta V = \int_V \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\epsilon}_{ij}} \delta \hat{\epsilon}_{ij} dV - \int_V F_j \delta \hat{s}_j dV - \int_{S_F} f_j \delta \hat{s}_j dS \quad (4.164)$$

dove $\delta \hat{s}_j$, $\delta \hat{\epsilon}_{ij}$, costituiscono variazioni congruenti di configurazione, rispettose di condizioni analoghe alle (4.159) ma omogenee al contorno. Precisamente

$$\delta \hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \hat{s}_{i,j} + \delta \hat{s}_{j,i}) \quad \text{in } V \quad \delta \hat{s}_i = 0 \quad \text{su } S_u \quad (4.165a, b)$$

La quantità

$$\hat{\sigma}_{ij} = \partial \omega / \partial \hat{\epsilon}_{ij} \quad (4.166)$$

rappresenta lo sforzo corrispondente attraverso il legame elastico (3.5) alla generica soluzione congruente. Tenendo anche conto delle (4.165), (4.163) si può allora scrivere

$$\int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{1}{2} (\delta \hat{s}_{i,j} + \delta \hat{s}_{j,i}) dV = \int_{S_F} \hat{\sigma}_{ij} n_i \delta \hat{s}_j dS - \int_V \hat{\sigma}_{ij,i} \delta \hat{s}_j dV \quad (4.167)$$

Nel termine al contorno è stato considerata solo la porzione caricata S_F , risultando per la (4.165b) $\delta \hat{s}_j = 0$ su S_u . La (4.164) diviene quindi

$$\delta V = - \int_V (\hat{\sigma}_{ij,i} + F_j) \delta \hat{s}_j dV + \int_{S_F} (\hat{\sigma}_{ij} n_i - f_j) \delta \hat{s}_j dS \quad (4.168)$$

Le variazioni $\delta \hat{s}_j$ sono libere da restrizioni sia in V che su S_F . Perché sia $\delta V = 0$ per tutte le $\delta \hat{s}_j$ occorre quindi che risultino identicamente nulli i due termini in parentesi negli integrali a secondo membro della (4.168), in cui si riconoscono le condizioni di equilibrio indefinite e al contorno (4.1). D'altra parte, se queste sono soddisfatte è certamente $\delta V = 0 \forall \delta \hat{s}_j$. Si è così dimostrato il *teorema della stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale*, che si enuncia come segue:

■ Nella classe delle soluzioni congruenti, il funzionale $V(\hat{s}_j)$ è stazionario in corrispondenza di una soluzione equilibrata.

La dimostrazione del teorema, qui fornita per completezza, poteva in realtà essere omessa. Infatti, inserendo le (4.166) nella (4.164), la condizione $\delta V = 0$ si riconduce all'equazione dei lavori virtuali (2.113), che si è dimostrato (con identico procedimento) essere condizione necessaria e sufficiente di equilibrio. Peraltra, solo in mezzi elasticamente omogenei è possibile derivare, tramite le (4.166), gli sforzi da un potenziale.

4.4.1.3 Stazionarietà dell'Energia Complementare Totale

Si consideri ora la variazione del funzionale (4.162)

$$\delta \Pi = \int_V \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}^*} \delta \sigma_{ij}^* dV - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij}^* n_i \bar{s}_j dS \quad (4.169)$$

$\delta \sigma_{ij}^*$ rappresenta una variazione all'interno del dominio (4.161). È quindi

$$\delta \sigma_{ij,i}^* = 0 \quad \text{in } V \quad \delta \sigma_{ij}^* n_i = 0 \quad \text{su } S_F \quad (4.170a, b)$$

Nella (4.169) la quantità

$$\epsilon_{ij}^* = \partial \gamma / \partial \sigma_{ij}^* \quad (4.171)$$

rappresenta, per la (3.11), la deformazione elastica corrispondente a una generica soluzione equilibrata. Inoltre, la (4.163) stabilisce l'eguaglianza

$$\int_V \delta \sigma_{ij}^* \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV = \int_S \delta \sigma_{ij}^* n_i s_j dS - \int_V \delta \sigma_{ij,i}^* s_j dV$$

Per le (4.170), a secondo membro sopravviverà solamente il termine relativo al contorno vincolato. È dunque

$$\int_{S_u} \delta \sigma_{ij}^* n_i s_j dS - \int_V \delta \sigma_{ij}^* \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV = 0 \quad (4.172)$$

La (4.172) può essere sommata a secondo membro della (4.169) senza alterare il valore di $\delta \Pi$. Inserendo la (4.171) si perviene allora all'espressione

$$\delta \Pi = \int_V \delta \sigma_{ij}^* \left[\epsilon_{ij}^* - \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \right] dV - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij}^* n_i (\bar{s}_j - s_j) dS \quad (4.173)$$

Le variazioni $\delta \sigma_{ij}^*$ sono adesso libere, essendo già stato imposto il rispetto delle (4.170). Perché sia $\delta \Pi = 0 \forall \delta \sigma_{ij}^*$ occorre quindi che risultino identicamente nulli i termini in parentesi nei due integrali, il che implica l'esistenza di spostamenti s_j rispettosi della condizione al contorno (4.2b), da cui le ϵ_{ij}^* sono derivate attraverso le (4.2a). Di converso, se le (4.2) sono verificate, è ovviamente $\delta \Pi = 0 \forall \delta \sigma_{ij}^*$. Si è così dimostrato il *teorema della stazionarietà dell'Energia Complementare Totale*, che si enuncia

■ Nella classe delle soluzioni equilibrate, il funzionale $\Pi(\sigma_{ij}^*)$ è stazionario in corrispondenza di una soluzione congruente.

Questo teorema rappresenta la generalizzazione di un risultato dimostrato in ambito più ristretto da Castiglano ed è talvolta associato al suo nome in letteratura. Anche la sua dimostrazione potrebbe essere prodotta sulla base del principio dei lavori virtuali, visto ora come condizione necessaria e sufficiente di congruenza.

4.4.1.4 Proprietà estremali

I due teoremi testè dimostrati rappresentano formulazioni variazionali dell'equilibrio e della congruenza, rispettivamente caratterizzati dalla stazionarietà dei funzionali (4.160) e (4.162) nei loro domini di definizione. In linea di principio, la stazionarietà non corrisponde necessariamente a un valore estremo. Perché si abbia, ad esempio, un minimo, occorre che la variazione seconda dei funzionali risulti definita positiva, quantomeno in soluzione. Simbolicamente, tale condizione si esprime

$$\frac{1}{2} \delta^2 V > 0 \quad \forall \delta \hat{s}_j \quad \frac{1}{2} \delta^2 \Pi > 0 \quad \forall \delta \sigma_{ij}^* \quad (4.174a, b)$$

con $\delta \hat{s}_j$ e $\delta \sigma_{ij}^*$ rispettosi delle (4.165) e (4.170).

Peraltro, nei due funzionali gli unici termini non lineari sono quelli relativi alle energie di deformazione e complementare. Essi soli contribuiscono alle variazioni seconde, che si scrivono, nei due casi

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \frac{1}{2} \int_V \delta^2 \omega \, dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \epsilon_{ij} \partial \hat{\epsilon}_{kl}} \right) \delta \hat{\epsilon}_{ij} \delta \hat{\epsilon}_{kl} \, dV \quad (4.175a)$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_V \delta^2 \gamma \, dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma_{ij}^* \partial \sigma_{kl}^*} \right) \delta \sigma_{ij}^* \delta \sigma_{kl}^* \, dV \quad (4.175b)$$

dove i termini in parentesi rappresentano gli Hessiani delle energie, valutati in soluzione. Le (4.175) mostrano che condizione sufficiente perché la stazionarietà corrisponda ad un minimo è che le funzioni $\omega(\epsilon_{ij})$ e $\gamma(\sigma_{ij})$ siano ovunque strettamente convesse. In tal caso, infatti, gli integrandi nelle (4.175) sono comunque positivi e le (4.174) risultano sempre soddisfatte, in particolare in soluzione.

Come detto nel Paragrafo 3.2, la convessità di ω (e quindi di γ) è un assunto che si suppone sempre verificato. Pertanto, almeno nell'ambito qui considerato di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, la stazionarietà dei funzionali corrisponde al loro minimo. Indicando con $(\cdot)^0$ i valori delle variabili in soluzione, si hanno quindi le diseguaglianze

$$V(\hat{s}_i) \geq V(s_i^0); \quad \Pi(\sigma_{ij}^*) \geq \Pi(\sigma_{ij}^0) \quad (4.176a, b)$$

Si osservi che, per il principio dei lavori virtuali e la (3.13), con riferimento alla soluzione si può scrivere

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 \, dV = \int_V F_j s_j^0 \, dV + \int_{S_F} f_j s_j^0 \, dS + \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 n_i \bar{s}_j \, dS \quad (4.177a)$$

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 \, dV = \int_V \omega(\epsilon_{ij}^0) \, dV + \int_V \gamma(\sigma_{ij}^0) \, dV \quad (4.177b)$$

Tali relazioni comportano

$$\begin{aligned} V(s_i^0) &= \int_V \omega(\epsilon_{ij}^0) \, dV - \int_V F_j s_j^0 \, dV + \int_{S_F} f_j s_j^0 \, dS = \\ &= - \int_V \gamma(\sigma_{ij}^0) \, dV + \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 n_i \bar{s}_j \, dS = - \Pi(\sigma_{ij}^0) \end{aligned} \quad (4.178)$$

La (4.178), unitamente alle (4.176), stabilisce le diseguaglianze

$$V(\hat{s}_i) \geq V(s_i^0) = - \Pi(\sigma_{ij}^0) \geq - \Pi(\sigma_{ij}^*) \quad (4.179)$$

Nel caso lineare si applicano le (3.19, 20). È allora

$$\omega(\hat{\epsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} (\hat{\epsilon}_{ij} - \vartheta_{ij}) (\hat{\epsilon}_{kl} - \vartheta_{kl}) \quad (4.180a)$$

$$\gamma(\sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^* + \sigma_{ij}^* \vartheta_{ij} \quad (4.180b)$$

e la (4.179) si esplicita come segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl} (\hat{\epsilon}_{ij} - \vartheta_{ij}) (\hat{\epsilon}_{kl} - \vartheta_{kl}) \, dV - \int_V F_j \hat{s}_j \, dV - \int_{S_F} f_j \hat{s}_j \, dS &\geq \\ \geq \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl} (\epsilon_{ij}^0 - \vartheta_{ij}) (\epsilon_{kl}^0 - \vartheta_{kl}) \, dV - \int_V F_j s_j^0 \, dV - \int_{S_F} f_j s_j^0 \, dS &= \\ = - \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 \, dV - \int_V \sigma_{ij}^0 \vartheta_{ij} \, dV + \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 n_i \bar{s}_j \, dS &\geq \\ \geq - \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^* \, dV - \int_V \sigma_{ij}^* \vartheta_{ij} \, dV + \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i \bar{s}_j \, dS & \end{aligned} \quad (4.181)$$

L'interesse dei teoremi energetici non è puramente concettuale. Su di essi si basano molti dei metodi numerici cui si ricorre quando non è disponibile la soluzione in forma chiusa. Ad esempio, è possibile e spesso non difficile discretizzare il problema definendo un'opportuna sottoclassificazione di deformate congruenti in funzione di un numero finito di parametri. Minimizzando il funzionale E.P.T. rispetto a questi parametri si ottiene una soluzione approssimata, che risulta più rigida di quella effettiva nel senso che corrisponde (come la (4.176a) mostra) a un valore di V più elevato di quello relativo alla soluzione del problema continuo (a tale approccio sarà dedicato il Capitolo 10). In modo analogo si può procedere con riferimento all'E.C.T., anche se l'impostazione a priori delle condizioni di equilibrio (4.161) è a volte meno

agevole. Qualora lo stesso problema sia stato risolto con entrambi i metodi, l'entità dell'approssimazione può essere quantificata sulla base delle (4.179), (4.181).

I risultati qui dimostrati nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti valgono, con opportune generalizzazioni, anche al di fuori di questo contesto. Per il teorema della stazionarietà dell'E.P.T. la generalizzazione è relativamente facile. Va però detto che in questo caso la convessità di ω non assicura che la stazionarietà corrisponda necessariamente a un minimo. Meno diretta è la generalizzazione del teorema di stazionarietà dell'E.C.T. [2]. Le difficoltà risiedono principalmente nel fatto che, dovendo l'equilibrio riferirsi alla configurazione deformata, le condizioni che sostituiscono le (4.161) coinvolgono anche gli spostamenti (vedi (2.104)).

4.4.2 MEZZI LINEARI IN ASSENZA DI EFFETTI ANELASTICI

4.4.2.1 Il lavoro di deformazione

Si considera ora il caso di un corpo elastico-lineare, vincolato in modo che risulti impedito ogni moto rigido. Si suppone che i vincoli siano fissi e che le azioni esterne siano puramente meccaniche. Precisamente, si assume

$$\bar{s}_i = 0 \text{ su } S_u \quad \vartheta_{ij} = 0 \text{ in } V \quad (4.182a, b)$$

Le (4.180) allora si semplificano nelle espressioni seguenti

$$\omega(\hat{\epsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{kl} \quad \gamma(\sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^* \quad (4.183a, b)$$

e le (4.166), (4.171) divengono

$$\hat{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} \quad \epsilon_{ij}^* = A_{ijkl} \sigma_{kl}^* \quad (4.184a, b)$$

Ciò consente di scrivere, in alternativa alle (4.183)

$$\omega(\hat{\epsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} \quad \gamma(\sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* \quad (4.185a, b)$$

I simboli $(\hat{})$ o $(\)^*$ intendono sottolineare la natura congruente o equilibrata della quantità in gioco, legate tra loro attraverso le (4.184). ω e γ hanno valori in generale diversi, che però si identificano in soluzione, dove risulta

$$\omega(\epsilon_{ij}^0) = \gamma(\sigma_{ij}^0) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 \quad (4.186)$$

L'integrale di tale quantità sul volume del mezzo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 dV \quad (4.187a)$$

è noto come *lavoro di deformazione*.

L'equazione dei lavori virtuali (4.177a), che per la (4.182a) vede elidersi l'ultimo termine a secondo membro, mostra peraltro che può anche sciversi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V F_j s_j^0 dV + \frac{1}{2} \int_{S_F} f_j s_j^0 dS \quad (4.187b)$$

Tale risultato costituisce il *teorema di Clapeyron*, che si enuncia:

- In un corpo elastico lineare a vincoli fissi e in assenza di effetti anelastici, il lavoro che le forze applicate compirebbero se agissero con tutta la loro intensità finale equivale al doppio del lavoro di deformazione indotto dalle stesse forze che raggiungano gradualmente la loro intensità finale.

Si osservi che essendo sia l'energia di deformazione che quella complementare indipendenti dalla storia del processo deformativo, il lavoro di deformazione (4.187) risulta indipendente dal percorso secondo cui le forze raggiungono il loro valore finale. Risulta cioè indifferente il modo con cui viene realizzato l'effettivo programma di carico, anche se questo deve essere sufficientemente graduale da escludere apprezzabili effetti dinamici.

Si considerino ora due famiglie di forze, per semplicità solo di superficie, f_i^A e f_i^B e siano s_i^A e s_i^B gli spostamenti da esse prodotti se individualmente applicate sul mezzo elastico. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, alle forze $f_i = f_i^A + f_i^B$ corrisponderanno, indipendentemente dalla storia di carico, gli spostamenti $s_i = s_i^A + s_i^B$. In generale, peraltro, il lavoro di deformazione non è additivo. Si supponga infatti di applicare prima la famiglia di forze f_i^A e, solo quando queste hanno raggiunto il loro valore finale, le f_i^B . In tale programma di carico, il lavoro di deformazione risulta

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_{AB} \quad (a)$$

dove

$$\mathcal{E}_A = \frac{1}{2} \int_{S_F} f_i^A s_i^A dS \quad \mathcal{E}_B = \frac{1}{2} \int_{S_F} f_i^B s_i^B dS \quad (b)$$

sono i contributi relativi alle due famiglie di carichi individualmente agenti sul corpo elastico e

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{S_F} f_i^A s_i^B dS \quad (4.188a)$$

è il lavoro compiuto dalle forze f_i^A per gli spostamenti causati dalla successiva applicazione delle f_i^B .

Se il programma di carico viene invertito, applicando le f_i^A solo dopo che le f_i^B hanno raggiunto il loro valore finale, si ottiene, in luogo della (a)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_{BA} \quad (c)$$

I primi due addendi permangono quelli definiti dalle (b). Il terzo è invece il lavoro

compiuto dalle f_i^B per gli spostamenti prodotti dalla successiva applicazione delle f_i^A . Precisamente

$$\mathcal{E}_{BA} = \int_{S_F} f_i^B s_i^A dS \quad (4.188b)$$

Il lavoro di deformazione finale è tuttavia indipendente dal programma di carico. Si ottiene così il notevole risultato

$$\int_{S_F} f_i^A s_i^B dS = \int_{S_F} f_i^B s_i^A dS \quad (4.189)$$

La quantità definita dalle (4.188), che si è dimostrato essere uguali tra loro, è nota come *lavoro mutuo* tra le famiglie di carichi A e B . La (4.189) stabilisce il *teorema di reciprocità* dovuto a *Betti*, che si enuncia come segue

■ Il lavoro che un sistema equilibrato di forze compirebbe se ai punti del solido elastico lineare fossero attribuiti gli spostamenti dovuti a un secondo sistema di forze, pure equilibrato, è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compirebbero qualora al mezzo fossero attribuiti gli spostamenti dovuti al primo sistema di forze.

Il teorema è ovviamente valido anche se le due famiglie A e B includono forze di volume, omesse solo per semplificare le espressioni. È anche facile constatare come la dimostrazione, qui sviluppata con riferimento a un mezzo elastico vincolato, valga pure per corpi privi di vincoli, purché le due famiglie di carichi rispettino le equazioni cardinali della statica. Per il principio dei lavori virtuali infatti, sistemi di forze equilibrati compiono lavoro globalmente nullo per qualsiasi moto rigido. Teoremi di reciprocità sono stati anche dimostrati con riferimento a deformazioni anelastiche; per la loro validità è comunque essenziale che il materiale sia *linearmente* elastico.

4.4.2.2 I teoremi di Castigliano

Si consideri un mezzo elastico lineare a vincoli fissi, soggetto a forze concentrate \mathbf{P}_h , $h = 1, \dots, N$ e si indichino con \mathbf{U}_h i vettori spostamento nei punti di applicazione di tali forze (Figura 4.39). In assenza di altri carichi, il lavoro di deformazione (4.187b) è allora

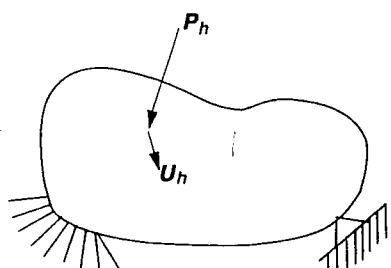


Figura 4.39

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_h \mathbf{U}_h' \mathbf{P}_h \quad (4.190)$$

La (4.190) esige una precisazione. A rigore, la presenza di forze concentrate non è compatibile con le ipotesi alla base della definizione di continuo di Cauchy e comunque, come si è visto trattando il problema di Boussinesq, la loro presenza comporta singolarità negli spostamenti nel punto di applicazione del carico, il che rende la (4.190) priva di significato. Si può però considerare ogni \mathbf{P}_h come la risultante di forze di volume o di trazioni superficiali distribuite su di una piccola porzione ΔV_h o ΔS_h del mezzo. Ad esempio

$$\mathbf{P}_h = \int_{\Delta S_h} \mathbf{f} dS \quad (d)$$

Il lavoro di deformazione indotto dalle sole \mathbf{f} su ΔS_h è ben definito e si scrive

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2} \int_{\Delta S_h} \mathbf{s}' \mathbf{f} dS = \frac{1}{2} \int_{\Delta S_h} s_i f_i dS \quad (e)$$

Il teorema della media afferma peraltro che se una funzione $f(\mathbf{x})$ non cambia di segno su di un dominio ΔS vale l'eguaglianza

$$\int_{\Delta S} s(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dS = U \int_{\Delta S} f(\mathbf{x}) dS \quad (f)$$

dove U è il valore assunto da $s(\mathbf{x})$ in un punto in ΔS . La (f), unitamente alla (d), consente di scrivere

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2} \mathbf{U}_h' \int_{\Delta S_h} \mathbf{f} dS = \frac{1}{2} \mathbf{U}_h' \mathbf{P}_h \quad (g)$$

La (g) rappresenta il generico addendo della (4.190). In presenza di forze concentrate, il lavoro di deformazione può essere definito solo in questo senso.

Indicando con P_h il modulo della forza \mathbf{P}_h e con U_h la proiezione dello spostamento del suo punto di applicazione sulla forza stessa, la (4.190) diviene

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_h U_h P_h \quad (4.191)$$

Data la linearità del problema, tra le componenti di spostamento ed i valori delle forze applicate sussistono relazioni che possono scriversi simbolicamente come segue

$$U_h = \sum_k \alpha_{hk} P_k \quad (4.192a)$$

Le quantità α_{hk} , che non dipendono dall'intensità delle forze applicate, prendono il nome di *coefficienti di influenza* e definiscono lo spostamento nel punto di applicazione e in direzione di P_h causato da $P_k = 1$. Dal teorema di Betti discende immediatamente l'eguaglianza dei coefficienti ad indici invertiti: i lavori mutui compiuti dalle forze P_h (o P_k) per lo spostamento dovuto a P_k (o P_h) valgono infatti, rispettivamente

$$\mathcal{E}_{hk} = P_h \cdot U_h(P_k) = \alpha_{hk} P_h P_k \quad \mathcal{E}_{kh} = P_k \cdot U_k(P_h) = \alpha_{kh} P_k P_h$$

Eguagliando, si ottiene

$$\alpha_{hk} = \alpha_{kh} \quad (4.192b)$$

Le (4.192) consentono di esprimere il lavoro di deformazione come funzione quadratica dei carichi. Si ha allora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{P}) &= \frac{1}{2} \sum_h \sum_k \alpha_{hk} P_h P_k = \frac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{13} P_1 P_3 + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2 + \alpha_{23} P_2 P_3 + \dots + \frac{1}{2} \alpha_{NN} P_N^2 \end{aligned} \quad (4.193)$$

dove si è indicato con \mathbf{P} il vettore che raccoglie le N componenti P_r , $r = 1, \dots, N$ e, nell'esplicitare la sommatoria, si è tenuto conto della simmetria dei coefficienti di influenza. È adesso immediato constatare che vale la relazione

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{P})}{\partial P_h} = \sum_k \alpha_{hk} P_k = U_k \quad (4.194)$$

Essa stabilisce il *teorema di Castigiano sugli spostamenti*, che si enuncia

- In un corpo elastico-lineare a vincoli fissi e soggetto a forze concentrate, la derivata del lavoro di deformazione $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ rispetto alla generica forza P egualia la componente di spostamento nel punto di applicazione e nella direzione della forza stessa.

Il teorema vale anche in presenza di coppie concentrate; l'enunciato si modifica semplicemente sostituendo i termini "coppia" per "forza" e "rotazione" per "spostamento". Anche in questo caso, la definizione di lavoro di deformazione richiede una precisazione [7].

Sarebbe possibile verificare [7] che il teorema di Castigiano sugli spostamenti si configura come un corollario del teorema di stazionarietà dell'Energia Complementare Totale. Dal momento che nel caso di vincoli fissi nel funzionale (4.162) si annulla il termine sul contorno, F si riconduce al solo integrale sul volume che può essere espresso, attraverso l'equilibrio e il legame elastico-lineare, in termini delle forze applicate.

È anche facile dimostrare un risultato duale, noto come *teorema di Castigiano sulle forze*. Risolvendo la (4.192a) per le forze, si può infatti scrivere

$$P_h = \sum_k \beta_{hk} U_k \quad \beta_{hk} = \beta_{kh} \quad (4.195a, b)$$

dove la (4.195b) consegna ancora dal teorema di Betti. Il lavoro di deformazione può quindi essere scritto come funzione quadratica degli spostamenti. Si ottiene

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k \beta_{hk} U_h U_k \quad (4.196)$$

da cui, in virtù della (4.195b), si trae la conclusione

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{U})}{\partial U_h} = \sum_k \beta_{hk} U_k = P_h \quad (4.197)$$

La (4.197) potrebbe anche essere vista come un caso particolare del teorema di stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale.

I risultati qui ottenuti sono, in ultima analisi, tutti corollari più o meno immediati dei teoremi energetici fondamentali dimostrati nel Paragrafo 4.4.1. Ciononostante, essi meritano una trattazione particolare per l'importanza che rivestono ai fini applicativi. Occorre sottolineare che si è fatto esclusivo riferimento a mezzi linearmente elastici, in assenza di cedimenti vincolari e deformazioni anelastiche. In molte circostanze, le due ultime limitazioni possono essere rimosse; dal momento però che le dimostrazioni richiedono comunque che valga la sovrappponibilità degli effetti, i risultati sono confinati in maniera essenziale nell'ambito lineare.

4.4.3 PRINCIPI VARIAZIONALI MISTI

In aggiunta ai teoremi energetici fondamentali, esistono ulteriori formulazioni variazionali del problema elastico (vedi anche Esercizi 4.10, 4.11). Ci si limita qui a presentare una di esse, basata sulla stazionarietà del *funzionale libero*

$$\begin{aligned} J(s_i, \sigma_{ij}) &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV - \int_V \gamma(\sigma_{ij}) dV - \\ &- \int_V F_j s_j dV - \int_{S_F} f_j s_j dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_i (s_j - \bar{s}_j) dS \end{aligned} \quad (4.198)$$

La sua variazione si esprime

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta s_{i,j} + \delta s_{j,i}) dV + \int_V \delta \sigma_{ij} \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV - \\ &- \int_V (\partial \gamma / \partial \sigma_{ij}) \delta \sigma_{ij} dV - \int_V F_j \delta s_j dV - \int_{S_F} f_j \delta s_j dS - \\ &- \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_i (s_j - \bar{s}_j) dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_i \delta s_j dS \end{aligned} \quad (4.199)$$

Per la (4.163), il primo integrale a secondo membro si scrive anche

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta s_{i,j} + \delta s_{j,i}) dV = \int_S \sigma_{ij} n_i \delta s_j dS - \int_V \sigma_{ij,i} \delta s_j dV \quad (4.200)$$

Ricordando che per il legame elastico è $\epsilon_{ij} = \partial \gamma / \partial \sigma_{ij}$, suddividendo nella (4.200) l'integrale di superficie nei due contributi su S_F e S_u e riordinando i termini, la (4.199) diviene

$$\begin{aligned} \delta J &= - \int_V \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} dV - \int_V (\sigma_{ij,i} + F_j) \delta s_j dV + \\ &+ \int_{S_F} (\sigma_{ij} n_i - f_j) \delta s_j dS - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_i (s_j - \bar{s}_j) dS \end{aligned} \quad (4.201)$$

Le variazioni sono completamente libere. La condizione $\delta J = 0 \forall \delta s_j, \delta \sigma_{ij}$ implica quindi l'annullamento dei termini in parentesi nei quattro integrali nella (4.201), ossia il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio e di congruenza (4.1), (4.2). D'altra parte, se queste sono soddisfatte, è chiaramente $\delta J = 0$ identicamente. La stazionarietà del funzionale (4.198) caratterizza quindi la soluzione del problema elastico. Questo risultato è noto come *teorema di Hellinger-Reissner*. Esso è stato proposto dal primo di questi studiosi agli inizi del Novecento e indipendentemente dimostrato dal secondo alcuni anni più tardi.

Dal funzionale libero (4.198) si possono derivare altre formulazioni variazionali, imponendo che le variabili rispettino alcune delle condizioni di equilibrio o di congruenza. Nelle analisi numeriche è spesso usata una forma basata sull'imposizione a priori delle sole condizioni di congruenza al contorno (4.2b). Il completo rispetto dell'equilibrio o della congruenza riconduce il risultato ai due teoremi energetici fondamentali.

Infatti, se le σ_{ij} soddisfano le condizioni di equilibrio (4.161), in virtù della (4.163) il primo termine della (4.198) si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij}^* \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV &= - \int_V \sigma_{ij}^* s_j dV + \int_S \sigma_{ij}^* n_i s_j dS = \\ &= \int_V F_j s_j dV + \int_{S_F} f_j s_j dS + \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_i s_j dS \end{aligned} \quad (h)$$

La (4.198) allora diviene

$$J(\sigma_{ij}^*) = - \int_V \gamma(\sigma_{ij}^*) dV + \int_{S_u} n_i \bar{s}_j dS = - \Pi(\sigma_{ij}^*) \quad (4.202a)$$

D'altra parte, se gli spostamenti sono vincolati al rispetto delle condizioni di congruenza (4.159), l'ultimo integrale nella (4.198) svanisce. Esprimendo inoltre $\hat{\sigma}_{ij}$ in funzione di $\hat{\varepsilon}_{ij}$ attraverso il legame elastico e ricordando la (3.10), si può anche scrivere

$$\int_V \left[\hat{\sigma}_{ij} \frac{1}{2} (\hat{s}_{i,j} + \hat{s}_{j,i}) - \gamma(\hat{\sigma}_{ij}) \right] dV = \int_V [\hat{\sigma}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} - \gamma(\hat{\sigma}_{ij})] dV = \int_V \omega(\hat{\varepsilon}_{ij}) dV \quad (i)$$

L'espressione del funzionale (4.198) quindi diviene

$$J(\hat{s}_i) = \int_V \omega(\hat{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_V F_i \hat{s}_j dV - \int_{S_F} f_j \hat{s}_j dS = V(\hat{s}_j) \quad (4.202b)$$

Per le proprietà estremali dei due funzionali fondamentali, riassunte nelle diseguaglianze (4.179), $\delta J = 0$ corrisponde ad un minimo nel dominio (4.159) e a un massimo in quello definito dalle (4.161). Il funzionale (4.198) non gode quindi di proprietà estremali, ma è stazionario in corrispondenza di un *punto sella* (Figura 4.40).

Benché le condizioni di stazionarietà di J si riconducano a tutte le condizioni di equilibrio e di congruenza, sia interne che al contorno, il funzionale presenta pur sempre una certa asimmetria nel fatto che il legame elastico è incorporato attraverso

l'energia complementare (per ricondursi al caso E.P.T. si è infatti dovuto ricorrere, nella (i), alla trasformata di Legendre). È in effetti possibile produrre una formulazione duale [8], la cui deduzione però richiede un più approfondito studio degli operatori che governano l'equilibrio del solido.

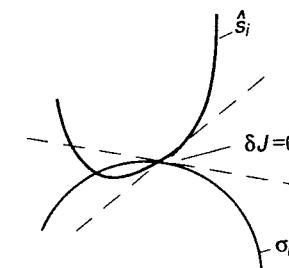


Figura 4.40

ESERCIZI

4.1 Formulare in termini di spostamenti (equazioni di Navier) il problema piano negli sforzi.

4.2 Determinare il più generale polinomio biarmonico $\varphi(x, y)$ di 6° grado.

4.3 Per la lastra rettangolare di Figura 4.12 si assuma la funzione di sforzo

$$\varphi(x, y) = \frac{16}{15} A (3x^5y - 5x^3y^3)$$

Calcolare le risultanti delle trazioni superficiali sui quattro lati che a tale assunto conseguono. Verificare che le tre equazioni cardinali della statica nel piano risultano soddisfatte.

4.4 Una trave piana a forma di settore circolare sia sollecitata da due coppie M uguali e contrarie applicate sui bordi rettilinei (Figura 4.E4a). La soluzione piana negli sforzi (per la sua derivazione, si veda [4]) prevede, per unità di spessore, le seguenti componenti di sforzo non nulle

$$\sigma_r(r) = -\frac{M}{k} \left[\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right]$$

$$\sigma_\theta(r) = -\frac{M}{k} \left[-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} - a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 - a^2 \right]$$

$$k = \frac{1}{4} (b^2 - a^2) - a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2$$

(Il loro andamento sullo spessore è illustrato in Figura 4.E4b per $b = 4$ e $a = 2$). Verificare che tali espressioni effettivamente soddisfano le relazioni che governano il problema piano. Si noti che, anche se σ_r e σ_θ sono indipendenti dall'anomalia e $\tau_{r\theta} = 0$, il problema non è assialsimmetrico in quanto gli spostamenti ovviamente dipendono da ϑ .

4.5 Verificare che per il cilindro assialsimmetrico in Figura 4.22 gli sforzi circonferenziali soddisfano la condizione di equilibrio globale

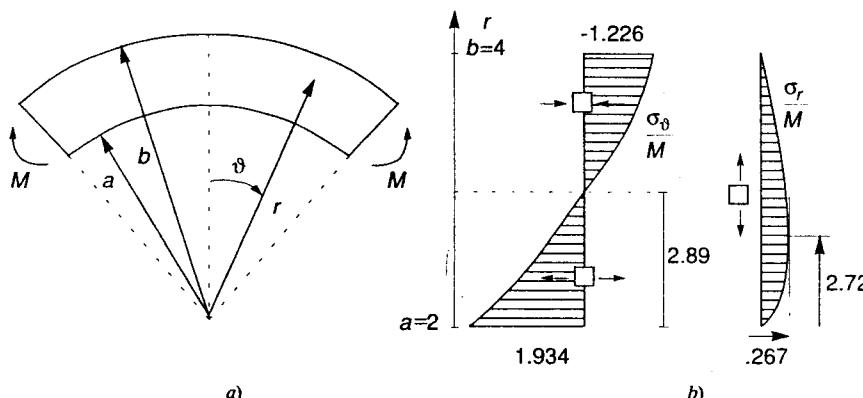


Figura 4.E4

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = ap - bq$$

4.6 Si consideri il problema di Boussinesq nel piano con carico radente alla superficie che delimita il semispazio (Figura 4.E6a). In tal caso si ha, in luogo della (4.144)

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} h \frac{\sin \vartheta}{r}$$

Calcolare la soluzione dovuta al carico inclinato in Figura 4.E6b.

4.7 Un semispazio elastico sia sollecitato da due carichi lineari agenti trasversalmente al contorno, come indicato in Figura 4.E7. Calcolare le componenti di sforzo nel punto A in figura.

4.8 Un contenitore in pressione abbia pareti terminali piane (Figura 4.E8a). Considerando gli spessori piccoli, calcolare il rapporto t/b per cui le sezioni estreme della porzione cilindrica non sono soggette a forze in direzione radiale. Assumere $L/R = 10$ e $\nu = .3$ (le pareti terminali si inflettono, ma ciò induce solo momenti sulle estremità della porzione cilindrica; ai fini della risposta alla domanda formulata, esse possono venire considerate come lastre circolari sollecitate radialmente, Figura 4.E8b).

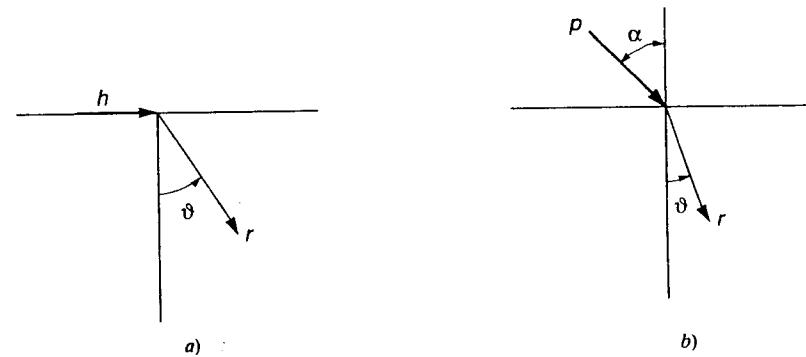


Figura 4.E6

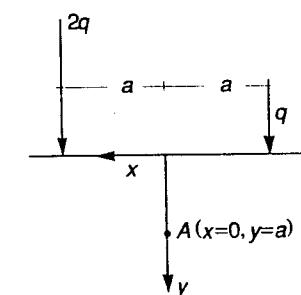


Figura 4.E7

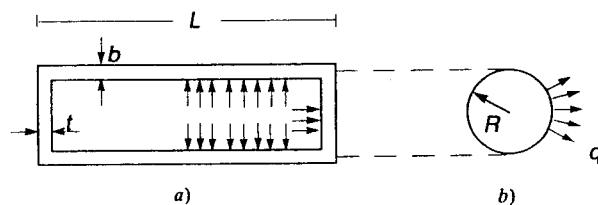


Figura 4.E8

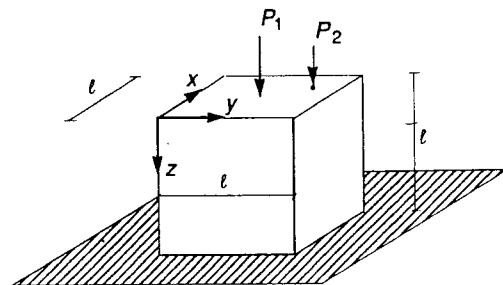


Figura 4.E9

- 4.9 Si consideri (Figura 4.E9) un cubo di materiale elastico lineare di spigolo ℓ . Si supponga che per effetto di una forza $P_1 = 8 \text{ MN}$ applicata nel suo punto di mezzo, la faccia superiore subisca lo spostamento verticale

$$s_z(x, y, z=0) = f \left(4 \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell} - 1 \right) \quad f = 0.3 \text{ mm}$$

Utilizzando il teorema di Betti, calcolare lo spostamento verticale w del punto $(x = \ell/2, y = \ell/2, z = 0)$ quando alla forza P_1 si aggiunga una seconda forza $P_2 = 6.5 \text{ MN}$ applicata nel punto $(x = 3\ell/4, y = 3\ell/4, z = 0)$.

- 4.10 Dimostrare la seguente proprietà variazionale del problema elastico lineare (*teorema di Hu-Washizu* [9]): La stazionarietà del funzionale libero

$$K(s_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) = \int_V \left\{ \left[\sigma_{ij} \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right] + \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - D_{ijkl} \epsilon_{ij} \delta_{kl} \right\} dV - \\ - \int_V F_j s_j dV - \int_{S_f} f_j s_j dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_i (s_j - \bar{s}_j) dS$$

caratterizza la soluzione del problema elastico.

- 4.11 In termini di costanti di Lamè, il legame elastico lineare e isotropo si scrive

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}$$

dove ϵ_{kk} è la deformazione volumetrica. Si introduca la quantità, proporzionale alla pressione idrostatica $p = \sigma_{kk}/3$.

$$P = \lambda\epsilon_{kk} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} = 3 \frac{\nu}{1+\nu} p$$

Il legame elastico può allora scriversi

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + P\delta_{ij} \quad P = 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \quad (\text{E1,2})$$

Si consideri il funzionale

$$M(\hat{s}_i, P) = \int_V \mu(\hat{s}_i, P) dV - \int_V F_j \hat{s}_j dV - \int_{S_f} f_j \hat{s}_j dS \\ \mu(\hat{s}_i, P) = \frac{1}{2} \left(2G \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} + 2P \hat{\epsilon}_{kk} - \frac{1}{\lambda} P^2 \right)$$

definito nell'ambito delle deformate congruenti

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{s}_{i,j} + \hat{s}_{j,i}) \quad \text{in } V \quad \hat{s}_j = \bar{s}_j \quad \text{su } S_u$$

e nel rispetto della parte (E1) del legame elastico. Dimostrare la seguente proprietà variazionale (*teorema di Herrmann* [10]): la stazionarietà di M nel suo dominio di definizione impone le condizioni di equilibrio e la restante parte (E2) del legame costitutivo.

Mostrare inoltre che imponendo a priori la (E2) il funzionale si riconduce all'E.P.T. $V(\hat{s}_i)$. Peraltra, per $\nu \rightarrow .5$ (materiale pressoché incompressibile), V cessa di essere definita mentre M lo è sempre.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SOKOLNIKOFF I.S., *Mathematical theory of elasticity*, 2^a ed., McGraw-Hill, New York, 1956.
- [2] BALDACCI R., *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, UTET, Torino, 1970.
- [3] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Theorie de l'elasticité*, Editions Mir, Mosca, 1967.
- [4] FRANCIOSI V., *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, 2^o ed., Liguori, Napoli, 1965.
- [5] POULOS H.G., DAVIS E.H., *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [6] HARTMAN F., *Introduction to Boundary Elements*, Springer-Verlag, Berlino, 1989.
- [7] LANGHAAR H.L., *Energy methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [8] TONTI E., Variational principles in elastostatics, *Meccanica*, 2, p. 1 (1967).
- [9] WASHIZU K., *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [10] HERRMANN L.R., Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem, *AAIA Journal*, 3, p. 1896 (1965).

Il problema di De Saint Venant

5.1 FORMULAZIONE E APPROCCIO RISOLUTIVO

5.1.1 IL PROBLEMA

Tra i problemi elastici, riveste importanza particolare quello detto di De Saint Venant, dal nome dello studioso francese che lo affrontò per primo [1]. Suo oggetto è il solido cilindrico privo di vincoli illustrato in Figura 5.1, dove è anche indicato il riferimento cartesiano ortogonale che verrà utilizzato: l'origine si colloca nel baricentro G di una sezione estrema, i cui assi assi principali d'inerzia coincidono con x e y . In tale riferimento, detto *principale*, si annullano i momenti statici e il momento centrifugo della sezione rispetto a x e y ; precisamente

$$S_x = \int_A y \, dA = 0 \quad S_y = \int_A x \, dA = 0 \quad I_{xy} = \int_A xy \, dA = 0 \quad (5.1a-c)$$

Limitatamente ai momenti fino al secondo ordine, le proprietà geometriche della sezione si riconguadono quindi all'area A e ai due momenti d'inerzia rispetto agli assi principali. Queste quantità sono definite dalle relazioni

$$A = \int_A dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad I_x = \int_A y^2 dA \quad (5.2a-c)$$

Il cilindro è omogeneo e costituito da un materiale elastico-lineare e isotropo. Si suppongono nulle le forze di volume e le deformazioni anelastiche in V , nonché le trazioni superficiali sulla superficie laterale Γ (Figura 5.1b)

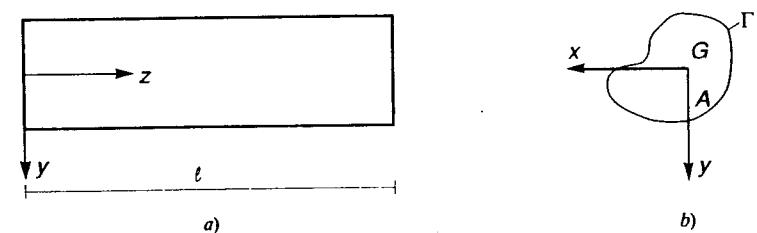


Figura 5.1

$$E_i = 0 \quad \text{in} \quad V \quad \vartheta_{ij} = 0 \quad \text{in} \quad V \quad f_i = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma \quad (5.3a-c)$$

Le sole azioni esterne sono quindi forze di superficie sulle due sezioni estreme $z = 0$ e $z = \ell$, globalmente equilibrate. La loro distribuzione locale non viene specificata. Comunque, il principio di equivalenza elastica (tra l'altro, introdotto da De Saint Venant proprio con riferimento a questo problema) assicura che a una certa distanza dalle sezioni estreme la soluzione dipende solo dalle risultanti. La distribuzione locale non è quindi di interesse se il cilindro è sufficientemente allungato.

Su di una generica sezione retta $z = \text{cost}$, di normale uscente $n' = \{0 \ 0 \ 1\}$, il vettore di sforzo avrà le tre componenti τ_{zx} , τ_{zy} e σ_z . Le azioni interne che ne costituiscono le risultanti, illustrate in Figura 5.2, sono definite dalle relazioni

$$N = \int_A \sigma_z dA \quad T_x = \int_A \tau_{zx} dA \quad T_y = \int_A \tau_{zy} dA \quad . \quad (5.4a-c)$$

$$M_x = \int_A y\sigma_z dA \quad M_y = - \int_A x\sigma_z dA \quad (5.4d, e)$$

$$M_t + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA \quad (5.4f)$$

N (azione assiale) e T_x, T_y (componenti di azione tagliente) sono le risultanti delle tensioni nelle tre direzioni coordinate. M_x, M_y (componenti del momento flettente) sono i momenti degli sforzi normali rispetto ai due assi principali. M_t (momento torcente) è definito dalla (5.4f), il cui secondo membro rappresenta il momento delle tensioni tangenziali rispetto a z e x_0 e y_0 indicano le distanze dagli assi principali delle componenti taglienti; queste potrebbero in realtà essere pensate applicate nel baricentro, conglomerando le loro eventuali eccentricità nel valore di M_t , come fatto nello scrivere la (1.37f); si vedrà, peraltro, che il baricentro non è sempre la collocazione più opportuna.

I valori che le (5.4) assumono in corrispondenza delle sezioni estreme sono le risultanti delle azioni esterne, contraddistinte dagli indici $(\)_0$ e $(\)_L$. Chiaramente, per la sezione $z = 0$, di normale uscente $n' = [0 \ 0 - 1]$, le azioni esterne sono definite dalle (5.4) a meno del segno.

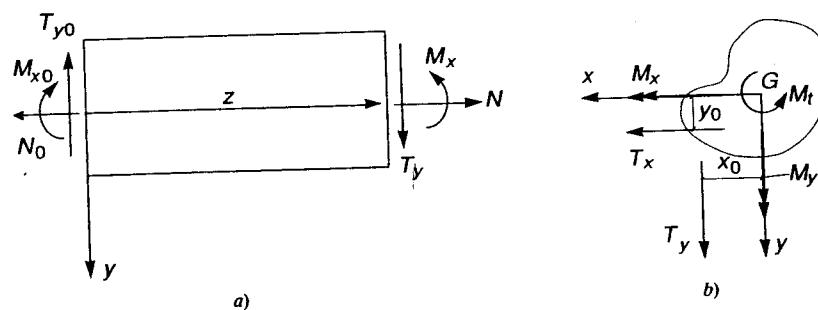


Figura 5.2

In un corpo privo di vincoli, le azioni esterne devono rispettare le sei equazioni cardinali della statica. Queste devono comunque valere per il generico tronco del cilindro in Figura 5.2a. L'equilibrio alla traslazione nelle tre direzioni coordinate e alla rotazione attorno all'asse z richiede

$$N(z) = N_0 = \text{cost} \quad T_r(z) = T_{r0} = \text{cost} \quad T_v(z) = T_{v0} = \text{cost} \quad (5.5a-c)$$

$$M_i(z) = M_{i0} = \text{const} \quad (5.5d)$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ai due rimanenti assi comporta invece

$$M_x(z) = M_{x0} + z T_x \quad M_y(z) = M_{y0} - z T_x \quad (5.6a, b)$$

dove (come si farà anche nel seguito) è stato eliminato l'indice $(\cdot)_0$ per le quantità che l'equilibrio richiede costanti. Le (5.6) scritte per $z = \ell$ configurano le sole condizioni di equilibrio globale che si mantengono significative. Precisamente

$$M_{xL} = M_{x0} + T_x \ell \quad M_{yL} = M_{y0} - T_y \ell \quad (5.7a, b)$$

Il problema viene affrontato con un metodo semi-inverso. Opportune ipotesi sugli spostamenti o sugli sforzi riconducono il problema elastico a una formulazione più semplice, che si dimostra ben posta. Le ipotesi di partenza sono allora verificate e la soluzione può ritenersi trovata per il teorema di Kirchhoff, che ne assicura l'unicità. Va detto che anche per il problema così semplificato non è sempre facile ottenere una soluzione analitica. È a volte necessario, o quanto meno conveniente, ricorrere a approssimazioni, per le quali comunque la formulazione semplificata costituisce un attendibile quadro di riferimento.

L'approccio più classico, sistematizzato in via pressoché definitiva da Clebsch [2], parte da ipotesi sul campo di spostamenti. In questa sede, esso verrà sviluppato solo per un caso particolare. Sarà invece privilegiato l'approccio agli sforzi, la cui formulazione generale viene ora riassunta seguendo la trattazione proposta da Baldacci [3].

5.1.2 APPROCCIO AGLI SFORZ

Si assuma

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (5.8a)$$

L'ipotesi è corretta se risulteranno ovunque verificate, oltre al legame elastico, le condizioni di equilibrio indefinite e al contorno e le equazioni di congruenza interna. Le prime due equazioni indefinite (2.38) divengono ora $\partial\tau_{zx}/\partial z = 0$ e $\partial\tau_{zy}/\partial z = 0$ e richiedono

$$\tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y) \quad \tau_{zy} = \tau_{zy}(x, y) \quad (5.8b)$$

In assenza di forze di volume, la terza delle (2.38) si scrive

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (a)$$

Il legame elastico-lineare e isotropo (3.34) definisce adesso le deformazioni seguenti

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (5.9a-f)$$

$$\gamma_{zx} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{zy}$$

In virtù delle (5.8b), gli scorrimenti angolari risultano indipendenti da z . Le equazioni di congruenza interna (2.129) divengono allora

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = \bar{\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = -\bar{\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \quad (c)$$

dove per semplicità si è posto

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (5.10)$$

Sulla superficie laterale Γ , supposta scarica, varranno le (2.39) con termine noto nullo. Le (5.8a) e la circostanza per cui è $n_z = 0$ su Γ riconducono le prime due a identità; la terza si traduce nella condizione

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (d)$$

che impone l'ortogonalità tra il vettore τ_z delle tensioni tangenziali sulla sezione e la normale n al contorno (Figura 5.3). La (d) esprime matematicamente l'evidente condizione che in un punto del contorno scarico τ_z risulti tangente al contorno stesso.

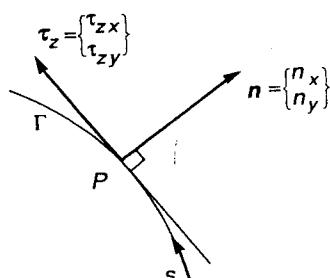


Figura 5.3

Il teorema delle divergenza consente inoltre di scrivere

$$\int_A (\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}) dA = \int_\Gamma (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y) ds$$

dove s è una coordinata curvilinea che percorre il contorno. Ricordando le (a) e (d), si ottiene l'ulteriore condizione

$$\int_A (\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}) dA = 0 \quad (e)$$

La più generale espressione di σ_z in accordo con le (b) è la forma bilineare seguente

$$\sigma_z = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y) \quad (f)$$

Introducendo nella (e) si ottiene allora

$$\int_A (b + b_1 x + b_2 y) dA = bA + b_1 S_y + b_2 S_x = 0$$

il che, in virtù delle (5.1), implica $b = 0$. È quindi

$$\sigma_z = a + a_1 x + a_2 y - z(b_1 x + b_2 y) \quad (5.11)$$

La (5.11) consente di scrivere l'equazione indefinita di equilibrio (a) nella forma

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = b_1 x + b_2 y \quad \text{in } A \quad (5.12)$$

D'altro canto, le (c) si riconducono alle espressioni

$$\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}) = -\bar{\nu} b_2 \quad \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}) = \bar{\nu} b_1$$

Ne consegue che la condizione di congruenza interna può scriversi

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \bar{\nu}(b_1 y - b_2 x) + c \quad \text{in } A \quad (5.13)$$

Si noti che per le (5.8b), le relazioni precedenti sono definite nel dominio piano costituito dall'area A della sezione. A esse va aggiunta la condizione al contorno (d), qui riscritta per completezza

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.14)$$

È possibile dimostrare che il problema (5.12-14) è ben posto. Esistono cioè, e sono

univocamente definite, due funzioni (5.8b) che soddisfano queste equazioni e che, unitamente alla σ_z espressa dalla (5.11), risolvono il problema di De Saint Venant. Tali componenti di sforzo sono infatti equilibrate sia in sede indefinita che sulla superficie laterale scarica e le deformazioni (5.9) che ne conseguono attraverso il legame elastico sono congruenti. Le azioni esterne cui questi sforzi corrispondono sono quindi effettivamente applicate solo sulle sezioni estreme. L'equilibrio permette di esprimere le costanti a , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 e c in funzione delle risultanti di azione esterna. Inserendo la (5.11) nelle (5.4a, d, e) e ricordando le (5.1), (5.2) e (5.6) si ottiene infatti, in ogni sezione retta

$$N = \int_A \sigma_z dA = aA$$

$$M_x = \int_A y\sigma_z dA = (a_2 - z b_2) I_x = M_{x0} + z T_y \quad (g)$$

$$M_y = - \int_A x\sigma_z dA = -(a_1 - z b_1) I_y = M_{y0} - z T_x$$

Se ne evince

$$a = \frac{N}{A} \quad a_1 = - \frac{M_{y0}}{I_y} \quad a_2 = \frac{M_{x0}}{I_x} \quad b_1 = - \frac{T_x}{I_y} \quad b_2 = - \frac{T_y}{I_x} \quad (5.15a-e)$$

Inserendo tali valori nella (5.11) si ottiene

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_{y0} - z T_x}{I_y} x + \frac{M_{x0} + z T_y}{I_x} y = \frac{N}{A} - \frac{M_y(z)}{I_y} x + \frac{M_x(z)}{I_x} y \quad (5.16)$$

L'espressione di σ_z è quindi completamente determinata. La (5.4f) permette di legare alle azioni esterne anche la costante c , che dipende dal momento torcente e eventualmente dalle azioni taglienti. La sua valutazione, peraltro, richiede la conoscenza delle tensioni tangenziali (5.8b), soluzione del problema (5.12-14). Benché ben posto, tale problema non è facilmente risolubile in forma chiusa e verrà nel seguito affrontato con riferimento ai casi particolari che considerano individualmente le possibili combinazioni di azioni esterne.

Si osservi che la valutazione delle costanti prescinde dalle (5.4b, c). Esse risulteranno però certamente verificate dalla soluzione, che soddisfa completamente l'equilibrio indefinito e al contorno. Per quanto affermato nel Paragrafo 2.1.7.4, ciò implica che le equazioni cardinali della statica devono risultare verificate. Se le risultanti delle tensioni tangenziali non corrispondessero alle azioni taglienti applicate, tali equazioni sarebbero ovviamente violate.

La (5.16) è valida limitatamente al riferimento principale. Se infatti gli assi x e y , pur baricentrici, non fossero principali d'inerzia, la (5.15a) resterebbe inalterata, ma le rimanenti costanti diverrebbero

$$\begin{aligned} a_1 &= - \frac{1}{D} (M_{x0} I_{xy} + M_{y0} I_x) & a_2 &= \frac{1}{D} (M_{x0} I_y + M_{y0} I_{xy}) \\ b_1 &= - \frac{1}{D} (T_x I_x - T_y I_{xy}) & b_2 &= \frac{1}{D} (T_x I_{xy} - T_y I_y) \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove $D = I_x I_y - I_{xy}^2 > 0$. Se gli assi non fossero neppure baricentrici, si avrebbe, attraverso i momenti statici, un accoppiamento anche con l'azione assiale (in tal caso la costante b nella (f) non risulterebbe nulla, anche se esprimibile in funzione di b_1 e b_2). La convenienza di operare nel riferimento principale è pertanto evidente.

Per poter affermare che le (5.8), (5.11) risolvono il problema di De Saint Venant, è essenziale stabilire che il problema matematico governato dalle (5.12-14) ammette una soluzione. La dimostrazione di tale risultato viene qui riassunta, seguendo l'itinerario suggerito in [3]. Si ponga

$$\tau_{zx} = \tau_{zx}^0 + \bar{\tau}_{zx} \quad \tau_{zy} = \tau_{zy}^0 + \bar{\tau}_{zy} \quad (5.18a, b)$$

dove

$$\bar{\tau}_{zx} = \frac{1}{2} [b_1(x^2 - \bar{y}y^2) - cy] \quad \bar{\tau}_{zy} = \frac{1}{2} [b_2(y^2 - \bar{x}x^2) + cx] \quad (5.19a, b)$$

sono, come è facile verificare, integrali particolari delle (5.12), (5.13). Il problema diviene allora quello di determinare due funzioni τ_{zx}^0 che soddisfino le condizioni

$$\partial \tau_{zx}^0 / \partial x + \partial \tau_{zy}^0 / \partial y = 0 \quad \partial \tau_{zy}^0 / \partial x - \partial \tau_{zx}^0 / \partial y = 0 \quad \text{in } A \quad (5.20a, b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx}^0 n_x + \tau_{zy}^0 n_y &= -(\bar{\tau}_{zx} n_x + \bar{\tau}_{zy} n_y) = \\ &= -\frac{1}{2} [b_1(x^2 - \bar{y}y^2)n_x + b_2(y^2 - \bar{x}x^2)n_y - c(yn_x - xn_y)] \quad \text{su } \Gamma \end{aligned} \quad (5.20c)$$

Le (5.20) sono riconducibili a formulazioni ben note in Analisi Matematica. Si possono seguire due approcci alternativi.

A) La (5.20b) implica l'esistenza di una funzione $\Psi(x, y)$ tale per cui

$$\tau_{zx}^0 = \partial \Psi / \partial x \quad \tau_{zy}^0 = \partial \Psi / \partial y \quad (5.21a, b)$$

Con questa posizione, la (5.20a) diviene

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 = \nabla_2 \Psi = 0 \quad \text{in } A \quad (5.22a)$$

mentre la (5.20c) si trasforma nella condizione

$$\begin{aligned} (\partial \Psi / \partial x)n_x + (\partial \Psi / \partial y)n_y &= \partial \Psi / \partial n = \\ &= -\frac{1}{2} [b_1(x^2 - \bar{y}y^2)n_x + b_2(y^2 - \bar{x}x^2)n_y - c(yn_x - xn_y)] \quad \text{su } \Gamma \end{aligned} \quad (5.22b)$$

dove si è indicato con $\partial(\)/\partial n$ la derivata in direzione normale al contorno. Le (5.22) sono note come problema di *Neumann-Dini*, la cui soluzione esiste ed è unica, a meno di una costante additiva inessenziale, sotto condizioni molto generali (e di fatto ininfluenti) sulla forma della sezione [4].

B) La (5.20a) implica l'esistenza di una funzione $\Phi(x, y)$ tale per cui

$$\tau_{zx}^0 = \partial\Phi/\partial y \quad \tau_{zy}^0 = -\partial\Phi/\partial x \quad (5.23a, b)$$

Con queste posizioni, la (5.20b) diviene

$$\partial^2\Phi/\partial x^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2 = \nabla_2^2\Phi = 0 \quad \text{in } A \quad (5.24a)$$

mentre la (5.20c) si riconduce alla condizione

$$(\partial\Phi/\partial y)n_x - (\partial\Phi/\partial x)n_y = -(\bar{\tau}_{zx}n_x + \bar{\tau}_{zy}n_y) \quad \text{su } \Gamma \quad (h)$$

Semplici considerazioni geometriche (Figura 5.4) stabiliscono

$$n_x = dy/ds \quad n_y = -dx/ds$$

Ricordando anche le (5.19), la (h) può quindi scriversi

$$(\partial\Phi/\partial y)dy + (\partial\Phi/\partial x)dx = d\Phi = -\frac{1}{2} [b_1(x^2 - \bar{y}y^2)dy - b_2(y^2 - \bar{x}x^2)dx - c(xdx + ydy)] \quad \text{su } \Gamma$$

Integrando si ottiene, a meno di una costante inessenziale

$$\Phi = -\frac{1}{2} b_1 \int_0^s (x^2 - \bar{y}y^2)dy + \frac{1}{2} b_2 \int_0^s (y^2 - \bar{x}x^2)dx + \frac{c}{4} (x^2 + y^2) \quad \text{su } \Gamma \quad (5.24b)$$

Le (5.24) sono note come *problema di Dirichlet*. Anche la sua soluzione esiste (ed è unica) sotto condizioni molto poco restrittive [4].

Si noti che le (5.21) e (5.23) implicano le relazioni

$$\partial\Psi/\partial x = \partial\Phi/\partial y \quad \partial\Psi/\partial y = -\partial\Phi/\partial x \quad (5.25a, b)$$

che stabiliscono un collegamento tra i due approcci.

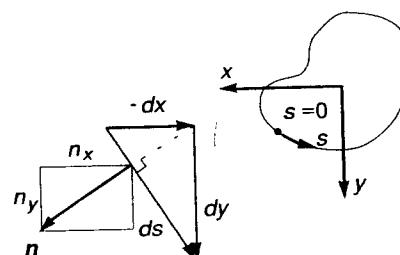


Figura 5.4

5.1.3 APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

A livello deformativo, l'ipotesi in termini di sforzi implica le (5.9). Queste comportano, in particolare

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (5.26)$$

Il campo di spostamenti dovrà allora rispettare le condizioni

$$\partial s_x/\partial x = \partial s_y/\partial y = -\nu\partial s_z/\partial z \quad \partial s_x/\partial y + \partial s_y/\partial x = 0 \quad (5.27a, b)$$

L'approccio agli spostamenti affronta il problema ipotizzando opportune componenti s_i in accordo con le (5.27). Le deformazioni da queste derivate risulteranno certamente congruenti, mentre agli sforzi che ne conseguono attraverso il legame elastico dovranno essere imposte le condizioni di equilibrio indefinite al contorno. Come anticipato, tale approccio sarà qui applicato solo a un caso particolare. Una trattazione dettagliata può essere trovata, ad esempio, in [5].

Si osservi che, essendo il problema privo di vincoli, gli spostamenti sono comunque definiti a meno di moti rigidi. Non si altera cioè la soluzione sovrapponendo spostamenti che corrispondano a deformazioni ovunque nulle, che soddisfino cioè le condizioni

$$\partial s_{ex}/\partial x = \partial s_{ey}/\partial y = \partial s_{ez}/\partial z = 0 \quad (5.28a)$$

$$\partial s_{ex}/\partial y + \partial s_{ey}/\partial x = \partial s_{ey}/\partial z + \partial s_{ez}/\partial y = \partial s_{ez}/\partial x + \partial s_{ex}/\partial z = 0 \quad (5.28b)$$

È facile verificare che il più generale moto rigido corrisponde a spostamenti lineari funzioni di sei costanti indipendenti. Precisamente

$$\begin{aligned} s_x &= U + \Omega_x z - \Omega_y y & s_{ex}(y, z) &= U_e + \Omega_z y - \Omega_y z \\ s_y &= V + \Omega_x z - \Omega_z x & s_{ey}(x, z) &= V_e - \Omega_z x + \Omega_x z \\ s_z &= W + \Omega_y x - \Omega_x y & s_{ez}(x, y) &= W_e + \Omega_y x - \Omega_x y \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.2 I CASI FONDAMENTALI

5.2.1 AZIONI ASSIALE E FLETTENTE

5.2.1.1 Soluzione del caso generale

Una condizione di carico di soluzione pressoché immediata è quella costituita unicamente da azioni assiale e flettente costanti (Figura 5.5). Essendo nulle le componenti dell'azione tagliente, la (5.16) si scrive

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y \quad (5.30)$$

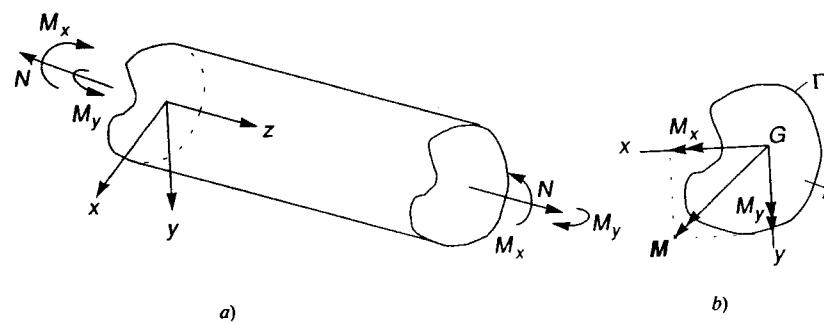


Figura 5.5

Le (5.15d, e) impongono ora $b_1 = b_2 = 0$. Dal momento che è anche $M_z = 0$, le (5.12-14) risultano verificate se si assume $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ e $c = 0$. In termini di sforzi, la soluzione presenta quindi come unica componente non nulla la σ_z definita dalla (5.30).

La semplicità del problema rende conveniente un approccio diretto. Si assuma come unica componente di sforzo non nulla

$$\sigma_z = K_0 + K_1 x + K_2 y \quad (5.31)$$

L'equilibrio è allora soddisfatto sia in sede indefinita che sulla superficie laterale Γ , come immediato constatare. Pure verificate risulteranno le condizioni di congruenza interna, che sono omogenee e coinvolgono derivate seconde delle deformazioni, mentre le componenti non nulle ottenute dalla (5.31) attraverso il legame elastico sono funzioni lineari del punto. L'equilibrio globale su di una sezione retta permette di identificare le costanti K_i con i coefficienti nella (5.30).

5.2.1.2 Azione assiale

Si supponga presente la sola azione assiale N ($M_x = M_y = 0$, Figura 5.6a). La (5.30) diviene

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad (5.32)$$

e configura uno stato tensionale ovunque costante. Le deformazioni a esso associate risultano

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA} \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{N}{EA} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (5.33a-c)$$

È facile verificare che esse sono derivabili dagli spostamenti

$$s_x = -\nu \frac{N}{EA} x \quad s_y = -\nu \frac{N}{EA} y \quad s_z = \frac{N}{EA} z \quad (5.34a-c)$$

cui possono sovrapporsi moti rigidi (5.29) di ampiezza arbitraria. Il regime deformativo del prisma è quindi quello illustrato in Figura 5.6b.

Dal momento che sforzi e deformazioni sono ovunque costanti, la soluzione è convenientemente espressa in termini di quantità globali. Indicando con Δ lo spostamento relativo in direzione z tra i due estremi, si ottiene

$$\Delta = s_z(\ell) - s_z(0) = \ell \epsilon_z = \frac{N\ell}{EA} \quad (5.35)$$

dove ℓ è la lunghezza del prisma.

5.2.1.3 Flessione retta

Si assuma ora che agisca solo un momento flettente $M = M_x$ nel piano principale (z, y), che prende il nome di *piano di sollecitazione* (la sua traccia s nel piano della sezione coincide quindi con l'asse y , Figura 5.7). Tale caso è noto come *flessione retta*. Per $N = 0$ e $M_y = 0$ la (5.30) diviene

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{My}{I} \quad (5.36)$$

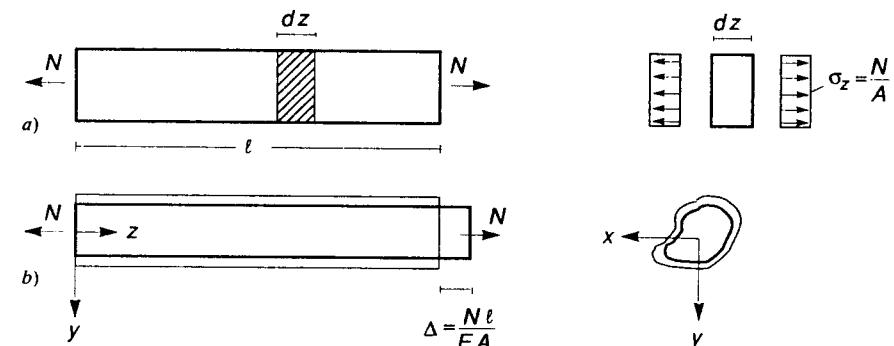


Figura 5.6

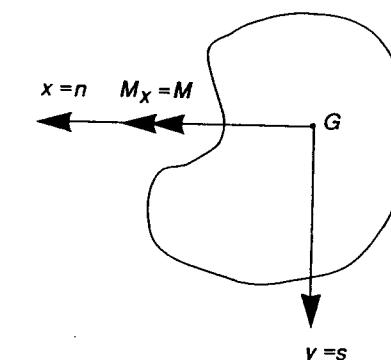


Figura 5.7

dove, non sussistendo possibilità di equivoco, si è indicato con $I = I_x$ il momento d'inerzia rispetto a x . La (5.36) mostra che gli sforzi variano linearmente sulla sezione, annullandosi in corrispondenza dell'*asse neutro n*, nel caso in esame coincidente con x . Per momenti positivi, le fibre corrispondenti a $y > 0$ risultano tese, quelle relative a $y < 0$ compresse (Figura 5.8).

L'andamento lineare delle σ_z comporta che i valori massimi e minimi della sollecitazione si riscontrino nelle fibre più distanti dall'asse neutro. Se la sezione è simmetrica rispetto a questo asse, tali valori risultano uguali a meno del segno. Non così se x non è equidistante dalle fibre estreme. Due tipiche distribuzioni di sforzo sono illustrate nelle Figure 5.9 e 5.10. I valori sono relativi al caso di momento positivo, che tende le fibre inferiori.

Le deformazioni associate alla (5.36) attraverso il legame elastico sono

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{My}{EI} \quad \epsilon_z = \frac{My}{EI} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (5.37a-c)$$

Il corrispondente campo di spostamenti si ottiene per integrazione. A meno di moti rigidi, risulta

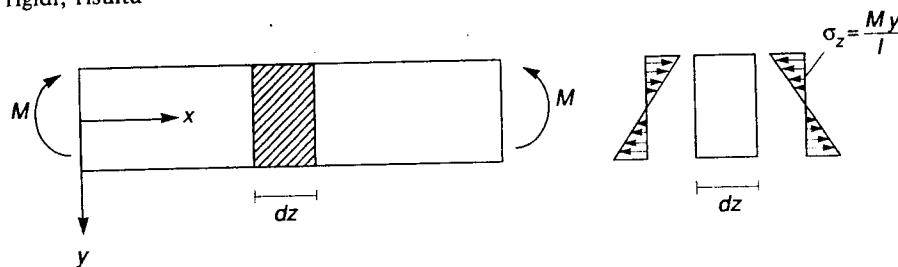


Figura 5.8

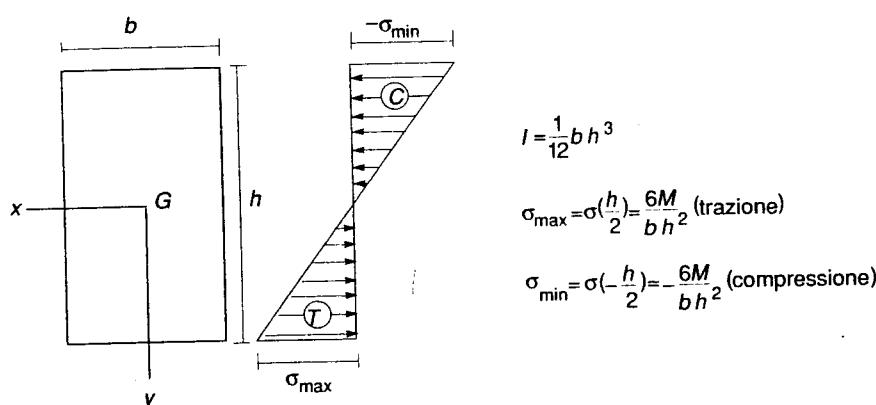


Figura 5.9

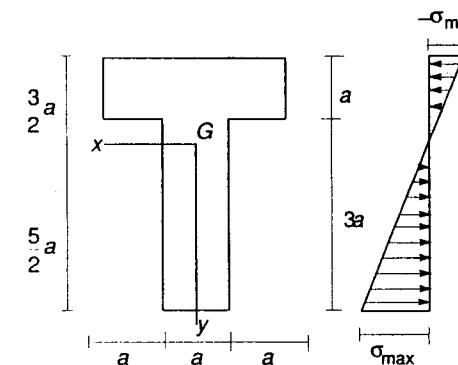


Figura 5.10

$$s_x = -\nu \frac{M}{EI} xy \quad s_y = -\frac{M}{2EI} [z^2 + \nu(y^2 - x^2)] \quad s_z = \frac{M}{EI} yz \quad (5.38a-c)$$

Integrando le relazioni $\epsilon_x = \partial s_x / \partial x$ (e analoghe) che definiscono le componenti di deformazione diretta, si ottiene infatti

$$s_x = -\nu \frac{M}{EI} xy + f(y, z) \quad s_y = -\nu \frac{M}{2EI} y^2 + g(x, z) \quad s_z = \frac{M}{EI} yz + h(x, y) \quad (b)$$

devono peraltro valere anche le condizioni

$$\gamma_{xy} = \partial s_x / \partial y + \partial s_y / \partial x = -\nu \frac{M}{EI} x + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \partial s_y / \partial z + \partial s_z / \partial y = \frac{M}{EI} z + \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (c)$$

$$\gamma_{zx} = \partial s_z / \partial x + \partial s_x / \partial z = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

una soluzione delle (c) è costituita da $f = h = 0$, $g = \frac{M}{2EI} (\nu x^2 - z^2)$, col che le (b) si riconducono alle (5.38).

Si lascia come esercizio il verificare la corrispondenza tra le (5.38) e le espressioni ottenute nel capitolo precedente con riferimento alla lastra trave di Figura 4.14a.

Si indichino con u , v , w le componenti di spostamento secondo i tre assi coordinati dei punti dell'asse baricentrico z . Ponendo nelle (5.38) $x = y = 0$, queste divengono

$$u = 0 \quad v = -\frac{Mz^2}{2EI} \quad w = 0 \quad (5.39a-c)$$

L'asse baricentrico si sposta quindi nel piano (z , y), detto *piano di inflessione*, che, nel

caso di flessione retta, coincide col piano di sollecitazione. Tale spostamento risulta parabolico ed è illustrato in Figura 5.11.

La rotazione della linea media $\varphi(z)$ (positiva come in Figura 5.11) vale, nell'ipotesi di piccoli spostamenti

$$\varphi(z) = \tan \varphi = -\frac{dv}{dz} = \frac{Mz}{EI} \quad (5.40)$$

Sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la curvatura $\chi(z)$ dell'asse z può inoltre esprimersi

$$\chi(z) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M}{EI} \quad (d)$$

È quindi

$$M = EI\chi \quad \chi = -\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (5.41a, b)$$

Essendo $\gamma_{zy} = 0$, sezioni piane e ortogonali alla linea media si mantengono tali a deformazione avvenuta. Detta allora $d\varphi$ la rotazione relativa tra due sezioni a distanza dz (Figura 5.12), si ha, per la (5.37b)

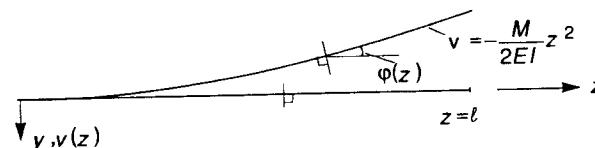


Figura 5.11

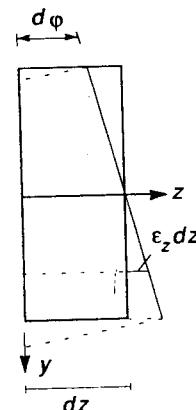


Figura 5.12

$$d\varphi = \frac{\epsilon_z}{y} dz = \frac{M}{EI} dz \quad (e)$$

riottenendo così le (5.41) in modo geometricamente più evidente.

La (5.41a) è nota come legge di Bernoulli-Navier ed è ritenuta valida anche per grandi spostamenti, purché permangano piccole le componenti delle deformazione pura, circostanza peraltro verificata in campo elastico per i più comuni materiali da costruzione. Ovviamente, in grandi spostamenti perde di validità la (5.41b).

Si osservi che la (5.41a) comporta per la linea media curvatura costante. Essa dovrebbe allora essere un arco di cerchio e non la parabola (5.39b). Per piccoli spostamenti la curva parabolica e l'arco di cerchio tuttavia si identificano: la differenza, dovuta all'approssimazione (d), è infatti proporzionale a una quantità del secondo ordine, trascurabile in questo ambito.

È ancora facile esprimere la soluzione in termini di quantità globali. Posto infatti

$$\Phi = \varphi(\ell) - \varphi(0) \quad (5.42a)$$

dalla (e) si ottiene immediatamente

$$\Phi = \int_0^\ell d\varphi = \frac{M\ell}{EI} \quad (5.42b)$$

5.2.1.4 Flessione deviata

Si supponga che il piano di sollecitazione (s, z) non coincida con un piano principale (*flessione deviata*). Detto γ l'angolo che l'asse s forma con y (Figura 5.13a), le componenti del momento M sugli assi principali risultano

$$M_x = M \cos \gamma \quad M_y = M \sin \gamma \quad (5.43)$$

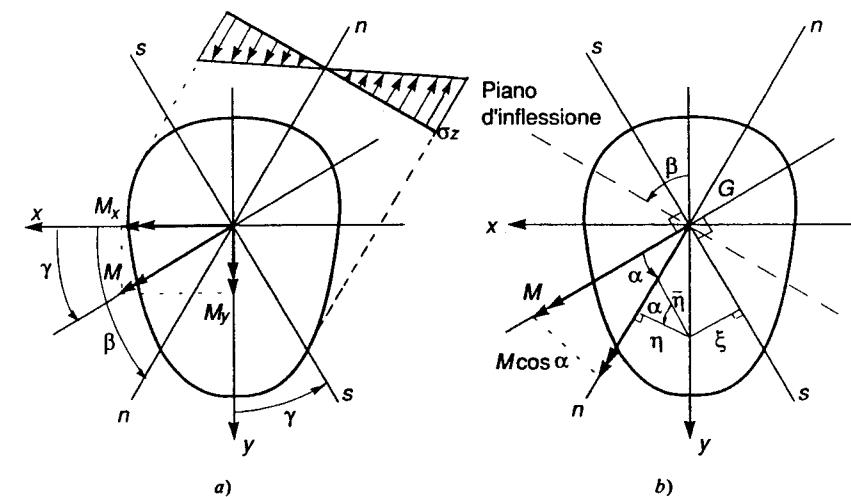


Figura 5.13

La soluzione del problema consiste nella semplice sovrapposizione di quelle dei due casi di flessione retta relativi alle componenti M_x e M_y . Dalla (5.30) si ottiene

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = M \left(\frac{y \cos \gamma}{I_x} - \frac{x \sin \gamma}{I_y} \right) \quad (5.44)$$

Gli sforzi si annullano sulla retta di equazione

$$y = x \tan \beta \quad \tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma \quad (5.45a, b)$$

che identifica l'asse *neutro n*. Questo risulta baricentrico ma in generale non più ortogonale all'asse di sollecitazione.

ESEMPIO 5.1 Si valuta ora lo stato di sforzo per la sezione a T di Figura 5.10, soggetta a un momento M con asse di sollecitazione inclinato di $\gamma = 30^\circ$ (Figura 5.14). Per tale sezione, i momenti d'inerzia principali valgono

$$I_x = \frac{17}{2} a^4 \quad I_y = \frac{5}{2} a^4$$

Dalla (5.45b) si ottiene, per il caso in esame

$$\tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma = \frac{17}{5\sqrt{3}} = 1.963$$

da cui $\beta = 63^\circ$, valore che definisce l'inclinazione dell'asse neutro rispetto a x . L'espressione (5.44) della σ_z ora si scrive

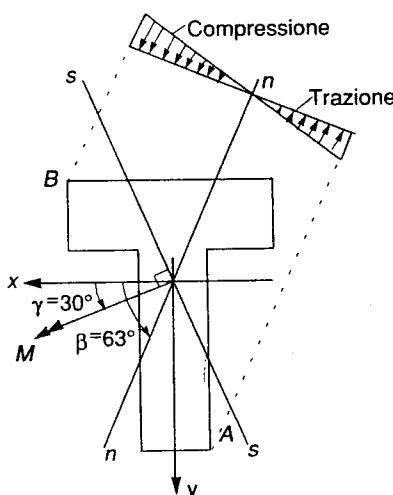


Figura 5.14

$$\sigma_z = \frac{M}{a^4} \left(\frac{\sqrt{3}}{17} y - \frac{1}{5} x \right)$$

I punti più sollecitati a trazione e compressione sono quelli indicati con A e B in Figura 5.14, di coordinate rispettivamente $(-a/2, 5a/2)$ e $(3a/2, -3a/2)$. Sarà in essi

$$\sigma_z^A = .355 \frac{M}{a^3} \quad \sigma_z^B = -.453 \frac{M}{a^3}$$

In letteratura è a volte preferita un'espressione alternativa della soluzione, che non considera il problema della flessione deviata come sovrapposizione di due casi di flessione retta. Indicando con η la distanza dall'asse neutro (Figura 5.13b), si può scrivere, in luogo della (5.44)

$$\sigma_z = K\eta \quad (f)$$

È immediato verificare che, essendo $\int_A \eta dA$ il momento statico rispetto a un asse baricentrico, risulta

$$\int_A \sigma_z dA = K \int_A \eta dA = 0$$

L'equilibrio alla rotazione attorno a s fornisce inoltre

$$\int_A \xi \sigma_z dA = K \int_A \xi \eta dA = K I_{sn} = 0$$

dove I_{sn} rappresenta il momento centrifugo della sezione rispetto agli assi n e s . L'annullarsi di tale valore identifica l'asse neutro come il coniugato dell'asse di sollecitazione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione [6].

Il valore di K può essere determinato imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno a n . Posto $\alpha = \beta - \gamma$ (Figura 5.13b), si ottiene

$$M \cos \alpha = \int_A \sigma_z dA = K \int_A \eta^2 dA = K I_n \quad (g)$$

dove I_n indica il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro. Risolvendo la (g) per K e introducendo nella (f) si perviene all'espressione

$$\sigma_z = \frac{M \cos \alpha}{I_n} \eta \quad (5.46a)$$

È anche possibile esprimere lo sforzo in una forma analoga a quella della flessione retta, misurando le distanze parallelamente all'asse di sollecitazione. Posto infatti

$$\eta = \bar{\eta} \cos \alpha \quad \bar{I}_n = \int_A \bar{\eta}^2 dA = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \int_A \eta^2 dA = \frac{I_n}{\cos^2 \alpha}$$

si ottiene immediatamente

$$\sigma_z = \frac{M \bar{\eta}}{\bar{I}_n} \quad (5.46b)$$

Le deformazioni non nulle divengono

$$\varepsilon_z = \frac{M \cos \alpha}{I_n} \quad \eta = \frac{M \bar{\eta}}{E \bar{I}_n} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{M \bar{\eta}}{E \bar{I}_n} \quad (5.47)$$

Le sezioni ruotano quindi attorno all'asse neutro e la linea media della trave si inflette nel piano, detto di *inflessione*, la cui traccia è a esso perpendicolare (Figura 5.13b).

5.2.1.5 Tenso(presso)-flessione

Nel caso più generale di concomitanti azioni flettenti e assiale, la (5.30) si scrive, tenendo conto delle (5.43)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + M \left(\frac{\cos \gamma}{I_x} y - \frac{\sin \gamma}{I_y} x \right) \quad (5.48)$$

La condizione $\sigma_z = 0$ identifica ancora la posizione dell'asse neutro, la cui equazione adesso risulta

$$y = x \tan \beta - B \quad (h)$$

dove $\tan \beta$ è sempre definito dalla (5.45b) e

$$B = \frac{I_x}{A} \frac{N}{M} \frac{1}{\cos \gamma} \quad (i)$$

L'asse neutro è quindi una retta che ha ancora lo stesso coefficiente angolare β che nel caso di pura flessione, però non più baricentrica. Essa intercetta l'asse y per $y = -B$ e ha distanza dal baricentro pari a (Figura 5.15)

$$\delta = B \cos \beta = \frac{I_x}{A} \frac{N}{M} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{I_y}{A} \frac{N}{M} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad (j)$$

Il caso di tensio-flessione può essere riguardato come relativo a una forza N parallela all'asse z , ma applicata in un punto P a una distanza e (detta *eccentricità*) dal baricentro della sezione. È infatti immediato constatare l'equivalenza delle due situazioni in Figura 5.16. Posto allora $M = Ne$, si ottiene dalla (j)

$$\delta = \frac{I_x}{Ae} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{I_y}{Ae} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad (k)$$

Nel caso di flessione retta, con piano di inflessione (z, y), è $\gamma = \beta = 0$. La distanza dall'asse neutro risulta allora

$$\delta = B = \frac{I_x}{Ae} \quad (l)$$

Può darsi il caso di un materiale capace di trasmettere solamente sforzi di compressione. Un conglomerato, a esempio, si fessura a trazione sotto livelli di sollecitazione molto modesti; il suo comportamento può essere rappresentato, in prima approssimazione, dal diagramma $\sigma - \epsilon$

in Figura 5.17. Lo stesso diagramma può essere utilizzato per simulare l'incapacità di opporsi alla separazione di due conci elastici a contatto, o al sollevamento di un plinto di fondazione poggiante sul terreno.

Tale comportamento non è elastico-lineare e richiederebbe quindi un'apposita trattazione. È però evidente che non sussistono differenze quando tutte le fibre risultano compresse, quando cioè l'eccentricità è tale da portare l'asse neutro n in posizione completamente esterna alla sezione. Il luogo di tali eccentricità è noto come *nocciola centrale d'inerzia*.

A titolo d'esempio, si considerino (Figura 5.18) due conci rettangolari tenuti in contatto tra loro da una forza di compressione P agente sull'asse y a una distanza $|e|$ dall'asse x . Per una sezione rettangolare è $A = bh$ e $I_x = bh^3/12$. Per la (ℓ), la distanza δ da x risulta quindi

$$|\delta| = \frac{h^2}{12} \frac{1}{|e|}$$

e la condizione $|\delta| \geq h/2$ richiede che sia $|e| \leq h/6$.

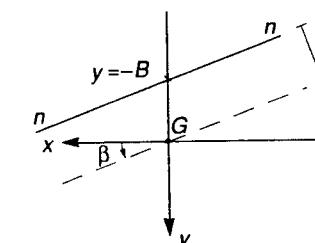


Figura 5.15

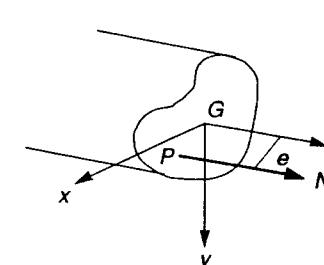


Figura 5.16

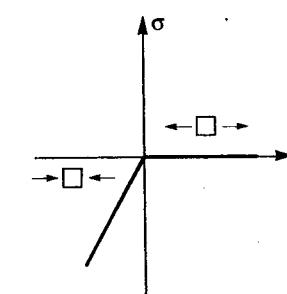
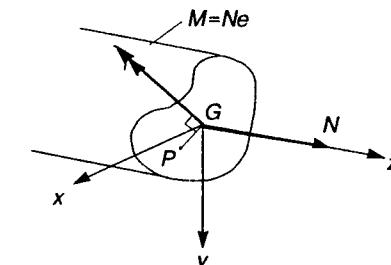


Figura 5.17

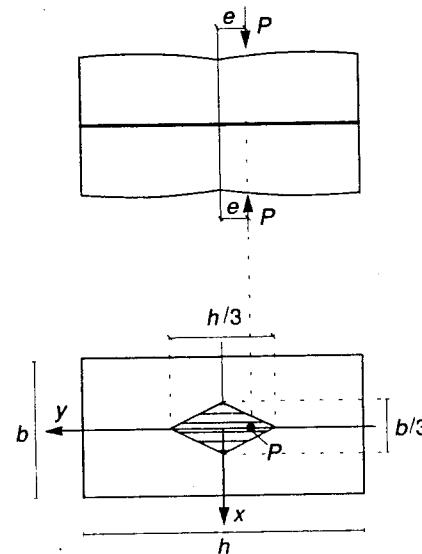


Figura 5.18

Sarebbe possibile constatare, esaminando i diversi casi di presso-flessione deviata, che il nocciolo centrale d'inerzia della sezione rettangolare è il rombo tratteggiato in Figura 5.18. Sempre per P agente sull'asse di simmetria y , sono illustrati in Figura 5.19a,b gli sforzi di compressione che i conci si scambiano per $|e| = h/12$ e per $|e| = h/6$, quando l'asse neutro viene a coincidere con il bordo $|y| = h/2$.

Per $|e| = 2h/7 > h/6$ (Figura 5.19c), la (5.48) prevederebbe, in una zona a sinistra in figura, trazioni che i conci non sono in grado di trasmettere. La sezione quindi si *parzializza* e la soluzione elastica perde di validità. Nell'esempio considerato, sarebbe facile verificare come gli sforzi di compressione si ridistribuiscono su di una *sezione reagente*, tale che la retta d'azione di P si collochi all'estremo del suo nocciolo centrale d'inerzia (Figura 5.19d). Un procedimento di questo tipo, peraltro, si complica pressoché inestricabilmente nel caso di presso-flessione deviata, per cui risulta di fatto più conveniente, oltre che concettualmente più corretto, operare tenendo conto dell'effettivo comportamento del materiale di Figura 5.17, che non si configura come elastico-lineare.

Va anche osservato che la parzializzazione della sezione comporta un incremento dei valori di picco degli sforzi di compressione, che crescono illimitatamente per $|e| \rightarrow h/2$. Di fatto, in campo elastico sono tollerabili solo parzializzazioni molto limitate.

5.2.1.6 Lavoro di deformazione

La soluzione trovata è indipendente da z ; pertanto il lavoro di deformazione (4.187) può essere definito per unità di lunghezza. Tenendo presente che la sola σ_z è diversa da zero, esso risulta

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{2} \int_A \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dA = \frac{1}{2} \int_A \sigma_z \epsilon_z dA = \frac{1}{2E} \int_A \sigma_z^2 dA \quad (m)$$

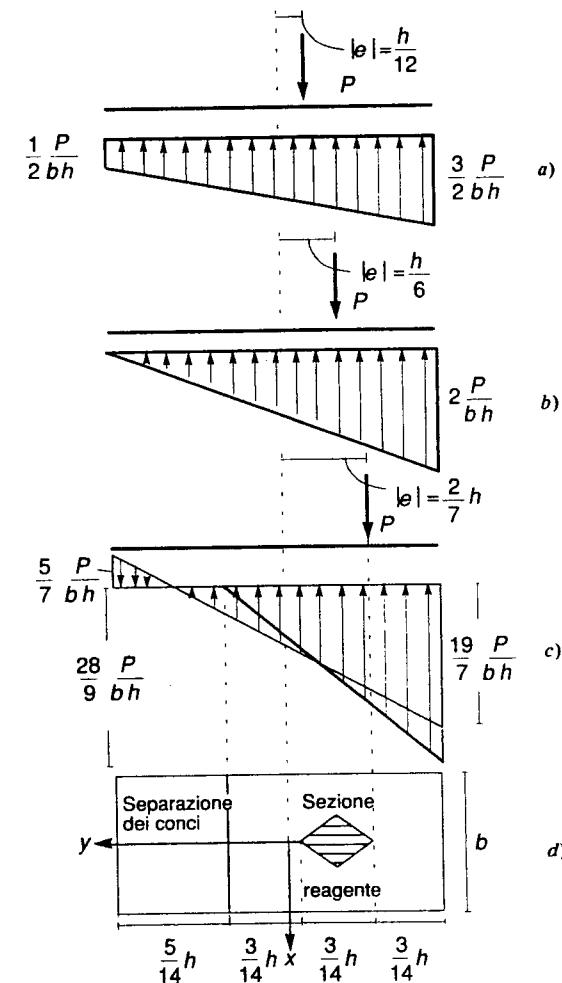


Figura 5.19

con σ_z dato dalla (5.30). Ricordando le (5.1), (5.2), la (m) si scrive

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dz} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{EA^2} \int_A dA + \frac{M_x^2}{EI_x^2} \int_A y^2 dA + \frac{M_y^2}{EI_y^2} \int_A x^2 dA \right\} + \frac{NM_x}{EA I_x} \int_A y dA - \\ & - \frac{NM_y}{EA I_y} \int_A x dA - \frac{M_x M_y}{EI_x I_y} \int_A xy dA = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Si sottolinea che la (5.49) vale solo nel riferimento principale: solo in tal caso, infatti, gli ultimi tre addendi a secondo membro risultano nulli. In termini energetici, i contributi dell'azione assiale e dei momenti flettenti nei piani principali risultano allora disaccoppiati; i tre problemi sono *energeticamente ortogonali*.

Si ponga

$$\eta = \frac{N}{EA} \quad \chi_x = \frac{M_x}{EI_x} \quad \chi_y = \frac{M_y}{EI_y} \quad (5.50a-c)$$

La (5.49) allora si scrive anche

$$\frac{d\delta}{dz} = \frac{1}{2} (N\eta + M_x\chi_x + M_y\chi_y) = \frac{1}{2} (EA\eta^2 + EI_x\chi_x^2 + EI_y\chi_y^2) \quad (5.51)$$

Le quantità definite dalle (5.50), note, rispettivamente, η come *deformazione assiale* e χ_x, χ_y come *curvature flessionali*, rappresentano misure globali di deformazione. η non è altro che il valore (costante) di ϵ_z nel caso di sola azione assiale, esprimibile attraverso la (5.35) come Δ/l ; χ_x è la curvatura della linea media definita dalla (5.41b) nel caso di flessione retta, mentre χ_y ha significato identico, solo riferito all'altra direzione principale.

Nel seguito, alle variabili cinematiche (5.50) ci si riferirà come a *deformazioni generalizzate*. La (5.30) e il legame elastico consentono di esprimere le deformazioni locali in funzione di queste quantità. Si ha, in particolare

$$\epsilon_z = \eta + \chi_x y - \chi_y x \quad (5.52)$$

mentre risulta sempre $\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu\epsilon_z$.

5.2.2 MOMENTO TORCENTE

5.2.2.1 Formulazione del problema

Si consideri ora un cilindro di De Saint Venant soggetto solo a due momenti torcenti M_t , uguali e contrari, sulle sezioni estreme (Figura 5.20). Per le (5.15) è adesso $a = a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, il che implica $\sigma_z = 0$. Le equazioni (5.12-14) che governano il problema divengono quindi

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = c \quad \text{in } A \quad (5.53a, b)$$

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.53c)$$

La costante superstite c è determinata dalla (5.4f), che ora si scrive

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA \quad (5.53d)$$

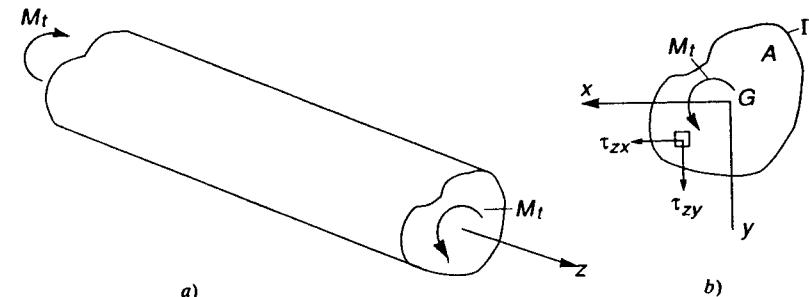


Figura 5.20

La soluzione delle (5.53) verrà cercata utilizzando sia un approccio agli sforzi che uno agli spostamenti. Verrà prima esaminato il secondo, più intuitivo dal punto di vista geometrico.

5.2.2.2 Approccio agli spostamenti

Si ipotizzi il seguente campo di spostamenti, rispettoso delle (5.27)

$$s_x = -\beta zy \quad s_y = \beta zx \quad s_z = \beta \psi_G(x, y) \quad (5.54a-c)$$

Esso è definito a meno della costante β e della funzione $\psi_G(x, y)$, entrambe da determinarsi. Si può osservare che le (5.54a, b) configurano una rotazione rigida della sezione nel suo piano (Figura 5.21), con angolo di rotazione ϑ rispetto alla sezione $z = 0$ pari a

$$\vartheta(z) = \beta z \quad (5.55)$$

La costante β (detta *torsione*) ha quindi il significato di rotazione relativa tra due sezioni a distanza unitaria. La (5.54c) definisce lo spostamento dei punti della sezione in direzione z , governato dalla *funzione di ingobbamento* ψ_G , che si assume indipendente da z .

Le (5.54) non contengono componenti di moto rigido, se non la traslazione secondo z che può essere eliminata, se ritenuto necessario, imponendo che sia nullo lo spostamento medio. Ciò comporta

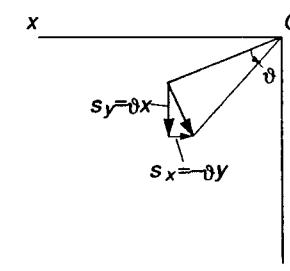


Figura 5.21

$$\int_A \psi_G(x, y) dA = 0 \quad (5.56)$$

Con riferimento alle (5.54), il legame deformazioni-spostamenti fornisce

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad \varepsilon_z = 0 \quad (a, b)$$

$$\gamma_{zx} = \beta(\partial\psi_G/\partial x - y) \quad \gamma_{zy} = \beta(\partial\psi_G/\partial y + x) \quad (5.57)$$

(le (a) confermano l'indeformabilità della sezione nel suo piano). Per il legame elastico, le sole componenti di sforzo non nulle sono quindi

$$\tau_{zx} = G\beta(\partial\psi_G/\partial x - y) \quad \tau_{zy} = G\beta(\partial\psi_G/\partial y + x) \quad (5.58)$$

Discendendo le (5.58) dagli spostamenti (5.54), la condizione di congruenza (5.53b) risulterà verificata. Sostituendo, si ottiene infatti

$$\partial\tau_{zy}/\partial x - \partial\tau_{zx}/\partial y = 2G\beta = c \quad (5.59)$$

relazione che conferisce significato fisico alla costante c , collegandola alla torsione β . Le condizioni di equilibrio (5.53a,c) si traducono nelle relazioni

$$G\beta(\partial^2\psi_G/\partial x^2 + \partial^2\psi_G/\partial y^2) = 0 \quad \text{in } A \quad (c)$$

$$G\beta[(\partial\psi_G/\partial x)n_x + (\partial\psi_G/\partial y)n_y - yn_x + xn_y] = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (d)$$

L'ipotesi (5.54) è quindi corretta se esiste una soluzione del problema

$$\nabla_2\psi_G = 0 \quad \text{in } A \quad \partial\psi_G/\partial n = yn_x - xn_y \quad \text{su } \Gamma \quad (5.60a, b)$$

dove $\partial(\)/\partial n$ indica derivazione in direzione normale al contorno.

In Analisi Matematica le (5.60) sono note come problema di Neumann-Dini [4]; la sua soluzione esiste ed è univocamente definita a meno di una costante, che ha il significato di traslazione rigida secondo z e può essere fissata imponendo la (5.56).

Pertanto, l'ipotesi di partenza (5.54) è la soluzione di un problema di De Saint Venant. La soluzione delle (5.60) soddisfa infatti, oltre che la congruenza interna, l'equilibrio in sede indefinita e sulla superficie laterale scarica. Occorre ancora verificare che le tensioni affioranti sulle due sezioni di estremità diano luogo come risultante solo a momenti torcenti. È peraltro immediato constatare che, essendo $\sigma_z = 0$, risulteranno nulli sia l'azione assiale che il momento flettente. Le condizioni di equilibrio globale (5.7) impongono allora l'annullarsi delle azioni taglienti, il che dimostra la sopravvivenza del solo M_t .

Le (5.60) indicano che la funzione di ingobbamento $\psi_G(x, y)$ dipende unicamente dalla forma della sezione e, in linea di principio, ne consentono la valutazione. La costante β può essere successivamente calcolata mediante la (5.53d). Introducendo le (5.58) si ottiene

$$M_t = GJ\beta \quad \beta = \frac{M_t}{GJ} \quad (5.61a, b)$$

dove si è posto

$$J = \int_A \left(x \frac{\partial\psi_G}{\partial y} - y \frac{\partial\psi_G}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dA \quad (5.62)$$

Tale grandezza rappresenta una proprietà geometrica della sezione, che ha le dimensioni di una lunghezza alla quarta potenza. Il prodotto GJ è noto come *rigidità torsionale*. È possibile dimostrare che risulta sempre

$$I_G \geq J > 0 \quad I_G = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (5.63)$$

dove I_G indica il momento polare d'inerzia della sezione rispetto al baricentro.

Nella pratica ingegneristica, viene a volte introdotto il parametro adimensionale

$$q = \frac{I_G}{J} \quad (5.64)$$

detto *fattore di torsione* (per la (5.63) risulterà sempre $q \geq 1$). Ciò consente di porre, in luogo delle (5.61)

$$M_t = \frac{1}{q} GI_G \beta \quad \beta = q \frac{M_t}{GI_G}$$

Per dimostrare la (5.63), si noti che la (5.62) può scriversi

$$J = I_G + \int_A \left(x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dA \quad (e)$$

dove, per semplicità, la funzione di ingobbamento è stata scritta omettendo l'indice (). Considerando le identità

$$x \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\psi x) \quad y \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\psi y)$$

tenendo presente che ψ rappresenta la soluzione del problema (5.60) e applicando due volte il teorema della divergenza, l'integrale nella (e) diviene

$$\begin{aligned} \int_A \left(x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dA &= - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(\psi y) + \frac{\partial}{\partial y}(-\psi x) \right] dA = - \int_\Gamma \psi(yn_x - xn_y) ds = \\ &= - \int_\Gamma \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} ds = - \int_\Gamma \left(\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} n_x + \psi \frac{\partial\psi}{\partial y} n_y \right) ds = - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right] dA = \\ &= - \int_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \psi \nabla_2 \psi \right] dA = - \int_A \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (f)$$

Tale termine è evidentemente non positivo, il che dimostra la prima diseguaglianza nella (5.63). La seconda (peraltro ovvia sul piano fisico) si dimostra formalmente notando che, per la (f), la (5.62) può scriversi

$$\begin{aligned} J &= \int_A \left[x^2 + y^2 + 2 \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = \\ &= \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)^2 \right] dA > 0 \end{aligned} \quad (g)$$

La diseguaglianza stretta discende dall'impossibilità di soddisfare contemporaneamente le equazioni $\partial \psi / \partial y = -x$ e $\partial \psi / \partial x = y$. È invece possibile, in caso di ingombramento nullo, che sia $J = I_G$. Si vedrà come ciò avvenga, ad esempio, in sezioni circolari.

Si noti anche che in virtù delle (5.58) e (5.61) la (g) può scriversi

$$J = \frac{1}{(G\beta)^2} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA = \frac{J^2}{M_t^2} \int_A \tau^2 dA \quad (h)$$

dove si è indicato con τ il modulo del vettore delle tensioni tangenziali sulla sezione. Detto allora τ_* il modulo del vettore corrispondente a momento torcente unitario, si ottiene dalla (h)

$$J = \frac{1}{\int_A \tau_*^2 dA} \quad \tau_* = \frac{1}{|M_t|} \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (5.65a, b)$$

5.2.2.3 Approccio agli sforzi

L'equazione indefinita di equilibrio (5.53a) implica l'esistenza di una funzione $\varphi(x, y)$ sufficientemente regolare, tale per cui

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5.66a, b)$$

La funzione φ è nota come *potenziale degli sforzi* e ha lo stesso significato di quella introdotta (e indicata con lo stesso simbolo) nel Paragrafo 4.2.4 con riferimento a problemi piani. Le (5.66) rendono la (5.53a) identicamente soddisfatta e riconducono le (5.53b, c) alle espressioni seguenti

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c \quad \text{in } A \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.67a, b)$$

Ricordando (vedi Figura 5.4) le relazioni

$$n_x = dy/ds \quad n_y = -dx/ds \quad (5.68)$$

la (5.67b) diviene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.69)$$

La funzione di sforzo φ deve quindi assumere valore costante sul contorno della sezione. Tale costante è peraltro ininfluente, in quanto non altera le derivate di φ , che costituiscono l'informazione di effettivo interesse. L'approccio agli sforzi si riconduce quindi alla formulazione seguente, nota come *problema di Dirichlet*

$$\nabla^2 \varphi = -c \quad \text{in } A \quad \varphi = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.70a, b)$$

di cui pure è dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione [4].

Introducendo le (5.66) nella (5.53d), questa diviene

$$M_t = - \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \right) dA \quad (5.71)$$

La regola di derivazione di prodotto consente di scrivere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi x) - \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} y = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi y) - \varphi$$

Per il teorema della divergenza e la (5.70b) si ha anche

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi y) \right] dA = \int_\Gamma \varphi (x n_x + y n_y) ds = 0$$

Dalla (5.71) si ottiene quindi

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA \quad (5.72)$$

Questa relazione permette di definire la costante c , da cui la φ che risolve le (5.70) dipende, in funzione del momento torcente applicato.

Una volta valutati, risolvendo le (5.70), (5.72), il potenziale di sforzi e la costante c , il problema può considerarsi risolto. Restano solo da determinare le componenti di spostamento, ottenibili integrando le deformazioni corrispondenti agli sforzi (5.66). Il calcolo è notevolmente facilitato se si tiene presente che entrambi gli approcci risolvono il medesimo problema. Per la (5.59) si può allora scrivere $\beta = c/2G$, il che consente di definire in termini di c le componenti (5.54a, b) di spostamento nel piano. Inoltre, l'eguaglianza tra le espressioni (5.58) e (5.66) delle tensioni tangenziali comporta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_G}{\partial x} &= \frac{1}{G\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y = \frac{J}{M_t} \tau_{zx} + y \\ \frac{\partial \psi_G}{\partial y} &= - \left(\frac{1}{G\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \right) = \frac{J}{M_t} \tau_{zy} - x \end{aligned} \quad (5.73)$$

relazioni che consentono il calcolo della funzione di ingombramento. Per le (5.61), (5.72) si può anche scrivere

$$J = \frac{2}{G\beta} \int_A \varphi dA = \frac{4}{c} \int_A \varphi dA \quad (5.74)$$

La (5.74) permette di calcolare la rigidità torsionale a partire da una soluzione in termini di potenziale di sforzi.

Con riferimento alla soluzione generale del problema di De Saint Venant sintetizzata nel Paragrafo 5.1.2, si può osservare che sussistono le relazioni

$$\psi_G = \frac{1}{G\beta} \Psi = \frac{2}{c} \Psi \quad \varphi = \Phi - \frac{c}{4} (x^2 + y^2) \quad (i)$$

Introducendo le (i) nelle (5.58) e (5.66) si ottiene infatti

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\beta \left(\frac{\partial \psi_G}{\partial x} - y \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{c}{2} y \quad \tau_{zy} = G\beta \left(\frac{\partial \psi_G}{\partial y} + x \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{c}{2} x \\ \tau_{zx} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{c}{2} y \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{c}{2} x \end{aligned} \quad (j)$$

Per $b_1 = b_2 = 0$, le (5.19) peraltro divengono

$$\bar{\tau}_{zx} = -\frac{c}{2} y \quad \bar{\tau}_{zy} = \frac{c}{2} x$$

Ricordando anche le (5.21) e (5.23), si può allora constatare come le (j) si identifichino con le (5.18). È anche facile verificare che le (5.60), (5.70) si riconducono, rispettivamente, alle (5.22) e (5.24).

Si osservi a questo proposito che l'approccio (A) introdotto nel Paragrafo 5.1.2 per dimostrare la risolubilità del problema (5.12-14) può essere riguardato come un approccio agli spostamenti. Se le τ_z^0 sono definite dalle (5.21), le tensioni tangenziali (5.18) soddisfano infatti la condizione di congruenza interna (5.13) e corrispondono quindi a deformazioni derivabili da un campo di spostamenti.

5.2.2.4 Un esempio di soluzione: la sezione ellittica

Una soluzione in forma chiusa è facilmente ottenibile per una sezione ellittica. Detti a e b i due semiassi, l'equazione del contorno Γ si scrive

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si assume come potenziale degli sforzi la funzione

$$\varphi(x, y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (5.75a)$$

che si annulla su Γ , in accordo con la (5.70b). La (5.70a) allora comporta

$$\nabla_2 \varphi = -c = -2K \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

da cui si ottiene

$$K = \frac{c}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (5.75b)$$

Le (5.75) definiscono la soluzione del problema di Dirichlet (5.70) in funzione della costante c . Questa è valutabile mediante la (5.72), che fornisce

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_A \varphi dA = c \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dA = \\ &= c \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(A - \frac{I_y}{a^2} - \frac{I_x}{b^2} \right) = c \frac{\pi}{2} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

dove

$$A = \pi ab \quad I_x = \frac{\pi}{4} ab^3 \quad I_y = \frac{\pi}{4} a^3 b$$

indicano l'area della sezione e i suoi momenti d'inerzia rispetto agli assi principali. È allora

$$c = \frac{2}{\pi} M_t \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$$

La funzione di sforzo (5.75) si esprime quindi

$$\varphi(x, y) = \frac{M_t}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (5.76)$$

Le tensioni tangenziali conseguono attraverso le (5.66). Si ottiene

$$\tau_{zx} = -M_t \frac{2}{\pi} \frac{y}{ab^3} \quad \tau_{zy} = M_t \frac{2}{\pi} \frac{x}{a^3 b} \quad (5.77)$$

Il loro andamento è illustrato in Figura 5.22. Si noti che la normale n a ogni ellisse simile al contorno (Figura 5.22a) ha componenti $n_x = x/a^2$ e $n_y = y/b^2$. Le (5.77) peraltro mostrano che è sempre $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$; il vettore τ_z è quindi tangente a tali ellissi. Il suo modulo varia linearmente con la distanza dal baricentro e vale

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{ab} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \quad (5.78a)$$

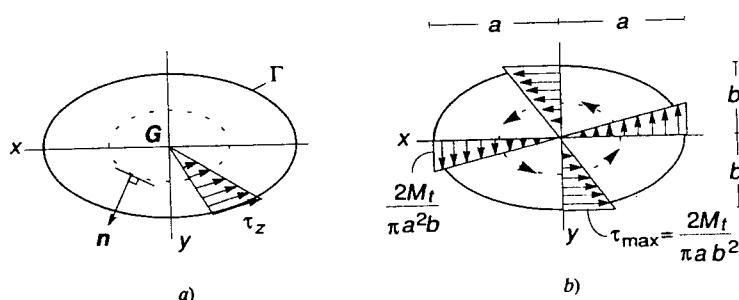


Figura 5.22

Esso assume valore massimo in corrispondenza del semiasse minore (Figura 5.22b). Per $a > b$ sarà quindi

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{ab^2} \quad (5.78b)$$

Si calcola ora la rigidità torsionale J . Ricordando la (5.59), la torsione β risulta

$$\beta = \frac{c}{2G} = \frac{M_t}{\pi G} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$$

Per le (5.61) è quindi

$$J = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (5.79)$$

La conoscenza di β permette di definire le componenti (5.54a, b) di spostamento nel piano. Per completare la soluzione, occorre ancora calcolare la funzione di ingombro, a questo punto ottenibile dalle (5.73). Per le (5.77) e (5.79), queste si scrivono

$$\frac{\partial \psi_G}{\partial x} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y \quad \frac{\partial \psi_G}{\partial y} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x$$

e integrando si ottiene

$$\psi_G(x, y) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \psi_0 \quad (5.80)$$

La costante ψ_0 , che rappresenta la traslazione rigida del prisma secondo z , risulta nulla se si impone la (5.56). Le linee di livello della $\psi_G(x, y)$ sono schizzate in Figura 5.23, tratteggiate per spostamenti a tratto pieno per spostamenti nel verso positivo di z , tratteggiate per spostamenti negativi.

Nel caso particolare di sezione circolare ($a = b = R$), il risultato si particolarizza nelle relazioni seguenti

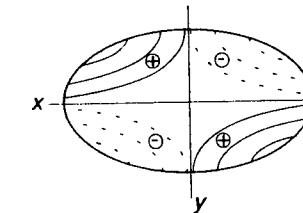


Figura 5.23

$$J = \frac{\pi}{2} R^4 = I_G \quad (5.81)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{2}{\pi} M_t \frac{y}{R^4} \quad \tau_{zy} = \frac{2}{\pi} M_t \frac{x}{R^4} \quad (5.82)$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} M_t \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R^4} = \frac{2}{\pi} M_t \frac{r}{R^4} \quad \tau_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{R^3} \quad (5.83a, b)$$

dove si è indicato con r la coordinata radiale. L'andamento delle tensioni tangenziali è illustrato in Figura 5.24.

La funzione di ingombramento (5.80) risulta adesso nulla, indicando che le sezioni rette del cilindro si mantengono piane. Per la (e), J allora si identifica con il momento d'inerzia polare della sezione rispetto al baricentro, in accordo con la (5.81).

Per una sezione ellittica, il fattore di torsione (5.64) risulta

$$q = \frac{1}{4} \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2}$$

Il momento d'inerzia polare vale infatti $I_G = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$ mentre J è dato dalla (5.79). È facile verificare che, per ogni rapporto a/b si ha $q \geq 1$, con egualianza solo nel caso di sezione circolare.

Si lascia come esercizio verificare che l'espressione (5.79) di J si ottiene anche inserendo la (5.80) nella (5.62), la (5.76) nella (5.74) o le (5.77) nelle (5.65).

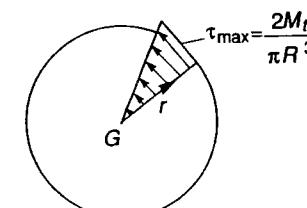


Figura 5.24

5.2.2.5 Il centro di torsione

L'ipotesi (5.54) sul campo di spostamenti prevede che il centro di rotazione relativa tra due sezioni rette coincida con il baricentro. È spontaneo chiedersi se tale scelta non influenzi il risultato.

Si assume che la rotazione avvenga attorno a un punto C di coordinate (x_c, y_c) nel riferimento principale. Le (5.54) vanno allora sostituite dalle espressioni seguenti

$$s_x = -\beta z(y - y_c) \quad s_y = \beta z(x - x_c) \quad s_z = \beta \psi_c(x, y) \quad (5.84a-c)$$

Le uniche componenti di sforzo non nulle sono sempre le tensioni tangenziali di indice z , che adesso risultano

$$\tau_{zx}^c = G\beta \left(\frac{\partial \psi_c}{\partial x} - y + y_c \right) \quad \tau_{zy}^c = G\beta \left(\frac{\partial \psi_c}{\partial y} + x - x_c \right) \quad (5.85)$$

Le condizioni di equilibrio (5.53a, c) si traducono quindi nelle equazioni

$$\nabla_2 \psi_c = 0 \quad \text{in } A \quad \frac{\partial}{\partial n} (\psi_c + y_c x - x_c y) = y n_x - x n_y \quad \text{su } \Gamma \quad (5.86)$$

Si ponga

$$\bar{\psi} = \psi_c + y_c x - x_c y \quad (k)$$

il che, ovviamente comporta $\nabla_2 \bar{\psi} = \nabla_2 \psi_c$. Sostituendo, le (5.86) si traducono nel problema

$$\nabla_2 \bar{\psi} = 0 \quad \text{in } A \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} = y n_x - x n_y \quad \text{su } \Gamma \quad (l)$$

identico alle (5.60). Stante l'unicità di soluzione del problema di Neumann-Dini, $\bar{\psi}$ e ψ_G potranno al più differire per una costante inessenziale, che rappresenta sempre la traslazione rigida secondo z . Dalla (k) si ottiene allora

$$\psi_c = \psi_G - y_c x + x_c y + K \quad (5.87)$$

Sostituendo la (5.87) nelle (5.85), queste divengono identiche alle (5.58). Le due soluzioni corrispondono agli stessi sforzi e differiscono quindi solo per un moto rigido.

La scelta del centro di rotazione relativa tra le sezioni è pertanto arbitraria. Anche se le motivazioni non sono al momento apparenti, risulta conveniente identificarlo con il punto, detto *centro di torsione*, per il quale si annullano le rotazioni medie della sezione rispetto agli assi principali; tale cioè che risulti

$$\int_A s_z x dA = \int_A s_z y dA = 0 \quad (m)$$

Introducendo la (5.84c) e la (5.87) si ottiene allora

$$\int_A \psi_c x dA = \int_A \psi_G x dA - y_c \int_A x^2 dA + x_c \int_A xy dA + K \int_A x dA = 0 \quad (n)$$

$$\int_A \psi_c y dA = \int_A \psi_G y dA - y_c \int_A yx dA + x_c \int_A y^2 dA + K \int_A y dA = 0$$

Nel riferimento principale i momenti statici e il momento centrifugo sono nulli. Ricordando le (5.2), le (n) forniscono allora le coordinate del centro di torsione nella forma

$$x_c = -\frac{1}{I_x} \int_A y \psi_G dA \quad y_c = \frac{1}{I_y} \int_A x \psi_G dA \quad (5.88)$$

dove $\psi_G(x, y)$ è la funzione di ingobbamento come originariamente definita.

Nota la posizione del centro di torsione, conviene riferire a esso il campo di spostamenti, sostituendo le (5.54) con le (5.84). La funzione di ingobbamento (5.87) viene indicata semplicemente con ψ , eliminando l'indice (c) e sottintendendo la coincidenza tra i centri di rotazione e di torsione. La costante K è fissata dalla condizione, analoga alla (5.56)

$$\int_A \psi dA = 0 \quad (5.89a)$$

Dalla la definizione di ψ inoltre conseguie

$$\int_A x \psi dA = 0 \quad \int_A y \psi dA = 0 \quad (5.89b, c)$$

In sezioni simmetriche il centro di torsione si colloca sull'asse di simmetria. In sezioni doppiamente simmetriche, come l'ellisse studiata nel paragrafo precedente, esso coincide con il baricentro ed è $\psi = \psi_G$.

5.2.2.6 Lavoro di deformazione

Anche la soluzione del problema della torsione può essere espressa in termini di misure globali di sforzo e deformazione, rappresentate dal momento torcente M , e dalla torsione β , tra loro legate attraverso le (5.61). Come visto, β rappresenta la rotazione relativa tra due sezioni a distanza unitaria e risulta costante. Dalla (5.55) allora si trae

$$\beta = \frac{d\vartheta}{dz} \quad (5.90)$$

dove $d\vartheta$ è la rotazione relativa tra due sezioni a distanza dz .

Considerando il tronco infinitesimo in Figura 5.25, si constata che il lavoro di deformazione per unità di lunghezza risulta

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{2} M_t \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{1}{2} M_t \beta \quad (5.91a)$$

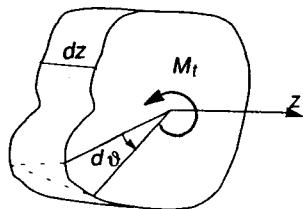


Figura 5.25

o anche, per le (5.61)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{GJ} = \frac{1}{2} GJ\beta^2 \quad (5.91b, c)$$

In termini di tensioni locali, tale lavoro è peraltro espresso dalla relazione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{2} \int_A (\tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{zy}\gamma_{zy}) dA = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_x^2 + \tau_y^2) dA = \frac{1}{2G} \int_A \tau^2 dA \quad (5.92)$$

dove si è ancora indicato con τ il modulo del vettore delle tensioni tangenziali. Egualando le (5.91b) e (5.92) si perviene alla condizione

$$\frac{M_t^2}{J} = \int_A \tau^2 dA \quad (o)$$

Detto ora τ_* il modulo del vettore τ_z corrispondente a momento torcente unitario, dalla (o) si ottiene

$$J = \frac{1}{\int_A \tau_*^2 dA} \quad \tau_* = \frac{1}{|M_t|} \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (5.93a, b)$$

Tale relazione, peraltro identica alla (5.65) ottenuta operando formalmente sull'espressione (5.62) di J , risulta molto utile nella derivazione di soluzioni approssimate.

5.2.2.7 Analogie con altri fenomeni fisici

Anche se il problema della torsione è stato ricondotto a formulazioni matematicamente ben poste, soluzioni in forma chiusa non sono sempre disponibili o possono comportare calcoli inutilmente complessi in rapporto alla precisione richiesta. Risulta quindi spesso necessario, o quanto meno conveniente, ricorrere a soluzioni approssimate. A questo scopo è interessante osservare che le relazioni che governano il problema della torsione presentano analogie formali con quelle relative a altri fenomeni fisici. Si accennerà qui

soltamente a due di queste analogie, che facilitano l'intuizione ingegneristica nella valutazione qualitativa dell'andamento delle tensioni tangenziali sulla sezione e sono quindi utili allo scopo di stabilire approssimazioni.

La prima di queste, nota come *analogia idrodinamica*, considera il moto di un fluido ideale in rotazione con vorticità uniforme in un tubo che abbia la stessa forma trasversale della sezione soggetta a torsione. Dette v_x, v_y le componenti della velocità del fluido nel piano, le equazioni che governano il moto si scrivono

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = c \quad \text{in } A \quad v_x n_x + v_y n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.94a)$$

Il confronto con le (5.53) stabilisce l'analogia tra i due fenomeni, identificando il vettore τ_z con la velocità del fluido.

L'analogia idrodinamica evidenzia immediatamente la maggior efficienza torsionale di profili chiusi in parete sottile rispetto ai profili aperti. Osservando l'andamento qualitativo del "fluido" nelle due sezioni (Figura 5.26), è infatti evidente come, a parità di tensioni tangenziali massime, un profilo chiuso possa equilibrare un momento torcente ben più elevato che un profilo aperto. L'analogia permette anche di valutare, almeno qualitativamente, alcuni importanti effetti locali, come la concentrazione di tensioni in angoli rientranti.

Una seconda analogia considera invece una membrana sottile e perfettamente flessibile, vincolata a non spostarsi trasversalmente sul contorno Γ e ivi soggetta a trazione uniforme S ; sulla membrana agisce una pressione trasversale p , pure uniforme (Figura 5.27). Detto $w(x, y)$ lo spostamento trasversale, che si suppone abbastanza piccolo da poter trattare le sue derivate come infinitesimi, il problema risulta governato dalle equazioni

$$\nabla^2 w = -\frac{p}{S} \quad \text{in } A \quad w = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.94b)$$

La prima di queste impone l'equilibrio alla traslazione trasversale dell'elemento infinitesimo tratteggiato in Figura 5.27, la seconda le condizioni di vincolo. Il confronto con la (5.70) mostra che, se la costante c è interpretata come il rapporto p/S , l'andamento della funzione di sforzo φ viene a coincidere con la superficie secondo cui si atteggia una membrana il cui contorno Γ sia uguale a quello della sezione del cilindro di De Saint Venant.

È questo un esempio di analogia (un'altra è quella del potenziale elettrostatico) che potrebbe essere utilizzata per la ricerca della soluzione in via sperimentale, sulla base di prove di più semplice esecuzione relative a un problema che, benché diverso, è governato dalle stesse equazioni. L'*analogia della membrana* è stata in effetti proposta da Prandtl che, constatato che il regime tensionale ipotizzato si riscontra in una membrana rigidamente vincolata al contorno, la ha utilizzata per risolvere il problema della torsione mediante prove condotte su bolle di sapone. L'approccio sperimentale è stato successivamente perfezionato da vari studiosi (in particolare Griffith e Taylor), ma resta sempre molto delicato. L'analogia comunque consente di visualizzare la deformata della membrana e quindi di cogliere l'andamento qualitativo delle linee di livello della funzione di sforzo, che rappresentano il percorso seguito dal vettore τ_z delle tensioni tangenziali sulla sezione.

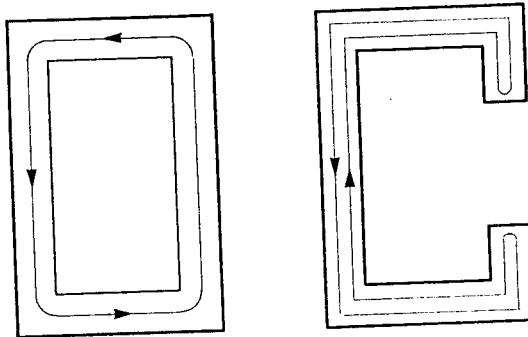


Figura 5.26

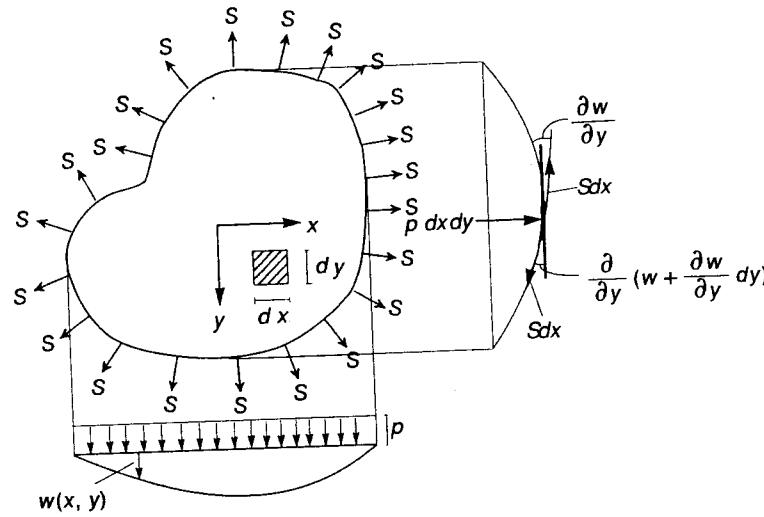


Figura 5.27

5.2.2.8 Soluzioni approssimate del problema della torsione

5.2.2.8.1 Profili aperti in parete sottile

Verrà in primo luogo considerata la sezione rettangolare in Figura 5.28a. Se $a \gg b$, l'andamento delle tensioni tangenziali suggerito dall'analogia idrodinamica prevede che, con l'eccezione di due piccole zone adiacenti ai lati corti, il vettore τ_z sia parallelo all'asse x . Si assume pertanto

$$\tau_{xy} = 0 \quad (5.95a)$$

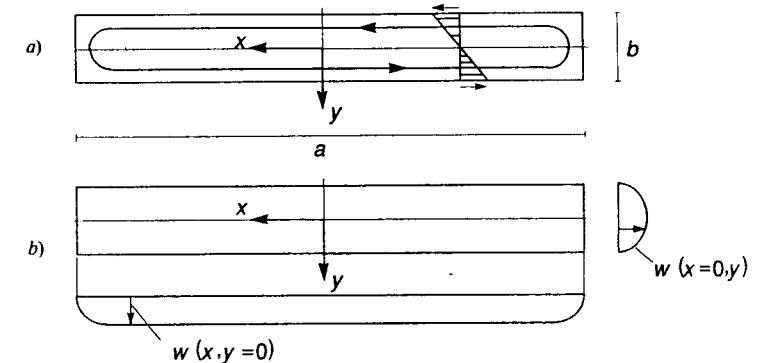


Figura 5.28

Le (5.53a, b) si semplificano allora come segue

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = -c = -2G\beta$$

Per ovvi motivi di simmetria, dovrà essere $\tau_{zx} = 0$ per $y = 0$. Si ottiene quindi

$$\tau_{zx} = -2G\beta y = -2 \frac{M_t}{J} y \quad (5.95b)$$

Lungo y le τ_{zx} variano dunque linearmente, come riportato in Figura 5.28a. Lo stato di sforzo (5.95) non soddisfa l'equilibrio al contorno (5.53c), che risulta violato sui lati corti. Soddisfa però completamente sia l'equilibrio in sede indefinita che la congruenza interna. Le (5.95) sono quindi derivabili da un potenziale di sforzo e le deformazioni a esse associate sono integrabili.

È facile constatare che il potenziale di sforzo risulta

$$\varphi = G\beta \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.96)$$

Tale espressione soddisfa la (5.70a) ma non la (5.70b), violata sui lati corti. Essa è anche suggerita dall'analogia della membrana, la cui deformata in un rettangolo molto allungato intuitivamente si atteggerà secondo una superficie quasi ovunque indipendente da x (Figura 5.28b). Introducendo la (5.96) nella (5.74) si ottiene la seguente espressione approssimata di J

$$J = \frac{2}{G\beta} \int_A \varphi dA = 2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{1}{3} ab^3 \quad (5.97)$$

In alternativa, J potrebbe essere calcolato utilizzando la (5.93). Dal momento che le (5.95) implicano $\tau_* = 2|y|/J$, si ottiene

$$\int_A \tau_*^2 dA = \frac{4}{J^2} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{1}{3} \frac{ab^3}{J^2}$$

che, introdotta nella (5.93a) fornisce ancora il valore (5.97) per J .

Stante la doppia simmetria della sezione, il centro di torsione coincide con il baricentro. L'integrabilità delle deformazioni conseguenti alle (5.95) permette di determinare la funzione di ingobbamento mediante le (5.73), che nel caso in esame divengono

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x$$

A meno di una traslazione rigida, si ha pertanto

$$\psi(x, y) = -xy \quad (5.98)$$

La funzione di ingobbamento è quindi un paraboloido iperbolico, antisimmetrico rispetto al riferimento principale. Se lo spessore b è piccolo, ψ risulta trascurabile e viene infatti spesso considerato nullo.

Lo sforzo tangenziale massimo corrisponde a $y = \pm b/2$ e vale

$$\tau_{\max} = \frac{M_t b}{J} = 3 \frac{M_t}{ab^2} \quad (5.99)$$

Per il caso di sezione rettangolare sono disponibili soluzioni delle (5.53) in termini di sviluppi in serie. Ingegneristicamente, i risultati sono posti nella forma

$$J = \alpha ab^3 \quad \tau_{\max} = \alpha M_t / ab^2 \quad (5.100)$$

dove i coefficienti α e α sono riportati in Tabella 5.1 in funzione del rapporto tra i lati. Si evince che per $a/b \geq 10$ la soluzione approssimata qui proposta comporta errori inferiori al 7% e risulta quindi accettabile per rettangoli abbastanza allungati.

Il legame tra M_t e β potrebbe anche essere ottenuto da un'equivalenza in termini di equilibrio. Si noti però che il momento torcente fornito dalle (5.95) risulta

$$M_t^{(1)} = - \int_A \tau_{zx} y dA = 2G\beta a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{ab^3}{6} G\beta = \frac{1}{2} GJ\beta$$

È quindi pari alla metà del totale il contributo (che le (5.95) non considerano) delle tensioni tangenziali sui lati corti che, pur agendo su un'area limitata, hanno componenti verticali che presentano un braccio notevole, circa uguale a a . Si assuma che tali tensioni seguano una semicirconferenza nei pressi dei lati corti e che abbiano, in un riferimento locale (Figura 5.29), la seguente espressione, analoga a quella delle τ_{zx}

Tabella 5.1

a/b	Coefficients delle (5.100)					
	∞	10	5	3	2	1
α	.333	.312	.291	.263	.229	.141
α	3.00	3.20	3.44	3.74	4.06	4.80

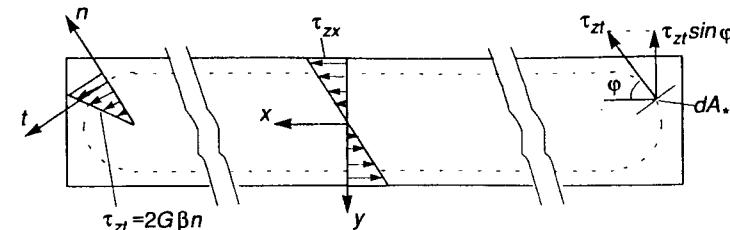


Figura 5.29

$$\tau_{zt} = 2G\beta n \quad (0 \leq n \leq b/2)$$

Esse forniscono allora il momento torcente

$$\begin{aligned} M_t^{(2)} &= a \int_{A_*} \tau_{zt} \sin \varphi dA_* = a \int_0^a \int_0^{b/2} \tau_{zt} \sin \varphi n dn d\varphi = \\ &= 2G\beta a \int_0^a \int_0^{b/2} n^2 \sin \varphi dn d\varphi = \frac{ab^3}{6} G\beta = \frac{1}{2} GJ\beta \end{aligned}$$

che costituisce il contributo mancante.

Per ottenere in termini di equilibrio il corretto legame tra M_t e β (e quindi il corretto valore di J) è pertanto necessario considerare l'apporto delle tensioni tangenziali sui lati corti. Dal momento che queste agiscono su un'area limitata, il loro contributo non è significativo se J è valutato mediante le (5.93), in cui compare solo il loro modulo e non il braccio di coppia. Per lo stesso motivo, è adeguato il valore di J ottenuto dalla (5.74) sulla base di un potenziale di sforzo che viola l'equilibrio solamente sui lati corti.

La soluzione ottenuta per il rettangolo allungato può essere facilmente estesa al caso di un qualunque profilo aperto in parete sottile (Figura 5.30a). Si indichi con s un'ascissa curvilinea che ne percorra la linea media, di lunghezza totale pari a a . Detto (n, t) il riferimento locale in figura, la (5.96) si generalizza nell'espressione seguente

$$\varphi = G\beta \left(\frac{b^2}{4} - n^2 \right) \quad (5.101)$$

Risulta allora, per le (5.66)

$$\tau_{zn} = 0 \quad \tau_{zs} = -2G\beta n = -2 \frac{M_t n}{J} \quad (5.102)$$

per cui è

$$\tau_{\max}(s) = \frac{M_t b(s)}{J} \quad \tau_{\max} = \frac{M_t b_{\max}}{J} \quad (5.103)$$

Dalle (5.101) e (5.74) si ottiene allora

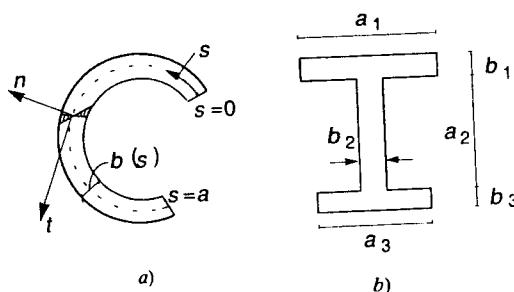


Figura 5.30

$$J = \frac{1}{G\beta} \int_A \varphi dA = 2 \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{b^2}{4} - n^2 \right) ds dn = \frac{1}{3} \int_0^a b^3(s) ds \quad (5.104a)$$

espressione che si riconduce alla (5.97) se b è costante. Nel caso di frequente interesse di profili costituiti da N rettangoli allungati di dimensione $a_i \times b_i$ ($a_i \gg b_i$, Figura 5.30b), la (5.104a) diviene

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N a_i b_i^3 \quad (5.104b)$$

Si osservi che le tensioni tangenziali (5.102) sono dirette secondo la linea media. Se lo spessore b è variabile, il contorno della sezione non è parallelo alla linea media e, a rigore, l'approssimazione comporta una violazione dell'equilibrio al contorno non più limitata alle estremità del profilo. Tale violazione è peraltro modesta se $b(s)$ non varia troppo bruscamente.

Sono adesso note sia le tensioni tangenziali che la rigidità torsionale, che consente la valutazione della torsione β in funzione del momento torcente applicato. Rimane solo da determinare la funzione di ingombramento. Data la piccolezza dello spessore, è lecito assumere che essa sia indipendente da n e limitarsi alla sua valutazione sulla linea media. Si assume cioè $\psi_G = \psi_G(s)$.

La variazione di ψ_G nel passare dal punto A al punto B a distanza ds sulla linea media (Figura 5.31a) è data da

$$d\psi_G = (\partial\psi_G/\partial x)dx + (\partial\psi_G/\partial y)dy \quad (q)$$

Detto α l'angolo tra gli assi n e x , si può scrivere (Figura 5.31b)

$$dx = -ds \sin\alpha \quad dy = ds \cos\alpha$$

per cui la (q) diviene

$$d\psi_G = \left(-\frac{\partial\psi_G}{\partial x} \sin\alpha + \frac{\partial\psi_G}{\partial y} \cos\alpha \right) ds \quad (r)$$

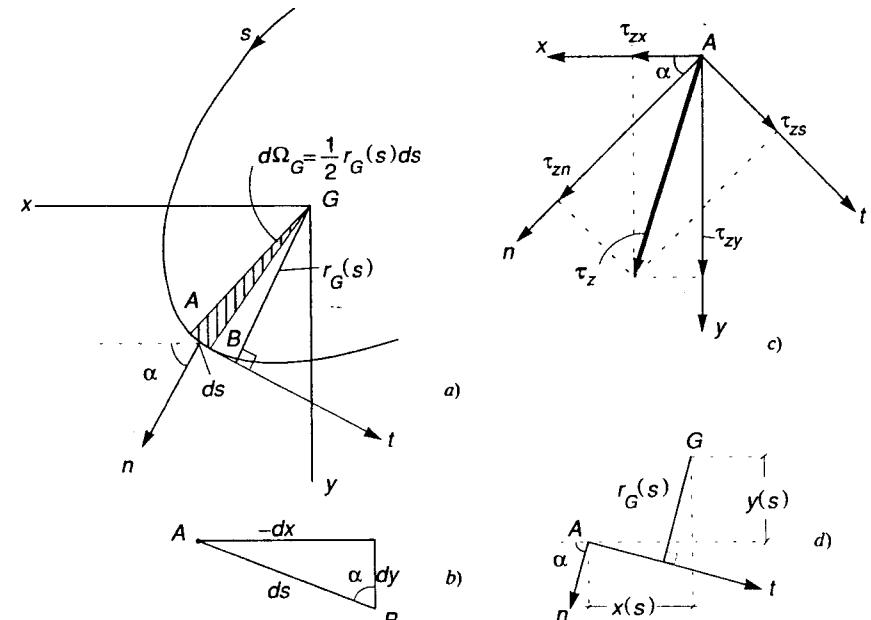


Figura 5.31

Sostituendo le (5.73) per le derivate di ψ_G , la (r) si scrive

$$d\psi_G = \left\{ \frac{J}{M_t} (-\tau_{zx} \sin\alpha + \tau_{zy} \cos\alpha) - (y \sin\alpha + x \cos\alpha) \right\} ds \quad (s)$$

Valgono peraltro le relazioni (Figura 5.31c, d)

$$\tau_{zs}(s) = -\tau_{zx} \sin\alpha + \tau_{zy} \cos\alpha \quad r_G(s) = y \sin\alpha + x \cos\alpha \quad (t1, 2)$$

dove, al solito, τ_{zs} indica la componente della tensione tangenziale secondo la linea media, mentre r_G è la distanza dal baricentro della tangente alla linea media stessa. La (s) si scrive allora

$$d\psi_G = \left\{ \frac{J}{M_t} \tau_{zs}(s) - r_G(s) \right\} ds \quad (5.105)$$

La soluzione (5.102) prevede che le tensioni tangenziali si annullino sulla linea media. È pertanto

$$d\psi_G = -r_G(s) ds \quad (5.106)$$

A meno del segno, quindi, $d\psi_G$ risulta pari al doppio dell'area $d\Omega_G$ del triangolo GAB in Figura 5.31a. Integrando la (5.106) si ottiene

$$\psi_G(s) = - \int_0^s r_G(s') ds' + \psi_0 = -2\Omega_G(s) + \psi_0 \quad (5.107a)$$

dove $\psi_0 = \psi_G(s=0)$ e si è indicato con $\Omega_G(s)$ la cosiddetta *area settoriale*, cioè l'area coperta dal segmento che congiunge il baricentro al generico punto della linea media nel passare da $s=0$ al valore corrente di s .

Al solito, la costante ψ_0 può essere fissata imponendo la (5.56). Ciò comporta

$$-2 \int_A \Omega_G dA + A\psi_0 = 0 \quad \psi_0 = \frac{2}{A} \int_A \Omega_G dA = 2\bar{\Omega}_G \quad (5.107b)$$

dove $\bar{\Omega}_G$ è il valor medio dell'area settoriale. A meno di una traslazione rigida, l'ingombramento si esprime quindi

$$\psi_G(s) = 2(\bar{\Omega}_G - \Omega_G(s)) \quad (5.108)$$

Ponendo nelle (5.88) $dA = b(s)ds$, le coordinate del centro di torsione nel riferimento principale si esprimono

$$x_c = -\frac{1}{I_x} \int_0^a y(s)\psi_G(s)b(s)ds \quad y_c = \frac{1}{I_y} \int_0^a x(s)\psi_G(s)b(s)ds \quad (5.109a, b)$$

dove, coerentemente con le ipotesi introdotte per piccoli spessori, anche nel calcolo dei momenti d'inerzia ci si riconduce alla sola linea media. Precisamente, si pone

$$I_x = \int_0^a [y(s)]^2 b(s)ds \quad I_y = \int_0^a [x(s)]^2 b(s)ds \quad (5.109c, d)$$

Se riferito al centro di torsione, l'ingombramento è dato dalla (5.87), che ora si scrive, a meno della costante K

$$\psi(s) = \psi_G(s) - y_c x(s) + x_c y(s) \quad (5.110a)$$

Si lascia come esercizio il verificare che, nota la posizione del centro di torsione, risulta anche

$$\psi(s) = 2(\bar{\Omega} - \Omega(s)) \quad (5.110b)$$

dove

$$\Omega(s) = \frac{1}{2} \int_0^s r(s') ds' \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{A} \int_0^a \Omega(s) b(s) ds \quad (5.110c, d)$$

e $r(s)$ rappresenta la distanza dal *centro di torsione* della tangente al generico punto sulla linea media.

Alla (5.108) si perviene anche con un ragionamento diretto, forse più espressivo che non la sua derivazione formale. Si consideri (Figura 5.32a) un tronco infinitesimo del prisma e, sulla sua superficie media, un rettangolo pure infinitesimo, di lati dz e ds , indicato con $AA'BB'$ in figura. Alla deformazione torsionale, che causa una rotazione relativa $d\vartheta = \beta dz$ tra le linee medie delle due sezioni a distanza dz , consegue uno spostamento relativo tra i due punti A e A' , originariamente allineati su un asse parallelo a z . La componente di tale spostamento secondo la tangente nel punto A è valutabile dalla Figura 5.32b e risulta pari a $\beta r_G dz$.

Sulla linea media sono nulle le tensioni tangenziali e, di conseguenza, gli scorimenti angolari. Il rettangolo $AA'BB'$ resterà quindi tale a deformazione avvenuta e le considerazioni geometriche in Figura 5.32c permettono di valutare l'innalzamento relativo di B rispetto a A . Questo risulta pari a $ds_z = -\beta r_G ds$, negativo perché opposto al verso positivo di z . Ricordando che per la (5.54c) è $ds_z = \beta d\psi_G$, si ritrova la (5.106).

Nel caso del rettangolo allungato è sempre $r_G(s) = 0$, in quanto la tangente alla linea media passa per il baricentro; l'ingombramento è quindi nullo sulla linea media, come peraltro previsto dalla (5.97). In profili costituiti da rettangoli allungati convergenti in un unico punto (Figura 5.33), il centro di torsione si colloca in tale punto. La funzione di ingombramento ψ (5.110), riferita a C , è allora nulla e gli unici contributi all'ingombramento sono costituiti dalle sue variazioni sullo spessore, che in genere vengono trascurate.

Prima di concludere l'argomento, va detto che la "distanza" $r_G(s)$ è in realtà dotata di segno. Essa viene assunta positiva se il verso della tangente t alla linea media suggerisce un momento positivo rispetto all'asse z , negativa nel caso contrario. Ne

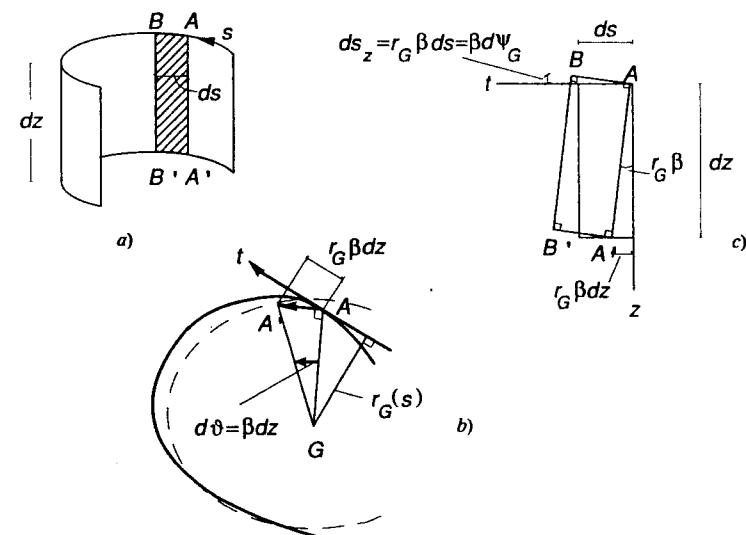


Figura 5.32

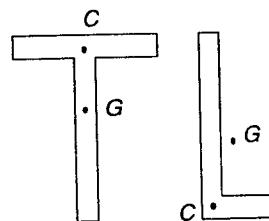


Figura 5.33

consegue che anche $\Omega_G(s)$ è dotata di segno. Le stesse considerazioni valgono per le analoghe quantità (5.110) riferite al centro di torsione.

ESEMPIO 5.2: sezione a C Come primo esempio si consideri il profilo illustrato in Figura 5.34. Lo spessore b è ovunque costante e le proprietà geometriche della sezione, calcolate con approssimazioni legittime se $b \ll d$, risultano

$$A = 4bd \quad I_x = \frac{8}{3} d^3 b$$

Le (5.104b), (5.103) forniscono con calcolo immediato i valori della rigidità torsionale e dello sforzo tangenziale massimo. Si ottiene

$$J = \frac{4}{3} b^3 d \quad \tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{M_t}{b^2 d}$$

Si procede ora al calcolo della funzione di ingobbamento. La distanza r_G della tangente alla linea media dal baricentro risulta, nei tre tratti

$$r_G(s) = \begin{cases} d & 0 \leq s \leq d \\ d/4 & d \leq s \leq 3d \\ d & 3d \leq s \leq 4d \end{cases}$$

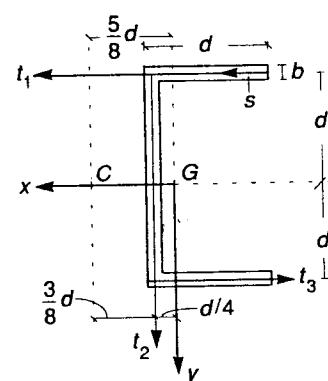


Figura 5.34

Si ha allora

$$2\Omega_G(s) = \int_0^s r_G(s') ds' = \begin{cases} sd & 0 \leq s \leq d \\ \frac{3}{4} d^2 + \frac{sd}{4} & d \leq s \leq 3d \\ -\frac{3}{2} d^2 + sd & 3d \leq s \leq 4d \end{cases}$$

$$2\bar{\Omega}_G = \frac{1}{4bd} \int_0^{4d} 2\Omega_G(s) bds = \frac{5}{4} d^2$$

La funzione di ingobbamento è quindi, per la (5.108)

$$\psi_G(s) = 2(\bar{\Omega}_G - \Omega_G(s)) = \begin{cases} \frac{5}{4} d^2 - sd & 0 \leq s \leq d \\ \frac{d^2}{2} - \frac{sd}{4} & d \leq s \leq 3d \\ \frac{11}{4} d^2 - sd & 3d \leq s \leq 4d \end{cases}$$

Si può ora determinare la posizione del centro di torsione. Dal momento che x è asse di simmetria, sarà $y_c = 0$; x_c è fornito dalla (5.109a) che diviene, nell'esempio considerato

$$x_c = -\frac{3}{8bd^3} b \int_0^{4d} \psi_G(s) y(s) ds \quad y(s) = \begin{cases} -d & 0 \leq s \leq d \\ s - 2d & d \leq s \leq 3d \\ d & 3d \leq s \leq 4d \end{cases}$$

Risulta

$$x_c = \frac{5}{8} d \quad (5.111a)$$

Il centro di torsione si colloca quindi alla sinistra della costola verticale, a distanza $3d/8$ da questa (Figura 5.34). È ora possibile valutare l'ingobbamento relativamente al punto C. Dalla (5.110a) si ottiene

$$\psi(s) = \psi_G(s) + x_c y(s) = \begin{cases} \frac{5}{8} d^2 - sd & 0 \leq s \leq d \\ -\frac{3}{4} d^2 + \frac{3}{8} sd & d \leq s \leq 3d \\ \frac{27}{8} d^2 - sd & 3d \leq s \leq 4d \end{cases} \quad (5.111b)$$

Gli andamenti delle funzioni $r_G(s)$, $2\Omega_G(s)$, $\psi_G(s)$ e $\psi(s)$ sono illustrati in Figura 5.35. In Figura 5.36 sono invece riportati gli spostamenti dei punti della linea media in direzio-

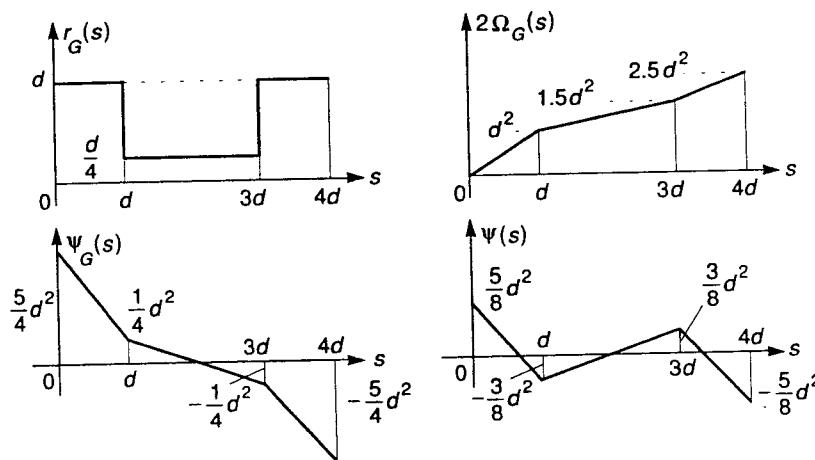


Figura 5.35

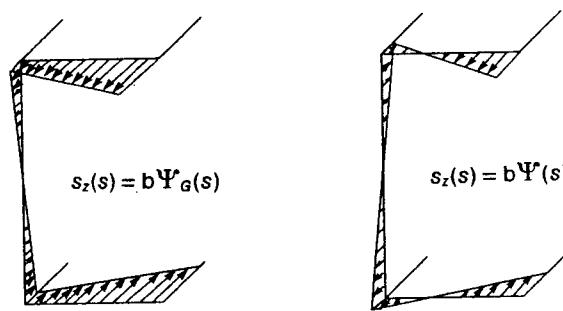


Figura 5.36

ne z , come previsti, rispettivamente, sulla base di ψ_G e di ψ ; si può notare come essi differiscano unicamente per una rotazione rigida della sezione attorno all'asse x .

Si lascia come esercizio il verificare che, qualora fosse nota la posizione del centro di torsione, l'espressione di ψ potrebbe essere ottenuta anche utilizzando le (5.110b-d).

ESEMPIO 5.3: sezione a T Si consideri ora la sezione in Figura 5.37a, per la quale risulta (per $b \ll d$)

$$A = 2bd \quad I_y = \frac{1}{12} d^3 b$$

Dalle (5.104b), (5.103) si ottiene in questo caso

$$J = \frac{2}{3} b^3 d \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{M_t}{b^2 d}$$

La distanza dal baricentro della tangente alla linea media nei due tratti indicati con ① e ② in figura è adesso

$$r_{G1}(s_1) = \frac{d}{4} \quad r_{G2}(s_2) = 0$$

Pertanto dalla (5.107) si ottiene

$$2\Omega_{G1}(s_1) = s_1 \frac{d}{4} \quad 2\Omega_{G2}(s_2) = \frac{d^2}{8}$$

(nel valutare Ω_{G2} si è imposta la continuità delle aree settoriali nel punto di incontro tra i due tratti). È anche

$$2\bar{\Omega}_G = \frac{d^2}{8}$$

per cui la (5.108) fornisce

$$\psi_{G1}(s_1) = \frac{d}{4} \left(\frac{d}{2} - s_1 \right) \quad \psi_{G2}(s_2) = 0 \quad (u)$$

Il centro di torsione si troverà sull'asse di simmetria y ; la sua ordinata è fornita dalla (5.109b) che si scrive, nel caso in esame

$$y_c = \frac{12}{d^3 b} \frac{d}{4} b \int_0^d \left(\frac{d}{2} - s_1 \right) x(s_1) ds_1 \quad x(s_1) = -\left(\frac{d}{2} - s_1 \right)$$

È quindi

$$y_c = -\frac{d}{4}$$

il che conferma quanto precedentemente asserito circa la posizione del centro di torsione in profili di questo tipo, per i quali esso si colloca nel punto di incontro tra i rettangoli di cui è costituito. È anche facile verificare che la ψ definita dalle (5.110) è ora nulla. La sezione, pertanto, non si ingobba. Ciò non è in contraddizione con la (u): gli spostamenti in direzione z che si ricavano su questa base (Figura 5.37b) configurano infatti una semplice rotazione rigida del prisma attorno all'asse y . Le sezioni si mantengono quindi piane, almeno per quanto riguarda la loro linea media.

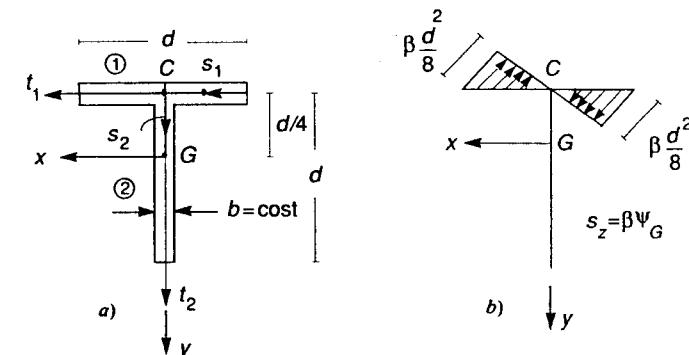


Figura 5.37

5.2.2.8.2 Profili chiusi in parete sottile

Nella trattazione fin qui svolta è stato implicitamente assunto che la sezione fosse semplicemente connessa. Sono però possibili generalizzazioni degli approcci sia agli spostamenti che agli sforzi che permettono di considerare sezioni a connessione multipla, relativamente cioè a prismi limitati interiormente da una o più superfici con generatrice parallela all'asse z (Figura 5.38). Si perviene ancora a formulare il problema attraverso relazioni analoghe alle (5.60) e (5.70), con modifiche limitate alle condizioni al contorno sulle superfici interne. Tali generalizzazioni non vengono considerate in questa sede, in quanto il solo caso che verrà esaminato consente di ottenere una soluzione approssimata con semplici ragionamenti diretti che non richiedono il ricorso alla formulazione completa. Ci si limita quindi a affermare che le relazioni che verranno utilizzate mantengono la loro validità anche in questo ambito.

Si consideri il profilo in parete sottile illustrato in Figura 5.39a, caratterizzato dalla presenza di un unico circuito chiuso. L'analogia idrodinamica suggerisce la presenza di un flusso di tensioni tangenziali ovunque diretto secondo la linea media. Si può allora assumere

$$\tau_{zs} = \tau_{zs}(s, n) \quad \tau_{zn} = 0 \quad (5.112a, b)$$

È facile dimostrare che l'equilibrio richiede

$$q = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs} dn = \text{cost} \quad (5.113)$$

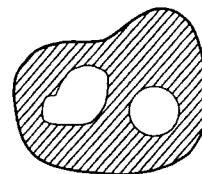


Figura 5.38

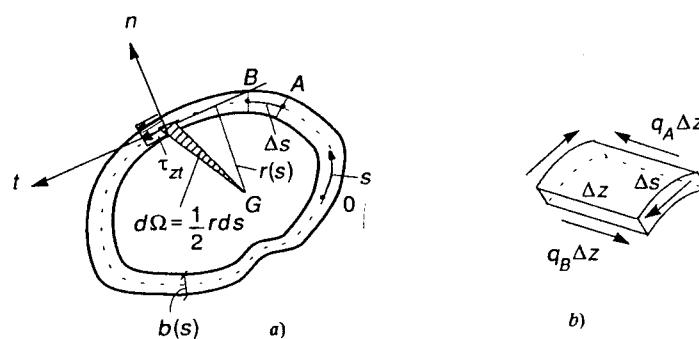


Figura 5.39

dove q indica il *flusso* delle tensioni tangenziali. La (5.113) può essere verificata considerando l'elemento in Figura 5.39b: l'equilibrio alla traslazione in direzione z impone che sia $q_A = q_B$ per ogni corda AB del profilo.

Il legame tra il momento torcente applicato e il flusso (5.113) si ottiene per equilibrio e risulta

$$M_t = \int_0^a qr(s) ds = 2q\Omega \quad (5.114)$$

dove s indica un'ascissa curvilinea che percorre la linea media a partire da un'origine arbitraria, a la lunghezza totale della linea media stessa e

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^a r(s) ds \quad (5.115)$$

l'area racchiusa dalla linea media. Si osservi che questa è indipendente dal punto da cui $r(s)$ viene misurato, che in Figura 5.39a è identificato con il baricentro.

Se lo spessore è sottile, è lecito assumere che le τ_{zs} siano uniformemente distribuite su di esso. È allora

$$\tau_{zs}(s) = \frac{q}{b(s)} = \frac{M_t}{2\Omega b(s)} \quad (5.116)$$

La (5.116), nota come *formula di Bredt* dal nome dello studioso che la ha proposta, fornisce l'espressione cercata per le tensioni tangenziali, che risultano massime dove lo spessore è minimo.

La rigidità torsionale J può essere ora valutata con la (5.93). Per la (5.116) si ha $\tau_* = 1/2\Omega b$. Posto allora $dA = b ds$, si ottiene

$$J = \left(\int_0^a \frac{b ds}{4\Omega^2 b^2} \right)^{-1} = 4 \frac{\Omega^2}{\varrho} \quad \varrho = \int_0^a \frac{ds}{b(s)} \quad (5.117)$$

Nel caso di spessore costante è $\varrho = a/b$ e la (5.117) diviene

$$J = 4\Omega^2 \frac{b}{a} \quad (5.118)$$

Resta solo da valutare la funzione di ingobbamento. Si assume sempre $\psi_G = \psi_G(s)$, trascurando le variazioni di ingobbamento sullo spessore. Lo stesso ragionamento che per profili aperti conduce ancora all'espressione (5.105) per $d\psi_G$. Tuttavia, le tensioni tangenziali sulla linea media ora non si annullano. Sostituendo la loro espressione (5.116) e ricordando la (5.117) si perviene alla relazione

$$d\psi_G = \left\{ \frac{2\Omega}{\varrho b(s)} - r_G(s) \right\} ds$$

da cui per integrazione si ottiene

$$\psi_G(s) = \int_0^s \left\{ \frac{2\Omega}{\varrho b(s')} - r_G(s') \right\} ds' + \psi_0 \quad (5.119)$$

Al solito, ψ_0 può essere fissata imponendo la (5.56). Si noti che per le (5.115), (5.117) risulta, come atteso per continuità

$$\int_0^a d\psi_G = \psi_G(a) - \psi_G(0) = \frac{2\Omega}{\varrho} \int_0^a \frac{ds}{b(s)} - \int_0^a r_G(s) ds = 0$$

La posizione del centro di torsione è sempre definita dalle (5.109), in cui l'espressione (5.119) di ψ_G ora sostituisce la (5.108).

L'entità dell'approssimazione può essere quantificata nel caso di una sezione circolare cava, per cui è disponibile la soluzione esatta. Detto R il raggio medio e b lo spessore (Figura 5.40), tale soluzione prevede

$$J = I_G = 2\pi R^3 b \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right\}$$

e tensioni tangenziali variabili linearmente con la distanza dal centro e massime sul bordo esterno, dove valgono

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J} \left(R + \frac{b}{2} \right) = \frac{M_t}{2\pi R^2 b} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{b}{R}}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{R} \right)^2}$$

Per la sezione in esame è peraltro $\Omega = \pi R^2$, $a = 2\pi R$ e $\varrho = 2\pi R/b$. La soluzione di Bredt prevede quindi

$$J = 2\pi R^3 b \quad \tau_{zs} = \frac{M_t}{2\pi R^2 b} = \text{cost}$$

Il confronto mostra come l'errore su J risulti dell'ordine di $(b/R)^2$ e quello su τ_{\max} di b/R . Il primo è inferiore a 1% già per $R/b = 5$, rapporto che configura profili ancora piuttosto tozzi. L'errore su τ_{\max} può considerarsi accettabile già per $R/b = 10$.

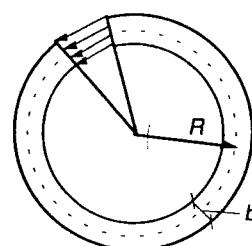


Figura 5.40

ESEMPIO 5.4 Si consideri la sezione rettangolare cava la cui linea media è illustrata in Figura 5.41a. Per $b = \text{cost}$ risulta

$$\Omega = hd \quad a = 2(d+h) \quad \varrho = 2 \frac{d+h}{b}$$

Dalle (5.116),(5.118) si ottiene allora

$$J = 2 \frac{d^2 h^2 b}{d+h} \quad \tau_{zs} = \frac{M_t}{2dhb}$$

La (5.119) adesso si scrive

$$\psi(s) = \int_0^s \left(\frac{dh}{d+h} - r \right) ds + \psi_0 \quad (v)$$

dove, per i quattro tratti $i = 1, \dots, 4$ in Figura 5.41a si ha

$$r_i(s) = \begin{cases} d/2 & \text{per } i = 1, 3 \\ h/2 & \text{per } i = 2, 4 \end{cases}$$

(l'indice $()_G$ è stato omesso in quanto, stante la doppia simmetria della sezione, il centro di torsione coincide con il baricentro). L'integrale nella (v) può essere calcolato e la costante di integrazione fissata con la (5.56). Il risultato è convenientemente espresso in coordinate locali ξ_i , con origine nel punto medio di ogni tratto (Figura 5.41a). Si ottiene

$$\psi_i = \frac{d}{2} \frac{h-d}{h+d} \xi_i \quad (i = 1, 3) \quad \psi_i = -\frac{h}{2} \frac{h-d}{h+d} \xi_i \quad (i = 2, 4) \quad (5.120)$$

L'andamento degli spostamenti in direzione z è indicato in Figura 5.41b. Si noti che l'ingombramento risulta nullo per sezioni quadrate ($h = d$).

Nel derivare la formula di Bredt si è fatto uso unicamente di considerazioni di equilibrio. La sezione cava che presenta un unico circuito chiuso è in effetti staticamente determinata. Diverso è il caso di sezioni, come quella illustrata in Figura 5.42a, che

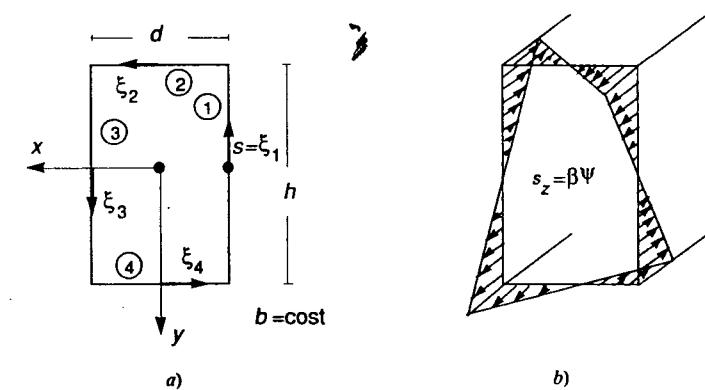


Figura 5.41

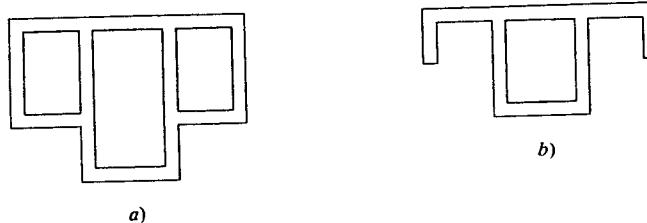


Figura 5.42

presentano più circuiti; il flusso di tensioni tangenziali in ognuno di essi non è allora determinabile col solo equilibrio e la sua valutazione richiede una generalizzazione del procedimento, non difficile ma che motivi di spazio costringono a omettere. Per la sua trattazione si rimanda a testi specialistici [7]. A tale letteratura ci si può riferire anche per profili solo parzialmente chiusi, come quello in Figura 5.42b.

5.2.3 FLESSIONE CON TAGLIO COSTANTE

5.2.3.1 Formulazione del problema

Resta ancora da esaminare la condizione di carico illustrata in Figura 5.43. Sulle sezioni estreme agiscono due forze uguali e contrarie, con componenti T_x e T_y , secondo i due assi principali, rispettivamente a distanza y_0 e x_0 dagli assi stessi. Le condizioni di equilibrio (5.6) richiedono in ogni sezione retta un momento flettente di componenti

$$M_x = T_y z \quad M_y = -T_x z \quad (5.121)$$

In tale situazione, dalle (5.15) si ottiene $a = a_1 = a_2 = 0$ e $b_1 = -T_x/I_y$, $b_2 = -T_y/I_x$. L'espressione (5.16) dello sforzo normale risulta pertanto

$$\sigma_z = \frac{T_y}{I_x} zy + \frac{T_x}{I_y} zx = -\frac{M_y(z)}{I_y} x + \frac{M_x(z)}{I_x} y \quad (5.122)$$

Essa è formalmente identica alla (5.44), relativa al caso di flessione deviata, con momenti però ora definiti dalle (5.121) e non più costanti. È immediato verificare che la (5.122) soddisfa le seguenti condizioni di equilibrio globale sulle sezioni estreme

$$N = 0 \quad M_{x0} = M_{y0} = 0 \quad M_{xL} = T_y l \quad M_{yL} = -T_x l$$

dove l è la lunghezza del prisma.

Le tensioni tangenziali τ_{zx} , τ_{zy} sono fornite dalla soluzione del problema (5.12-14). Le equazioni di equilibrio indefinite e sulla superficie laterale scarica sono ora

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{T_x}{I_y} x - \frac{T_y}{I_x} y \quad \text{in } A \quad \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad (5.123a, b)$$

mentre la condizione di congruenza interna (5.13) adesso si scrive

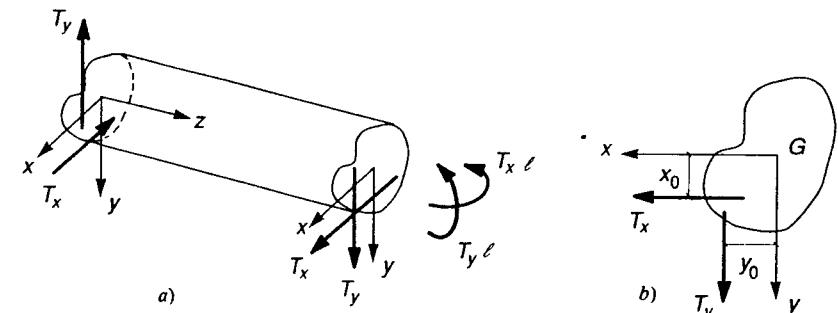


Figura 5.43

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = -\bar{\nu} \left\{ \frac{T_x}{I_y} y - \frac{T_y}{I_x} x \right\} + c \quad (5.124)$$

con $\bar{\nu}$ sempre definito dalla (5.10). La soluzione dovrà anche rispettare le restanti condizioni di equilibrio globale. Precisamente

$$\int_A \tau_{zx} dA = T_x \quad \int_A \tau_{zy} dA = T_y \quad \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = T_y x_0 - T_x y_0 \quad (5.125a-c)$$

5.2.3.2 Il centro di taglio

Chiaramente, la soluzione del problema dipenderà dal punto O , di coordinate (x_0, y_0) , per cui passa la retta d'azione della forza $\mathbf{T} = [T_x, T_y]'$. Si noti peraltro che tale forza può essere spostata parallelamente a se stessa senza alterare la soluzione, purché si introduca un momento torcente pari a Td , dove d indica la distanza tra le due rette d'azione (Figura 5.44). È quindi possibile supporre \mathbf{T} applicata in un punto comodo, sovrapponendo poi alla soluzione così trovata quella relativa a un problema di torsione.

È spontaneo pensare a un punto particolare, detto *centro di taglio*, tale per cui la sezione si "infletta senza ruotare". Il significato di questa espressione deve però essere definito convenzionalmente; la presenza di una σ_z non nulla comporta infatti che la

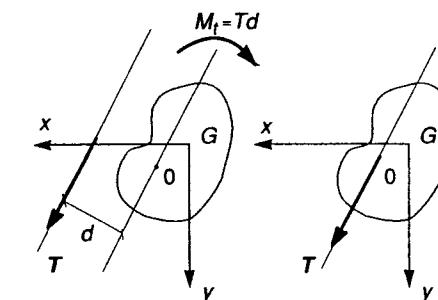


Figura 5.44

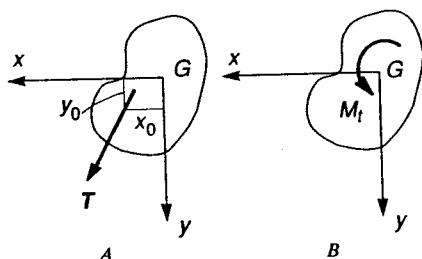


Figura 5.45

sezione si deforma nel suo piano e non è quindi facile (se non in presenza di simmetrie) stabilire senza ambiguità cosa si intenda per rotazione globale della sezione.

A tale scopo si consideri, per lo stesso solido cilindrico, accanto al problema (indicato con A in Figura 5.45) della flessione con taglio costante, un altro problema B di pura torsione. Si dirà nulla la *rotazione* della sezione nel Problema A se T è applicato in un punto tale per cui il lavoro mutuo \mathcal{E}_{AB} , definito dalla (4.188), risulta uguale a zero. Per il principio dei lavori virtuali, il centro di taglio risulta allora definito dalla condizione

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_V \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^B dV = 0 \quad (5.126)$$

dove σ_{ij}^A indica la soluzione in termini di sforzo del primo problema (taglio) e ϵ_{ij}^B quella in termini di deformazioni del secondo (torsione). Si può constatare che effettivamente esiste uno e un solo punto per cui la (5.126) è soddisfatta e che questo coincide con il centro di torsione, le cui coordinate sono fornite dalle (5.88).

Per dimostrare l'asserto, si noti innanzi tutto che le componenti non nulle della σ_{ij}^A sono delle τ_{zx} , τ_{zy} , indipendenti da z e le σ_z (5.122). Le deformazioni relative al Problema B sono le sole γ_{zx} , γ_{zy} , pure indipendenti da z , espresse in termini di funzione di ingombramento dalle (5.57). Essendo $\epsilon_z^B = 0$, la condizione (5.126) risulta indipendente da z e può scriversi per unità di lunghezza; pertanto

$$\frac{d\mathcal{E}_{AB}}{dz} = \int_A (\tau_{zx}^A \gamma_{zy}^B + \tau_{zy}^A \gamma_{zx}^B) dA = \beta \int_A \left(\tau_{zx} \left(\frac{\partial \psi_G}{\partial x} - y \right) + \tau_{zy} \left(\frac{\partial \psi_G}{\partial y} + x \right) \right) dA = 0 \quad (a)$$

dove le τ_{zi} (l'indice () verrà nel seguito omesso) sono la soluzione delle (5.123-125). Ricordando la (5.125c), dalla (a) si ottiene

$$\int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial \psi_G}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \psi_G}{\partial y} \right) dA = - \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = - T_y x_0 + T_x y_0 \quad (b)$$

Utilizzando le identità

$$\tau_{zx} \frac{\partial \psi_G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\psi_G \tau_{zx}) - \psi_G \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \quad \tau_{zy} \frac{\partial \psi_G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\psi_G \tau_{zy}) - \psi_G \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$$

il primo membro della (b) diviene

$$\begin{aligned} & \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial \psi_G}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \psi_G}{\partial y} \right) dA = \\ & = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} (\psi_G \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi_G \tau_{zy}) \right) dA - \int_A \psi_G \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (c)$$

Applicando il teorema della divergenza e considerando la condizione al contorno (5.123b), si constata che il primo integrale a secondo membro è nullo. Infatti

$$\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} (\psi_G \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi_G \tau_{zy}) \right) dA = \int_r \psi_G (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y) ds = 0$$

In virtù dell'equazione indefinita di equilibrio (5.123a), il secondo integrale nella (c) diviene inoltre

$$\int_A \psi_G \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) dA = - \frac{T_x}{I_y} \int_A x \psi_G dA - \frac{T_y}{I_x} \int_A y \psi_G dA = - T_x y_c + T_y x_c$$

dove x_c , y_c sono le coordinate del centro di torsione, come definite dalle (5.88). La (b) quindi si scrive

$$T_x (y_c - y_0) - T_y (x_c - x_0) = 0 \quad (d)$$

La (5.126) è stata pertanto ricondotta alla (d), che mostra come sia effettivamente possibile definire il centro di taglio e come questo si identifichi col centro di torsione. Qualunque siano i valori di T_x e T_y infatti, la sezione si inflette senza ruotare, nel senso convenzionalmente definito dalla (5.126), se la retta d'azione di T passa per C .

Stante la coincidenza tra centro di torsione e centro di taglio, anche quest'ultimo sarà d'ora in avanti indicato con C . Le sue coordinate sono date dalle (5.88), che tuttavia richiedono la conoscenza della funzione di ingombramento e, quindi, che venga preventivamente risolto il problema (5.60). Si vedrà, tuttavia, come in alcune circostanze una soluzione trovata indipendentemente dalla retta d'azione di T comporti tensioni tangenziali certamente ortogonali alle deformazioni da torsione nello stesso profilo. Ciò garantisce l'annullarsi del lavoro mutuo e la posizione del centro di taglio può essere calcolata a posteriori, valutando mediante la (5.125c) le coordinate (x_0, y_0) corrispondenti alla soluzione. Tale procedimento è valido anche con riferimento a soluzioni approssimate basate sul solo equilibrio. La dimostrazione delle coincidenza tra centri di torsione e di taglio non ha infatti richiesto l'uso della condizione di congruenza (5.124).

5.2.3.3 La trattazione approssimata di Jourawsky

5.2.3.3.1 Tensione tangenziale media su una corda

La soluzione generale delle (5.123-125) non è facile da calcolarsi. Sono però a volte possibili soluzioni approssimate, basate su di un procedimento originariamente proposto da Jourawsky [8], che verrà ora illustrato.

Data la possibilità di sovrapporre gli effetti, si può senza perdita di generalità considerare solamente una forza agente parallelamente a un asse principale, ad esempio

$y(T_x = 0)$. Posto allora, per snellimento di simbologia, $T = T_y$ e $I = I_x$, l'espressione (5.122) delle σ_z diviene

$$\sigma_z = \frac{T}{I} yz \quad (5.127)$$

Alla base della trattazione di Jourawsky sta l'osservazione che, data una generica corda che suddivide la sezione in due porzioni, indicate con A' e A'' in Figura 5.46a, il solo equilibrio permette di determinare la tensione tangenziale media su di essa. Detto (ξ, η) un riferimento locale, con η normale alla corda, e b la dimensione della corda stessa, tale tensione media risulta definita dalla relazione

$$\bar{\tau}_{z\eta} = \frac{1}{b} \int_0^b \tau_{z\eta} d\xi \quad (5.128)$$

Stante la dipendenza di σ_z da z , le risultanti degli sforzi normali (5.127) su due facce a distanza dz della porzione di sezione isolata dalla corda (area A'' in Figura 5.46b) differiscono della quantità

$$dR = \int_{A''} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA - \int_{A''} \sigma_z dA = \int_{A''} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz dA = \frac{T}{I} dz \int_{A''} y dA \quad (5.129a)$$

L'equilibrio è ristabilito dalle tensioni tangenziali $\tau_{nz} = \tau_{z\eta}$ che le due porzioni in cui il tronco è stato idealmente suddiviso si scambiano attraverso le facce di normale $\pm \eta$; sarà dunque anche

$$dR = dz \int_0^b \tau_{z\eta} d\xi = b \bar{\tau}_{z\eta} dz \quad (5.129b)$$

Eguagliando tra di loro le (5.129), si ottiene l'espressione di $\bar{\tau}_{z\eta}$ cercata.

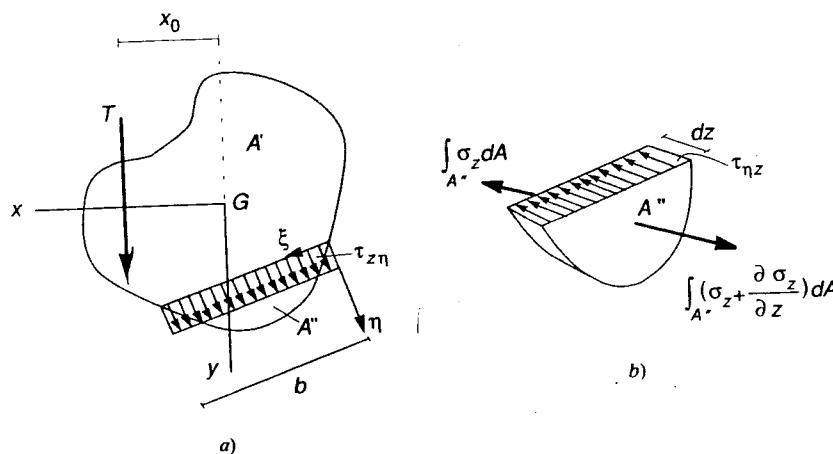


Figura 5.46

L'integrale a secondo membro nella (5.129a) è il momento statico S'' dell'area A'' rispetto all'asse x . Essendo questo baricentrico, rispetto a esso si annullerà il momento statico dell'intera sezione. Si può allora scrivere

$$S'' = \int_{A''} y dA = - \int_{A'} y dA = -S' \quad (5.129c)$$

e la tensione tangenziale media sulla corda si esprime nella forma

$$\bar{\tau}_{z\eta} = - \frac{T}{I} \frac{S'}{b} \quad (5.130)$$

Esistono importanti circostanze in cui l'intuizione ingegneristica fa supporre che le $\tau_{z\eta}$ si discostino poco dal loro valore medio. Si può allora determinare una soluzione ragionevolmente approssimata del problema a partire dalla (5.130). È questo il caso di sezioni simmetriche e simmetricamente sollecitate e di profili in parete sottile, che verranno esaminati nel seguito.

Si osservi che la (5.130) non è influenzata dall'ascissa x_0 della retta d'azione di T . In effetti, applicando il ragionamento di Jourawsky, è facile verificare che le tensioni tangenziali dovute a un momento torcente hanno valor medio nullo lungo qualunque corda, per cui T può essere spostata parallelamente a se stessa senza alterare il valore di $\bar{\tau}_{z\eta}$.

Prima di procedere all'esame di casi particolari ingegneristicamente significativi, si mostra, al solo scopo di illustrare la procedura, come una soluzione approssimata (anche se non necessariamente in modo ragionevole) possa ottenersi ipotizzando costante il valore delle tensioni tangenziali lungo una corda parallela all'asse principale x , ortogonale alla retta d'azione di T (Figura 5.47). In tal caso è $\tau_{z\eta} = \tau_{zy}$ e dalla (5.130) si ottiene

$$\tau_{zy}(y) = \bar{\tau}_{z\eta}(y) = - \frac{T}{I} \frac{S'(y)}{b(y)} \quad (e)$$

dove

$$S'(y) = \int_{y_1}^y b(y') y' dy' \quad (f)$$

è il momento statico dell'area A' , considerata crescente con y .

L'equilibrio richiede però anche la presenza di τ_{zx} in generale non nulle. L'equazione indefinita (5.123a) scritta con riferimento alle (e) e (5.127) comporta infatti

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T}{I} \left\{ \frac{(dS'/dy)b - S'(db/dy)}{b^2} - y \right\}$$

relazione che per le (e),(f) diviene

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = - \frac{T}{I} \frac{S'}{b^2} \frac{db}{dy} = \tau_{zy} \frac{1}{b} \frac{db}{dy} \quad (g)$$

(dalla (f) si ha infatti $dS'/dy = by$). Il secondo membro della (g) è funzione della sola y ; l'integrazione allora fornisce

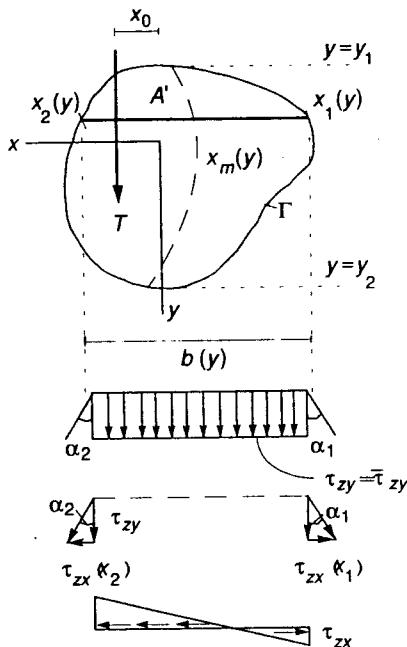


Figura 5.47

$$\tau_{zx}(x, y) = \tau_{zy} \frac{db}{dy} \frac{x}{b} + f(y) \quad (h)$$

La funzione $f(y)$ è valutabile mediante la (5.123b), che impone al vettore τ_z di essere tangente al contorno Γ . Dette allora $x_2(y)$ e $x_1(y)$ le ascisse dei punti in cui la corda interseca Γ e $\alpha_2(y)$, $\alpha_1(y)$ gli angoli che la tangente al contorno forma con y (positivi se come in Figura 5.47), dovrà risultare

$$\tau_{zx}(x_2) = \tau_{zy} \tan \alpha_2 \quad \tau_{zx}(x_1) = -\tau_{zy} \tan \alpha_1 \quad (i)$$

Dalla (h) si ottiene allora

$$f(y) = \tau_{zy} [\tan \alpha_2 - (x_2/b)(db/dy)] = -\tau_{zy} [\tan \alpha_1 + (x_1/b)(db/dy)] \quad (j)$$

Le due espressioni sono effettivamente uguali. Le definizioni adottate implicano infatti i seguenti legami

$$b = x_2 - x_1 \quad \tan \alpha_2 = dx_2/dy \quad \tan \alpha_1 = -dx_1/dy \quad (k1-3)$$

da cui il risultato segue. D'altra parte, l'ascissa del punto medio di ogni corda vale

$$x_m = \frac{1}{2} (x_2 + x_1) \quad (\ell)$$

Si ha quindi

$$db/dy = \tan \alpha_2 + \tan \alpha_1 \quad dx_m/dy = \frac{1}{2} (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) \quad (m1, 2)$$

e si può porre

$$f(y) = \frac{\tau_{zy}}{2} \left[(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) - \frac{x_1 + x_2}{b} \frac{db}{dy} \right] = \tau_{zy} \left(\frac{dx_m}{dy} - \frac{x_m}{b} \frac{db}{dy} \right)$$

nonché esprimere l'espressione di τ_{zx} nella forma

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \left(\frac{dx_m}{dy} + \frac{x - x_m}{b} \frac{db}{dy} \right) \quad (n)$$

Lo stato di sforzo definito dalle (5.127), (e) e (n) soddisfa l'equilibrio indefinito e su Γ . Perché sussista l'equilibrio globale sulle due facce estreme deve anche essere

$$\int_A \tau_{zy} dA = T \quad \int_A \tau_{zx} dA = 0 \quad (o)$$

Dipendendo τ_{zy} dalla sola y , si può porre nell'integrale sulla sezione $dA = bdy$. Per la (e) si ottiene allora

$$\int_A \tau_{zy} dA = -\frac{T}{I} \int_{y_1}^{y_2} S' dy \quad (p)$$

Ricordando che per la (f) è $dS' = ybdy$, il momento d'inerzia può inoltre esimersi

$$I = \int_A y^2 dA = \int_{y_1}^{y_2} y^2 bdy = \int_{y_1}^{y_2} ydS' \quad (q)$$

Integrando per parti e considerando che in corrispondenza delle ordinate estreme della sezione è $S'(y_1) = S'(y_2) = 0$, si ottiene

$$I = [yS']_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} S' dy = - \int_{y_1}^{y_2} S' dy \quad (r)$$

il che dimostra la prima delle (o). Per verificare la seconda, si noti innanzi tutto che essendo τ_{zx} funzione lineare di x e considerando la (n), si può scrivere, per una generica corda

$$\int_{x_1}^{x_2} \tau_{zx}(x, y) dx = b(y) \tau_{zx}(x_m, y) = b \tau_{zy} \frac{dx_m}{dy}$$

L'integrale della τ_{zx} sulla sezione si scrive allora

$$\int_A \tau_{zx} dA = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \tau_{zx} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zy} b \frac{dx_m}{dy} dy = -\frac{T}{I} \int_{y_1}^{y_2} S' dx_m$$

dove è stata utilizzata l'espressione (e) di τ_{zy} . Integrando per parti, considerando sempre che $S'(y_1) = S'(y_2) = 0$ e tenendo presente l'identità

$$bx_m = \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

si ottiene

$$\int_A \tau_{zx} dA = \frac{T}{I} \int_{y_1}^{y_2} bx_m y dy = \frac{T}{I} \int_A xy dA \quad (5)$$

La risultante delle τ_{zx} è proporzionale al momento centrifugo della sezione rispetto ai due assi principali x e y ed è pertanto nulla. Anche la seconda delle (o) è quindi verificata.

La soluzione trovata è quindi staticamente equivalente a una forza T applicata parallelamente all'asse y . La distanza x_o della sua retta d'azione da tale asse può essere calcolata mediante la condizione di equilibrio globale (5.125c). Nel caso qui considerato, questa si scrive

$$\int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = Tx_o$$

Introducendo le (e), (n) si ottiene, dopo alcuni passaggi

$$x_o = -\frac{1}{I} \int_{y_1}^{y_2} S' \left\{ x_m - y \frac{dx_m}{dy} \right\} dx \quad (t)$$

Qualora fosse possibile stabilire l'ortogonalità tra le tensioni tangenziali (e), (n) e le deformazioni da momento torcente nella stessa sezione, la (t) definirebbe l'ascissa del centro di taglio.

La soluzione approssimata ora definita si configura come una particolare soluzione equilibrata del problema. Non essendo stato fatto uso della (5.124), la congruenza risulterà in generale violata.

5.2.3.3.2 Sezioni compatte simmetriche e simmetricamente sollecitate

Si consideri ora (Figura 5.48a) una sezione simmetrica rispetto all'asse y , sul quale si troverà quindi il centro di taglio (torsione). Se la forza T agisce secondo tale asse, le τ_{zy} su di ogni corda parallela a x avranno andamento simmetrico rispetto a y e appare ragionevole identificarle con il loro valore medio sulla corda. Posto allora $\tau_{zn} = \tau_{zy}$, dalla (5.130) si ottiene

$$\tau_{zy}(y) = -\frac{T}{I} \frac{S'(y)}{b(y)} \quad (5.131)$$

dove $S'(y)$ adesso può scriversi

$$S'(y) = \int_{y_1}^y b(y) dy \quad (5.132)$$

L'equazione indefinita di equilibrio (5.123a) richiede ora

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{T}{I} y$$

Dal momento che il secondo membro dipende solo da y , un'ulteriore differenziazione rispetto a x mostra che deve essere $\partial^2 \tau_{zx}/\partial x^2 = 0$, il che comporta che le τ_{zx} varino linearmente lungo la corda. Il loro valore è determinato dalla (5.123b), che richiede che

il vettore τ_z risulti tangente al contorno Γ . Detto allora α l'angolo che la tangente al contorno forma con l'asse y , con le convenzioni di Figura 5.48b dovrà essere

$$\tau_{zx}(x = \pm b/2) = \pm \tau_{zy} \tan \alpha$$

Lungo ogni corda l'andamento delle τ_{zx} sarà quindi lineare e anti-simmetrico, come illustrato in Figura 5.48b. Esso è definito dalla relazione

$$\tau_{zx} = 2 \tau_{zy} \frac{x}{b} \tan \alpha \quad (5.133)$$

La (5.133) può essere anche ottenuta particolarizzando al caso in esame la (n). Per sezioni simmetriche rispetto a y è chiaramente $x_m = 0$ e $dx_m/dy = 0$; essendo inoltre $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, dalla (m1) si ottiene anche $db/dy = 2 \tan \alpha$, col che la (n) si riconduce alla (5.133).

Le tensioni tangenziali sulla sezione devono produrre, come risultante, la sola forza T applicata sull'asse y . Le (5.125) devono quindi fornire

$$\int_A \tau_{zy} dA = T \quad \int_A \tau_{zx} dA = 0 \quad \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = 0 \quad (5.134a-c)$$

Stante la simmetria della sezione e gli andamenti, rispettivamente costante ed antisimmetrico, delle τ_{zy} e τ_{zx} in direzione x , le ultime due sono di verifica immediata. La (5.134a) può essere verificata seguendo il procedimento nel paragrafo precedente.

ESEMPIO 5.5: sezione rettangolare Come primo esempio, si consideri la sezione rettangolare in Figura 5.49a. L'area e il momento d'inerzia rispetto a x valgono, rispettivamente

$$A = bh \quad I = \frac{1}{12} bh^3$$

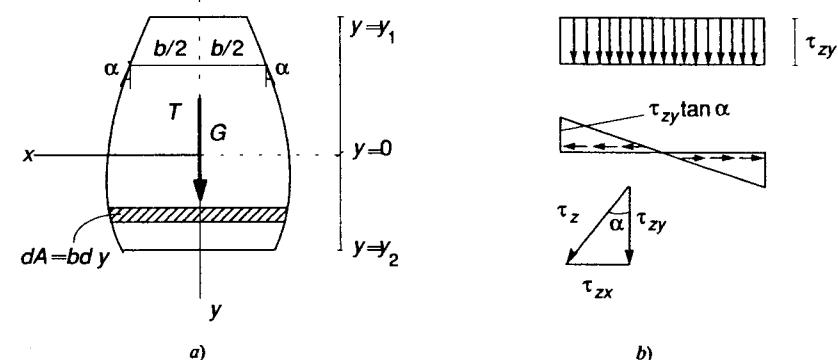


Figura 5.48

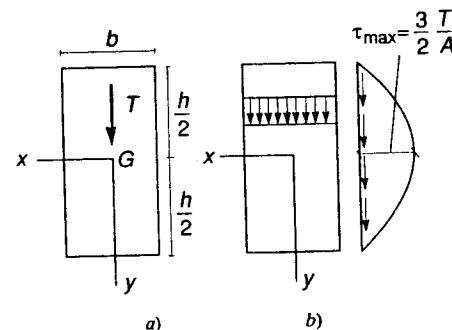


Figura 5.49

Dalla (5.132) si ottiene, per il caso in questione

$$S'(y) = b \int_{-h/2}^y y dy = -\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Pertanto, la (5.131) diviene

$$\tau_{zy}(y) = 6 \frac{T}{bh} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (5.135)$$

Dal momento che i lati verticali sono paralleli all'asse y , è sempre $\alpha = 0$ e le τ_{zx} (5.133) risultano nulle. Sulla sezione, oltre alle σ_z (5.127), vi saranno quindi solamente delle τ_{zy} costanti lungo ogni corda e variabili parabolicamente con y (Figura 5.49b), che raggiungono il loro valore massimo per $y = 0$.

È opportuno osservare che, se l'equilibrio è soddisfatto, la congruenza risulta violata. La (5.124) richiederebbe infatti, per la sezione in esame

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{T}{I} x + c \quad (5.136)$$

Il primo membro è peraltro nullo. Pur ponendo $c = 0$, la condizione risulta violata se non nel caso, estremamente particolare, in cui si abbia $\nu = 0$.

Si noti che la soluzione ora trovata è identica a quella del problema piano negli sforzi di Figura 4.17, che pure comporta una violazione della congruenza. L'approssimazione sarà quindi migliore per piccoli rapporti b/h . Essa è peraltro considerata accettabile per sezioni rettangolari comunque dimensionate.

ESEMPIO 5.6: sezione triangolare Si consideri ora la sezione in Figura 5.50a, per cui è

$$A = \frac{1}{2} ad \quad I = \frac{1}{36} a^3 d \quad b(y) = d \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{a} \right) \quad \tan \alpha = -\frac{1}{2} \frac{d}{a}$$

$$S'(y) = \int_{-a/3}^y b(y) y dy = -\frac{da^2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{a} \right)$$

Dalle (5.131), (5.133) si ottiene allora

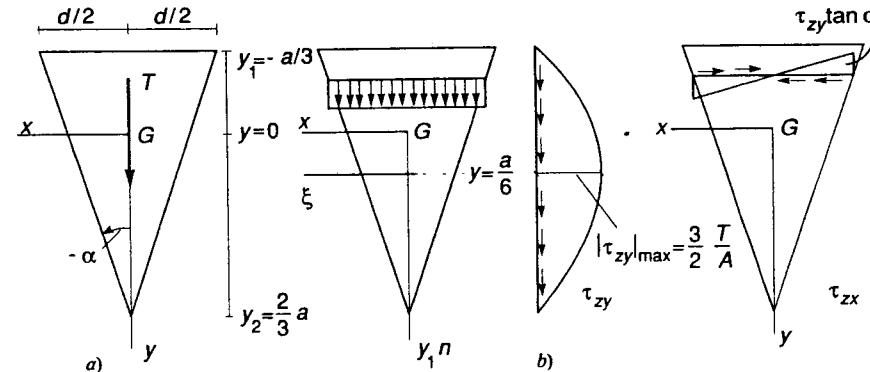


Figura 5.50

$$\tau_{zy} = 6 \frac{T}{A} \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{a} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{a} \right) \quad \tau_{zx} = -6 \frac{T}{A} \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{a} \right) \frac{x}{a} \quad (5.137a, b)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali è illustrato in Figura 5.50b. Quello delle τ_{zy} risulta identico all'analogo relativo alla sezione rettangolare e come questo raggiunge il valore massimo, pari a $3T/2A$, in corrispondenza del punto medio dell'altezza, quindi per $y = a/6$. Ponendo infatti nella (5.137a) $y = \xi - a/6$ si ottiene l'espressione, identica alla (5.135)

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left(1 - 4 \frac{\xi^2}{h^2} \right)$$

5.2.3.3.3 Profili aperti in parete sottile

Si consideri ora (Figura 5.51) un profilo aperto in parete sottile sollecitato parallelamente all'asse principale y . Data la piccolezza dello spessore, appare legittimo supporre le tensioni tangenziali dirette secondo la linea media e costanti lungo una corda normale alla linea media stessa. Detta allora s una coordinata curvilinea che percorra la linea media a partire da un'estremità del profilo, la (5.130) diviene

$$\tau_{zs}(s) = -\frac{T}{I} \frac{S'(s)}{b(s)} \quad (5.138)$$

dove si è posto $\tau_{zn} = \tau_{zs}$ ed è, per la piccolezza dello spessore

$$S'(s) = \int_A y(s) dA = \int_0^s y(s) b(s) ds \quad (5.139)$$

L'equilibrio richiederebbe a rigore anche la presenza di τ_{zn} normali alla linea media. In un riferimento locale relativo a ogni corda ($\xi = n$, $\eta = t$, z), la (5.123a) si scrive infatti

$$\frac{\partial \tau_{zn}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \tau_{zs}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (u)$$

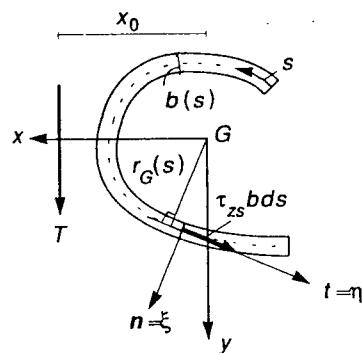


Figura 5.51

Non dipendendo le τ_{zs} da ξ e essendo le σ_z funzioni bilineari del punto, una doppia differenziazione rispetto a ξ mostra che dovrà essere

$$\partial^3 \tau_{zs} / \partial \xi^3 = -\partial^3 \tau_{zs} / \partial \eta \partial \xi^2 - \partial^3 \sigma_z / \partial z \partial \xi^2 = 0$$

Le τ_{zs} variano quindi parabolicamente lungo ogni corda. Il loro andamento potrebbe essere determinato, in quanto il loro valore per $\xi = \pm b/2$ è fissato dalla condizione al contorno su Γ ed è a questo punto noto il secondo membro della (u), che permette di conoscere il valore di $\partial \tau_{zs} / \partial \xi$ in un punto qualunque. Va peraltro osservato che le τ_{zs} sono nulle sul contorno se questo è parallelo alla linea media e pressoché nulle se $b(s)$ non varia troppo bruscamente. Per la piccolezza dello spessore, saranno quindi ovunque trascurabili nei confronti delle τ_{zs} .

L'espressione (5.138) per le τ_{zs} è indipendente dalla retta d'azione di T . Essa però prevede che la risultante delle tensioni tangenziali sia applicata alla distanza x_o dall'asse y definita dalla (5.125c), che nel caso in questione si particolarizza come segue

$$Tx_o = \int_0^a \tau_{zs}(s) r_G(s) b(s) ds \quad (5.140)$$

dove si è ancora indicato con a la lunghezza dell'intera linea media e con $r_G(s)$ la distanza della tangente dal baricentro (Figura 5.51).

Peraltro, per profili aperti in parete sottile le soluzioni dei problemi del taglio e della torsione prevedono entrambe solo tensioni tangenziali parallele alla linea media, le prime uniformi e le seconde antisimmetriche sulla corda (Figura 5.52). È quindi eviden-

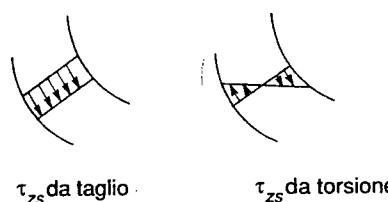


Figura 5.52

te che il lavoro mutuo (5.126) tra le tensioni tangenziali da taglio (5.138) e le deformazioni da torsione è nullo. Il valore di x_o che si ottiene dalla (5.140) rappresenta pertanto l'ascissa del centro di taglio, a meno di eventuali piccoli errori dovuti al carattere approssimato di entrambe le soluzioni.

ESEMPIO 5.7: sezione a C Si consideri il profilo in Figura 5.53a. Per piccoli spessori, il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x vale

$$I = \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{hb_a}{6} + db_f \right)$$

mentre i momenti statici nei tre tratti ①, ② e ③ (rispettivamente, flangia superiore, costola verticale e flangia inferiore) risultano

$$S'_1 = -\frac{h}{2} b_f s$$

$$S'_2 = -\frac{1}{2} \left[hdb_f + b_a \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right] \quad \left(y = s - d - \frac{h}{2} \right)$$

$$S'_3 = -\frac{h}{2} b_f (2d + h - s)$$

(quest'ultimo è facilmente calcolato come momento statico dell'area A'' in Figura 5.53a, cambiato di segno). Dalla (5.138) si ricava allora l'andamento lungo la linea media delle τ_{zs} , illustrato in Figura 5.53b. Si noti che il flusso delle tensioni tangenziali, $q(s) = \tau_{zs}(s) b(s)$, è continuo alla connessione tra flangia e costola verticale.

È facile verificare che su quest'ultima la risultante delle tensioni tangenziali è pari a T . Sulle due flange invece, esse danno luogo a due forze V_x , uguali e contrarie, che valgono

$$V_x = \int_0^d b_f \tau_{zs} ds = \frac{1}{4} \frac{T}{I} hd^2 b_f$$

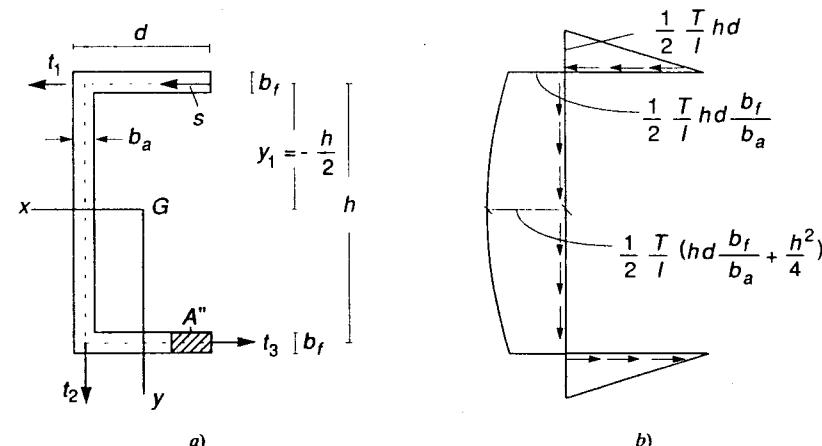


Figura 5.53

e forniscono una coppia di braccio h (Figura 5.54). La risultante è quindi una forza verticale T applicata parallelamente alla costola verticale a distanza η da essa, dove

$$\eta = \frac{V_x}{T} h = \frac{1}{4} \frac{h^2 d^2 b_f}{I}$$

Tale quantità, sommata alla distanza della costola dal baricentro, fornisce l'ascissa del centro di torsione calcolata come centro di taglio. Essendo per simmetria $y_c = 0$, la posizione di C è determinata.

Nel caso di spessore costante ($b_a = b_f = b$) si ha $I = \frac{1}{2} h^2 bd \left(1 + \frac{h}{6d}\right)$. I valori caratteristici delle tensioni tangenziali risultano allora

$$\tau = \frac{T}{hb} \frac{1}{1 + h/6d} \quad \text{alla connessione tra flangia e costola}$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{T}{hb} \frac{1 + h/4d}{1 + h/6d} \quad \text{al centro della costola verticale}$$

È inoltre

$$\eta = \frac{d}{2(1 + h/6d)} \quad x_c = d \frac{1 + h/3d}{1 + 2h/3d + h^2/12d^2}$$

Per $h = 2d$ si ottiene $x_c = \frac{5}{8}d$, valore coincidente con la (5.111a) che calcolava l'ascissa del centro di taglio sulla base delle (5.88).

ESEMPIO 5.8: sezione a I Supponendo sempre piccoli gli spessori, per il profilo di Figura 5.55a risulta

$$I = h^2 \left(db_f + \frac{hb_a}{12} \right)$$

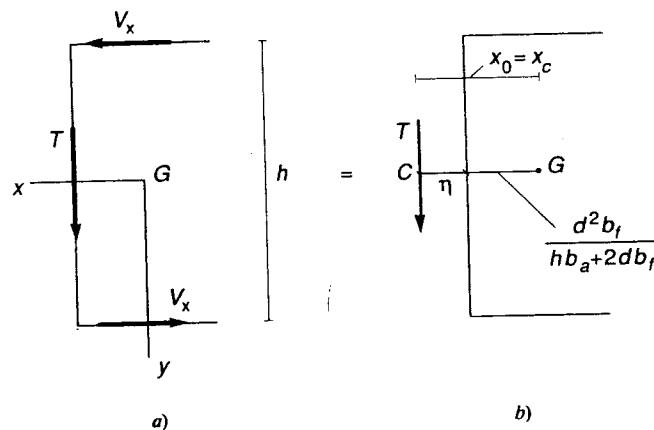


Figura 5.54

mentre i momenti statici per i vari tratti si esprimono, nei riferimenti locali in figura

$$S_s' = -\frac{1}{2} hb_f s_s \quad \text{nella flangia superiore}$$

$$S_a' = -\frac{1}{2} \left[2db_f h + b_a \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right] \quad \text{nell'anima}$$

$$S_i' = -\frac{1}{2} hb_f (d - s_i) \quad \text{nella flangia inferiore}$$

Nelle due flange si avranno allora delle $\tau_{zs} = \tau_{zx}$, sempre dirette nel verso positivo di s , di valore pari a

$$|\tau_{zx}| = \frac{1}{2} \frac{T}{I} h(d - |x|)$$

mentre nell'anima sarà $\tau_{zs} = \tau_{zy}$, con

$$\tau_{zy} = \frac{T}{I} \left[hd \frac{b_f}{b_a} + 2 \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

Le tensioni tangenziali si traducono nell'andamento illustrato in Figura 5.55b. Si noti ancora la continuità del flusso: i due contributi relativi alla flangia superiore si sommano congiungendosi nell'anima e si risuddividono separandosi nella flangia inferiore.

Nel caso di spessore costante ($b_a = b_f = b$) si ha $I = h^2 db(1 + h/12d)$ e i valori caratteristici delle τ divengono

$$\tau_{\max}(\text{flangia}) = \frac{1}{2} \frac{T}{hb} \frac{1}{1 + h/12d} \quad \tau_{\min}(\text{anima}) = \frac{T}{hb} \frac{1}{1 + h/12d}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{hb} \frac{1 + h/2d}{1 + h/12d} \quad (\text{al centro dell'anima})$$

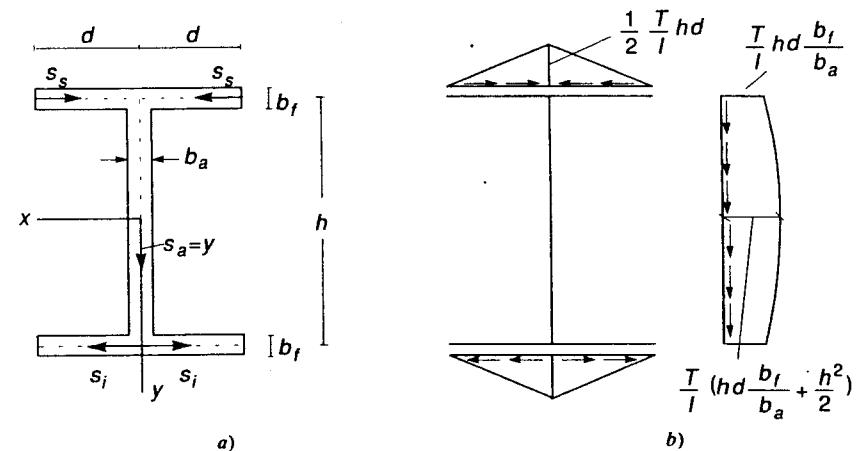


Figura 5.55

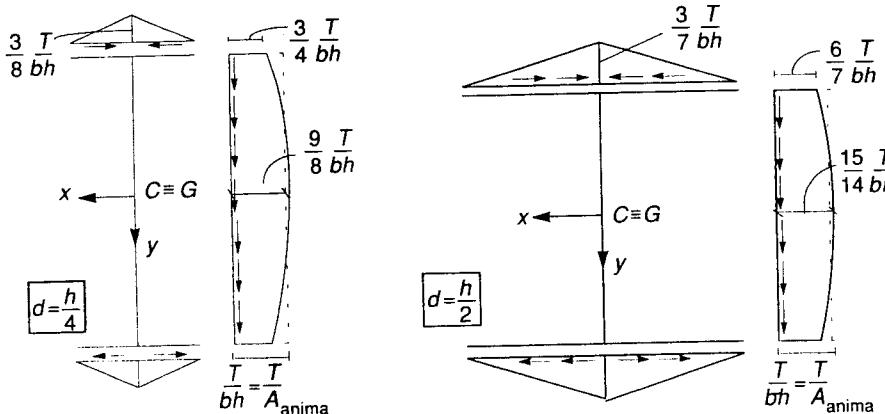


Figura 5.56

I valori numerici relativi a due dimensionamenti particolari sono riportati in Figura 5.56.

Per la doppia simmetria della sezione, il centro di taglio coincide con il baricentro ed è facile verificare che la risultante T delle tensioni tangenziali ha effettivamente l'asse y come retta d'azione.

Si osservi che l'impegno maggiore è relativo all'anima, dove le tensioni tangenziali hanno un andamento parabolico, che però presenta variazioni relativamente modeste rispetto al valor medio, dato dal taglio applicato diviso per l'area dell'anima. In prima approssimazione, a volte per τ si assume tale valore. Coerentemente, si assume anche che le tensioni tangenziali sulle due flange siano definite dalla condizione che il loro flusso massimo sia la metà di quello (medio) sull'anima. Si scrive allora

$$\tau(\text{anima}) \approx \frac{T}{A_{\text{(anima)}}} \quad \tau_{\max} (\text{flange}) = \frac{1}{2} \frac{T}{b,h} \quad (5.141a, b)$$

Considerazioni del tutto analoghe valgono per il profilo a **C** dell'esempio precedente.

5.2.3.3.4. Profili chiusi in parete sottile

In profili molteplicemente connessi, la suddivisione della sezione in due parti coinvolge almeno due corde. In tal caso il procedimento di Jourawsky permette solo di stabilire il valor medio delle tensioni sull'insieme di queste corde, ma non come si ripartiscono in ciascuna di esse.

Per la trattazione generale di questo problema, che non può più limitarsi al solo equilibrio, si rimanda a testi specialistici (ad esempio, [7]). Verrà qui considerato solo il caso di sezioni simmetriche e simmetricamente sollecitate che presentino un unico circuito chiuso, come quella illustrata in Figura 5.57. È allora evidente che se la sezione viene suddivisa secondo corde simmetricamente posizionate, le tensioni tangenziali su di esse risulteranno uguali. Se il profilo è in parete sottile, le τ_{zs} possono ancora pensarsi dirette secondo la linea media e uniformemente distribuite su una corda a essa perpendicolare. La (5.130) allora diviene

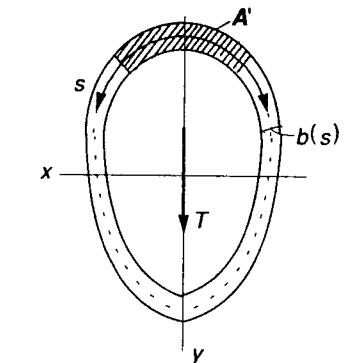


Figura 5.57

$$\tau_{zs} = - \frac{T}{I} \frac{S'(s)}{2b(s)} \quad (5.142)$$

dove $S'(s)$ rappresenta il momento statico rispetto all'asse x dell'area A' tratteggiata in Figura 5.57.

ESEMPIO 5.9 Per la sezione a corona circolare in Figura 5.58a, di raggio medio R e spessore b costante, si ha $I = \pi R^3 b$; il momento statico dell'area A' , espresso in funzione dell'anomalia $\vartheta = s/R$ (Figura 5.58b), vale

$$S'(\vartheta) = - 2 \int_0^\vartheta R \cos \vartheta (bRd\vartheta) = - 2R^2 b \sin \vartheta$$

Dalla (5.142) si ottiene allora

$$\tau_{zs}(\vartheta) = \frac{T}{\pi R b} \sin \vartheta = 2 \frac{T}{A} \sin \vartheta \quad (5.143)$$

dove $A = 2\pi Rb$ rappresenta l'area della sezione. Le tensioni tangenziali sono nulle per

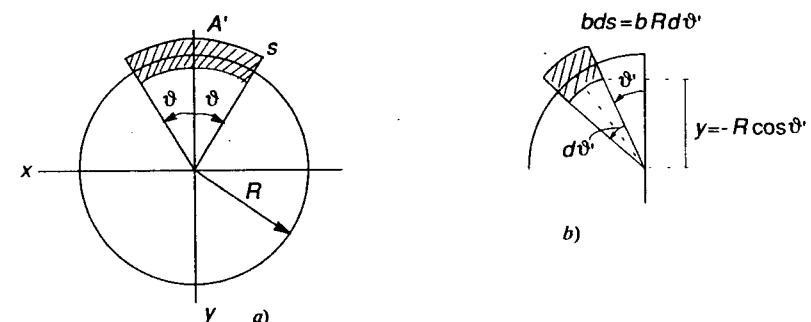


Figura 5.58

$\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$, dove la linea media interseca l'asse y , e massime per $\vartheta = \pi/2$ ($y = 0$), dove valgono

$$\tau_{\max} = 2 \frac{T}{A}$$

Come ulteriore esempio, è anche illustrata in Figura 5.59 la soluzione relativa a una sezione rettangolare cava a sezione costante. Si constata come essa corrisponda a quella relativa a due profili a C affiancati.

5.2.3.4 Lavoro di deformazione di un tronco infinitesimo

Anche per il problema del taglio, come nei precedenti casi di De Saint Venant, è opportuno esprimere la soluzione in termini di misure globali di sforzo e di deformazione. A tal fine si consideri il lavoro di deformazione di un tronco infinitesimo dz del prisma. In termini di sforzi, esso si scrive per unità di lunghezza

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{d\mathcal{E}_F}{dz} + \frac{d\mathcal{E}_T}{dz} \quad (5.144)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_F}{dz} = \frac{1}{2E} \int_A \sigma_z^2 dA \quad \frac{d\mathcal{E}_T}{dz} = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA \quad (5.145a, b)$$

con σ_z dato dalla (5.122) e le τ_{zi} dalla soluzione del problema del taglio.

La (5.145a) rappresenta il lavoro di deformazione flessionale; esso è esprimibile nella forma (5.49), con $N = 0$ e M_x, M_y dati dalle (5.121). La (5.145b) è invece un nuovo contributo, legato alle tensioni (e conseguenti deformazioni) tangenziali. Con riferimento al caso qui trattato, in cui T agisce parallelamente all'asse principale y a distanza pari all'ascissa del centro di taglio, si può esprimere tale contributo come segue (Figura 5.60)

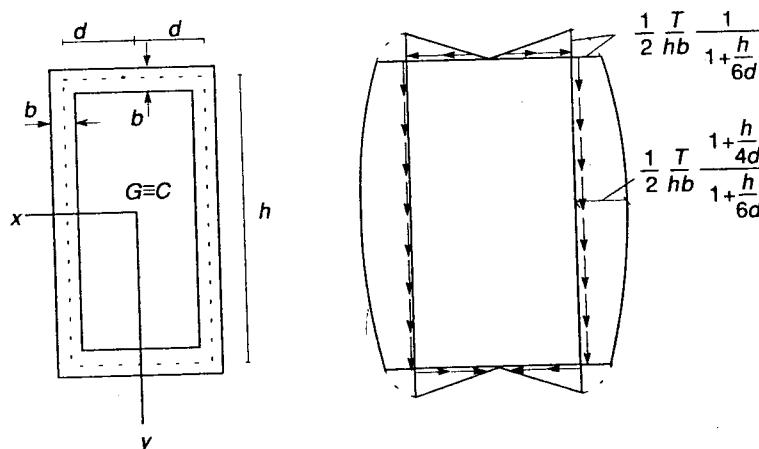


Figura 5.59

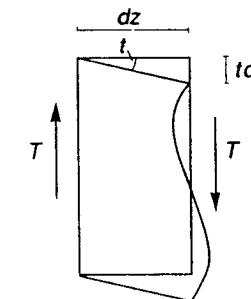


Figura 5.60

$$\frac{d\mathcal{E}_T}{dz} = \frac{1}{2} T t \quad (5.146)$$

dove t , noto come *scorrimento medio*, rappresenta una misura globale di deformazione associata a T . Eguagliando le (5.145b), (5.146) si ottiene

$$t = \frac{1}{GT} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA = \frac{1}{GT} \int_A \tau^2 dA \quad (5.147)$$

La (5.147) può essere esplicitata una volta nota la soluzione del problema del taglio in termini di tensioni. Per sezioni compatte sollecitate secondo un asse di simmetria, la soluzione approssimata di Jourawsky comporta la (5.133), che permette di scrivere la (5.147) nella forma

$$t = \frac{1}{GT} \int_A \tau_{zy}^2 \left(1 + 4 \frac{x^2}{b^2} \tan^2 \alpha \right) dA$$

con τ_{zy} dato dalla (5.131) in funzione della sola y . Si ottiene allora

$$t = \frac{1}{GT} \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zy}^2 b \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) dy = \frac{T}{GI^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S'^2}{b} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) dy \quad (5.148)$$

Dimensionalmente, la quantità a fattore di T/G è l'inverso di un'area. Si può quindi porre

$$t = \mu \frac{T}{GA} \quad T = \frac{1}{\mu} GA t \quad (5.149a, b)$$

dove si è indicato con μ (detto *fattore di taglio*) il coefficiente adimensionale, dipendente dalla forma della sezione, che risulta definito dalla relazione

$$\mu = \frac{A}{I^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{S'^2}{b} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) dy \quad (5.150)$$

Nel caso di sezione rettangolare (vedi esempio 5.5) la (5.150) diviene

$$\mu = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{6}{5} \quad (v)$$

Le (5.149) possono scriversi per qualunque sezione, anche se il fattore di taglio non è più espresso dalla (5.150). Esso è comunque calcolabile con identico procedimento, introducendo nella (5.147) la soluzione relativa alla sezione considerata. Per i profili aperti in parete sottile studiati negli Esempi 5.7 e 5.8, sulla base dei regimi tensionali riportati nelle Figure 5.53b e 5.55b si ottiene

$$\mu = \frac{12A}{b_a h} \frac{\frac{1}{10} + \beta \frac{b_f d}{b_a h} + 3\beta^2 \frac{b_f^2 d^2}{b_a^2 h^2} + 2\beta \frac{b_f d^3}{b_a h^3}}{\left(1 + \beta \frac{b_f d}{b_a h}\right)^2} \quad (w1)$$

con: $\beta = 1$ per la sezione a C

$\beta = 2$ per la sezione a I

Il significato del fattore di taglio può essere colto considerando un'ipotetica distribuzione uniforme $\tau_{zy} = T/A$, $\tau_{zx} = 0$ di tensioni tangenziali sulla sezione. In tal caso dalla (5.147) si otterebbe $t = T/GA$ e quindi $\mu = 1$; per ogni particolare sezione, il fattore di taglio esprime pertanto il rapporto tra la rigidità corrispondente a questa distribuzione ipotetica e quella effettiva. Tale osservazione suggerisce di considerare le tensioni tangenziali uniformemente distribuite su di un'area pari a

$$A_* = \frac{A}{\mu} \quad (5.151)$$

detta *area di taglio* (o *ridotta*, potendosi dimostrare che è sempre $\mu \geq 1$). Le (5.149) si scrivono allora nella forma equivalente

$$t = \frac{T}{GA_*} \quad T = GA_* t \quad (5.152a, b)$$

Definizioni approssimate di A_* per alcuni profili in parete sottile sono spesso possibili. Con riferimento ai profili a C e I studiati nel Paragrafo 5.2.3.3.3 (ma analoghe considerazioni valgono, ad esempio, per la sezione rettangolare cava in Figura 5.59), si è visto che le tensioni tangenziali risultano pressoché uniformi sull'anima. Trascurando i contributi sulle flange, si può allora porre

$$A_* \approx A_{(\text{anima})} = b_a h$$

il che conduce a scrivere, in luogo delle (w1)

$$\mu = \frac{A}{A_{(\text{anima})}} = 1 + 2\beta \frac{d}{h} \frac{b_f}{b_a} \quad (x)$$

Tabella 5.2

Profilo	d/h	μ approssimato (x)	μ esatto (w)
C	1/2	2.000	2.400
I	1/4	2.000	2.119
I	1/2	3.000	3.380

con β ancora dato dalla (w2). L'errore connesso a tale ipotesi semplificativa è quantificato in Tabella 5.2 per alcuni profili a spessore costante. Gli scarti sono prevalentemente dovuti all'aver trascurato il contributo delle tensioni tangenziali sulle flange. Le approssimazioni, peraltro, sono considerate ingegneristicamente accettabili.

Nel caso generale di azione tagliente non parallela a un asse principale è in linea di principio possibile considerarne individualmente le componenti T_x e T_y e sovrapporre le due soluzioni. La trattazione approssimata cui ci si è limitati in questa sede non consente sempre di determinare entrambe le soluzioni in maniera adeguata. Va tuttavia quantomeno citato che gli scorrimenti medi t_x e t_y nei due piani principali risultano espressi dalle relazioni

$$t_x = \frac{1}{GA} (\mu_x T_x + \mu_{xy} T_y) \quad t_y = \frac{1}{GA} (\mu_{xy} T_x + \mu_y T_y) \quad (5.153)$$

e dipendono quindi da entrambe le componenti di azione tagliente [7]. Il fattore di taglio mutuo μ_{xy} è nullo in sezioni doppiamente simmetriche.

L'espressione (5.146) del lavoro di deformazione si scrive ora

$$\frac{d\mathcal{E}_T}{dz} = \frac{1}{2} T_x t_x + \frac{1}{2} T_y t_y \quad (5.154a)$$

e, in virtù delle (5.153), può anche esprimersi nelle forme equivalenti

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_T}{dz} &= \frac{1}{2GA} (\mu_x T_x^2 + 2\mu_{xy} T_x T_y + \mu_y T_y^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{GA}{\mu_x \mu_y - \mu_{xy}^2} (\mu_y t_x^2 - 2\mu_{xy} t_x t_y + \mu_x t_y^2) \end{aligned} \quad (5.154b, c)$$

La decomposizione dell'azione tagliente nelle due direzioni principali non dà quindi luogo in generale a due problemi energeticamente ortogonali.

La trattazione qui svolta consente di risolvere il problema generale solo per profili aperti in parete sottile. In tal caso, detti $S'_x(s)$ e $S'_y(s)$ i momenti statici dell'area A' (tratteggiata in Figura 5.61) rispetto ai due assi principali, si può dimostrare che valgono le relazioni

$$\mu_x = \frac{A}{I_y^2} \int_o^a \frac{S'_y^2}{b} ds \quad \mu_y = \frac{A}{I_x^2} \int_o^a \frac{S'_x^2}{b} ds \quad \mu_{xy} = \frac{A}{I_x I_y} \int_o^a \frac{S'_x S'_y}{b} ds \quad (5.155)$$

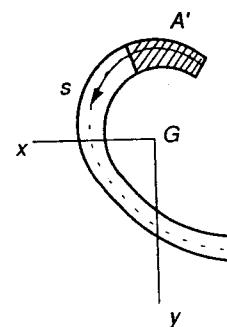


Figura 5.61

5.3 APPLICAZIONI DEL PROBLEMA DI DE SAINT VENANT

5.3.1 IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA ELASTICA E SUE LIMITAZIONI

Le implicazioni applicative del problema di De Saint Venant sono notevoli. La sua soluzione costituisce infatti il fondamento da cui si sviluppa la trattazione ingegneristica del problema della trave, attraverso ipotesi e approssimazioni molto spontanee in campo elastico, che vengono via via affinate con successive generalizzazioni fino a produrre una teoria strutturale coerente e completa, a sua volta punto di partenza per ulteriori estensioni a altre tipologie strutturali.

La teoria della trave sarà successivamente oggetto di apposita trattazione. Ci si limita adesso a osservare come il problema di De Saint Venant fornisca direttamente, senza il ricorso a ulteriori ipotesi, la soluzione di un problema particolare ma importante: quello di una trave a sezione costante, elastica lineare, omogenea e isotropa, sollecitata solo sulle sezioni estreme.

A rigore, la soluzione sarebbe valida solo per particolari distribuzioni di trazioni superficiali su tali sezioni, precisamente quelle che conseguono alla soluzione trovata attraverso le condizioni di equilibrio al contorno (2.39). Ovviamente, è improbabile che una trave reale sia soggetta proprio a tali trazioni. In generale (si pensi, ad esempio, alle reazioni fornite da un vincolo) l'effettiva distribuzione locale delle trazioni sulle facce estreme non è neppure nota e sono disponibili informazioni solo in termini di risultanti. Il problema sarebbe di fatto privo di rilevanza applicativa se non sussistesse il principio di equivalenza elastica. A parità di risultante e momento risultante, la differenza tra le trazioni superficiali previste dalla soluzione e quelle effettive (in generale ignote) è comunque una distribuzione globalmente autoequilibrata sulla sezione. Gli effetti di tale distribuzione si smorzano rapidamente e possono essere considerati ingegneristicamente ininfluenti a una distanza dagli estremi dell'ordine della massima dimensione lineare della sezione. Pertanto, in travi sufficientemente lunghe la soluzione di De Saint Venant può ritenersi quasi ovunque valida. Il problema è svincolato dalle particolari leggi di carico e i risultati assumono ampia generalità. A questo proposito si fa notare come, nel derivare la soluzione dei vari casi, le (2.39) siano state sistematicamente sostituite da condizioni di equilibrio globale sulla sezione.

È però importante osservare che il principio di equivalenza elastica è applicabile solo

se la sezione è *compatta*, se cioè tutte le sue dimensioni caratteristiche sono tra loro comparabili. In altro caso (ad esempio, in profili in parete sottile, soprattutto se aperti) lo smorzamento dello stato tensionale dovuto a trazioni superficiali autoequilbrate sulle basi può risultare molto più lento, al punto che a volte questi effetti coinvolgono l'intera lunghezza della trave rendendo privi di significato i risultati della teoria di De Saint Venant.

Per chiarire quanto asserito, si consideri la mensola a *l* in Figura 5.62, soggetta a due momenti uguali e contrari, ognuno agente nel piano di una flangia. Tale condizione di carico è globalmente autoequilibrata, ma è evidente che lo smorzamento dello stato di sforzo a essa conseguente sarà tanto più lento quanto più piccolo è lo spessore dell'anima. Nel caso limite in cui tale spessore tende a zero, le due flange vengono a comportarsi come due travi indipendenti, individualmente inflesse nel loro piano, che trasmettono senza smorzamento alcuno i momenti fino all'incastro. È logico attendersi che per spessori non nulli ma piccoli rispetto alle dimensioni globali della sezione, gli sforzi relativi a questa condizione di carico si smorzino sì, ma piuttosto lentamente, e risultino non trascurabili per lunghezze significative. Per profili in parete sottile, specie se aperti, la soluzione di De Saint Venant necessita infatti di correttivi, che verranno esaminati più avanti.

Va anche detto che la validità del principio di equivalenza elastica è subordinata all'isotropia del materiale, ipotesi sempre assunta in questo capitolo ma che potrebbe anche essere rimossa in vista di soluzioni più generali. È intuitivo che eventuali anisotropie possono diffondere la risposta dovuta a carichi autoequilibrati a distanza diversa lungo direzioni che presentano comportamento diverso.

Il principio di equivalenza elastica è stato introdotto proprio con riferimento a questo problema da De Saint Venant, che ne ha fornito una giustificazione intuitiva. Una sua dimostrazione formale è un problema non facile. Peraltro, vari studiosi (Zanaboni, Toupin e Fichera, tra gli altri) hanno prodotto risultati matematicamente rigorosi che stabiliscono, per un cilindro soggetto a distribuzioni autoequilibrate su di una sua base, l'ordine di grandezza della risposta in funzione della distanza dalla base stessa o delimitazioni superiori alla sua entità. È comunque richiesto il ricorso a strumenti matematici ben più avanzati di quelli qui presupposti. Alcune indicazioni sulle modalità con cui il problema viene affrontato possono essere trovate in [9].

5.3.2 LA VERIFICA DELLA RESISTENZA ELASTICA

Pur con le limitazioni sopra esposte, i risultati trovati consentono la valutazione dello stato di sforzo in travi soggette alle condizioni di carico individualmente esaminate in precedenza, o a loro combinazioni. Si noti che in virtù delle (5.8) (ipotesi ora verificata) il vettore di sforzo si trova comunque in un piano, parallelo all'asse *z* e contenente il vettore τ_z delle tensioni tangenziali (5.8b). Se si indicano con

$$\sigma = \sigma_z \quad \tau = |\tau_z| \quad (5.156)$$

le componenti normale e tangenziale di tensione (la prima è dotata di segno), gli sforzi principali (2.24) si esprimono

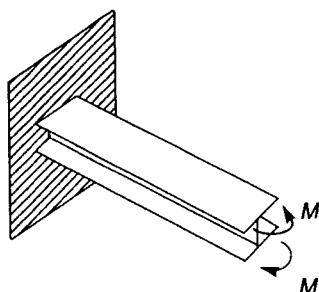


Figura 5.62

$$s_{I, II} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + r^2} \quad (5.157)$$

È immediato constatare (si veda anche il cerchio di Mohr in Figura 5.63) che le tensioni principali nel piano hanno sempre segno diverso. I valori caratteristici di sforzo appartenendo allora a giaciture nel piano delle tensioni e sono espressi dalle (2.27c). Assumendo, senza perdita di generalità, che s_I corrisponda al valore positivo, tali relazioni si scrivono

$$\sigma_{\max} = s_I \quad \sigma_{\min} = s_{II} \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (s_I - s_{II}) \quad (5.158a-c)$$

L'esaurimento delle risorse elastiche corrisponderà al raggiungimento in un punto della trave del limite definito da un opportuno criterio di resistenza. Il criterio di Rankine (3.50) adesso si scrive

$$\bar{\sigma}_C \leq s_{II} \quad s_I \leq \bar{\sigma}_T \quad (5.159)$$

In virtù delle (5.158c), (5.157), la condizione di Tresca (3.55) diviene ora

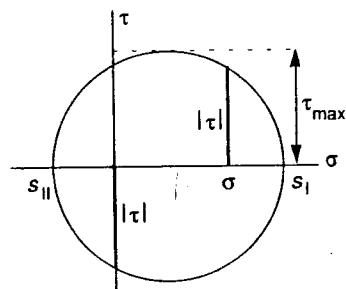


Figura 5.63

$$s_I - s_{II} = 2 \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + r^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4r^2} \leq \sigma_0 \quad (5.160a)$$

dove è stato assunto per k il limite di snervamento uniaxiale (3.57b). La condizione (3.59) di H.H.M. si riconduce invece all'espressione

$$\sqrt{s_I^2 + s_{II}^2 - s_I s_{II}} = \sqrt{\sigma^2 + 3r^2} \leq \sigma_0 \quad (5.160b)$$

Le (5.160) sono a volte rappresentate nel piano $\sigma - \tau$, dove danno luogo a domini ellittici, un quarto dei quali è illustrato in Figura 5.64. Come già osservato nel Capitolo 3, lo scarto massimo si riscontra nella situazione di puro taglio ed è pari a circa il 15%. Nondimeno, i due criteri sono considerati egualmente accettabili per materiali metallici. Per confronto, in figura sono anche riportati a tratteggio, nel caso di comportamento simmetrico ($-\bar{\sigma}_C = \bar{\sigma}_T = \sigma_0$), i domini relativi alla condizione di Rankine e a quella di Grashof (3.52) scritta per $\nu = .25$. Tali criteri appaiono decisamente troppo conservativi per materiali duttili.

Nel problema di De Saint Venant le azioni interne sono costanti, a eccezione del momento flettente che può variare linearmente con z . La sezione più critica è allora immediatamente identificata in quella di momento massimo. Non è invece possibile individuare a priori su tale sezione il punto più sollecitato, anche se non è difficile, esaminando l'andamento degli sforzi locali, limitare la verifica a pochi punti significativi. A illustrare il procedimento, valga l'esempio che segue.

ESEMPIO 5.10 La trave a gomito in Figura 5.65a è incastrata a un estremo e sollecitata all'altro da una forza verticale $P = 1.2 \times 10^5 \text{ N}$. La sua sezione è il rettangolo cavo in Figura 5.65b; il momento d'inerzia rispetto all'asse x e l'area racchiusa dalla linea media del profilo valgono

$$I = 265.7 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Omega = 48.6 \times 10^3 \text{ mm}^2 \quad (a1, 2)$$

La sezione più sollecitata è quella di incastro, dove si riscontrano le seguenti azioni interne

$$M = -P\ell_1 = -3.6 \times 10^8 \text{ Nmm} \quad M_I = P\ell_2 = 1.2 \times 10^8 \text{ Nmm} \quad T = P = 1.2 \times 10^5 \text{ N} \quad (b1-3)$$

(il segno negativo del momento flettente indica che sono tese le fibre superiori). Le tensioni a esse dovute sono indicate in Figura 5.66, dove sono anche indicate le formule da cui sono state ottenute. Ai fini della verifica della resistenza elastica, appare sufficiente limitare l'indagine ai punti che in Figura 5.65b sono indicati con A (dove σ è massima), B (σ e τ prossimi ai valori massimi) e C (τ massima). In essi il calcolo fornisce

$$A(y = -150 \text{ mm}, b = 30 \text{ mm}, S' = 810 \times 10^3 \text{ mm}^3): \sigma_A = 203.2 \text{ MPa} \quad \tau_A = 47.2 \text{ MPa} \quad (c1)$$

$$B(y = -120 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}, S' = 810 \times 10^3 \text{ mm}^3): \sigma_B = 162.6 \text{ MPa} \quad \tau_B = 70.8 \text{ MPa} \quad (c2)$$

$$C(y = 0, b = 20 \text{ mm}, S' = 1098 \times 10^3 \text{ mm}^3): \sigma_C = 0 \text{ MPa} \quad \tau_C = 74.0 \text{ MPa} \quad (c3)$$

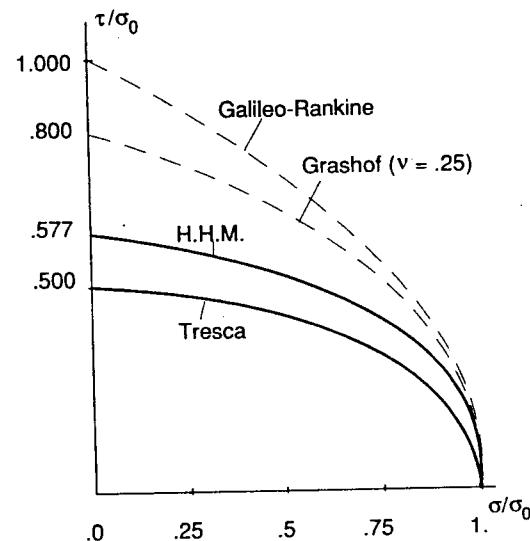


Figura 5.64

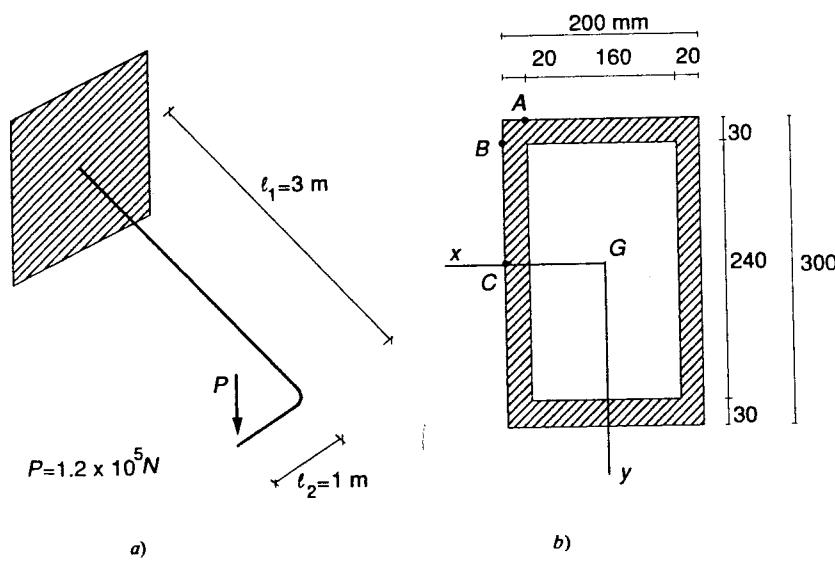
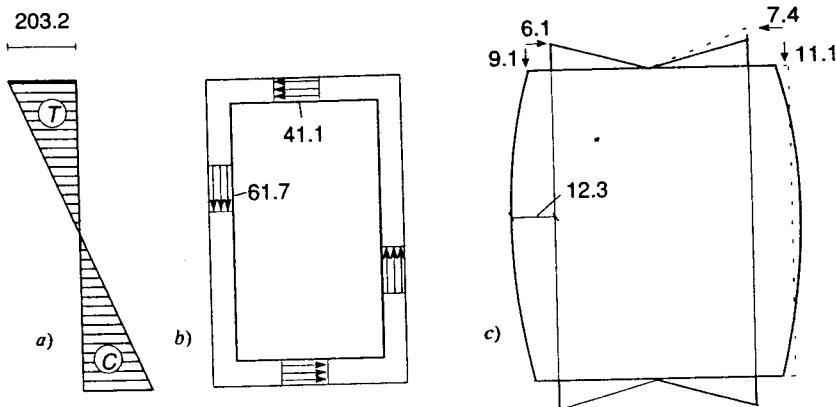


Figura 5.65



$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (5.36)$$

$$\tau^M = \frac{M_t}{2\Omega b} \quad (5.116)$$

$$\tau^T = \frac{TS'}{2lb} \quad (5.142)$$

Figura 5.66

Per una trave in acciaio, entrambi i criteri (5.160) sono applicabili. Per ognuno di essi si ottiene, nei tre punti in esame

$$\text{Tresca: } \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \begin{cases} 224.1 \text{ MPa} & \text{in A} \\ 215.5 \text{ MPa} & \text{in B} \\ 148.0 \text{ MPa} & \text{in C} \end{cases} \quad (d1)$$

$$\text{H.H.M.: } \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \begin{cases} 219.0 \text{ MPa} & \text{in A} \\ 203.7 \text{ MPa} & \text{in B} \\ 128.2 \text{ MPa} & \text{in C} \end{cases} \quad (d2)$$

Il punto più sollecitato è comunque A, sulla fibra più distante dall'asse x. Supponendo che il limite di snervamento uniaxiale sia $\sigma_0 = 250$ MPa, il margine s rispetto all'esaurimento delle risorse elastiche risulta, nei due casi

$$\text{Tresca: } s = \frac{250}{224.1} = 1.12 \quad \text{H.H.M.: } s = \frac{250}{219.0} = 1.14 \quad (e1, 2)$$

Le (e) confermano che entrambi i criteri danno risultati comparabili per materiali duttili. La differenza in termini di s è infatti dell'ordine delle approssimazioni di calcolo. Si fa notare a questo proposito che, oltre all'utilizzo di soluzioni approssimate per le tensioni tangenziali da torsione e taglio, sono state anche introdotte alcune semplificazioni, legittime per profili di spessore sottile, nel calcolo delle proprietà della sezione.

La massima differenza tra i due criteri si riscontra nel punto C (peraltro il meno sollecitato), dove si ha una situazione di puro taglio e lo scarto è pari al 15% (Figura 5.64). Se, come qui fatto, la verifica è basata sul limite di snervamento uniaxiale, il criterio di Tresca risulta più conservativo. Sarebbe invece risultato più conservativo il criterio di H.H.M. se ci si fosse basati sulla tensione tangenziale di snervamento.

In generale, in una trave le sollecitazioni più gravose sono quelle dovute ai momenti flettente e torcente, mentre più modesti si configurano i contributi del taglio e di

eventuali azioni assiali. Ciò giustifica l'introduzione di approssimazioni, anche drastiche, nel calcolo delle tensioni tangenziali da taglio, come le (5.141) per la sezione a I . Una valutazione di questo tipo per la sezione cava in esempio è riportata a tratteggio in Figura 5.66c. I valori che si ottengono in questo modo, precisamente

$$\tau_B^T = \tau_C^T = \frac{T}{2 \times 20 \times 270} = 11.1 \text{ MPa} \quad \tau_A^T = \frac{20}{30} \tau_B^T = 7.4 \text{ MPa}$$

influiscono meno dell'1% sulla verifica.

Si osservi infine che, per quanto detto in precedenza, la soluzione di De Saint Venant può essere ritenuta ovunque valida nella trave di Figura 5.65a, con l'eccezione della sezione di incastro, dell'estremo caricato e in corrispondenza del gomito, dove la risposta è influenzata da effetti locali. La verifica viene comunque condotta nella sezione più sollecitata, anche se questa coincide con una delle sezioni estreme.

5.3.3 VALUTAZIONE DEL REGIME DEFORMATIVO

Nel solido di De Saint Venant, le azioni interne assumono il significato di misure globali di sollecitazione (*sforzi generalizzati*). La trattazione ha consentito di associare a ognuna di esse la corrispondente quantità cinematica (*deformazione generalizzata*), attraverso i legami (5.50), (5.61b) e (5.153), che vengono ora riscritti per chiarezza

$$\eta = \frac{N}{EA} \quad \chi_x = \frac{M_x}{EI_x} \quad \chi_y = \frac{M_y}{EI_y} \quad \beta = \frac{M_t}{GJ} \quad (5.161a-d)$$

$$t_x = \mu_x \frac{T_x}{GA} + \mu_{xy} \frac{T_y}{GA} \quad t_y = \mu_{xy} \frac{T_x}{GA} + \mu_y \frac{T_y}{GA} \quad (5.162a, b)$$

La denominazione di sforzo e deformazione generalizzati è giustificata dal fatto che il lavoro di deformazione per unità di lunghezza può esprimersi in funzione di tali quantità. Precisamente

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dz} &= \frac{1}{2} \int_A (\sigma_z \epsilon_z + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) dA = \\ &= \frac{1}{2} (N\eta + M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_t \beta + T_x t_x + T_y t_y) \end{aligned} \quad (5.163)$$

relazione che è stata in effetti usata per definire le (5.161), (5.162).

Se le azioni taglienti sono nulle ($T_x = T_y = 0$), le (5.161) consentono di risalire a misure globali, o generalizzate, di spostamento. Detti infatti $u(z) = s_x(x=0, y=0, z)$, $v(z) = s_y(x=0, y=0, z)$ e $w(z) = s_z(x=0, y=0, z)$ le tre componenti di spostamento dei punti della linea media e $\vartheta(z)$ la rotazione della sezione, si può scrivere

$$\eta = \frac{dw}{dz} \quad \chi_x = -\frac{d^2v}{dz^2} \quad \chi_y = \frac{d^2u}{dz^2} \quad \beta = \frac{d\vartheta}{dz} \quad (5.164a-d)$$

La prima di queste relazioni conseguie dalle (5.33a), (5.34c), ricordando che η coincide con la ϵ_z dovuta alla sola azione assiale. Le rimanenti non sono altro che le (5.41b) (e analoghe nel piano (y, z)) e (5.90). L'integrazione delle (5.164) produce l'espressione degli spostamenti generalizzati; le costanti di integrazione hanno il significato

di moti rigidi e possono essere fissate introducendo vincoli che li impediscano.

In presenza di azioni taglienti, le (5.164) mantengono la loro validità, a patto di considerare u e v non come gli spostamenti trasversali totali, ma solo come la loro parte flessionale. A tali spostamenti contribuiscono infatti anche gli scorrimenti medi t_x e t_y , definiti dalle (5.162) e ora diversi da zero. La trattazione approssimata del problema del taglio, a cui ci si è qui limitati, non consente a rigore di stabilire un legame tra gli scorrimenti medi e gli spostamenti generalizzati cui corrispondono: la soluzione trovata non è infatti congruente e le deformazioni a essa associate non sarebbero quindi integrabili.

Tuttavia, gli scorrimenti medi contribuiscono agli spostamenti trasversali in misura minore che non le curvature flessionali. È spesso lecito trascurare l'effetto dei primi nei confronti di quelli delle seconde, calcolando lo spostamento sulla base delle sole (5.164b, c), con approssimazione ingegneristicamente accettabile in travi snelle. Il procedimento è illustrato dall'esempio che segue.

ESEMPIO 5.11 La mensola di Figura 5.67 sia soggetta a una forza F all'estremo libero, agente parallelamente all'asse principale y a distanza pari all'ascissa del centro di taglio. Il momento flettente è allora $M_x(z) = -F(l-z)$ e dalle (5.161b) e (5.164b) si ottiene

$$\chi_x = -\frac{F(l-z)}{EI_x} = -\frac{d^2v}{dz^2}$$

Una doppia integrazione fornisce

$$v(z) = \frac{F\ell z^2}{2EI_x} - \frac{Fz^3}{6EI_x} + C_1 z + C_2$$

L'incastro all'estremo di sinistra impone che siano ivi nulli sia lo spostamento trasversale che la rotazione $\varphi = dv/dz$ della sezione (vedi (5.40)). Le condizioni $v(0) = 0$ e $v'(0) = 0$ comportano $C_1 = C_2 = 0$ e risulta

$$v(z) = \frac{Fz^2}{EI_x} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{z}{6} \right) \quad (5.165a)$$

In particolare, in corrispondenza dell'estremo libero si ottiene

$$f = v(\ell) = \frac{F\ell^3}{3EI_x} \quad (5.165b)$$

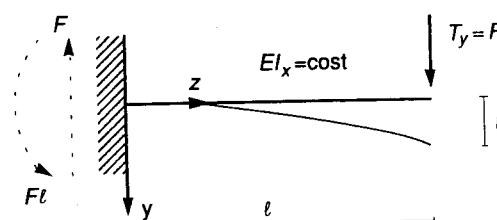


Figura 5.67

Il problema della trave verrà successivamente affrontato in termini generali, sulla base di ipotesi di natura cinematica che ne consentono la formulazione in ambito ben più ampio che non quello configurato dalla trattazione di De Saint Venant e permettono anche di tener conto del contributo delle deformazioni taglienti, qualora lo si ritenesse significativo. È bene però anticipare che la teoria è ancora basata sulle variabili generalizzate sopra definite, che si ripropongono quindi in un contesto più generale. A tal proposito, va osservato che l'espressione (5.163) del lavoro di deformazione ha anche (a meno del fattore 1/2) il significato di lavoro virtuale interno in un tronco infinitesimo ed è pertanto valida anche al di fuori del campo elastico.

ESERCIZI

- 5.1 La mensola in Figura 5.E1 abbia la sezione rettangolare cava illustrata e sia soggetta a un momento flettente costante $M_x = -W$. Calcolare la massima tensione normale e la componente verticale $f = v(\ell)$ dello spostamento della linea media all'estremo libero.
- 5.2 Una trave soggetta a $M_x = W = \text{cost}$ presenta a entrambi gli estremi vincoli che impediscono l'abbassamento della linea media (Figura 5.E2). Calcolare lo spostamento verticale in mezzaria e le rotazioni delle sezioni estreme.
- 5.3 Una trave a sezione quadrata sia soggetta a una forza F parallela all'asse z , applicata in un punto P di coordinate $x = 0$ e $y = -e$ (Figura 5.E3). Calcolare le tensioni normali nei punti A e B in figura per le eccentricità seguenti

$$(a): \quad e = \frac{\sqrt{2}}{12} a \quad (b) \quad e = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

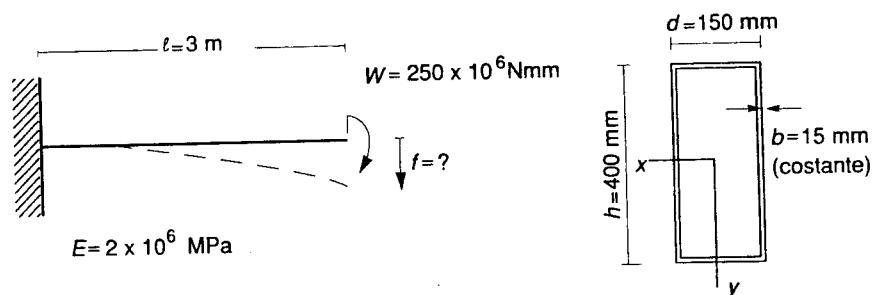


Figura 5.E1

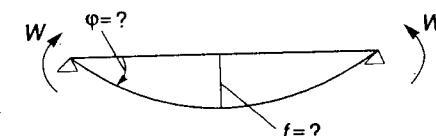


Figura 5.E2

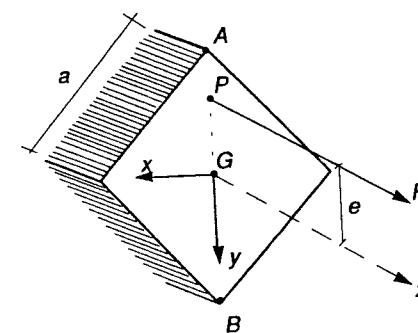


Figura 5.E3

- 5.4 La trave a T in Figura 5.E4 è soggetta a una forza F parallela all'asse z e applicata nel punto ① in figura. Calcolare la posizione dell'asse neutro e le tensioni normali nei punti numerati da ① a ⑥.

- 5.5 Una trave a sezione rettangolare piena ($h = 600 \text{ mm}$, $b = 250 \text{ mm}$) è soggetta a una forza di compressione $F = 1.5 \times 10^6 \text{ N}$, parallela all'asse z e applicata nel punto $x = 0$, $y = e$ (Figura 5.E5). Il materiale presenta i seguenti limiti elastici, rispettivamente a trazione e compressione

$$\bar{\sigma}_T = 5 \text{ MPa} \quad \bar{\sigma}_C = -30 \text{ MPa}$$

Calcolare il massimo valore dell'eccentricità e compatibile con i limiti di sforzo.

- 5.6 La sezione sottile in Figura 5.E6 è soggetta a un momento flettente $M_\xi = W$. Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto a ξ e diagrammare l'andamento degli sforzi normali sulla sezione (volendo evitare la definizione degli assi principali, si utilizzino le (5.17)).

- 5.7 La mensola in Figura 5.E7 è soggetta a un momento torcente $M_t = W$ all'estremo libero. Utilizzando la soluzione approssimata per profili cavi in parete sottile, calcolare la tensione tangenziale massima e la rotazione della sezione estrema. Assumere

$$\ell = 2.5 \text{ m} \quad G = 80\,000 \text{ MPa} \quad W = 800 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

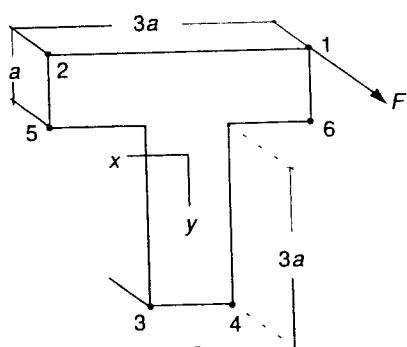


Figura 5.E4

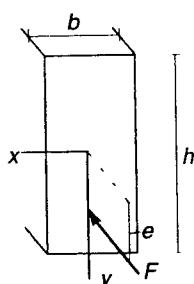


Figura 5.E5

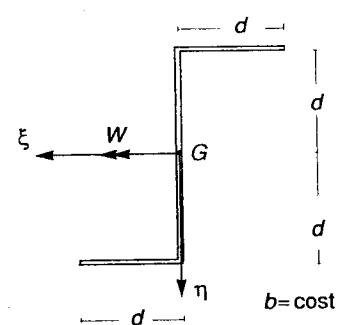


Figura 5.E6

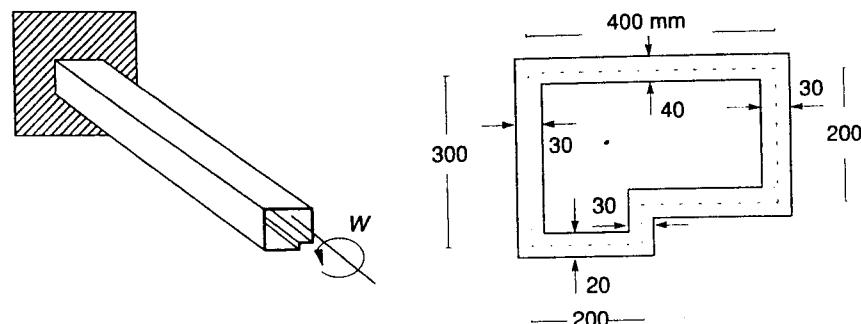


Figura 5.E7

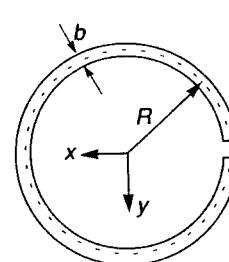


Figura 5.E8

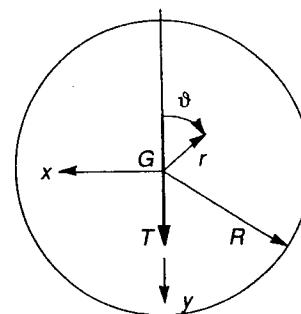


Figura 5.E9

- 5.8 Una trave a mensola con la sezione aperta in Figura 5.E8 sia soggetta a momento torcente costante $M_t = W$. Calcolare la tensione tangenziale massima e la rotazione della sezione estrema. Confrontare i risultati con quelli relativi a una sezione a corona circolare chiusa delle stesse dimensioni. Assumere

$$\ell = 4 \text{ m} \quad R = 200 \text{ mm} \text{ (raggio medio)} \quad b = 20 \text{ mm} \quad G = 80\,000 \text{ MPa} \quad W = 5 \times 10^7 \text{ Nmm}$$

- 5.9 La sezione circolare piena in Figura 5.E9 è soggetta a un'azione tagliente T baricentrica. Calcolare le espressioni di τ_{zx} e τ_{zy} , il valore di τ_{\max} e quello del fattore di taglio μ (conviene operare nelle coordinate polari (r, θ)).

- 5.10 Come per l'esercizio precedente, con riferimento alla sezione aperta in parete sottile in Figura 5.E10.

- 5.11 Calcolare il fattore di taglio μ per la sezione a corona circolare di Figura 5.58a.

- 5.12 Il profilo in parete sottile in Figura 5.E12 (spessore b costante) è soggetto a un taglio T parallelo all'asse y . Determinare l'andamento delle tensioni tangenziali lungo la linea media e calcolare l'ascissa del centro di taglio.

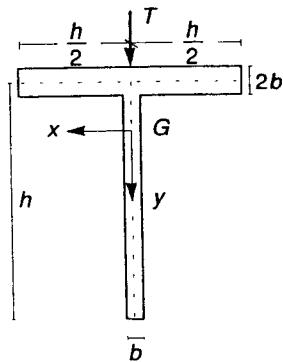


Figura 5.E10

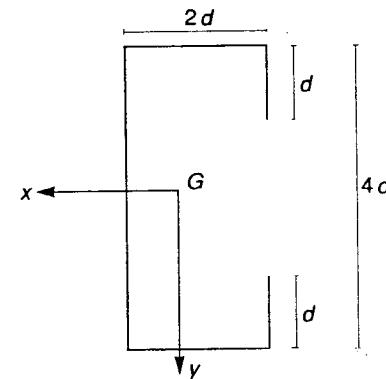


Figura 5.E12

5.13 Il profilo in Figura 5.E13 è soggetto a una forza F parallela all'asse y , con retta d'azione passante per la linea media della flangia di destra. Calcolare la tensione tangenziale massima, considerando sia il contributo del taglio che quello del momento torcente indotto dalla F non applicata nel centro di taglio.

5.14 Un profilo chiuso in parete sottile è caricato nel suo piano come indicato in Figura 5.E14. Determinare gli andamenti delle tensioni tangenziali dovute al taglio e al momento torcente e calcolarne il valore massimo.

5.15 La sezione nell'esercizio precedente abbia dimensioni $d = 400 \text{ mm}$ e $b = 25 \text{ mm}$. In aggiunta alla forza F agisca un momento $M_y = W$; le azioni esterne valgano $F = 500 \times 10^3 \text{ N}$ e $W = 750 \times 10^6 \text{ Nmm}$. Assumendo come limite di snervamento uniaxiale $\sigma_0 = 250 \text{ MPa}$, calcolare i margini di sicurezza rispetto ai criteri di H.H.M. e Tresca.

5.16 Una barra a gomito di sezione circolare piena è caricata all'estremo libero come indicato in Figura 5.E16. Il limite di snervamento del materiale sia $\sigma_0 = 250 \text{ MPa}$. Verificare la sezione di incastro con i criteri di Tresca e H.H.M..

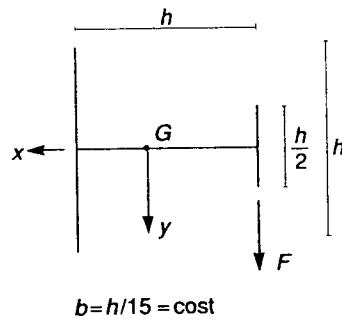


Figura 5.E13

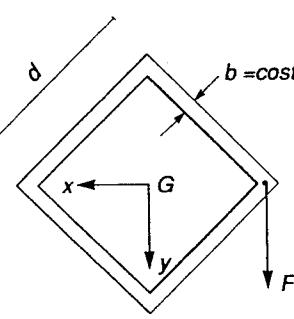


Figura 5.E14

5.17 Una barra a gomito simile alla precedente è caricata all'estremo libero da una coppia W agente nel piano verticale parallelo all'incastro (Figura 5.E17). Calcolare la componente verticale dello spostamento dell'estremo libero. Assumere $W = 50 000 \text{ Nmm}$, $E = 200 000 \text{ MPa}$ e $\nu = .3$.

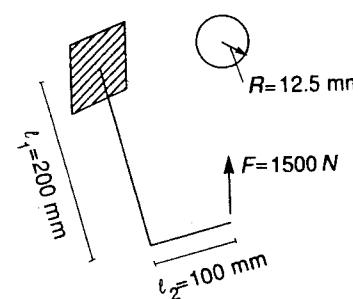


Figura 5.E16

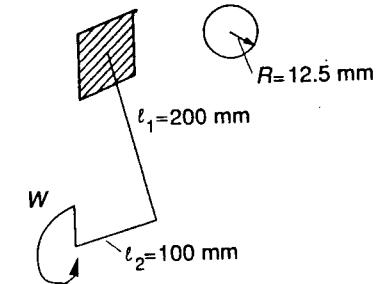


Figura 5.E17

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARRÉ DE SAINT VENANT A., Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ..., *Mémoires des savants étrangers*, 14, p. 233 (1855).
- [2] CLEBSCH A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, Lipsia, 1862.
- [3] BALDACCI R., *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, UTET, Torino, 1970.
- [4] EPSTEIN B., *Partial Differential Equations - An Introduction*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [5] FRANCIOSI V., *Scienza delle Costruzioni*, vol. II, 2^a ed., Liguori, Napoli, 1965.
- [6] MASOTTI BIGGIOGERO G., *Lezioni di geometria proiettiva*, 3^a ed., Tamburini, Milano, 1958.
- [7] ODEN J.T., RIPPERGER E.A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2^a ed., Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [8] JOURAWSKY M., Sur la résistance d'un corps prismatiques et d'une pièce composée en bois ou en tôle de fer à une force perpendiculaire à leur longeur, *Annales des Ponts et Chaussées*, 12, p. 328 (1856).
- [9] FUNG Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

Il problema elasto-plastico

6.1 IL PROBLEMA INCREMENTALE

6.1.1 FORMULAZIONE

Un mezzo elasto-plastico esaurisce la fase elastica quando lo sforzo in un punto raggiunge il limite di snervamento del materiale. La duttilità, peraltro, conferisce ulteriori risorse, per valutare le quali occorre sostituire il legame elastico con quello elasto-plastico introdotto nel Paragrafo 3.4.

Come osservato in quella sede, la natura irreversibile della deformazione plastica comporta che il legame possa essere scritto solo in termini incrementali. Il problema elasto-plastico deve quindi essere formulato in tali termini; esso si riferisce a un mezzo in una situazione *nota* Γ , raggiunta al termine dell'evoluzione precedente, e si propone di studiarne la risposta in un *processo incrementale* $\dot{\Gamma}$, nel quale le azioni esterne subiscono le variazioni

$$\dot{F}_i \text{ in } V \quad \dot{f}_i \text{ su } S_F \quad \dot{\vartheta}_{ij} \text{ in } V \quad \dot{\hat{s}}_i \text{ su } S_u \quad (6.1a-d)$$

Operando nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti, le relazioni di equilibrio e congruenza mantengono inalterata la loro struttura. In forma incrementale esse si scrivono

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{F}_j = 0 \text{ in } V \quad \dot{\sigma}_{ij} n_i = \dot{f}_j \text{ su } S_F \quad (6.2a, b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{s}_{i,j} + \dot{s}_{j,i}) \text{ in } V \quad \dot{s}_i = \dot{\hat{s}}_i \text{ su } S_u \quad (6.3a, b)$$

La porzione elastica del legame costitutivo è fornita dalla (3.120) o dalla sua inversa. Precisamente

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\vartheta}_{kl} - \dot{p}_{kl}) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = A_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{\vartheta}_{ij} + \dot{p}_{ij} \quad (6.4a, b)$$

Limitando, per semplicità, la formulazione al caso di condizioni di plasticità regolari, la legge di normalità (3.90) impone

$$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad (6.5)$$

All'inizio del processo incrementale la situazione Γ è nota. È quindi possibile identificare nel volume V due zone: nella prima, indicata con V_E , vale la disegualanza stretta $\varphi < 0$ e la risposta incrementale è puramente elastica; nella seconda, indicata con V_P , è invece $\varphi = 0$ e incrementi di deformazione plastica sono possibili (Figura 6.1). Il legame costitutivo richiede allora

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ in } V_E \quad (6a)$$

mentre nella zona potenzialmente plasticizzabile valgono le (3.104c-e). Precisamente

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\varphi} \leq 0 \quad \dot{\varphi}\dot{\lambda} = 0 \text{ in } V_P \quad (6.6b)$$

dove $\dot{\varphi}$ è dato dalla (3.104b)

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - h \dot{\lambda} \quad (6.7)$$

e h è il parametro di incrudimento.

Le (6.2-7) governano il *problema elasto-plastico incrementale*, che si presenta non-lineare perché tale è il legame costitutivo. La sua trattazione sarà qui limitata al caso in cui il materiale rispetti ovunque le condizioni (3.114) stabilite dal *postulato di Drucker*. Risulta allora possibile ottenere importanti informazioni a priori sulle proprietà della soluzione [1,2].

6.1.2 UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

Si supponga che per gli stessi incrementi di azioni esterne esistano due soluzioni, contraddistinte dagli indici (1) e (2) . Si indichi con $\Delta(\cdot)$ la loro differenza; ad esempio

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{(1)} - \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} \quad \Delta\dot{p}_{ij} = \dot{p}_{ij}^{(1)} - \dot{p}_{ij}^{(2)} \quad (6.8)$$

Questa dovrà rispettare le forme omogenee delle equazioni di equilibrio (6.2) e congruenza (6.3). Precisamente

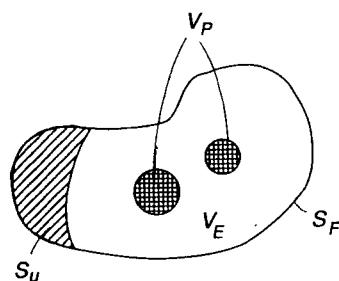


Figura 6.1

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij,i} = 0 \text{ in } V \quad \Delta\dot{\sigma}_{ij}n_i = 0 \text{ su } S_F \quad (6.9a, b)$$

$$\Delta\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta\dot{\epsilon}_{i,j} + \Delta\dot{\epsilon}_{j,i}) \text{ in } V \quad \Delta\dot{s}_i = 0 \text{ su } S_u \quad (6.9c, d)$$

Inoltre, essendo $\Delta\dot{\vartheta}_{ij} = 0$, la (6.4b) diviene

$$\Delta\dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijkl}\Delta\dot{\sigma}_{kl} + \Delta\dot{p}_{ij} \quad (6.10)$$

Le (6.9) mostrano che $\Delta\dot{\sigma}_{ij}$ è una distribuzione autoequilibrata e che le $\Delta\dot{\epsilon}_{ij}$ sono derivabili da un campo di spostamenti nullo sul contorno vincolato. Per il principio dei lavori virtuali sarà allora

$$\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij} \Delta\dot{\epsilon}_{ij} dV = 0 \quad (6.11)$$

relazione che, per la (6.10), si scrive anche

$$\int_V A_{ijkl}\Delta\dot{\sigma}_{ij} \Delta\dot{\sigma}_{kl} dV + \int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij} \Delta\dot{p}_{ij} dV = 0 \quad (6.12)$$

I due addendi al primo membro della (6.12) sono integrali di quantità entrambe localmente non-negative, la prima perché il tensore delle cedevolezze elastiche A_{ijkl} è definito positivo, la seconda in virtù della (3.118a) che consegue dal postulato di Drucker. Esse dovranno quindi risultare individualmente nulle. La definizione positiva di A_{ijkl} però stabilisce che il primo contributo è tale solo se risulta in ogni punto

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij} = 0 \text{ in } V \quad (6.13)$$

Si può pertanto concludere che, per materiali che rispettano il postulato di Drucker, la soluzione del problema elasto-plastico incrementale, se esiste, è unica in termini di incrementi di sforzo.

Se è $h > 0$ ovunque in V_P , a ogni incremento di sforzo $\dot{\sigma}_{ij}$ corrisponde, attraverso il legame inverso (3.111), uno e un solo $\dot{\epsilon}_{ij}$. La soluzione è allora unica anche in termini di incrementi di deformazione e (a meno di eventuali moti rigidì in un mezzo non completamente vincolato) di spostamento.

Nel caso idealmente elasto-plastico ($h = 0$) il legame inverso non è invece univocamente definito. Allo stesso $\dot{\sigma}_{ij}$ possono allora corrispondere più incrementi di deformazione. È facile dimostrare che due soluzioni possono differire tra loro solo per una distribuzione di deformazioni puramente plastiche e congruenti; tali cioè che sia

$$\Delta\dot{\epsilon}_{ij} = \Delta\dot{p}_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta\dot{\epsilon}_{i,j} + \Delta\dot{\epsilon}_{j,i}) \text{ in } V \quad \Delta\dot{s}_i = 0 \text{ su } S_u \quad (6.14a, b)$$

Le (6.14) sono infatti un'immediata conseguenza delle (6.10), (6.13) e (6.9c, d).

Si osservi anche che ponendo $\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} = \dot{\sigma}_{ij}^{(2)} = \dot{\sigma}_{ij}$ nella (3.118b), questa diviene

$$\dot{\sigma}_{ij}(\dot{p}_j^{(1)} - \dot{p}_j^{(2)}) \geq 0$$

Peraltro, $\dot{p}_j^{(1)}$ e $\dot{p}_j^{(2)}$ corrispondono attraverso il legame costitutivo allo stesso $\dot{\epsilon}_{ij}$ e possono quindi essere tra loro scambiati senza distruggere la diseguaglianza. Sarà allora

$$\dot{\sigma}_{ij}\Delta\dot{p}_{ij} = 0 \quad (6.15)$$

Con riferimento alle (6.14), (6.15), il principio dei lavori virtuali stabilisce quindi

$$\int_V \dot{F}_j \Delta\dot{s}_j dV + \int_{S_F} \dot{f}_j \Delta\dot{s}_j dS = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta\dot{p}_{ij} dV = 0 \quad (6.16)$$

Anche in presenza di molteplicità di soluzione, il lavoro compiuto dagli incrementi di carico è univocamente definito.

Questi risultati si limitano a stabilire le caratteristiche di unicità della soluzione, qualora questa esista. Anche nell'ambito di validità del postulato di Drucker il problema elasto-plastico incrementale può non ammettere soluzione. Se il materiale presenta (come è di norma il caso) un limite superiore per il livello di sollecitazione, la struttura è in grado di sopportare solo carichi all'interno di un determinato dominio, il cui contorno configura situazioni dette di *collasso*. Per ulteriori incrementi di carico il problema non ha soluzione. In corrispondenza di una situazione di collasso esistono soluzioni multiple (6.14) sotto incrementi di carico nulli ($\dot{F}_j = 0$ in V , $\dot{f}_j = 0$ su S_F), che identificano il cosiddetto *meccanismo di collasso* e rendono la (6.16) banalmente soddisfatta.

Nel caso idealmente elasto-plastico ($h = 0$), molteplicità di soluzione possono verificarsi anche prima del collasso. Esse sono insite nel modello costitutivo che non è in grado di definire univocamente gli incrementi di deformazione plastica. Tuttavia la (6.16) mostra come tali alternative siano di fatto ben poco significative: esse danno comunque luogo a spostamenti univocamente definiti in termini di lavoro esterno compiuto nel processo incrementale.

6.1.3 PROPRIETÀ ESTREMALI

6.1.3.1 I teoremi di Greenberg e Prager-Hodge

Nell'ambito di validità del postulato di Drucker, il problema elasto-plastico incrementale gode di proprietà estremali, che rappresentano spontanee generalizzazioni dei teoremi energetici fondamentali relativi al problema elastico. Vengono ora illustrati i due risultati più classici (per i riferimenti bibliografici, si veda [1]); il primo di questi è noto come *teorema di Greenberg* e si enuncia come segue

- Nella classe delle soluzioni *cinematicamente ammissibili*, indicata con $(\hat{\cdot})$ e definita dalle condizioni di congruenza

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{s}_{i,j} + \hat{s}_{j,i}) \text{ in } V \quad \hat{s}_i = \bar{s}_i \text{ su } S_u \quad (6.17a, b)$$

la soluzione del problema elasto-plastico incrementale rende minimo il funzionale

$$\Psi(\hat{s}_i) = \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_{ij} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \int_V \dot{F}_j \hat{s}_j dV + \int_{S_F} \dot{f}_j \hat{s}_j dS \quad (6.18)$$

dove $\hat{\sigma}_{ij}$ è l'incremento di sforzo corrispondente, attraverso il legame elasto-plastico diretto, alle $\hat{\epsilon}_{ij}$ (6.17a).

Si ricorda che nell'ambito di validità del postulato di Drucker, il legame diretto associa uno e un solo $\dot{\sigma}_{ij}$ a ogni $\dot{\epsilon}_{ij}$.

Si indichi con $(\cdot)^0$ la soluzione del problema elasto-plastico incrementale. Si può allora scrivere

$$\begin{aligned} \Delta\Psi = \Psi(\hat{s}_i) - \Psi(\hat{s}_i^0) &= \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_{ij} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\hat{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \\ &- \int_V \dot{F}_j (\hat{s}_j - \hat{s}_j^0) dV - \int_{S_F} \dot{f}_j (\hat{s}_j - \hat{s}_j^0) dS \end{aligned} \quad (a)$$

La soluzione rispetta sia le condizioni di equilibrio (6.2) che quelle di congruenza (6.3). D'altra parte le (6.17) assicurano la congruenza di ogni soluzione cinematicamente ammissibile. Dal principio dei lavori virtuali si trae allora l'eguaglianza

$$\begin{aligned} \int_V \dot{F}_j (\hat{s}_j - \hat{s}_j^0) dV + \int_{S_F} \dot{f}_j (\hat{s}_j - \hat{s}_j^0) dS &= \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\hat{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\vartheta}_{ij}) dV = \\ &= \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\vartheta}_{ij}) dV \end{aligned} \quad (b)$$

In virtù della (6.17b), in tale relazione non compare il contributo sul contorno vincolato. Si osservi che all'ultimo membro è stato sommato e sottratto un termine comune. Sostituendo nella (a), questa diviene

$$\Delta\Psi = \frac{1}{2} \int_V [\hat{\sigma}_{ij} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) + \dot{\sigma}_{ij}^0 (\dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\vartheta}_{ij}) - 2\dot{\sigma}_{ij}^0 (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij})] dV \quad (c)$$

La parte elastica (6.4b) del legame costitutivo, comunque soddisfatta dalle quantità in gioco, permette di scrivere

$$\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij} = A_{ijkl} \hat{\sigma}_{kl} + \hat{p}_{ij} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\vartheta}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^0 + \dot{p}_{ij}^0 \quad (d1, 2)$$

Per la simmetria del tensore elastico si ha inoltre

$$A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^0 \hat{\sigma}_{kl} = A_{ijkl} \hat{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl}^0 \quad (d3)$$

La (c) quindi si scrive

$$\Delta \Psi = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} (\hat{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^0) (\hat{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^0) dV + \frac{1}{2} \int_V (\hat{\sigma}_{ij} \hat{p}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{p}_{ij}^0 - 2 \dot{\sigma}_{ij}^0 \hat{p}_{ij}) dV \quad (e)$$

Il tensore elastico è definito positivo. Il primo addendo a secondo membro della (e) è quindi non-negativo e, per l'unicità di $\dot{\sigma}_{ij}^0$, si annulla solo in soluzione. Il secondo addendo è non-negativo per il postulato di Drucker, che comporta la (3.118b). Esso pure si annulla in soluzione; infatti, anche in presenza di molteplicità in termini di \dot{p}_{ij}^0 , vale comunque la (6.15). Si conclude quindi

$$\Psi(\hat{s}_i) - \Psi(s^0) \geq 0 \quad \forall \hat{s}_i \text{ e nullo in soluzione} \quad (6.19)$$

il che dimostra l'asserto.

Una seconda proprietà estremale è nota come teorema di Prager-Hodge. Esso si enuncia come segue

- Nella classe delle soluzioni *staticamente ammissibili*, indicata con $(\cdot)^*$ e definita dalle condizioni di equilibrio

$$\dot{\sigma}_{ij,i}^* + \dot{F}_j = 0 \text{ in } V \quad \dot{\sigma}_{ij}^* n_i = \dot{f}_j \text{ su } S_F \quad (6.20a, b)$$

nonché, eventualmente, dalla diseguaglianza

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^* \leq 0 \text{ in } V_P \quad \text{se } h = 0 \quad (6.21)$$

la soluzione del problema elasto-plastico incrementale rende minimo il funzionale

$$\Theta(\dot{\sigma}_{ij}^*) = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* (\dot{\epsilon}_{ij}^* + \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_i \dot{s}_j dS \quad (6.22)$$

dove $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ è l'incremento di deformazione corrispondente a $\dot{\sigma}_{ij}^*$ attraverso il legame inverso.

Si ricorda che questo legame è univocamente definito solo per $h > 0$. Nel caso, pur compatibile con il postulato di Drucker, in cui si abbia $h = 0$, $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ esiste solo se la (6.21) è rispettata, il che giustifica l'inserimento di questa condizione. Anche così, $\dot{\epsilon}_{ij}^*(\dot{\sigma}_{ij}^*)$ può non essere univocamente definito dal legame costitutivo, circostanza che tuttavia non inficia la validità del teorema.

La dimostrazione è analoga alla precedente. Indicando ancora con $(\cdot)^0$ le quantità in soluzione, si può scrivere

$$\Delta \Theta = \Theta(\dot{\sigma}_{ij}^*) - \Theta(\dot{\sigma}_{ij}^0) = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* (\dot{\epsilon}_{ij}^* + \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \int_{S_u} (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}^0) n_i \dot{s}_j dS \quad (f)$$

Tenendo conto delle (6.20), il principio dei lavori virtuali fornisce

$$\int_{S_u} (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}^0) n_i \dot{s}_j dS = \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV$$

La (f) quindi diviene

$$\Delta \Theta = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* + \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - 2 \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^0) dV + \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}^0) \dot{\vartheta}_{ij} dV \quad (g)$$

La (6.4b) e la simmetria del tensore elastico permettono di scrivere relazioni analoghe alle (d). Precisamente

$$\dot{\epsilon}_{ij}^* = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^* + \dot{p}_{ij}^* + \dot{\vartheta}_{ij} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^0 = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^0 + \dot{p}_{ij}^0 + \dot{\vartheta}_{ij} \quad (h1, 2)$$

$$A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\sigma}_{kl}^* = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{kl}^0 \quad (h3)$$

La (g) si scrive quindi

$$\Delta \Theta = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}^0) (\dot{\sigma}_{kl}^* - \dot{\sigma}_{kl}^0) dV + \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{p}_{ij}^* + \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{p}_{ij}^0 - 2 \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{p}_{ij}^0) dV \quad (i)$$

Considerazioni identiche a quelle sviluppate con riferimento alla (e) permettono di concludere

$$\Theta(\dot{\sigma}_{ij}^*) - \Theta(\dot{\sigma}_{ij}^0) \geq 0 \quad \forall \dot{\sigma}_{ij}^* \text{ e nullo in soluzione} \quad (6.23)$$

il che dimostra l'asserto.

In assenza di deformazioni plastiche, il legame incrementale fornisce

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\vartheta}_{kl}) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^* = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^* + \dot{\vartheta}_{ij}$$

Le espressioni (6.18) e (6.22) dei due funzionali divengono allora

$$\Psi(\hat{s}_i) = \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) (\hat{\epsilon}_{kl} - \dot{\vartheta}_{kl}) dV - \int_V \hat{F}_j \hat{s}_j dV - \int_{S_F} \hat{f}_j \hat{s}_j dV \quad (6.24a)$$

$$\Theta(\dot{\sigma}_{ij}^*) = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{kl}^* dV + \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\vartheta}_{ij} dV - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_i \dot{s}_j dS \quad (6.24b)$$

La (6.24a) non è altro che la forma incrementale del funzionale (4.160), con ω espressa dalla (4.180a). Dal momento che i domini definiti dalle (6.17) e (4.159) sono identici, nel caso elastico il teorema di Greenberg si riconduce al principio della minima energia potenziale totale. Analogamente, la (6.24b) rappresenta la forma incrementale dell'espressione (4.162), (4.180b) del funzionale Π , da minimizzarsi nel rispetto delle (4.161)

identiche alle (6.20). Dal momento che nel caso elastico ($V = V_E$) le (6.21) non si applicano, il teorema di Prager-Hodge si riconduce al principio della minima energia complementare totale. I due teoremi costituiscono quindi generalizzazioni all'ambito elasto-plastico incrementale dei principi energetici fondamentali in elasticità. Come questi, essi rappresentano formulazioni estremali rispettivamente dell'equilibrio e della congruenza.

Il principio dei lavori virtuali permette di stabilire le diseguaglianze seguenti, analoghe alle (4.181)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_{ij} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \int_V \dot{F}_j \hat{s}_j dV - \int_{S_F} \dot{f}_j \hat{s}_j dS \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\vartheta}_{ij}) dV - \int_V \dot{F}_j \dot{s}_j^0 dV - \int_{S_F} \dot{f}_j \dot{s}_j^0 dS = \\ & = -\frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 (\dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\vartheta}_{ij}) dV + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^0 n_i \dot{s}_j dS \geq \\ & \geq -\frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* (\dot{\epsilon}_{ij}^* + \dot{\vartheta}_{ij}) dV + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_i \dot{s}_j dS \end{aligned} \quad (6.25a)$$

o anche, in forma compatta

$$\Psi(\hat{s}_i) \geq \Psi(s_i^0) = -\Theta(\dot{\sigma}_{ij}^0) \geq -\Theta(\dot{\sigma}_{ij}^*) \quad (6.25b)$$

I teoremi energetici erano stati dimostrati come condizioni di stazionarietà. Questa corrisponde a un minimo per l'assunta convessità delle energie interne $\omega(\epsilon_{ij})$ e $\gamma(\sigma_{ij})$, che nel caso lineare si traduce nella definizione positiva del tensore elastico. Anche per il problema elasto-plastico incrementale questa condizione rimane necessaria, ma non è più di per sé sufficiente: solo unitamente al postulato di Drucker essa assicura la convessità dei funzionali. Con riferimento a quantità (siano esse cinematicamente o staticamente ammissibili) che si corrispondono attraverso il legame costitutivo, per la (6.4b) si può infatti scrivere

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij} \dot{p}_{ij} \quad (6.26)$$

A secondo membro, il primo addendo è strettamente convesso per le proprietà del tensore elastico e, se vale il postulato di Drucker, il secondo è non-negativo per la (3.114b). La quantità definita dalla (6.26) è allora strettamente convessa e tale sarà anche il suo integrale sul volume del mezzo, che costituisce la parte non-lineare di entrambi i funzionali (6.18) e (6.22). Questi, peraltro, non sono differenziabili. Il loro dominio di definizione prevede infatti che le variabili soddisfino a priori il legame elasto-plastico incrementale (3.104), intrinsecamente non-lineare per le alternative carico-scarico in V_P . Il minimo non corrisponde quindi a stazionarietà nel senso usuale del termine.

Le condizioni di ottimalità dei due problemi di minimo si traducono infatti in diseguaglianze variazionali. Sotto condizioni abbastanza generali queste, pur non possedendo più proprietà di estremo, mantengono la loro validità anche al di fuori del postulato di Drucker, a esempio per legami associati con incrudimento negativo, caso per cui la (3.114b) risulta violata.

6.1.3.2 Formulazioni estremali a due campi

Come del resto in campo elastico, le formulazioni estremali del problema hanno non solo interesse concettuale ma anche rilevanza operativa come base per procedimenti risolutivi e per la valutazione delle approssimazioni connesse con le soluzioni numeriche cui si è spesso costretti a ricorrere. Da questo punto di vista, la non differenziabilità del funzionali di Greenberg e Prager-Hodge rappresenta un aspetto poco desiderabile, a volte fonte di difficoltà sia operative che interpretative. Questo inconveniente è rimosso da due altri teoremi di estremo, che vengono ora presentati nella forma originariamente proposta da Capurso e Maier [3]. Essi si enunciano come segue.

■ **Teorema A** La soluzione del problema elasto-plastico incrementale rende minimo il funzionale

$$\begin{aligned} \Psi(\hat{s}_i, \hat{\lambda}) = & \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_V h \hat{\lambda}^2 dV - \\ & - \int_V \dot{F}_j \hat{s}_j dV - \int_{S_F} \dot{f}_j \hat{s}_j dS \end{aligned} \quad (6.27)$$

sotto le condizioni

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{s}_{i,j} + \hat{s}_{j,i}) - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\lambda} - \dot{\vartheta}_{ij} \text{ in } V \quad \hat{s}_i = \dot{s}_i \text{ su } S_u \quad (6.28a, b)$$

$$\hat{\lambda} = 0 \text{ in } V_E \quad \hat{\lambda} \geq 0 \text{ in } V_P \quad (6.29a, b)$$

■ **Teorema B** La soluzione del problema elasto-plastico incrementale rende minimo il funzionale

$$\bar{\Theta}(\dot{\sigma}_{ij}^*, \dot{\lambda}^*) = \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{kl}^* dV + \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\vartheta}_{ij} dV + \quad (6.30)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V h \dot{\lambda}^{*2} dV - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_i \dot{s}_j dS$$

sotto le condizioni

$$\dot{\sigma}_{ij}^* + \dot{F}_j = 0 \text{ in } V \quad \dot{\sigma}_{ij}^* n_i = \dot{f}_j \text{ su } S_F \quad (6.31a, b)$$

$$\dot{\varphi}^* \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^* - h \dot{\lambda}^* \leq 0 \text{ in } V_P \quad (6.32)$$

Prima di procedere alle dimostrazioni, sono opportuni alcuni commenti. Si osservi innanzitutto che nel caso elastico ($\hat{\lambda} = \dot{\lambda}^* = 0$, $V = V_E$) i due funzionali si riconducono ancora alle (6.24) e i loro domini di definizione rispettivamente alle condizioni di congruenza (6.17) e di equilibrio (6.20). I due teoremi sono quindi sempre generalizzazioni dei principi energetici elastici fondamentali. A differenza delle formulazioni nel paragrafo precedente, ora solo una parte del legame elasto-plastico incrementale deve

Tale quantità è non-negativa e nulla in soluzione per le (6.32), (6.34b, c). Si conclude quindi

$$\bar{\Theta}(\dot{\sigma}_{ij}^*, \dot{\lambda}^*) - \bar{\Theta}(\dot{\sigma}_{ij}^0, \dot{\lambda}^0) \geq 0 \quad \forall \dot{\sigma}_{ij}^*, \dot{\lambda}^* \text{ e nullo in soluzione} \quad (6.36b)$$

il che dimostra anche il Teorema B).

Per sistemi strutturali discreti, con riferimento ai quali i due teoremi sono stati per la prima volta dimostrati [4], il problema elasto-plastico si riconduce alla minimizzazione di una funzione quadratica sotto vincoli lineari, problema noto in Ricerca Operativa come *Programmazione Quadratica*. Le sue condizioni di ottimalità costituiscono un *Problema Lineare di Complementarietà*. Metodi e algoritmi sviluppati in questo ambito possono allora essere utilizzati per la soluzione [5].

I due funzionali si riconducono a quelli del paragrafo precedente qualora l'intero legame elasto-plastico incrementale venga imposto a priori. Ricordando infatti le relazioni

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}_{ij} \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} - h\dot{\lambda}$$

Con semplici calcoli, dalle (6.27), (6.18) e (6.30), (6.22) si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} - \Psi &= \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_{ij} \left(\hat{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} \hat{\lambda} - \dot{\vartheta}_{ij} \right) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V h \hat{\lambda}^2 dV - \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_{ij} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left(h \hat{\lambda} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij} \right) \hat{\lambda} dV = -\frac{1}{2} \int_V \hat{\varphi} \hat{\lambda} dV \end{aligned} \quad (6.37a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} - \Theta &= \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl}\dot{\sigma}_{ij}^*\dot{\sigma}_{kl}^* dV + \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\vartheta}_{ij} dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V h \lambda^{*2} dV - \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* (\dot{\epsilon}_{ij}^* + \dot{\vartheta}_{ij}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left(h \lambda^* - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^* \right) \lambda^* dV = -\frac{1}{2} \int_V \dot{\varphi}^* \lambda^* dV \end{aligned} \quad (6.37b)$$

Sarebbe quindi $\bar{\Psi} = \Psi$ e $\bar{\Theta} = \Theta$ qualora fosse $\dot{\varphi}\dot{\lambda} = 0$ ovunque in V . Si noti, peraltro, che l'egualanza vale comunque in soluzione, dove i valori dei due funzionali si identificano. È allora possibile stabilire anche nel presente contesto la catena di diseguaglianze (6.25b). Precisamente

$$\bar{\Psi}(\hat{s}_i, \hat{\lambda}) \geq \bar{\Psi}(s_i^0, \lambda^0) = -\bar{\Theta}(\dot{\sigma}_{ij}^0, \lambda^0) \geq -\bar{\Theta}(\dot{\sigma}_{ij}^*, \lambda^*) \quad (6.38)$$

I due teoremi potrebbero anche essere derivati da quelli di Greenberg e Prager-Hodge utilizzando alcune proprietà estremali del legame elasto-plastico incrementale, che pure conseguono dal postulato di Drucker. Questo aspetto non verrà qui esaminato in dettaglio; ci si limita a affermare [5] che per ogni $\hat{\epsilon}_{ij}$ in V_P e conseguente $\hat{\sigma}_{ij}$ vale la relazione

$$\frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{\epsilon}_{ij} - \dot{\vartheta}_{ij}) = \min_{\dot{\lambda}} \frac{1}{2} \left\{ D_{ijkl} \left(\hat{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} \dot{\lambda} - \dot{\vartheta}_{ij} \right) \left(\hat{\epsilon}_{kl} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{kl}} \dot{\lambda} - \dot{\vartheta}_{kl} \right) + h\dot{\lambda}^2 \right\} \quad (6.39a)$$

$$\text{sotto la condizione } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (6.39b)$$

Analogamente, per ogni $\dot{\sigma}_{ij}^*$ in V_P e conseguenti $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ si ha

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^* (\dot{\epsilon}_{ij}^* - \dot{\vartheta}_{ij}) = \min_{\dot{\lambda}} \frac{1}{2} \left\{ A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{kl}^* + 2\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\vartheta}_{ij} + h\dot{\lambda}^2 \right\} \quad (6.40a)$$

$$\text{sotto la condizione } \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^* - h\dot{\lambda} \leq 0 \quad (6.40b)$$

È facile constatare come tali proprietà riconducano i problemi (6.17), (6.18) e (6.20), (6.21) a quelli definiti, rispettivamente, dalle (6.27-29) e (6.30-32).

6.1.3.3 L'appuccio alla Colonnetti

In un mezzo elastico-lineare vale il principio della sovrapposizione degli effetti. Dal momento che le deformazioni plastiche giocano lo stesso ruolo di un qualunque effetto deformativo di natura anelastica, è possibile concepire la soluzione del problema elasto-plastico come sovrapposizione di due soluzioni elastiche, corrispondenti l'una agli incrementi di azioni esterne \dot{F}_i , $\dot{\vartheta}_{ij}$ in V , \dot{f}_i su S_F e \dot{s}_i su S_u e l'altra alle deformazioni plastiche \dot{p}_{ij} considerate come distorsioni imposte. Questo approccio è stato proposto da Colonnetti ed è comunemente associato al suo nome [6].

Indicando con $(\cdot)^e$ e $(\cdot)^p$ i due contributi, si può scrivere

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (6.41a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\vartheta}_{ij}) + (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{p}_{ij}) \quad (6.41b)$$

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i^e + \dot{s}_i^p \quad (6.41c)$$

La soluzione $(\cdot)^e$ è costituita da una distribuzione di sforzi in equilibrio con \dot{F}_i , \dot{f}_i e da una cinematica incrementale congruente con gli spostamenti imposti su S_u . Valgono quindi le relazioni

$$\dot{\sigma}_{ij,i}^e + \dot{F}_j = 0 \text{ in } V \quad \dot{\sigma}_{ij}^e n_i = \dot{f}_j \text{ su } S_F \quad (6.42a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\vartheta}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{s}_{i,j}^e + \dot{s}_{j,i}^e) \text{ in } V \quad \dot{s}_i^e = \dot{s}_i \text{ su } S_u \quad (6.42b)$$

La risposta elastica alle \dot{p}_{ij} è invece costituita da uno stato di coazione e da deformazioni congruenti con spostamenti nulli su S_u . È allora

$$\dot{\sigma}_{ij,i}^p = 0 \text{ in } V \quad \dot{\sigma}_{ij}^p n_i = 0 \text{ su } S_F \quad (6.43a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{p}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{s}_{i,j}^p + \dot{s}_{j,i}^p) \text{ in } V \quad \dot{s}_i^p = 0 \text{ su } S_u \quad (6.43b)$$

Si noti, in particolare, che $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ rappresenta l'incremento di deformazione elastica necessario per ristabilire la congruenza sotto \dot{p}_{ij} . Tenuto conto delle (6.42), (6.43), il principio dei lavori virtuali stabilisce le seguenti egualanze

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^e (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\vartheta}_{ij}) dV = \int_V \dot{F}_j \dot{s}_j^e dV + \int_{S_F} \dot{f}_j \dot{s}_j^e dS + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^e n_i \dot{s}_j dS \quad (6.44a)$$

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^e (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{p}_{ij}) dV = \int_V \dot{F}_j \dot{s}_j^p dV + \int_{S_F} \dot{f}_j \dot{s}_j^p dS \quad (6.44b)$$

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^p (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\vartheta}_{ij}) dV = \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^p n_i \dot{s}_j dS \quad (6.44c)$$

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^p (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{p}_{ij}) dV = 0 \quad (6.44d)$$

Il legame elastico si suddivide ora nelle due relazioni

$$\dot{\sigma}_{ij}^e = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad \dot{\sigma}_{ij}^p = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p \quad (6.45a, b)$$

La simmetria del tensore elastico stabilisce inoltre la condizione di reciprocità

$$\dot{\sigma}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^p = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\sigma}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (6.46)$$

La soluzione $(\gamma)^e$, che rappresenta la risposta elastica del mezzo sotto gli assegnati incrementi di azione esterna, è univocamente definita e verrà considerata come nota. Non altrettanto può dirsi del secondo contributo che, pur derivando anch'esso da un calcolo elastico, è noto solo una volta calcolato l'effettivo valore delle deformazioni plastiche incrementalni \dot{p}_{ij} . Queste sono date dalla legge di normalità (6.5) in funzione di $\dot{\lambda}$, da cui quindi dipende la soluzione $(\gamma)^p$. Si può cioè scrivere

$$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p(\dot{\lambda}) \quad \dot{\sigma}_{ij}^p = \dot{\sigma}_{ij}^p(\dot{\lambda}) \quad \dot{s}_i^p = \dot{s}_i^p(\dot{\lambda}) \quad (6.47a-d)$$

Peraltro, le (6.42), (6.43) assicurano che le (6.41) verificano sia l'equilibrio che la congruenza per qualunque $\dot{\lambda}$. La parte elastica del legame costitutivo è ovviamente soddisfatta. L'approccio alla Colonnelli consente di formulare il problema elasto-plastico incrementale in termini dei soli moltiplicatori plastici $\dot{\lambda}$, il cui valore deve essere determinato imponendo la parte plastica (6.6) del legame incrementale.

Anche questo problema ammette formulazioni estremali, che riconducono la soluzione del problema elasto-plastico alla minimizzazione di funzionali quadratici sotto vincoli lineari. Esse verranno qui derivate a partire dai teoremi di Capurso-Maier. Si indichino con $\hat{\lambda}$ dei moltiplicatori plastici rispettosi delle (6.29) e si ponga

$$\hat{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^p(\hat{\lambda}) \quad \hat{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p(\hat{\lambda}) \quad \hat{s}_i = \dot{s}_i^e + \dot{s}_i^p(\hat{\lambda}) \quad (n1-3)$$

Ricordando le (6.45), (6.46) si può allora scrivere

$$\frac{1}{2} D_{ijkl} \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^p)(\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (o1)$$

D'altra parte, dalla (6.44b) si ottiene

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^e \hat{\epsilon}_{ij}^p dV = \int_V \dot{F}_j \hat{s}_j^p dV + \int_{S_F} \dot{f}_j \hat{s}_j^p dS - \int_V \dot{\sigma}_{ij}^p \hat{p}_{ij} dV \quad (o2)$$

L'espressione (6.27) di $\bar{\Psi}$ diviene quindi

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} = & \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^p \hat{\epsilon}_{ij}^p dV - \int_V \dot{\sigma}_{ij}^p \hat{p}_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V h \hat{\lambda}^2 dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e dV - \int_V \dot{F}_j \dot{s}_j^e dV + \int_{S_F} \dot{f}_j \dot{s}_j^e dS \end{aligned} \quad (p)$$

Gli ultimi tre addendi nella (p) sono quantità note e pertanto ininfluenti nella minimizzazione del funzionale. Le condizioni di congruenza (6.28) sono comunque rispettate. Il Teorema A) si riconduce quindi a un problema di minimo vincolato nelle sole $\hat{\lambda}$. Ricordando le (6.45b) e (6.47a) questo si scrive

$$\min \bar{\Psi}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2} \int_V \left\{ D_{ijkl} \hat{\epsilon}_{ij}^p \hat{\epsilon}_{kl}^p + h \hat{\lambda}^2 - 2 \dot{\sigma}_{ij}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\lambda} \right\} dV \quad (6.48a)$$

$$\text{sotto le condizioni: } \hat{\lambda} = 0 \text{ in } V_E \quad \hat{\lambda} \geq 0 \text{ in } V_P \quad (48b)$$

Le (6.48) costituiscono l'enunciato del *Teorema di Ceradini*.

Questo enunciato, qui presentato come una conseguenza del Teorema A) di Capurso-Maier, è in realtà a esso antecedente [7]. La sua dimostrazione diretta non è difficile. Con la simbologia precedentemente usata, si può scrivere

$$\Delta \bar{\Psi} = \frac{1}{2} \int_V (D_{ijkl} \Delta \hat{\epsilon}_{ij}^p \Delta \hat{\epsilon}_{kl}^p + h \Delta \hat{\lambda}^2) dV + \int_V \left(\dot{\sigma}_{ij}^p \Delta \hat{\epsilon}_{ij}^p + h \Delta \hat{\lambda} - \dot{\sigma}_{ij}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \hat{\lambda} \right) dV \quad (q)$$

D'altra parte, la (6.44d) stabilisce la relazione

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^p \Delta \hat{\epsilon}_{ij}^p dV = - \int_V \dot{\sigma}_{ij}^p \Delta \hat{p}_{ij} dV = - \int_V \dot{\sigma}_{ij}^p \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \hat{\lambda} dV$$

Posto allora

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^p \quad \dot{\varphi}^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^0 - h \dot{\lambda}^0$$

La (q) diviene

$$\Delta \bar{\Psi} = \frac{1}{2} \int_V (D_{ijkl} \Delta \hat{\epsilon}_{ij}^p \Delta \hat{\epsilon}_{kl}^p + h \Delta \hat{\lambda}^2) dV - \int_V \dot{\varphi}^0 \Delta \hat{\lambda} dV$$

Le stesse considerazioni svolte con riferimento alla (k) conducono alla dimostrazione del teorema.

Si ponga ora

$$\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^{*p}(\dot{\lambda}^*) \quad \dot{e}_{ij}^* = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^{*p}(\dot{\lambda}^*) \quad \dot{s}_i^* = \dot{s}_i^e + \dot{s}_i^{*p}(\dot{\lambda}^*) \quad (r1-3)$$

dove $\dot{\lambda}^*$ rispetta la diseguaglianza (6.32). Ricordando ancora le (6.45), (6.46) si può scrivere

$$\frac{1}{2} A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{kl}^* = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^{*p})(\dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^{*p}) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{e}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{e}_{ij}^{*p} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{e}_{ij}^{*p} \quad (s1)$$

La (6.44c) peraltro fornisce

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{e}_{ij}^e dV = \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^{*p} n_i \dot{s}_j dS - \int_V \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{\vartheta}_{ij} dV \quad (s2)$$

Le (s) consentono di esprimere il funzionale (6.30) come segue

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{e}_{ij}^{*p} dV + \frac{1}{2} \int_V h \dot{\lambda}^{*2} dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{e}_{ij}^e dV + \int_V \dot{\sigma}_{ij}^e \dot{\vartheta}_{ij} dV - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^e n_i \dot{s}_j dS \end{aligned} \quad (t)$$

Gli ultimi tre addendi dipendono solo da quantità note e le condizioni di equilibrio (6.31) sono comunque soddisfatte. Il Teorema B) si riconduce quindi al problema

$$\min \bar{\Theta}(\dot{\lambda}^*) = \frac{1}{2} \int_V [A_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{\sigma}_{kl}^p + h \dot{\lambda}^{*2}] dV \quad (6.49a)$$

$$\text{sotto la condizione: } \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^{*p} - h \dot{\lambda}^* \leq - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^e \quad \text{in } V_p \quad (46.9b)$$

Le (6.49) costituiscono l'enunciato duale al teorema di Ceradini, per la prima volta dimostrato da Maier con riferimento a strutture discrete [5].

Anche per le (6.49) è possibile una dimostrazione diretta. Semplici calcoli consentono infatti di scrivere

$$\Delta \bar{\Theta} = \frac{1}{2} \int_V (A_{ijkl} \Delta \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \Delta \dot{\sigma}_{kl}^p + h \Delta \dot{\lambda}^{*2}) dV + \int_V (\dot{e}_{ij}^p \Delta \dot{\sigma}_{ij}^{*p} + h \dot{\lambda}^0 \Delta \dot{\lambda}^*) dV \quad (u)$$

Dalla (6.44d) si ottiene

$$\int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{e}_{ij}^p dV = - \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \dot{p}_{ij}^0 dV = - \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij}^{*p} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}^0 dV$$

D'altra parte, essendo $\dot{\sigma}_{ij}^e$ indipendente da $\dot{\lambda}^*$, è anche $\Delta \dot{\sigma}_{ij}^e = \Delta \dot{\sigma}_{ij}^{*p}$. Posto allora

$$\Delta \dot{\varphi}^* = - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \dot{\sigma}_{ij}^e - h \Delta \dot{\lambda}^*$$

la (u) diviene

$$\Delta \bar{\Theta} = \frac{1}{2} \int_V (A_{ijkl} \Delta \dot{\sigma}_{ij}^e \Delta \dot{\sigma}_{kl}^e + h \Delta \dot{\lambda}^{*2}) dV - \int_V \Delta \dot{\varphi}^* \dot{\lambda}^0 dV$$

Considerazioni identiche a quelle relative alla (m) consentono di dimostrare il teorema.

I teoremi di estremo presentati in questo capitolo possono tutti essere pensati come particolarizzazioni di quelli di Capurso-Maier, i cui funzionali hanno domini definiti, rispettivamente, dalle condizioni di natura cinematica (6.28), (6.29) e da quelle di carattere statico (6.31), (6.32). Si è visto infatti che i teoremi di Greenberg e Prager-Hodge (presentati per primi per la loro rilevanza storica) conseguono se si impone il legame elasto-plastico incrementale nella sua interezza e i due ultimi se si verifica a priori la congruenza o l'equilibrio nello spirito dell'approccio alla Colonnelli. La circostanza per cui tutti i teoremi si presentano in coppia mostra come anche in ambito elasto-plastico si riproponga la struttura duale già vista in campo elastico, struttura che pervade tutta la meccanica delle strutture e che, in ultima analisi, consigue da due proprietà: la dualità tra leggi cinematiche e statiche instaurata dal principio dei lavori virtuali e la simmetria del legame costitutivo; per materiali elasticci, quest'ultima è legata all'esistenza delle energie di deformazione e complementare, in campo elasto-plastico è stabilita dal legame incrementale associato. La definizione positiva delle energie elastiche e il postulato di Drucker assicurano la convessità del problema, per cui le proprietà variazionali si traducono in teoremi di minimo.

Esistono anche formulazioni del problema elasto-plastico incrementale in termini di diseguaglianze variazionali, che non godono necessariamente di proprietà estremali. È a esempio possibile generalizzare a questo ambito il teorema di Hellinger-Reissner [8], ottenendo diverse formulazioni a seconda che la parte plastica del legame costitutivo sia più o meno completamente imposta a priori. Tali formulazioni possono evidentemente essere prodotte in numero considerevole e non vengono qui presentate. Esse sono però operativamente utili in diverse circostanze.

6.2 SOLUZIONI DEL PROBLEMA ELASTO-PLASTICO

6.2.1 CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE

La risposta di un mezzo elasto-plastico a una determinata storia di azioni esterne può, in linea di principio, essere ottenuta integrando il problema incrementale. La natura

irreversibile del legame fa sì che l'integrale dipenda dal percorso; pertanto, anche se conducono agli stessi valori finali, storie di carico diverse comportano risposte diverse.

Il problema si presenta in generale troppo complesso per soluzioni in forma chiusa. Queste sono possibili solo per storie di carico relativamente semplici, in cui il processo di plasticizzazione presenta carattere progressivo, tale cioè da non configurare ritorni in campo elastico nei punti del mezzo che abbiano subito deformazioni plastiche. In questo caso la natura irreversibile del legame costitutivo non gioca un ruolo determinante e il problema diviene simile a quello relativo a un materiale elastico non-lineare, risolvibile in termini finiti. Tale circostanza risulta a volte (anche se non necessariamente) verificata sotto storie di carico radiali, in cui le azioni esterne crescono proporzionalmente a un unico parametro. Anche così, la soluzione è ottenibile in forma chiusa solo per pochi problemi semplici e richiede l'introduzione di ipotesi verificabili solo a posteriori.

Alcuni di questi problemi verranno ora illustrati. Oltre ai risultati specifici, sono di interesse le metodologie con cui i problemi vengono affrontati e le ipotesi (ed eventuali approssimazioni) che è necessario introdurre. Queste sono ricorrenti in ogni procedimento risolutivo, anche numerico, del problema elasto-plastico. Operativamente risulta infatti inevitabile sostituire gli incrementi infinitesimi con passi finiti, ognuno dei quali si configura come un problema che richiede considerazioni e interventi analoghi a quelli che saranno ora sviluppati con riferimento a due casi particolari. Alla loro trattazione, si premette un esempio di soluzione particolarmente semplice.

ESEMPIO 6.1 La struttura in Figura 6.2a è costituita da un blocco rigido sostenuto da due barre elasto-plastiche che, in condizioni uniaxiali, presentano il comportamento bilineare in Figura 6.2b. Si vuole studiare la risposta del sistema al crescere del carico P .

Per svincolare il problema da dati particolari, si introducono le quantità adimensionali

$$S_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \quad \eta_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} = \epsilon_i \frac{E}{\sigma_0} \quad p = \frac{P}{A\sigma_0} \quad u = \frac{U}{\ell} \frac{E}{\sigma_0} \quad x = \frac{E_t}{E} \quad (6.50a-e)$$

dove l'indice $i = 1, 2$ distingue tra le due barre. Il significato dei simboli si evince dalla Figura 6.2.

Il blocco rigido impone che le due barre subiscano lo stesso spostamento U . Tenendo conto della loro diversa lunghezza, il legame deformazioni-spostamenti è quindi $\epsilon_1 = U/\ell$, $\epsilon_2 = 2U/3\ell$, o, in termini adimensionali

$$\eta_1 = u \quad \eta_2 = \frac{2}{3}u \quad (6.51)$$

Nelle barre, le azioni assiali valgono $N_1 = 3A\sigma_1$ e $N_2 = A\sigma_2$. Per le (6.50a, c), l'equazione di equilibrio $N_1 + N_2 = P$ si scrive

$$3S_1 + S_2 = p \quad (6.52)$$

A tali relazioni occorre associare il legame costitutivo uniaxiale di Figura 6.2b. Se si suppone che per P crescenti le deformazioni abbiano carattere progressivo, esso può essere scritto in termini finiti. Adimensionalizzando mediante le (6.50), risulta

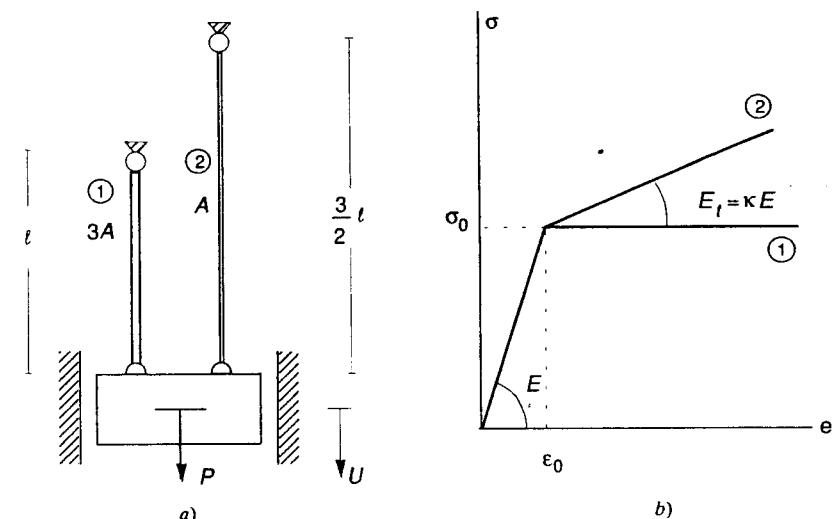


Figura 6.2

$$S_i = \eta_i \quad \text{se } \eta_i \leq 1 \quad (6.53a)$$

$$S_i - 1 = x(\eta_i - 1) \quad \text{se } \eta_i \geq 1 \quad (6.53b)$$

Si osservi che nel caso di plasticità ideale ($E_t = 0$ e quindi $x = 0$) la (6.53b) impone $S_i = 1$ ($\sigma_i = \sigma_0$) per ogni $\eta_i \geq 1$ ($\epsilon_i \geq \epsilon_0$).

Per piccoli valori del carico entrambe le barre si trovano in campo elastico e la risposta della struttura è governata dalle (6.51), (6.52) e (6.53a). Con semplici calcoli, si ottiene

$$S_1 = \frac{3}{11}p \quad S_2 = \frac{2}{11}p \quad u = \eta_1 = \frac{3}{11}p \quad \eta_2 = \frac{2}{11}p \quad (6.54)$$

La fase elastica termina quando il carico assume il valore

$$p_E = \frac{11}{3} = 3.667 \quad (6.55)$$

in corrispondenza del quale la barra ① raggiunge il suo limite di snervamento a trazione $S_1 = 1$ ($\sigma_1 = \sigma_0$) e si inoltra in campo plastico. La risposta successiva dipende dalla pendente $E_t = xE$ del ramo incrudente. Verranno esaminati i due casi seguenti.

a) *Plasticità perfetta* ($x = 0$, curva ① in Figura 6.2b). Se la barra ① continua a allungarsi ($\eta_1 \geq 1$), la (6.53b) impone $S_1 = 1$. Tale condizione e l'equazione di equilibrio (6.52) forniscono

$$S_1 = 1 \quad S_2 = p - 3 \quad u = \eta_1 = \frac{3}{2}(p - 3) \quad \eta_2 = p - 3 \quad (6.56)$$

Tale soluzione cessa di valere quando il carico raggiunge il valore

$$p_L = 4.0 \quad (6.57)$$

in corrispondenza del quale è anche $S_2 = 1$ ($\sigma_2 = \sigma_0$). A questo punto il carico non può essere ulteriormente incrementato senza violare la condizione di equilibrio (6.52) o le diseguaglianze $\sigma_i \leq \sigma_0$ previste dal legame costitutivo. Il valore definito dalla (6.57) configura il *carico di collasso per la struttura*.

b) *Incrudimento lineare* ($x = 1/5$, curva ② in Figura 6.2b). Per incrementi di carico dal valore (6.55) al limite elastico, il comportamento della barra ① è governato dalla (6.53b), mentre quello della barra ②, ancora elastica quantomeno in una prima fase, resta espresso dalla (6.53a). Tali relazioni, unitamente alle (6.51), (6.52), consentono di determinare la risposta della struttura. Si ottiene

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{8}{19} + \frac{3}{19} p & S_2 &= -\frac{24}{19} + \frac{10}{19} p \\ u = \eta_1 &= -\frac{36}{19} + \frac{15}{19} p & \eta_2 &= -\frac{24}{19} + \frac{10}{19} p \end{aligned} \quad (6.58)$$

Le (6.58) perdono di validità quando anche la barra ② raggiunge il limite di snervamento $S_2 = 1$. Ciò si verifica per il valore del carico

$$p_1 = \frac{43}{10} = 4.3 \quad (6.59)$$

La risposta successiva è governata dalle (6.51), (6.52) e (6.53b), che ora si applicano a entrambe le barre, e risulta

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{4}{55} + \frac{3}{11} p & S_2 &= \frac{12}{55} + \frac{2}{11} p \\ u = \eta_1 &= -\frac{48}{11} + \frac{15}{11} p & \eta_2 &= -\frac{32}{11} + \frac{10}{11} p \end{aligned} \quad (6.60)$$

Tale soluzione si mantiene valida per valori di p comunque elevati, in quanto il legame costitutivo non prevede nessun limite allo sforzo sopportabile dal materiale di cui le barre sono costituite.

Per i due casi esaminati, i valori di sforzi e deformazioni al termine di ogni fase sono riportati in Tabella 6.1 (per il caso (b) sono anche tabulati i valori relativi a $p = 5.4 > p_1$ che si evincono dalle (6.60)). L'andamento dello spostamento u è illustrato in funzione del carico in Figura 6.3.

È importante ricordare che la soluzione è stata ottenuta sostituendo il legame elasto-plastico incrementale con le relazioni finite (6.53). Ciò è lecito se le deformazioni, quantomeno in fase plastica, presentano carattere progressivo, se cioè non si verificano scarichi in punti precedentemente plasticizzati. Al momento in cui le (6.53) erano state scritte, questa era solamente un'ipotesi, che ora può però essere verificata. In

Tabella 6.1

	Plasticità perfetta $E_t = 0$		Incrudimento $E_t = E/5$		
	p	S_1	S_2	$u = \eta_1$	η_2
	3.667	4.0	3.667	4.3	5.4
S_1	1.0	1.0	1.0	1.1	1.4
S_2	.667	1.0	.667	1.0	1.2
$u = \eta_1$	1.0	1.5	1.0	1.5	3.0
η_2	.667	1.0	.667	1.0	2.0

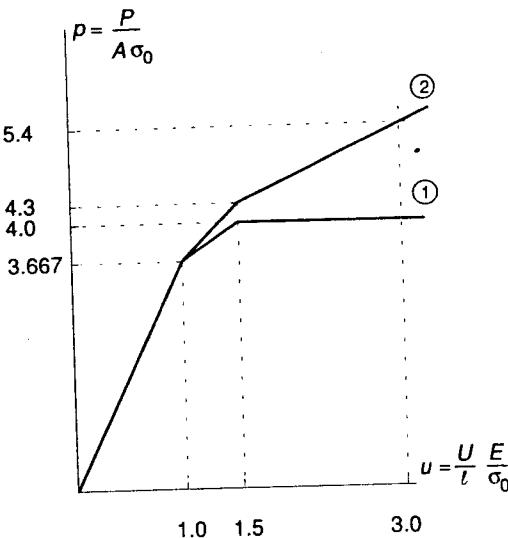


Figura 6.3

effetti, appare dalle soluzioni trovate che le deformazioni sono sempre monotonicamente crescenti se tale è il carico p .

6.2.2 SOLUZIONI DI PROBLEMI PARTICOLARI

6.2.2.1 Cilindro in deformazione piana soggetto a pressione interna

Si consideri il cilindro assalsimmetrico studiato in campo elastico nel Paragrafo 4.3.2. Per semplicità si suppone presente solo una pressione interna p . Il cilindro ha raggio interno a , raggio esterno b e il problema dipende dalla sola coordinata radiale r (vedi Figura 4.22). Si introducono ancora le adimensionalizzazioni (4.107a, b); precisamente

$$\beta = \frac{b}{a} \quad \varrho = \frac{r}{a} \quad (6.61a, b)$$

e si pone inoltre

$$\mu = \frac{p}{\sigma_0} \quad S_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \quad \eta_i = \epsilon_i \frac{E}{\sigma_0} \quad (6.62a-c)$$

dove σ è il limite di snervamento uniaxiale. Per il caso in questione le condizioni di equilibrio (4.95, 4.97) si scrivono, in forma adimensionale

$$\frac{dS_r}{d\varrho} - \frac{S_\varrho - S_r}{\varrho} = 0 \quad (6.63)$$

$$S_r(1) = -\mu \quad S_r(\beta) = 0 \quad (6.64a, b)$$

mentre l'equazione di congruenza interna (4.96) diviene

$$\frac{d\eta_\theta}{d\varrho} + \frac{\eta_\theta - \eta_r}{\varrho} = 0 \quad (6.65)$$

In campo elastico, la soluzione in termini di sforzi è fornita dalle (4.110). Con la notazione qui usata, queste si esprimono

$$S_r = -\frac{\mu}{\beta^2 - 1} \frac{\beta^2 - \varrho^2}{\varrho^2} \quad S_\theta = \frac{\mu}{\beta^2 - 1} \frac{\beta^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \quad S_z = \nu(S_r + S_\theta) = 2\nu \frac{\mu}{\beta^2 - 1} \quad (6.66a-c)$$

Se all'inizio del processo di carico il cilindro è costituito da materiale vergine, le (6.66) si mantengono valide fino a che non viene raggiunto in un punto il limite di snervamento. Questo sia identificato dalla condizione di plasticità di Tresca (3.55), con $k = \sigma_0$. Le (6.66) mostrano che in campo elastico è sempre $S_\theta > S_z > S_r$; il limite elastico è allora definito dalla condizione che risulti nel punto più sollecitato

$$\varphi = S_\theta - S_r - 1 = 0 \quad (6.67)$$

Si è visto nella trattazione elastica che il primo snervamento si verifica in corrispondenza del raggio interno $\varrho = 1$, quando la pressione raggiunge il valore

$$\mu_E = \frac{\beta^2 - 1}{2\beta^2} \quad (6.68)$$

che identifica il limite elastico. La (6.68) si ottiene introducendo le (6.66a, b) scritte per $\varrho = 1$ nella (6.67) o particolarizzando la (4.120a) al caso in esame.

Raggiunto tale valore, iniziano a prodursi deformazioni permanenti. L'evoluzione successiva verrà studiata considerando per il materiale un comportamento *idealmente elasto-plastico*. Si introducono le ipotesi seguenti, che saranno oggetto di verifica a posteriori.

- Le deformazioni plastiche si diffondono a partire dal raggio interno. La frontiera tra la zona plastica V_P e quella elastica V_E , identificata da $\varrho = \varrho_C$, avanza progressivamente da $\varrho = 1$ a $\varrho = \beta$ (Figura 6.4).
- Nella zona plastica il punto rappresentativo dello stato di sforzo soddisfa sempre la (6.67). Ciò richiede che anche in V_P si abbia sempre $S_\theta > S_z > S_r$; solo in tale circostanza, peraltro non assicurata a priori, le cinque rimanenti diseguaglianze che definiscono il criterio di Tresca (3.55) sono verificate se lo è la (6.67).

Gli sforzi nella zona plastica si determinano adesso facilmente. In virtù dell'ipotesi 2 è ovunque in V_P

$$S_\theta - S_r = 1 \quad (a)$$

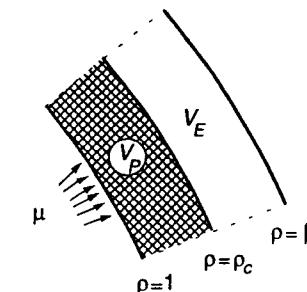


Figura 6.4

L'equazione indefinita di equilibrio (6.63) allora diviene $dS_r/d\varrho = 1/\varrho$ e il suo integrale si scrive

$$S_r = \ln \varrho + C \quad (b)$$

La costante di integrazione è fissata dalla condizione di equilibrio al contorno (6.64a), che impone

$$S_r(\varrho = 1) = C = -\mu \quad (c)$$

In V_P gli sforzi nel piano sono adesso noti. Dalle (a-c) si ottiene infatti

$$S_r(\varrho) = \ln \varrho - \mu \quad (6.69a)$$

$$(1 \leq \varrho \leq \varrho_C) \quad (6.69b)$$

$$S_\theta(\varrho) = 1 + \ln \varrho - \mu \quad (6.69b)$$

La zona elastica V_E è costituita dall'intervallo $\varrho_C \leq \varrho \leq \beta$. È questo un cilindro elastico di raggio esterno b e raggio interno $a = a\varrho_C$, per il quale si può porre, in analogia con le (6.61)

$$\bar{\beta} = \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\varrho_C} \quad \bar{\varrho} = \frac{r}{a} = \frac{\varrho}{\varrho_C} \quad (6.70a, b)$$

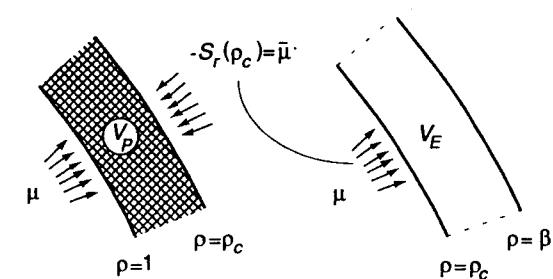


Figura 6.5

L'equilibrio richiede (Figura 6.5) che il cilindro sia soggetto a una pressione interna pari al valore

$$\bar{\mu} = -S_r(\varrho_c) = \mu - \ln \varrho_c \quad (d1)$$

Pertanto, il cilindro elastico esterno si trova in una situazione di plasticizzazione incipiente (limite elastico). Per le (6.68) e (6.70a) sarà quindi

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_E = \frac{\bar{\beta}^2 - 1}{2\bar{\beta}^2} = \frac{\beta^2 - \varrho_c^2}{2\beta^2} \quad (d2)$$

Le (d) stabiliscono il legame tra la pressione interna applicata e il raggio ϱ_c che identifica la frontiera elasto-plastica. Questo risulta

$$\mu = \ln \varrho_c + \frac{\beta^2 - \varrho_c^2}{2\beta^2} \quad (6.71)$$

In V_E si applica la soluzione elastica (6.66). Per le (6.70) e (d2) gli sforzi nel piano valgono

$$S_r(\varrho) = -\frac{\bar{\mu}}{\bar{\beta}^2 - 1} \frac{\bar{\beta}^2 - \bar{\varrho}^2}{\bar{\varrho}^2} = -\frac{\varrho_c^2}{2\beta^2} \frac{\beta^2 - \varrho^2}{\varrho^2} \quad (6.72a)$$

$$S_\theta(\varrho) = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\beta}^2 - 1} \frac{\bar{\beta}^2 + \bar{\varrho}^2}{\bar{\varrho}^2} = \frac{\varrho_c^2}{2\beta^2} \frac{\beta^2 + \varrho^2}{\varrho^2} \quad (6.72b)$$

All'aumentare della pressione interna, la frontiera elasto-plastica avanza progressivamente in accordo con la (6.71). Essa raggiunge il raggio esterno in corrispondenza del valore

$$\mu_L = \ln \beta \quad (6.73)$$

Il cilindro è adesso completamente plastico e, come non sarebbe difficile verificare, per $\mu > \mu_L$ non è più possibile soddisfare contemporaneamente l'equilibrio e la condizione di plasticità. Il problema non ammette quindi soluzione e la (6.73) definisce la *pressione di collasso* per il cilindro.

Per ogni posizione della frontiera elasto-plastica nell'intervallo $1 \leq \varrho_c \leq \beta$, il valore della pressione interna è calcolabile mediante la (6.71) e quello degli sforzi nel piano, rispettivamente nelle zone plastica e elastica, mediante le (6.69), (6.72). Per il caso $\beta = 2$ (che configura un cilindro già notevolmente spesso) i risultati sono riportati in Tabella 6.2 e i relativi andamenti illustrati in Figura 6.6. In Figura 6.7 sono anche riportati gli sforzi nel piano e alcuni valori caratteristici per il caso $\beta = 4$ (in verità piuttosto accademico, essendo difficile configurare l'interesse pratico di cilindri di tale spessore). I grafici visualizzano alcune caratteristiche degli sforzi nel piano che è opportuno sottolineare.

a) la componente radiale S_r risulta sempre negativa e, in valore assoluto, è funzione comunque decrescente di ϱ . Essa risulta compresa negli intervalli

$$-\bar{\mu} = -\ln \varrho_c - \frac{\beta^2 - \varrho_c^2}{2\beta^2} \leq S_r(\varrho) \leq -\bar{\mu} = -\frac{\beta^2 - \varrho_c^2}{2\beta^2} \quad (1 \leq \varrho \leq \varrho_c) \quad (e1)$$

$$-\bar{\mu} \leq S_r(\varrho) \leq 0 \quad (\varrho_c \leq \varrho \leq \beta) \quad (e2)$$

b) la componente circonferenziale S_θ assume il suo valore massimo in corrispondenza della frontiera elasto-plastica, dove risulta

Tabella 6.2 $\beta = 2$

ϱ_c	1.	1.25	1.5	1.75	2.
μ	.375	.528	.624	.677	.693
$S_r; \varrho = \begin{cases} 1. \\ 1.25 \\ 1.5 \\ 1.75 \\ 2. \end{cases}$	-.375	-.528	-.624	-.677	-.693
	-.195	-.305	-.401	-.454	-.470
	-.097	-.152	-.219	-.272	-.288
	-.038	-.060	-.086	-.117	-.133
	.0	.0	.0	.0	.0
$S_\theta; \varrho = \begin{cases} 1. \\ 1.25 \\ 1.5 \\ 1.75 \\ 2. \end{cases}$.625	.472	.376	.323	.307
	.445	.695	.599	.546	.530
	.347	.543	.781	.728	.712
	.288	.450	.649	.883	.867
	.250	.391	.563	.766	1.0

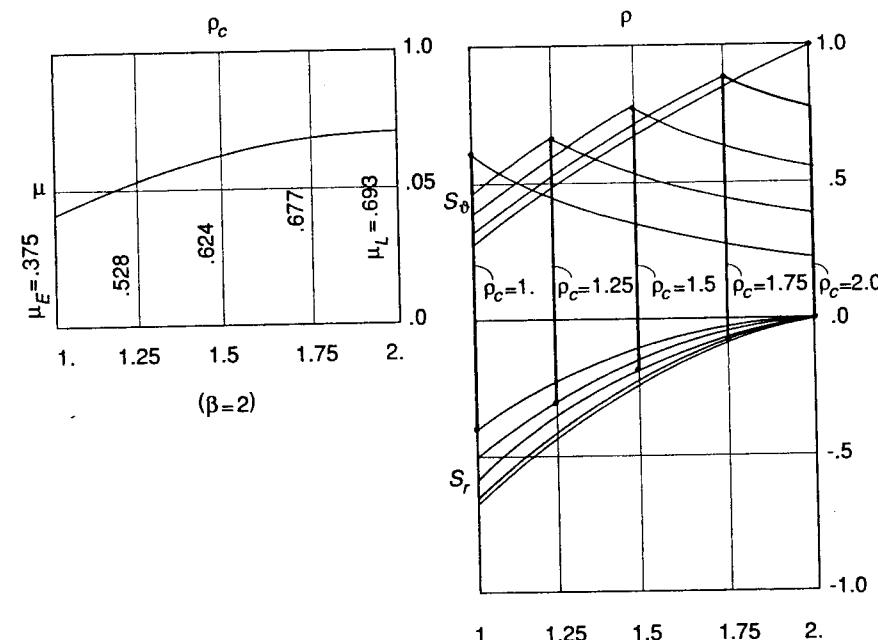


Figura 6.6

$$(S_\theta)_{\max} = S_\theta(\rho_c) = \frac{\beta^2 + \rho_c^2}{2\beta^2} \quad (f)$$

I minimi nelle zone plastica e elastica sono raggiunti nelle fibre estreme, dove si ha

$$S_\theta(1) = 1 - \mu = 1 - \ln \rho_c - \frac{\beta^2 - \rho_c^2}{2\beta^2} \quad S_\theta(\beta) = \frac{\rho_c^2}{\beta^2} \quad (g1,2)$$

La (g1) mostra che S_θ è negativo in parte della zona plastica se $\mu > 1$. Peraltro, essendo la pressione interna limitata superiormente dal valore (6.73), ciò è possibile solo se è $\beta > e = 2.718$, cioè per cilindri di spessore molto elevato. Il verificarsi di tale circostanza per $\beta = 4$ è illustrato in Figura 6.7.

La soluzione è stata ottenuta sulla base di ipotesi che vanno adesso verificate. Per l'ipotesi 1, l'intervallo $1 \leq \rho \leq \rho_c$ è sempre stato considerato plastico, escludendo così ritorni in campo elastico di punti precedentemente plasticizzati: l'ipotesi è corretta se le deformazioni plastiche previste dalla soluzione hanno carattere progressivo, se cioè a ogni istante e ovunque nella zona plastica i loro incrementi sono associati attraverso la legge di normalità a $\dot{\lambda} > 0$. Per il modo con cui il calcolo è stato svolto, tale circostanza non è assicurata a priori. Occorre inoltre verificare l'ipotesi 2, in base alla quale, delle

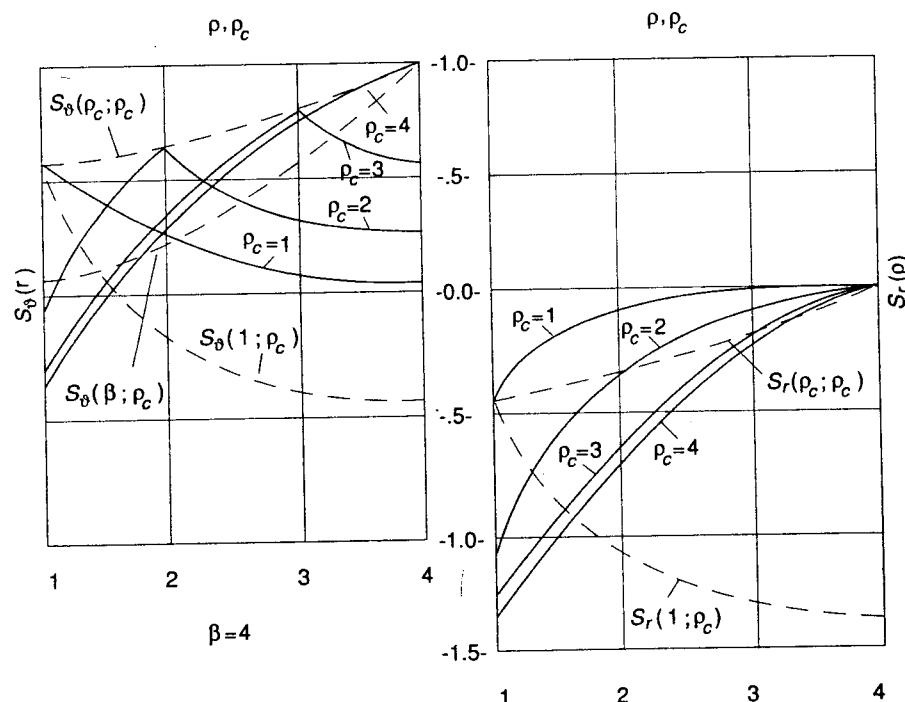


Figura 6.7

sei diseguaglianze che costituiscono la condizione di Tresca (3.55), si è ritenuta sempre significativa la sola (6.67). Tali verifiche, che verranno ora sviluppate in dettaglio, consentono di affermare che sotto condizioni molto poco restrittive, la soluzione ottenuta in termini finiti sulla base delle ipotesi introdotte a monte rappresenta effettivamente l'integrazione della sequenza di soluzioni incrementalì relative alla storia di carico radiale, in cui la pressione interna cresce monotonicamente da zero.

Allo scopo di verificare l'ipotesi 1, si ponga

$$\pi = \frac{E}{\sigma_0} \rho \quad \dot{\lambda} = \frac{E}{(1+\nu)\sigma_0} \dot{\lambda} \quad (h1, 2)$$

Dalla condizione di plasticità (6.67) si ottiene

$$\partial\varphi/\partial S_r = -1 \quad \partial\varphi/\partial S_\theta = 1 \quad \partial\varphi/\partial S_z = 0 \quad (i1-3)$$

Per la legge di normalità, gli incrementi di deformazione plastica risulteranno quindi, a ogni istante

$$\dot{\pi}_r = -(1+\nu)\dot{\lambda} \quad \dot{\pi}_\theta = (1+\nu)\dot{\lambda} \quad \dot{\pi}_z = 0 \quad (j1-3)$$

Dal momento che le componenti (i) del gradiente di φ si mantengono costanti, è possibile integrare le (j) ottenendo

$$\pi_r = -(1+\nu)\Lambda \quad \pi_\theta = (1+\nu)\Lambda \quad \pi_z = 0 \quad (k1-3)$$

L'ipotesi 1 è verificata se $\Lambda(\rho)$ risulta crescente ovunque in V_P .

Nello scrivere le (i-k) non sono state considerate le componenti tangenziali di deformazione plastica, ovviamente nulle (come del resto quelle totali) per la simmetria radiale e la natura piana delle deformazioni del problema. Pur essendo $\eta_z = 0$, potrebbe darsi il caso che deformazioni elastiche e plastiche in direzione z si compensino senza essere individualmente nulle. La legge di normalità però esclude che ciò avvenga in questo caso e le sole componenti di deformazione elastica diverse da zero risultano quindi

$$\xi_r = \eta_r - \pi_r = \eta_r + (1+\nu)\Lambda \quad \xi_\theta = \eta_\theta - \pi_\theta = \eta_\theta - (1+\nu)\Lambda \quad (l1-3)$$

dove si è posto, in analogia con la (h1)

$$\xi_i = \frac{E}{\sigma_0} e_i = \frac{E}{\sigma_0} (\epsilon_i - p_i) \quad (m)$$

Le (l) sono legate agli sforzi attraverso le relazioni elastiche (3.34b). Tenendo conto delle (m) e (6.62b), queste si scrivono

$$\eta_r + (1+\nu)\Lambda = (1+\nu)[(1-\nu)S_r - \nu S_\theta] \quad \eta_\theta - (1+\nu)\Lambda = (1+\nu)[-vS_r + (1-v)S_\theta]$$

o anche, ricordando che per la (6.67) è $S_\theta = 1 + S_r$,

$$\frac{\eta_r}{1+\nu} = -v + (1-2\nu)S_r - \Lambda \quad \frac{\eta_\theta}{1+\nu} = 1 - v + (1-2\nu)S_r + \Lambda$$

A meno dell'inessenziale fattore $1+\nu$, l'equazione di congruenza (6.65) si scrive allora

$$(1-2\nu) \frac{dS_r}{d\varrho} + \frac{d\Lambda}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho} + 2 \frac{\Lambda}{\varrho} = 0 \quad (n)$$

D'altra parte, per la (6.69a) è anche $dS_r/d\varrho = 1/\varrho$ in V_P . La (n) allora diviene

$$2 \frac{(1-\nu) + \Lambda}{\varrho} + \frac{d\Lambda}{d\varrho} = 0$$

il cui integrale risulta

$$\ln[(1-\nu) + \Lambda] = -\ln\varrho^2 + c \quad (o)$$

Le deformazioni plastiche si annullano in corrispondenza della frontiera elasto-plastica. La condizione $\Lambda(\varrho_C) = 0$ permette di determinare la costante c , che vale

$$c = \ln[(1-\nu)\varrho_C]$$

La (o) quindi si scrive

$$\ln[(1-\nu) + \Lambda] = \ln[(1-\nu)(\varrho_C/\varrho)^2]$$

da cui si ottiene

$$\Lambda(\varrho_C; \varrho) = (1-\nu)[(\varrho_C/\varrho)^2 - 1] \quad (1 \leq \varrho \leq \varrho_C) \quad (6.74)$$

Per ogni ϱ in V_P , Λ è pertanto una funzione crescente di ϱ_C e quindi, per la (6.71), di μ . La soluzione trovata non comporta ritorni in campo elastico se la pressione interna cresce monotonicamente e la frontiera elasto-plastica avanza di conseguenza. Con riferimento a tale storia di carico, la natura irreversibile del comportamento non gioca alcun ruolo e una soluzione in termini finiti non introduce approssimazioni.

Questa affermazione è ovviamente subordinata alla verifica dell'ipotesi 2. Occorre quindi ancora verificare che la soluzione trovata soddisfi ovunque nella zona plastica le condizioni

$$|S_r - S_z| < 1 \quad |S_\theta - S_z| < 1 \quad (p1,2)$$

È adesso richiesta la valutazione della componente trasversale di sforzo S_z in V_P . Essendo $\pi_z = 0$, questa risulterà legata alle componenti nel piano dalla stessa relazione valida in campo elastico. Ricordando la (a) si può allora scrivere

$$S_z = \nu(S_r + S_\theta) = \nu(1 + 2S_r) \text{ in } V_P$$

Si ottiene quindi

$$S_z - S_r = \nu - (1-2\nu)S_r \quad S_\theta - S_z = (1-\nu) + (1-2\nu)S_r \quad (q)$$

Pertanto, la (6.73) e le (e) permettono di stabilire le diseguaglianze

$$-\ln\beta \leq -\mu \leq S_r \leq 0$$

Inoltre, il coefficiente di Poisson è compreso nell'intervallo (3.38c). Precisamente

$$0 \leq \nu < .5 \quad (r)$$

Per i primi membri delle (q) valgono quindi le delimitazioni seguenti

$$0 \leq \nu \leq S_z - S_r \leq \nu + (1-2\nu)\ln\beta$$

$$1 - [\nu + (1-2\nu)\ln\beta] \leq S_\theta - S_z \leq 1 - \nu \leq 1$$

È adesso facile rendersi conto che le (p) risulteranno comunque verificate qualora si abbia $\nu + (1-2\nu)\ln\beta < 1$ e quindi

$$\beta < \beta_{\max} = \exp\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) \quad (6.75)$$

L'andamento di β_{\max} in funzione di ν è illustrato in Figura 6.8. Se ne evince che l'ipotesi 2 può risultare violata solo per cilindri di spessore molto elevato e con coefficiente di Poisson molto basso, situazione che raramente è di interesse. In particolare, per $\beta < 2.718$ la soluzione trovata è valida per ogni ν nell'intervallo (r). Per $\nu = 1/3$ (valore tipico di un acciaio) essa vale fino a β superiore a 7, ben al di là dei rapporti in pratica significativi.

Sono ora opportune alcune osservazioni. Si noti innanzitutto che gli sforzi nella zona plastica sono stati calcolati utilizzando solo le condizioni di equilibrio (6.63), (6.64a) e la condizione di plasticità (6.67); dell'equazione di congruenza (6.65) ci si è serviti unicamente per il calcolo delle deformazioni. Ciò riflette un aspetto fondamentale del comportamento idealmente elasto-plastico: se il punto rappresentativo dello stato di sforzo si mantiene sulla superficie di plasticità, la duttilità consente al materiale di fluire plasticamente con deformazioni di entità arbitraria, comunque capaci di ristabilire la congruenza. Per tale comportamento, fintanto che risulta possibile soddisfare sia l'equilibrio che la diseguaglianza $\varphi(\sigma_{ij}) \leq 0$ ovunque nel mezzo, il problema elasto-plastico ammette una soluzione, ovviamente non unica in quanto funzione della storia precedente.

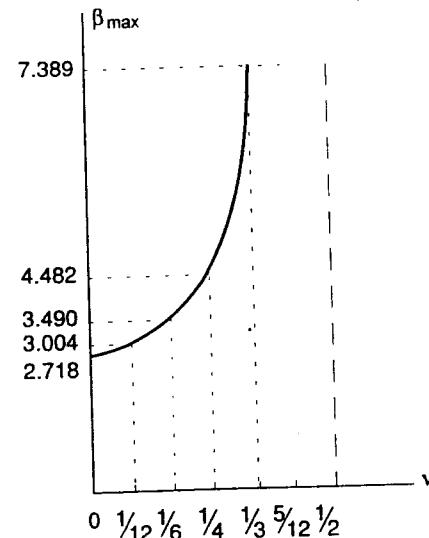


Figura 6.8

Tabella 6.3

β	1.05	1.1	1.2	1.3	1.5	2.0
f	1.050	1.098	1.193	1.285	1.460	1.848

Al diffondersi della plasticizzazione, gli sforzi si ridistribuiscono nel rispetto dell'equilibrio, conferendo al cilindro risorse ulteriori rispetto al limite elastico. Tale *risorsa plastica* è misurata dal rapporto, indicato con f , tra i valori forniti dalle (6.73) e (6.68). È allora

$$f = \frac{\mu_L}{\mu_E} = \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1} \ln \beta \quad (6.76)$$

f risulta tanto più elevato quanto maggiore è lo spessore del tubo. La risorsa plastica è invece molto ridotta in cilindri a parete sottile (addirittura nulla nel caso limite $\beta \rightarrow 1$, per cui è pure $f \rightarrow 1$), riflettendo la limitata capacità di ridistribuzione di sforzo di una struttura pressoché staticamente determinata. Come appare dai valori riportati in Tabella 6.3, tale risorsa è peraltro apprezzabile già per cilindri solo moderatamente spessi.

Va infine osservato che la dipendenza dalla storia della risposta elasto-plastica conferisce ai risultati un valore spesso solamente indicativo, non essendo sempre configurabile a priori l'effettivo processo di carico. Non per questo soluzioni evolutive, quale quella qui presentata, risultano prive di interesse pratico; occorre però arricchirle di informazioni aggiuntive su quegli aspetti della soluzione che si configurano come indipendenti dalla storia. Si vedrà nell'ultimo volume del testo che una di queste informazioni essenziali è rappresentata dal carico di collasso di strutture costituite da un materiale perfettamente elasto-plastico.

6.2.2.2 La torsione elasto-plastica

6.2.2.2.1 Formulazione

Viene ora affrontato il problema del cilindro in torsione, illustrato in Figura 6.9 e studiato in campo elastico nel Paragrafo 5.2.2. Si cerca ancora una soluzione in termini finiti, basata su ipotesi da verificarsi a posteriori.

La soluzione elastica del problema suggerisce le ipotesi di partenza. Si assume ancora che le sole componenti di sforzo non nulle siano le tensioni tangenziali nel piano della sezione, indipendenti da z . Si ipotizza cioè sempre

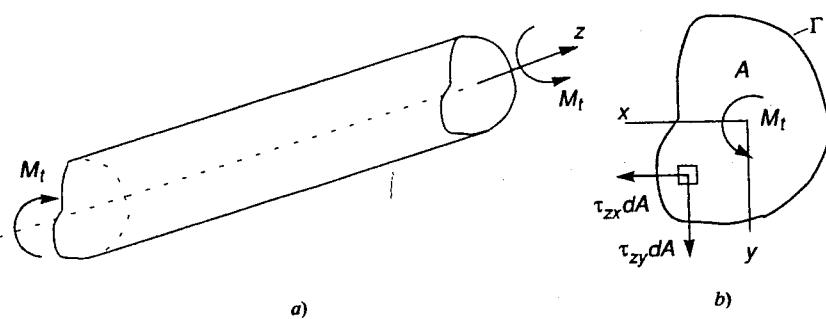


Figura 6.9

$$\tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y) \quad \tau_{zy} = \tau_{zy}(x, y) \quad (6.77a)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \sigma_z = 0 \quad (6.77b)$$

Si mantengono allora inalterate le relazioni di equilibrio (5.53a, c, d), qui riscritte per completezza

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \text{ in } A \quad \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0 \text{ su } \Gamma \quad (6.78a, b)$$

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)dA \quad (6.79)$$

In termini deformativi si introducono, sia per quanto riguarda i valori totali che in contributi plastici, ipotesi analoghe alle (6.77). Precisamente

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zx}(x, y) \quad \gamma_{zy} = \gamma_{zy}(x, y) \quad \epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = \epsilon_z = 0 \quad (s1-3)$$

$$p_{zx} = p_{zx}(x, y) \quad p_{zy} = p_{zy}(x, y) \quad p_x = p_y = p_{xy} = p_z = 0 \quad (t1-3)$$

Si noti che le p_{zi} sono intese come scorrimenti angolari, pari quindi al doppio delle corrispondenti componenti tensoriali. Il legame elastico si riconduce pertanto alle due equazioni

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} + p_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} + p_{zy} \quad (6.80a, b)$$

È facile verificare che le deformazioni (s) sono derivabili dalle seguenti componenti di spostamento

$$s_x = -\beta zy \quad s_y = \beta zx \quad s_z = s_z(x, y) \quad (6.81a-c)$$

β rappresenta ancora la rotazione relativa tra due sezioni a distanza unitaria (*torsione*); infatti l'ipotesi (s) prevede sempre che le sezioni non si deformino nel loro piano. Rispetto alle (5.54), la sola differenza è rappresentata dall'espressione (6.81c) di s_z ; al di fuori del campo elastico non è più possibile ritenere che questa componente si mantenga comunque proporzionale a una funzione di ingombramento fissa per una determinata sezione.

Con riferimento alle (6.81), il legame deformazioni-spostamenti permette di scrivere

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial s_z}{\partial x} - \beta y \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial s_z}{\partial y} + \beta x$$

da cui conseguono le condizioni

$$\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\beta$$

Si introduca ora il legame elastico (6.80). Si perviene all'equazione di congruenza

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2G\beta - g(x, y) \quad g(x, y) = G \left(\frac{\partial p_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial p_{zx}}{\partial y} \right) \quad (6.82a, b)$$

che si differenzia dalla (5.59) per la presenza della funzione $g(x, y)$ definita dalla (6.82b). Se si suppongono note le deformazioni plastiche, tale è anche $g(x, y)$. Il problema governato dalle (6.78), (6.82) e (6.79) si presenta simile a quello elastico (5.53), rispetto al quale aggiunge, nell'equazione di congruenza, una funzione assegnata, il che peraltro non ne altera le caratteristiche essenziali. In realtà, le deformazioni plastiche non sono conosciute a priori; la soluzione deve quindi essere ricercata con procedimenti iterativi.

6.2.2.2 La sezione circolare

Il caso più semplice è ovviamente quello relativo a una sezione circolare. Indipendentemente dal comportamento del materiale, la simmetria radiale del problema comporta che le sezioni rette si mantengano piane. Pertanto, in coordinate cilindriche $(0; r, \vartheta, z)$ (Figura 6.10) si avrà, in luogo delle (6.81)

$$s_\vartheta = \beta r z \quad s_r = s_z = 0 \quad (6.83a, b)$$

Il legame deformazioni spostamenti (2.137a) mostra che alle (6.83) corrisponde un'unica componente di deformazione non nulla. Precisamente

$$\gamma_{\vartheta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial s_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial s_\vartheta}{\partial z} = \beta r \quad (6.84)$$

Per semplicità di notazione, vengono nel seguito eliminati gli indici che identificano le componenti di sforzo e deformazione, tutte nulle con l'eccezione delle $()_{\vartheta z}$. Si sottintende cioè

$$\gamma = \gamma_{\vartheta z} \quad \tau = \tau_{\vartheta z} \quad p = p_{\vartheta z} \quad e = e_{\vartheta z} \quad (6.85)$$

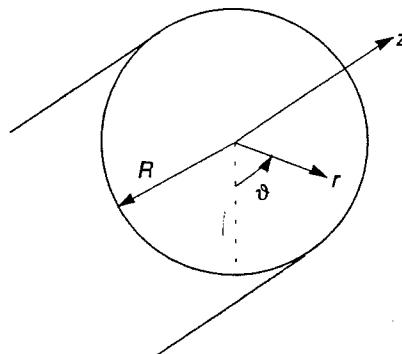


Figura 6.10

L'informazione essenziale in termini di legame costitutivo è adesso costituita dalla curva $\tau - \gamma$ di Figura 6.11a. Essa è esprimibile come somma dei due addendi in Figura 6.11b, c. La parte elastica del legame si ottiene particolarizzando le (6.80) al caso in questione e risulta

$$\tau = G(\beta r - p) \quad (6.86a)$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale. Quando τ supera il valore di snervamento τ_0 , si stabilisce una relazione tra lo sforzo e la componente plastica di deformazione, illustrata in Figura 6.11c e simbolicamente espressa come segue

$$\tau = f(p) \quad \text{se} \quad \tau \geq \tau_0 \quad (6.86b)$$

Se il momento torcente viene applicato sul cilindro vergine e fatto crescere da zero, varrà in un primo tempo la soluzione elastica che comporta, per la (5.81)

$$M_t = \frac{\pi}{2} GR^4 \beta \quad (6.87a)$$

Le tensioni tangenziali sono funzioni lineari della coordinata radiale e risultano massime sul contorno dove, in accordo con la (5.83b), valgono

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{R^3} \quad (6.87b)$$

La fase elastica si esaurisce per $\tau_{\max} = \tau_0$. Dalle (6.87) si calcolano immediatamente i valori corrispondenti per il momento torcente e la torsione. Si ottiene

$$M_{tE} = \frac{\pi}{2} R^3 \tau_0 \quad \beta_E = \frac{1}{R} \frac{\tau_0}{G} \quad (6.88a, b)$$

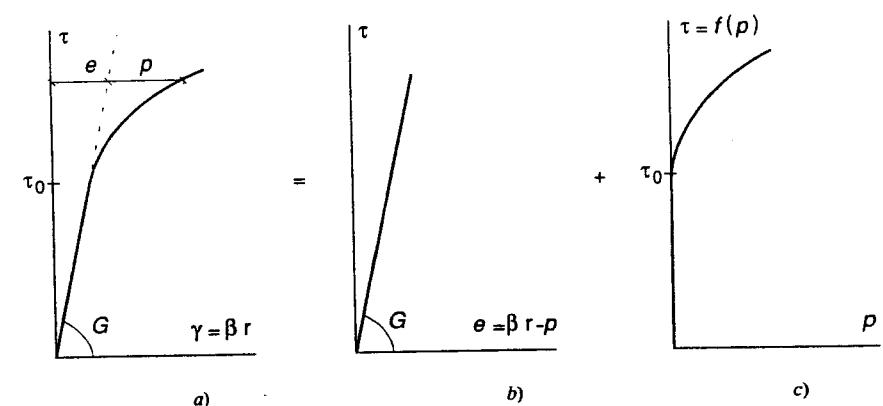


Figura 6.11

Al crescere di M_t (o di β) si producono deformazioni plastiche che si diffondono a partire dal bordo esterno. La frontiera elasto-plastica r_c è identificata, per ogni $\beta \geq \beta_E$, dalla (6.86a) scritta per $\tau = \tau_0$ e $p = 0$, condizione che caratterizza la transizione tra le zone elastica V_E ($0 \leq r \leq r_c$) e plastica V_P ($r_c \leq r \leq R$, Figura 6.12a). È allora

$$r_c = \frac{\tau_0}{G\beta} \quad (\beta \geq \frac{1}{R} \frac{\tau_0}{G}) \quad (6.89)$$

In zona plastica, dalle (6.86) si ottiene

$$f(p) = G(\beta r - p) \quad (6.90)$$

equazione che consente la valutazione della deformazione plastica $p(r)$ per ogni $\beta \geq \beta_E$. Il risultato ovviamente dipende dalla natura della funzione $f(p)$ che caratterizza il comportamento del materiale; a calcoli svolti, le tensioni tangenziali sono comunque note per ogni β e si esprimono

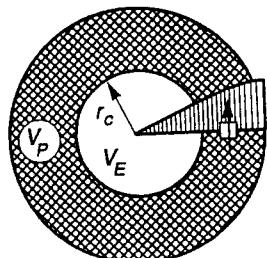
$$\tau(r) = G\beta r = \tau_0 \frac{r}{r_c} \quad 0 \leq r \leq r_c \quad (6.91a)$$

$$\tau(r) = G(\beta r - p(r; \beta)) \quad r_c \leq r \leq R \quad (6.91b)$$

La prima di queste relazioni non è altro che la (6.86a) scritta per $p = 0$ e tenendo conto della (6.89). Si osservi che, come la (6.84) indica, γ cresce linearmente col raggio. L'andamento delle tensioni tangenziali (Figura 6.12b) riproduce quindi, a meno della scala, la curva di Figura 6.11a.

Il momento torcente corrispondente a ogni β può adesso essere calcolato mediante la condizione di equivalenza statica

$$M_t = \int_A \tau r dA = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \quad (6.92)$$



a)

Figura 6.12

Lo svolgimento del calcolo viene esemplificato con riferimento al comportamento linearmente incrudente di Figura 6.13, che consente un'agevole soluzione in forma chiusa. La (6.86b) ora si esplicita come segue

$$\tau = f(p) = \tau_0 + hp \quad (u)$$

Si introducono le quantità adimensionali

$$\varrho = \frac{r}{R} \quad T = \frac{\tau}{\tau_0} \quad P = p \frac{G}{\tau_0} \quad H = \frac{h}{G} \quad B = \beta R \frac{G}{\tau_0} \quad M_t = \frac{M_t}{\tau_0 R^3} \quad (v1-6)$$

L'espressione (6.89) della frontiera elasto-plastica allora diviene

$$\varrho_c = \frac{1}{B} \quad (B \geq 1)$$

L'andamento della deformazione plastica si valuta mediante la (6.90), in cui per $f(p)$ si introduce la (u). Tenendo conto delle (v) si ottiene

$$P(\varrho) = \frac{B\varrho - 1}{1 + H} \quad \left(\varrho \geq \varrho_c = \frac{1}{B}; B \geq 1 \right) \quad (w)$$

Le (6.91) quindi divengono

$$T(\varrho) = \begin{cases} B\varrho & \varrho \leq 1/B \\ B\varrho - P = \frac{1 + HB\varrho}{1 + H} & \varrho \geq 1/B \end{cases} \quad (x)$$

La relazione tra il momento torcente applicato e la torsione si ottiene introducendo le (x) nella (6.92). Il calcolo fornisce, in forma adimensionale

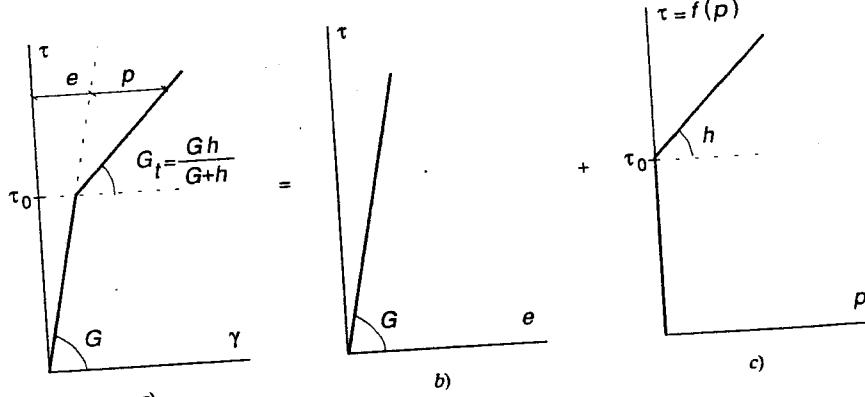


Figura 6.13

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t &= 2\pi \int_0^1 T\varrho^2 d\varrho = 2\pi \left\{ \int_0^{1/B} B\varrho^3 d\varrho + \int_{1/B}^1 \frac{1+HB\varrho}{1+H} \varrho^2 d\varrho \right\} = \\ &= \frac{\pi}{6(1+H)} \left\{ 4 + 3HB - \frac{1}{B^3} \right\} \end{aligned} \quad (6.93)$$

La fase elasto-plastica inizia per $B = 1$. In corrispondenza di tale valore, dalla (93) si ottiene infatti il momento torcente (6.88a) al limite elastico, adimensionalizzato in accordo con la (v6). Precisamente

$$\mathcal{M}_{tE} = \frac{\pi}{2} \quad (6.94)$$

Il momento torcente è diagrammato in funzione della torsione in Figura 6.14 per alcuni coefficienti di incrudimento H . Nel caso idealmente elasto-plastico ($H = 0$) esso risulta delimitato superiormente dal valore

$$\mathcal{M}_{tL} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\pi}{6} \left(4 - \frac{1}{B^3} \right) = \frac{2}{3} \pi \quad (6.95)$$

che rappresenta il momento torcente limite, o di collasso, per la sezione. A rigore, esso non viene mai raggiunto per valori finiti di B ; è peraltro avvicinato molto rapidamente, come appare sia dal diagramma di Figura 6.14 che dai valori numerici riportati in Tabella 6.4. La risorsa plastica della sezione, misurata dal rapporto tra i momenti (6.95) e (6.94), risulta

$$f = \frac{\mathcal{M}_{tL}}{\mathcal{M}_{tE}} = \frac{4}{3} = 1.333 \quad (6.96)$$

Il comportamento bilineare di Figura 6.13 non prevede alcun limite superiore al livello di sforzo sopportabile dal materiale se $H > 0$. Ne consegue che nel caso di incrudimento neppure il momento torcente (6.93) risulta limitato.

L'andamento delle tensioni tangenziali lungo il raggio è illustrato in Figura 6.15 per $B = 4(\varrho_c = 1/4)$ e alcuni valori di H (il tratteggio si riferisce a $H = .2$).

La soluzione così determinata può dirsi corretta solo a valle di una verifica delle ipotesi di partenza. Sarebbe abbastanza facile rendersi conto che per momenti torcenti monotonicamente crescenti le deformazioni plastiche presentano carattere progressivo, il che legittima una soluzione in termini finiti. Si fa inoltre osservare che anche le (t) (che nel caso di sezione circolare comportano che la terza delle (6.74) sia l'unica componente di deformazione plastica diversa da zero) sono un assunto, che potrebbe anche trovarsi in contraddizione con la legge di normalità. Tale circostanza, peraltro, non si verifica per le condizioni di plasticità e le leggi di incrudimento di più comune impiego.

Tabella 6.4

B	1	2	3	4	5	10
$\mathcal{M}_t / \mathcal{M}_{tL}$.750	.969	.991	.996	.998	.99975

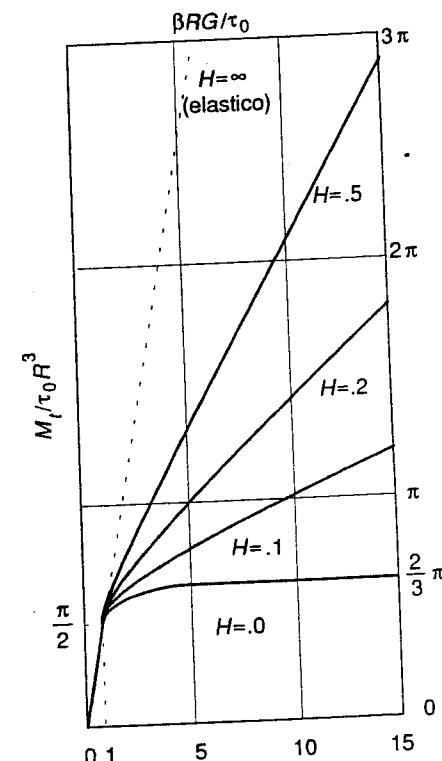


Figura 6.14

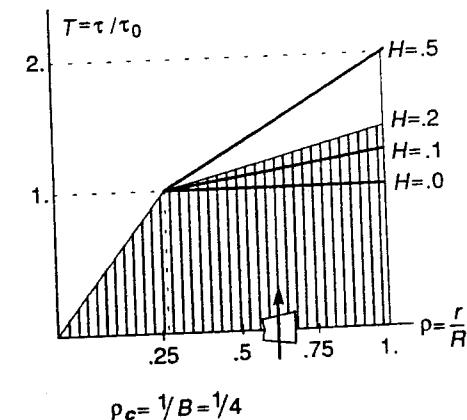


Figura 6.15

6.2.2.3 Momento torcente limite per plasticità ideale

Si torna ora a considerare il problema relativo a una sezione di forma generica, governato dalle (6.78), (6.79) e (6.82). È ancora possibile affrontarlo con un approccio in termini di funzioni di sforzo, esprimendo le τ_{zi} attraverso le (5.66). Precisamente

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.97a, b)$$

La (6.78a) è allora identicamente verificata. Lo stesso ragionamento svolto nel caso elastico riconduce le (6.82), (6.78b) al problema

$$\nabla_2 \varphi = -2G\beta + g(x, y) \text{ in } A \quad \varphi = 0 \text{ su } \Gamma \quad (6.98a, b)$$

con $g(x, y)$ dato dalla (6.82b). Dalla (6.79) si ottiene ancora la (5.72), qui riscritta per completezza

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA \quad (6.99)$$

In assenza di deformazioni plastiche è $g(x, y) = 0$ e le (6.98) si riconducono alla formulazione (5.70) del problema di De Saint Venant della torsione. Se le deformazioni plastiche fossero note, tale sarebbe anche la funzione $g(x, y)$ e le (6.98) rappresenterebbero ancora un problema di Dirichlet che potrebbe essere risolto, in generale in via approssimata. Tale osservazione è alla base di procedimenti iterativi per la soluzione numerica del problema della torsione elasto-plastica [9].

Il problema può essere formulato in modo particolarmente espressivo nel caso di materiale idealmente elasto-plastico. Si consideri (Figura 6.16) un generico stadio del processo evolutivo in cui la sezione sia parzialmente plasticizzata. Nella zona elastica V_E sarà $g(x, y) = 0$; nella zona plastica la condizione di plasticità richiede invece che sia $\tau = \tau_0 = \text{cost}$, dove τ indica il modulo del vettore delle tensioni tangenziali sulla sezione. Per le (6.97), tale condizione si esprime

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{(\partial \varphi / \partial y)^2 + (\partial \varphi / \partial x)^2} = |\text{grad } \varphi| = \tau_0 \text{ in } V \quad (6.100a)$$

dove il vettore

$$\text{grad } \varphi = \begin{cases} \partial \varphi / \partial x \\ \partial \varphi / \partial y \end{cases} \quad (6.100b)$$

è il gradiente della funzione di sforzo; il suo modulo definisce la pendenza massima della superficie $\varphi(x, y)$. La (6.100a) mostra che nella zona plastica questa pendenza è costante e pari a τ_0 .

La (6.100) può essere utilizzata in luogo dell'equazione di congruenza in V_P . Detta allora Γ_{EP} la frontiera elasto-plastica (Figura 6.16), il problema si riconduce alla forma seguente

$$\nabla_2 \varphi = -2G\beta \text{ in } V_E \quad |\text{grad } \varphi| = \tau_0 \text{ in } V_P \quad (6.101a, b)$$

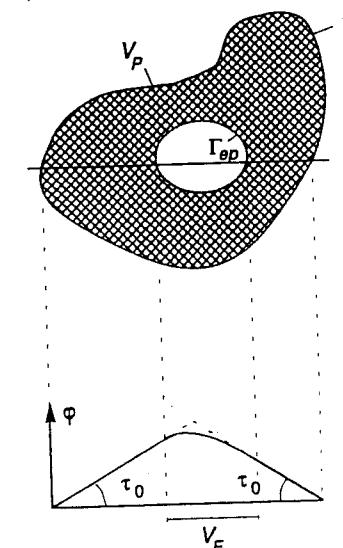


Figura 6.16

$$\varphi = 0 \text{ su } \Gamma \quad (6.101c)$$

$$\varphi, \text{grad } \varphi \text{ continui attraverso } \Gamma_{EP} \quad (6.101d)$$

La principale difficoltà sta nella determinazione della frontiera elasto-plastica, curva di separazione tra le regioni in cui si applicano, rispettivamente, la (6.101a) e la (6.101b). Al diffondersi delle plasticizzazioni, tuttavia, la zona elastica si restringe progressivamente, fino a scomparire nella situazione limite in cui si esauriscono le risorse della sezione. In tale situazione si può porre $V_P = A$ e le (6.101) divengono

$$|\text{grad } \varphi| = \tau_0 \text{ in } A \quad \varphi = 0 \text{ su } \Gamma \quad (6.102a, b)$$

L'evoluzione della funzione di sforzo può essere visualizzata come segue. In campo elastico, la forma di $\varphi(x, y)$ è suggerita dall'analogia della membrana e la sua ampiezza cresce proporzionalmente al momento torcente applicato. Alla prima plasticizzazione, la pendenza massima diviene pari a τ_0 e φ è quindi tangente in un punto alla superficie definita dalle (6.102). Questa costituisce una sorta di limite di espansione per φ , che si schiaccia contro di essa col procedere della plasticizzazione, fino a coincidere nella situazione limite.

Le (6.102) esprimono l'analogia detta del *cumulo di sabbia*. Nella situazione limite, la funzione di sforzo è infatti la superficie che si otterrebbe versando della sabbia secca su di una sagoma di forma uguale a quella della sezione. Per la (6.99) il corrispondente *momento torcente limite* è numericamente uguale al doppio del volume del cumulo; essendo la pendenza massima ovunque costante e pari a τ_0 , il suo valore può essere determinato senza difficoltà.

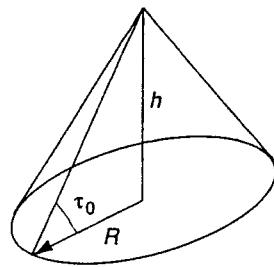


Figura 6.17

Nel caso di una sezione circolare piena di raggio R il cumulo di sabbia risulta un cono (Figura 6.17), il cui volume vale

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Pertanto, dovendo la pendenza risultare pari a τ_0 , si ha anche

$$\tau_0 = \frac{h}{R}$$

Si ottiene quindi dalla (6.99)

$$M_{tL} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_0$$

in accordo con la (6.95).

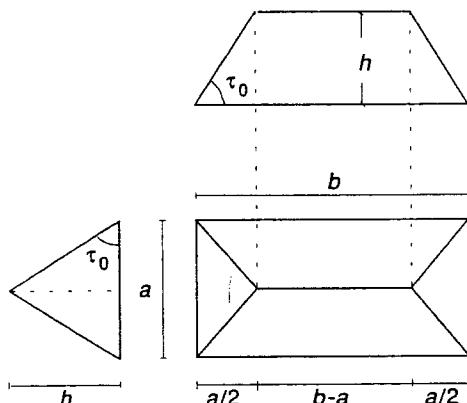


Figura 6.18

In modo analogo si può procedere per una sezione rettangolare di lati b e a ($b > a$). Il cumulo di sabbia è illustrato in Figura 6.18. Con semplici considerazioni geometriche si ottiene allora

$$V = \frac{1}{6} a(3b - a)h \quad \tau_0 = 2 \frac{h}{a}$$

da cui si ricava

$$M_{tL} = \frac{1}{6} a^2(3b - a)\tau_0$$

L'analogia del cumulo di sabbia si può utilizzare, con alcune modifiche, anche per sezioni cave. I momenti torcenti limite così calcolati sono reperibili su vari testi [2,9].

6.2.3 TENSIONI RESIDUE ALLO SCARICO

Quando le azioni esterne vengono rimosse, la natura irreversibile del comportamento plastico impedisce alla struttura di recuperare il suo stato naturale, supposto indeformato e privo di sforzi. Le deformazioni plastiche residue, non essendo in generale di per sé congruenti, richiedono la presenza di deformazioni elastiche, con conseguenti sforzi localmente non nulli pur in assenza di azioni esterne, che costituiscono quindi uno stato di coazione.

Le deformazioni plastiche, qualora note, possono essere considerate alla stregua di un qualunque effetto deformativo di natura anelastica (ad esempio, termico) imposto sul mezzo elastico e le tensioni residue potrebbero essere così calcolate. In realtà, un'analisi elasto-plastica è spesso confinata alla sola valutazione degli sforzi, con informazioni molto limitate sull'andamento delle deformazioni plastiche (oltre tutto fornite da molti procedimenti numerici in modo poco accurato). È però possibile ricostruire il processo di scarico sovrapponendo alla situazione finale precedentemente raggiunta le stesse azioni esterne cambiate di segno. Si può supporre che il secondo processo avvenga elasticamente (ipotesi comunque verificabile a posteriori). Lo stato di sforzo residuo è allora dato dalla differenza tra quello raggiunto al termine dell'evoluzione elasto-plastica e la risposta elastica sotto le stesse azioni esterne.

Si consideri il problema della torsione circolare. Si assuma il comportamento bilineare di Figura 6.13 con $H = .2$ e si supponga di incrementare il momento torcente fino a che la torsione non raggiunga il valore $B^* = 4$, cui corrisponde, attraverso la (6.93)

$$\mathcal{M}_t^* = \mathcal{M}_t(B = 4) = .887\pi \quad (y)$$

L'andamento delle relative tensioni tangenziali è quello tratteggiato in Figura 6.15 e riportato nella spezzata di Figura 6.19b. Nel diagramma momento-torsione di Figura 6.19a il punto rappresentativo della situazione al termine della fase di carico è indicato con A .

Si passa ora alla fase di scarico, effettuata sovrapponendo a tale situazione un momento torcente $-\Delta \mathcal{M}_t$, di segno opposto a \mathcal{M}_t^* . In ogni punto le deformazioni decresceranno elasticamente e le tensioni tangenziali varieranno linearmente, come

previsto dalla (5.83a). Tenendo conto delle adimensionalizzazioni (v), questa si scrive

$$\Delta T(\varrho) = -\Delta \mathcal{M}_t \frac{2}{\pi} \varrho \quad (z)$$

La torsione diminuirà elasticamente, in accordo con la (6.87a). Si ottiene

$$\Delta B = -\frac{2}{\pi} \Delta \mathcal{M}_t \quad (aa)$$

Nel diagramma di Figura 6.19a, il processo di scarico segue quindi la retta ACD . Nel punto C , ad esempio, è $\mathcal{M}_t = \pi/2$ e quindi

$$\Delta \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_t^* - \frac{\pi}{2} = .387\pi$$

Dalla (z) si ottiene allora

$$\Delta T(\varrho) = -.773\varrho$$

Tale andamento è riportato (a meno del segno) nella retta in Figura 6.19b. La differenza tra la spezzata relativa alla situazione A e questa retta (tratteggiata in figura) fornisce le tensioni relative a questa situazione di scarico parziale.

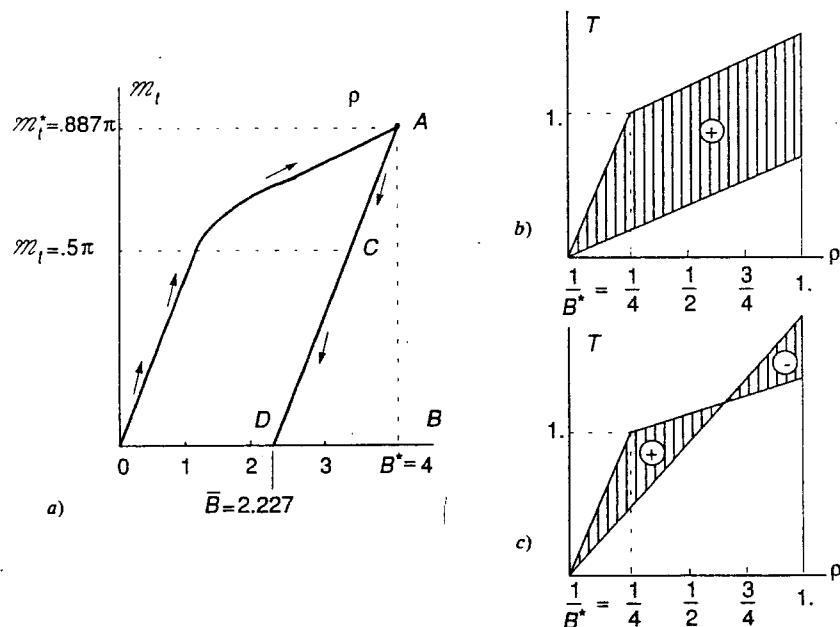


Figura 6.19

A scarico completo (punto D) è $\Delta \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_t^*$. Dalle (z), (aa) si ottiene allora

$$\Delta T(\varrho) = -\mathcal{M}_t^* \frac{2}{\pi} \varrho = -1.773\varrho \quad \Delta B = -\mathcal{M}_t^* \frac{2}{\pi} = -1.773 \quad (ab1, 2)$$

Sempre a meno del segno, l'andamento delle (ab1) è riportato nella retta in Figura 6.19c. La differenza tra la spezzata elasto-plastica e questa retta definisce le tensioni residue, ancora evidenziate con un tratteggio.

In quanto differenza tra due distribuzioni che equivalgono allo stesso momento torcente, le tensioni residue rappresentano uno stato di coazione corrispondente a $\mathcal{M}_t = 0$. Come appare dalla Figura 6.19a, allo scarico è però presente una torsione residua, il cui valore si calcola sommando algebricamente la (ab2) a $B^* = 4$ e risulta $B = 2.227$.

In generale, le tensioni residue allo scarico sono espresse dalla somma algebrica delle (x) scritte per $B = B^*$ e della (z) scritta per $\Delta \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_t^*$. Si ottiene, a calcoli svolti

$$\bar{T}(\varrho) = \begin{cases} \frac{3B^*\varrho - 4\varrho + \varrho/B^{*3}}{3(1+H)} & \varrho \leq 1/B^* \\ \frac{3 - 4\varrho + \varrho/B^{*3}}{3(1+H)} & \varrho \geq 1/B^* \end{cases} \quad (6.103)$$

L'andamento delle (6.103) è illustrato in Figura 6.20 per i casi $H = 0$ e $H = .2$ e alcuni valori di B^* .

In modo del tutto analogo si possono valutare le tensioni residue per il cilindro cavo soggetto a pressione interna, precedentemente studiato in fase di carico. Al termine di tale fase, la frontiera elasto-plastica si collochi in una posizione ϱ_C^* , cui corrisponde attraverso la (6.71) la pressione interna

$$\mu^* = \ln \varrho_C^* + \frac{\beta^2 - \varrho_C^{*2}}{2\beta^2}$$

Lo stato di sforzo nel piano è allora fornito dalle (6.69), (6.72). Gli sforzi residui si ottengono sottraendo a questi valori la risposta elastica (6.66a, b), scritta per $\mu = \mu^*$.

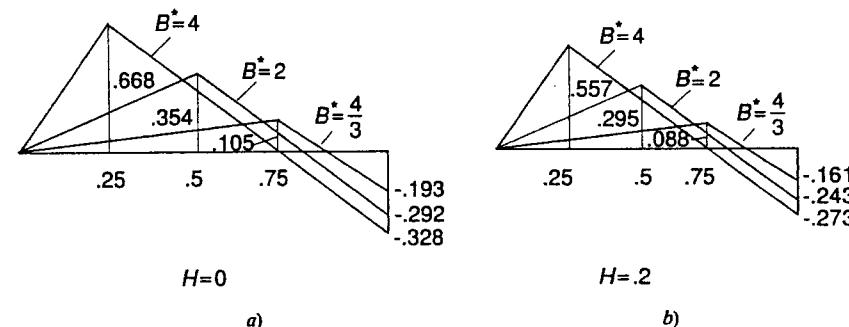


Figura 6.20

Si perviene alle relazioni

$$\bar{S}_r(\varrho) = \begin{cases} \ln \varrho + \frac{4}{3} \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2} \mu^* & 1 \leq \varrho \leq \varrho_c^* \\ \frac{4-\varrho^2}{\varrho^2} \left(\frac{\mu^*}{3} - \frac{\varrho_c^{*2}}{8} \right) & \varrho_c^* \leq \varrho \leq \beta \end{cases} \quad (6.104a)$$

$$\bar{S}_s(\varrho) = \begin{cases} 1 + \ln \varrho - \frac{4}{3} \frac{1+\varrho^2}{\varrho^2} \mu^* & 1 \leq \varrho \leq \varrho_c^* \\ -\frac{4+\varrho^2}{\varrho^2} \left(\frac{\mu^*}{3} - \frac{\varrho_c^{*2}}{8} \right) & \varrho_c^* \leq \varrho \leq \beta \end{cases} \quad (6.104b)$$

In direzione z è anche presente la tensione normale residua

$$\bar{S}_z(\varrho) = \nu (\bar{S}_r(\varrho) + \bar{S}_s(\varrho)) \quad (6.104c)$$

Come si è visto, tale legame vale sia nella zona elastica che in quella plastica, purché sia verificata la (6.75).

Gli andamenti delle tensioni residue (6.104) sono illustrati in Figura 6.21 per il caso $\beta = 2$ e diverse posizioni della frontiera elasto-plastica al termine della fase di carico.

In entrambi gli esempi, il calcolo è stato svolto presupponendo uno scarico completamente elastico. Perché questa ipotesi risulti verificata basta che gli sforzi residui soddisfino ovunque la condizione $\varphi^*(\bar{\sigma}_{ij}) \leq 0$, appartengano cioè al dominio elastico previsto per il materiale al termine della fase di carico. La convessità del dominio e la linearità della risposta elastica assicurano infatti che tale condizione risulta sempre soddisfatta nel processo di scarico se lo è all'inizio e alla fine del processo stesso. Per materiali idealmente elasto-plastici il dominio elastico non si modifica per effetto delle plasticizzazioni ed è facile rendersi conto, controllando i valori numerici, che la condizione è effettivamente verificata negli esempi svolti. Lo stesso può dirsi per il problema della torsione con materiale incrudente, almeno per leggi di incrudimento che prevedono che l'ampiezza del dominio elastico non diminuisca con la plasticizzazione.

6.3 LEGAMI IN TERMINI FINITI

6.3.1 PERCORSI OLONOMI

La soluzione del problema elasto-plastico ha richiesto, nei due esempi svolti, l'introduzione di alcune ipotesi. Si è in particolare supposto che le deformazioni plastiche avessero carattere progressivo, prescindendo così dalla natura irreversibile del comportamento. I casi trattati erano sufficientemente semplici da permettere la verifica a posteriori di tale ipotesi, che si è constatato risultare corretta per carichi monotonamente crescenti.

Un'ipotesi di questo genere è di fatto sempre necessaria, almeno all'interno di ognuno dei passi finiti in cui viene suddiviso il processo evolutivo ai fini del calcolo. La sua

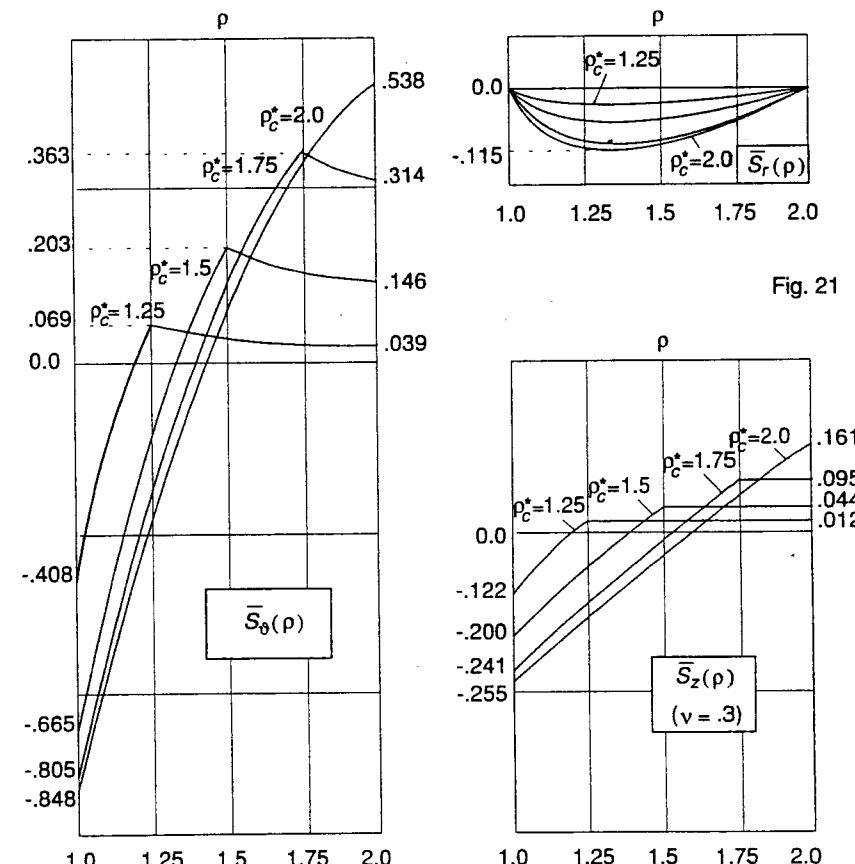


Figura 6.21

correttezza non è però sempre verificabile, né a priori assicurata: anche storie di carico radiali possono comportare scarichi locali in zone precedentemente plasticizzate. L'ipotesi quindi comporta in generale un'approssimazione; all'interno di ogni passo il comportamento reale viene sostituito con quello di un materiale fittizio, detto *olonomo*, che si configura come elastico non lineare in quanto caratterizzato da un comportamento reversibile. L'alternativa carico-scarico è adesso consentita solo all'inizio di ogni passo e non più all'interno del passo stesso.

La relazione costitutiva di questo materiale fittizio può essere ottenuta integrando il legame incrementale lungo particolari percorsi, pure detti *olonomi*, che non prevedano mai scarichi da una situazione plastica. Si illustra ora il procedimento limitatamente a un caso particolare ma molto importante, sia storicamente che per i suoi risvolti applicativi.

6.3.2 CONDIZIONE DI HUBER-HENKY-MISES E LEGGE DI PRANDTL-REUSS

Si consideri la condizione di plasticità di H.H.M. con incrudimento isotropo (3.98). Il termine $f(\sigma_{ij})$ definito dalla (3.97) è una misura scalare del livello di sollecitazione, alternativamente indicata con σ_e e denominata *sforzo efficace*. La condizione si scrive allora

$$\varphi = \sigma_e - \sigma_0(x) \quad (6.105)$$

con

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma' M \sigma)^{1/2} = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} \quad (6.106)$$

o anche, per esteso

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{1/2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} [S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (6.107)$$

Nelle relazioni precedenti, si è indicato con S_{ij} il deviatore di sforzo (2.19), le cui componenti, si ricorda, sono

$$S_x = \frac{1}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \quad S_{xy} = \tau_{xy} \quad (\text{e analoghe})$$

Gli incrementi di deformazione plastica sono espressi dalla legge di normalità (3.90). Si ponga

$$\dot{\pi} = [\dot{p}_x \dot{p}_y \dot{p}_z \dot{\pi}_{xy} \dot{\pi}_{yz} \dot{\pi}_{zx}]^t \quad (6.108a)$$

con

$$\dot{\pi}_{xy} = \dot{p}_{xy} + \dot{p}_{yx} \quad (\text{e analoghe}) \quad (6.108b)$$

(le componenti a indici diversi di $\dot{\pi}$ sono pertanto scorrimenti angolari). La (3.90) diviene quindi

$$\dot{\pi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad \dot{p}_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad (6.109)$$

D'altra parte, la definizione (3.97a) della matrice M consente anche di scrivere

$$M \sigma = 3S \quad S = [S_x \ S_y \ S_z \ 2\tau_{xy} \ 2\tau_{yz} \ 2\tau_{zx}]^t \quad (6.110)$$

Dalle (6.105), (6.106) si ottiene allora

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma_e} M \sigma = \frac{3}{2\sigma_e} S \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2\sigma_e} S_{ij} \quad (6.111)$$

e la (6.109) si scrive

$$\dot{\pi} = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_e} S \quad \dot{p}_{ij} = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_e} S_{ij} \quad (6.112)$$

La (6.112), nota come *legge di Prandtl-Reuss*, è stata per la prima volta derivata a partire da un'ipotesi di isotropia che, indipendentemente dalla condizione di plasticità, prevede la coincidenza tra le direzioni principali di sforzo e quelle degli incrementi di deformazione plastica (in letteratura viene solitamente presentata la forma originaria, leggermente diversa anche se del tutto equivalente [9]). Essa risulta associata attraverso la legge di normalità alla condizione di H.H.M.. Si noti che dalla (6.112) consegue

$$\dot{p}_x + \dot{p}_y + \dot{p}_z = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_e} (S_x + S_y + S_z) = 0 \quad \dot{p}_{ii} = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_e} S_{ii} = 0 \quad (6.113)$$

relazione (a volte citata come *condizione di incompressibilità*) che evidenzia il carattere puramente deviatorico delle deformazioni plastiche associate alla condizione di H.H.M..

Si introduca ora la seguente definizione per l'*incremento di deformazione plastica efficace*

$$\begin{aligned} \dot{p}_e &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\dot{p}_x - \dot{p}_y)^2 + (\dot{p}_y - \dot{p}_z)^2 + (\dot{p}_z - \dot{p}_x)^2 + \frac{3}{2} \dot{\pi}_{xy}^2 + \frac{3}{2} \dot{\pi}_{yz}^2 + \frac{3}{2} \dot{\pi}_{zx}^2 \right]^{1/2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} [\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2 + 2\dot{p}_{xy}^2 + 2\dot{p}_{yz}^2 + 2\dot{p}_{zx}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (6.114)$$

dove, per ottenere la seconda egualianza, si è fatto uso della (6.113). Introducendo la matrice

$$\Theta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

La (6.114) si scrive in forma compatta

$$\dot{p}_e = \frac{\sqrt{2}}{3} (\dot{\pi}' \Theta \dot{\pi})^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij} \right)^{1/2} \quad (6.116)$$

Si osservi che le quantità efficaci sono definite in modo da coincidere nel caso di stato

di sforzo uniassiale, ad esempio in direzione x , con le corrispondenti componenti in tale direzione. Posto infatti

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (a1)$$

dalle (6.106) si ottiene

$$\sigma_e = \sigma_x \quad (6.117a)$$

La (6.110) fornisce allora $\mathbf{S} = \frac{1}{3} \sigma_x \{2 - 1 - 1 0 0 0\}'$ il che implica, per la (6.112)

$$\dot{p}_y = \dot{p}_z = -\frac{1}{2} \dot{p}_x \quad \dot{\pi}_{xy} = \dot{\pi}_{yz} = \dot{\pi}_{zx} = 0 \quad (a2)$$

Introducendo nella (6.116) si ottiene quindi

$$\dot{p}_e = \dot{p}_x \quad (6.117b)$$

Il legame uniassiale tra σ_x e p_x è traducibile in una curva come quella illustrata in Figura 6.22c. Un'ipotesi largamente adottata assume tale curva come relazione tra quantità efficaci, valida quindi in ogni condizione di sforzo. Ciò consente di definire il legame elasto-plastico sulla base dei soli dati ricavabili da una prova uniassiale.

Al fine di esplicitare questo legame, si osservi innanzitutto che \dot{p}_e si identifica col moltiplicatore plastico λ . Introducendo la (6.112) nella (6.116) e ricordando la (6.106) si ottiene infatti

$$\dot{p}_e = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_e} \left(\frac{2}{3} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} = \dot{\lambda} \quad (6.118)$$

\dot{p}_e è funzione di σ_e attraverso la pendenza $h = \dot{\sigma}_x / \dot{p}_x = \dot{\sigma}_e / \dot{p}_e$ della curva rigido-plastica di Figura 6.22c. Ricordando la (6.116), si può allora scrivere

$$\dot{p}_e = \dot{\lambda} = \frac{\dot{\sigma}_e}{h} \quad (6.119)$$

La legge di Prandtl-Reuss (6.112) si esplicita pertanto come segue

$$\dot{\pi} = \frac{3}{2h} \frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma_e} \mathbf{S} \quad \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2h} \frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma_e} S_{ij} \quad (6.120)$$

Questa ipotesi è coerente con il modello isotropo (6.105), la cui legge di incrudimento è governata dal lavoro plastico (3.98b). Precisamente

$$x = \int_0^t \sigma' \dot{p} d\tau = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} d\tau$$

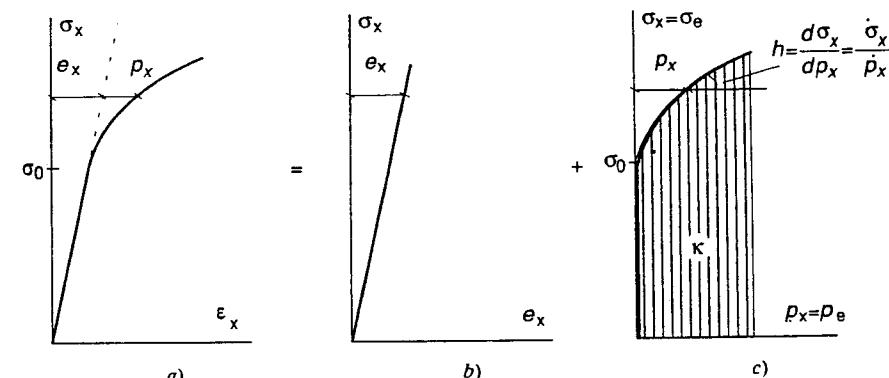


Figura 6.22

Infatti il carattere puramente deviatorico delle deformazioni plastiche e le (6.112), (6.118) e (6.106) permettono di scrivere

$$\sigma_{ij} \dot{p}_{ij} = S_{ij} \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_e} S_{ij} S_{ij} = \sigma_e \dot{p}_e$$

e quindi anche

$$x = \int_0^t \sigma_e \dot{p}_e d\tau \quad (6.121)$$

Il lavoro plastico, misurato dall'area tratteggiata in Figura 6.22c, è pertanto effettivamente esprimibile in termini di quantità efficaci e valutabile sulla base di una curva uniassiale, che contiene tutte le informazioni necessarie a definire il legame (6.105).

In alternativa al modello (6.105), (6.121), detto di *work-hardening*, è a volte usato quello noto come *strain-hardening*, la cui legge di incrudimento è governata dalla variabile interna

$$x = p_e = \int_0^t \dot{p}_e d\tau \quad (6.122)$$

con \dot{p}_e dato dalla (6.116). La (6.122) è ancora definibile sulla base di una curva uniassiale.

È facile rendersi conto che nella formulazione qui considerata le due definizioni si identificano. In letteratura è a volte presente una distinzione tra i due modelli, giustificata dal fatto che la legge di Prandtl-Reuss è stata originariamente introdotta indipendentemente dal criterio di H.H.M. e utilizzata anche con riferimento a altre condizioni di plasticità. In tal caso, le (6.121) e (6.122) configurano due comportamenti diversi tra loro. Peraltro, come già osservato, la legge di Prandtl-Reuss è associata attraverso la normalità alla sola condizione di H.H.M..

Si noti anche che la (6.120) è definibile solo in presenza di incrudimento. Nel caso, pur importante, di plasticità ideale ($h = 0$) è solo possibile esprimere il legame incrementale attraverso la (6.112) dove a $\dot{\lambda} > 0$ corrisponde $\sigma_e = \bar{\sigma}_0 = \text{cost}$. Ricordando anche la (6.118), la (6.112) si scrive allora

$$\dot{\pi} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_e}{\sigma_0} \mathbf{S} \quad \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_e}{\sigma_0} S_{ij} \quad (6.123)$$

Pertanto, in materiali idealmente elasto-plastici non è possibile esprimere l'incremento di deformazione plastica in funzione dell'incremento di sforzo, da cui l'impossibilità di scrivere la (6.120).

6.3.3 IL LEGAME OLONOMO

Si consideri ora un *percorso radiale* in termini di sforzi, tale per cui le componenti di σ crescano proporzionalmente a un unico parametro e mantengano quindi inalterati i loro rapporti. Si può allora scrivere

$$\sigma = \sigma_e \Gamma \quad (6.124)$$

dove Γ è un vettore costante. Per consistenza con la (6.106) deve risultare

$$\Gamma' \mathbf{M} \Gamma = 2 \quad (b)$$

Introducendo la (6.124), dalla (6.110) si ottiene

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \sigma_e \mathbf{M} \Gamma \quad (6.125a)$$

Si ponga

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{3} \mathbf{M} \Gamma = \frac{1}{\sigma_e} \mathbf{S} \quad S'_{ij} = \frac{1}{\sigma_e} S_{ij} \quad (6.125)$$

Lungo un percorso radiale la (6.120) si scrive allora

$$\dot{\pi} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_e}{h} \mathbf{S}' \quad \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_e}{h} S'_{ij} \quad (6.126)$$

Un legame in termini finiti è adesso ottenibile integrando la (6.126) sul percorso radiale (6.124). Osservando che è $\pi = 0$ fintanto che $\sigma_e \leq \bar{\sigma}_0$, dove $\bar{\sigma}_0$ indica il limite di primo snervamento (Figura 6.22) e ricordando che \mathbf{S}' è costante, si ottiene

$$\pi(\sigma_e) = \frac{3}{2} \mathbf{S}' \int_{\bar{\sigma}_0}^{\sigma_e} \frac{d\sigma_e}{h} \quad p_{ij}(\sigma_e) = \frac{3}{2} S'_{ij} \int_{\bar{\sigma}_0}^{\sigma_e} \frac{d\sigma_e}{h} \quad (6.127)$$

dove si è posto

$$d\sigma_e = \sigma_e d\tau \quad (c)$$

Nel caso particolare di incrudimento lineare ($h = \text{cost}$), la (6.127) diviene

$$\pi(\sigma_e) = \frac{3}{2} \mathbf{S}' \frac{\sigma_e - \bar{\sigma}_0}{h} \quad p_{ij}(\sigma_e) = \frac{3}{2} S'_{ij} \frac{\sigma_e - \bar{\sigma}_0}{h} \quad (d)$$

Si osservi che in virtù delle (6.116), (6.126) si può scrivere

$$\dot{p}_e = \frac{\dot{\sigma}_e}{h} \left(\frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij} \right)^{1/2} \quad (e)$$

Posto, in analogia con la (c), $dp_e = \dot{p}_e dt$ e integrando, si ottiene

$$p_e = \int_0^{p_e} dp_e = \left(\frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij} \right)^{1/2} \int_{\bar{\sigma}_0}^{\sigma_e} \frac{d\sigma_e}{h} = \left(\frac{2}{3} p_{ij} p_{ij} \right)^{1/2} \quad (6.128)$$

dove l'ultima eguaglianza discende dalla (6.127). Lungo un percorso radiale è quindi definita una deformazione plastica efficace totale attraverso una relazione formalmente identica alla (6.116). Tale circostanza non si verifica in generale su altri percorsi.

Le (6.127), (6.128) consentono di interpretare la curva uniaxiale di Figura 6.22c come un legame $\sigma_e - p_e$ in termini finiti, valido su di un qualunque percorso radiale (6.124). Chiaramente, ciò comporta una relazione ben precisa tra le curve sforzo-deformazione plastica lungo diversi percorsi.

ESEMPIO 6.2 Quest'ultimo aspetto viene illustrato con riferimento al caso di incrudimento lineare. Il diagramma uniaxiale illustrato in Figura 6.23a permette di esprimere la seguente relazione tra quantità efficaci

$$\sigma_e = \bar{\sigma}_0 + h p_e \quad (f)$$

Si consideri un particolare percorso radiale che presenti solo una tensione tangenziale (ad esempio τ_{xy}) diversa da zero. Per la (b), la (6.124) allora comporta

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^t \quad (g)$$

Lo sforzo efficace (6.107) vale in tal caso

$$\sigma_e = \sqrt{3} \tau_{xy} \quad (h)$$

Le (6.125b) e (g) mostrano inoltre che è $\mathbf{S}' = 2\Gamma$; la (d) quindi fornisce

$$\pi = 3\Gamma \frac{\sigma_e - \bar{\sigma}_0}{h} \quad (i)$$

Anche la deformazione plastica presenta quindi un'unica componente non nulla, precisamente lo scorrimento angolare π_{xy} . Utilizzando la (f), questo si esprime

$$\pi_{xy} = \sqrt{3} p_e \quad (j)$$

Le (h), (j) permettono di determinare il legame $\tau_{xy} - \pi_{xy}$ previsto dalla (f). Sostituendo si ottiene

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_0 + h \pi_{xy} \quad (k)$$

dove si è posto

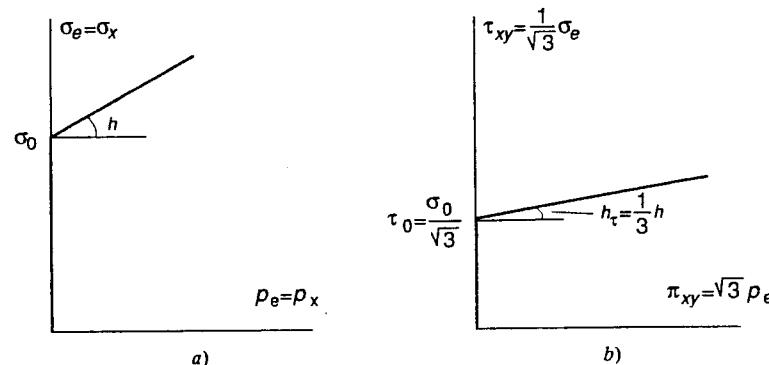


Figura 6.23

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sqrt{3}} \quad h_t = \frac{h}{3} \quad (\ell 1, 2)$$

Il diagramma uniassiale di Figura 6.23a comporta quindi, lungo il particolare percorso radiale (ϱ), la relazione tra tensioni tangenziali e scorrimenti angolari illustrata in Figura 6.23b. Come peraltro ben atteso, il rapporto tra i valori di primo snervamento $\bar{\tau}_0$ e $\bar{\sigma}_0$ è quello previsto dal criterio di H.H.M. (vedi (3.60)). La (ℓ2) mostra che la pendenza del ramo incrudente risulta un terzo di quella uniassiale.

Lungo un percorso radiale (6.124), la relazione finita (6.127) non configura differenze rispetto al legame incrementale se σ_e è monotonicamente crescente. Se invece lo sforzo efficace diminuisce a partire da un valore $\bar{\sigma}_e > \bar{\sigma}_0$, la (6.127) prevede che le deformazioni plastiche vengano recuperate, in contraddizione con il loro carattere irreversibile. La relazione descrive infatti il comportamento di un materiale fittizio, che fornisce la stessa risposta del materiale reale lungo i percorsi (6.124) solo se risulta sempre $\dot{\sigma} > 0$.

La (6.127) è un esempio di legame elasto-plastico *olonomo*. In alcuni problemi particolari l'evoluzione elasto-plastica della struttura risulta effettivamente in accordo con l'ipotesi che ha consentito di formulare tale legame. È questo il caso, ad esempio, della torsione circolare studiata nel Paragrafo 6.2.2.2 sulla base di un legame bilineare in cui è immediato riconoscere la (k). In generale, tuttavia, la sostituzione del legame incrementale con relazioni olonome comporta delle approssimazioni in quanto, anche sotto carichi esterni crescenti proporzionalmente a un unico parametro, gli sforzi spesso non seguono un percorso radiale e le deformazioni plastiche non presentano necessariamente carattere progressivo.

Ciononostante, i legami olonomi trovano largo impiego nel calcolo, quanto meno all'interno di passi finiti di carico. La loro derivazione è stata qui illustrata per la condizione di H.H.M. con incrudimento isotropo, un caso certamente molto importante ma particolare, che comporta approssimazioni accettabili solo per storie di carico proporzionali. Per cogliere adeguatamente gli aspetti fondamentali della risposta elasto-plastica di una struttura è spesso necessario ricorrere a leggi di incrudimento più generali e a volte a altre condizioni di plasticità.

Un filone di ricerca iniziato da Martin (vedi [10]) ha mostrato come legami olonomi possano essere formulati, almeno in linea di principio, sotto condizioni abbastanza

generali ai fini applicativi. Il procedimento segue l'itinerario qui esemplificato, basato sull'integrazione del legame incrementale lungo particolari *percorsi olonomi*, che tra l'altro godono di notevoli proprietà. Ad esempio, è stato dimostrato che tra tutti i percorsi che conducono allo stesso valore finale delle deformazioni plastiche, un percorso olonomo, se esiste (l'esistenza, purtroppo, non è sempre assicurata), comporta il minimo lavoro plastico (*percorso ottimale*). Tale proprietà è importante, in quanto permette di valutare, almeno qualitativamente, le approssimazioni connesse con l'utilizzo di legami in termini finiti.

ESERCIZI

- 6.1 La struttura di Figura 6.E1 è costituita da un blocco rigido sostenuto da tre aste uguali (area A , lunghezza ℓ) e equidistanti, costituite da materiale idealmente elasto-plastico (modulo elastico E , limite di snervamento uniassiale σ_0). Calcolare le azioni assiali N_i nelle tre aste e i loro allungamenti δ_i ($i = 1, 2, 3$) per P crescente da zero fino a collasso.
- 6.2 Per la struttura di Figura 6.2 (esempio 6.1), calcolare le tensioni e lo spostamento residui allo scarico a partire: a) dalla situazione di collasso incipiente nel caso idealmente elasto-plastico; b) da $p = 5.4$ nel caso incrudente. Si assuma che tali valori siano stati raggiunti incrementando monotonamente il carico a partire dalla situazione naturale.
- 6.3 Una barra in acciaio idealmente elasto-plastica e rigidamente fissata a entrambi gli estremi si trovi nel suo stato naturale (deformazioni e sforzi nulli) alla temperatura $T_0 = 30^\circ\text{C}$. Essa venga uniformemente riscaldata fino a $T = 180^\circ\text{C}$ e quindi riportata a T_0 . Assumendo

$$E = 206\,000 \text{ MPa} \quad \sigma_0 = 250 \text{ MPa} \quad \alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$$

calcolare la deformazione plastica e la tensione residua allo scarico.

- 6.4 Come per l'esercizio precedente, assumendo che il limite di snervamento dipenda dalla temperatura secondo la legge

$$\sigma_0 = \begin{cases} 250 & T \leq 100^\circ\text{C} \\ 250[1 - .002(T - 100)] & T \geq 100^\circ\text{C} \end{cases} \quad (\text{MPa})$$

- 6.5 Un cilindro in condizioni di deformazione piana presenta un rapporto tra i raggi esterno e interno pari a $\beta = 2$. Il materiale sia elasticamente isotropo ($\nu = 1/3$) e idealmente elasto-plastico (limite di snervamento uniassiale σ_0). Il cilindro è scaldato sulla sua superficie interna da $\Theta = (E/\sigma_0)\alpha\Delta T$. Assumendo la condizione di plasticità di Tresca, calcolare il valore di Θ a primo snervamento supponendo: a) che il materiale sia originariamente vergine; b) che sia

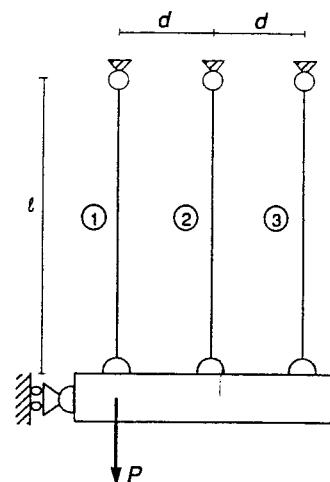


Figura 6.E1

stata precedentemente applicata e rimossa una pressione interna pari a $p = .624\sigma_0$ (che ha indotto plasticizzazioni fino a $\varrho_C^* = 1.5$).

- 6.6 Si consideri una sezione circolare cava di raggi esterno R e interno $R/2$, soggetta a torsione. Il materiale sia idealmente elasto-plastico, con modulo di elasticità tangenziale G e limite di snervamento, pure tangenziale, τ_0 . Calcolare l'espressione del momento torcente in funzione della torsione β e la risorsa plastica f della sezione.
- 6.7 Calcolare il momento torcente limite per una sezione a forma di triangolo equilatero di lato a .
- 6.8 Una prova uniassiale fornisca, per un materiale elasto-plastico, il seguente legame tra deformazione plastica e sforzo longitudinali

$$p_x = .06 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_0} \right)^{5/2} \quad (\sigma_x \geq \sigma_0)$$

Costruendo su questa base il legame olonomo relativo alla condizione di H.H.M., determinare la relazione tra la parte plastica π dello scorrimento angolare e la tensione tangenziale τ lungo un percorso radiale che preveda un'unica componente diversa da zero. Valutare numericamente π per $\tau = .8\sigma_0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] KOITER W.T., General theorems for elastic-plastic solids, in: *Progress in solid mechanics*, editori Sneddon e Hill, p.166, North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [2] BALDACCI R., CERADINI G., GIANGRECO E., *Plasticità*, Italsider - Collana tecnico scientifica per la progettazione di strutture in acciaio, vol. II.a, Tamburini, Milano, 1971.
- [3] CAPURSO M., MAIER G., Incremental elastoplastic analysis and quadratic optimization, *Meccanica*, 5, p. 107 (1970).
- [4] MAIER G., Teoremi di minimo in termini finiti per continui elasto-plastici con leggi costitutive linearizzate a tratti, *Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, A103, p. 1066 (1969).
- [5] COHN M.Z., MAIER G. (editori), *Engineering plasticity by mathematical programming*, Pergamon Press, New York, 1979.
- [6] PRAGER W., HODGE P.G. Jr, *Theory of perfect plastic solids*, John Wiley & Sons, New York, 1951.
- [7] CERADINI G., Un principio di massimo per il calcolo dei sistemi elasto-plastici, *Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, A99, p. 125 (1965).
- [8] EGGRERS H., Variational principles for elasto-plastic continua, *J. Struct. Mech.*, 3, p. 345 (1974).
- [9] MENDELSON A., *Plasticity: Theory and Application*, MacMillan, New York, 1968.
- [10] MARTIN J.B., *Plasticity: Fundamentals and general results*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1975.

A

Soluzioni degli esercizi proposti

CAPITOLO 1

1.1 $e_1 = .1(F/K); \quad e_2 = .2(F/K); \quad e_3 = .3(F/K)$

$$N_1 = N_3 = .3F; \quad N_2 = .4F$$

1.2 $\ell = 1.20 \text{ m: } \sigma = 2.009 \text{ MPa}, \quad \sigma_v = 2.411 \text{ MPa}$

$$\ell = 1.50 \text{ m: } \sigma = 5.008 \text{ MPa}, \quad \sigma_v = 7.512 \text{ MPa}$$

1.3 $\sigma_v = K[\exp(2\epsilon_v) - \exp(\epsilon_v)]$

$$1.4 \quad 0 = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} (\sigma_v/(1 + \epsilon)) = \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} [(1 + \epsilon)(d\sigma_v/d\epsilon) - \sigma_v] = \\ = \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} [(1 + \epsilon)(d\sigma_v/d\epsilon_v)(d\epsilon_v/d\epsilon) - \sigma_v] = \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} (d\sigma_v/d\epsilon_v - \sigma_v)$$

$$0 = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} [S(1 + \epsilon)] = \frac{dS}{d\epsilon} (1 + \epsilon) + S = \frac{dS}{dE} \frac{dE}{d\epsilon} (1 + \epsilon) + S =$$

$$= \frac{dS}{dE} (1 + \epsilon)^2 + S = \frac{dS}{dE} (1 + 2E) + S$$

1.5 Vedi Figura S1.

1.6 a): $N_1 = F, \quad N_2 = -\sqrt{2}F, \quad N_3 = 0, \quad N_4 = F$

b): $N_1 = 0, \quad N_2 = -2F, \quad N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}F, \quad N_4 = F, \quad N_5 = -\frac{3}{\sqrt{2}}F, \quad N_6 = 0$
(trazioni positive)

1.7 Vedi Figura S2.

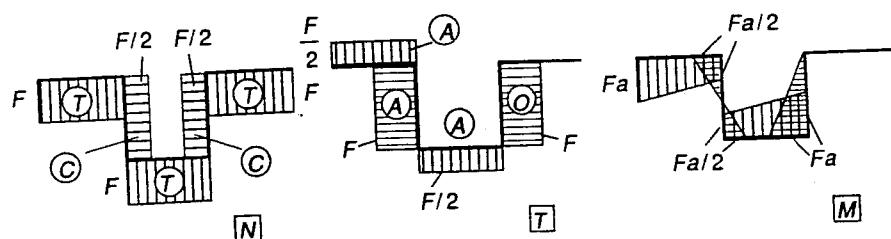


Figura S1

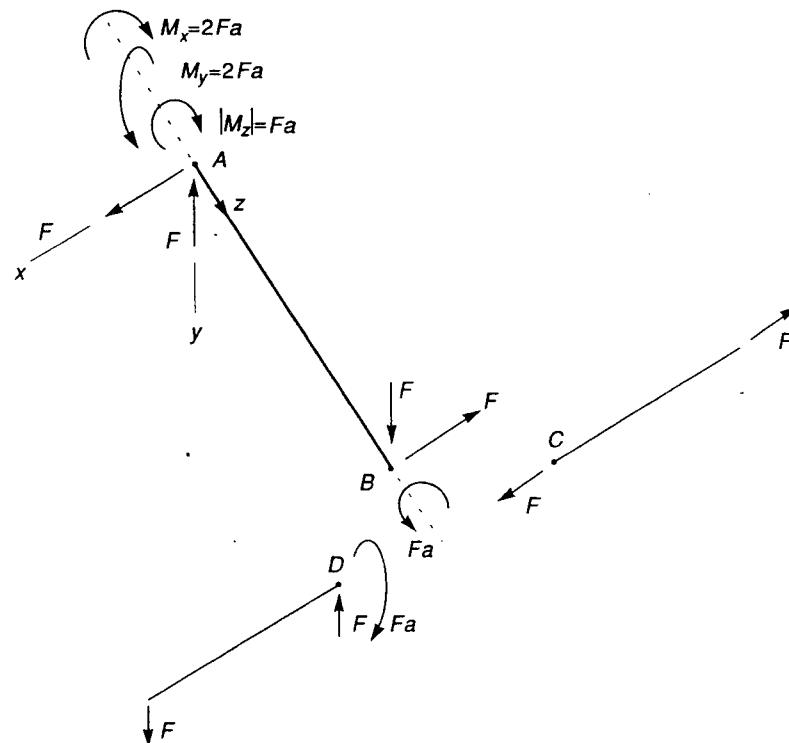


Figura S2

1.8 a): può equilibrare condizioni di carico che prevedono $F_x = 0$. Scegliendo V_2 come iperstatica, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ X & X+2\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ F_y \\ M \end{Bmatrix} - V_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ X+\ell \end{Bmatrix}$$

b): può equilibrare condizioni di carico che prevedono $M = F_y X - F_x(Y + \ell)$ (carichi la cui risultante ha retta d'azione passante per il punto $x = X$, $y = Y + \ell$). Scegliendo R come iperstatica, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -(Y+\ell) & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_y X - F_x(Y + \ell) \end{Bmatrix} - \frac{R}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ X+Y+\ell \end{Bmatrix}$$

In entrambi i casi, qualunque reazione può essere scelta come iperstatica.

1.9 Si. $H = 0$ è fissato dall'equilibrio. Qualunque delle rimanenti reazioni può essere scelta come iperstatica.

1.10 a): $M_1(x_1) = \left(\frac{R}{\ell} - \frac{1}{2} p\ell \right) x_1; \quad M_2(x_2) = R - \frac{p}{2} x_2^2$

Positivi se tendono le fibre inferiori. R = momento al pattino.

$$b): \quad M_1(x_1) = \frac{p}{2} x_1(\ell - x_1) + \frac{R}{\ell} x_1; \quad M_2(x_2) = R$$

Positivi se tendono le fibre interne. R = momento al pattino.

1.11 Applicare le tre equazioni cardinali della statica nel piano. In quella di equilibrio alla rotazione compaiono infinitesimi del secondo ordine che devono essere trascurati.

$$1.12 f = 2 \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}; \quad \eta = \frac{f}{\sqrt{4+f^2}} \quad \text{dove: } f = \frac{F}{W}; \quad \eta = \frac{u}{\ell}$$

CAPITOLO 2

2.1 $\sigma = 3\alpha; \quad n' = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1]$

2.2 a): $\sigma_{\max} = s_I = 139.6; \quad \sigma_{\min} = s_{III} = -59.6; \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} (s_I - s_{III}) = 99.6 \text{ (MPa)}$

b): $\sigma_{\max} = s_I = 161.0; \quad \sigma_{\min} = s_{III} = 0.0; \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} s_I = 80.5 \text{ (MPa)}$

2.3 Vedere Figura S3 (a tratti pieno i cerchi di Mohr relativi al piano delle tensioni)

2.4 $p = \alpha; \quad S = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.5 $\sigma_\xi = 61.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_\eta = 18.5 \text{ MPa}, \quad \tau_{\xi\eta} = -97.3 \text{ MPa}$

2.6 $\sigma_z = -p(\ell - z); \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{in } V$

$r_z = p\ell; \quad r_x = r_y = 0 \quad \text{per } z = 0$

2.7 $\sigma_x = 2 \frac{t}{h} x; \quad \tau_{xy} = -2 \frac{t}{h} y; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{in } V$

(ad esempio)

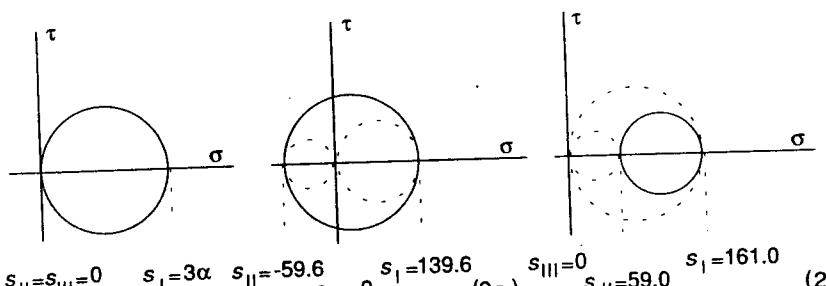


Figura S3

$$r_x = 2 \frac{t}{h} \ell; \quad r_y = -2 \frac{t}{h} y; \quad r_z = 0 \quad \text{per } x = \ell$$

(ad esempio)

$$2.8 \quad \epsilon_x = \frac{u}{a^3} (3x^2 - 6xz), \quad \epsilon_y = \frac{u}{a^3} xz, \quad \epsilon_z = \frac{u}{a^3} 3z^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{u}{a^3} (3y^2 + yz - 3x^2), \quad \gamma_{yz} = \frac{u}{a^3} (xy - 3y^2), \quad \gamma_{zx} = 0$$

$$2.9 \quad V = h^3(1 + \eta)$$

$$2.10 \quad s_x = \eta a \sin \frac{x}{a}, \quad s_y = \eta a \cos \frac{x}{a}, \quad s_z = \eta a \left(\sin \frac{y}{a} + \cos \frac{z}{a} \right)$$

$$2.11 \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = \Omega$$

$$2.12 \quad \text{Spostamenti: } s_1 = k X_2, \quad s_2 = s_3 = 0$$

$$\text{Tensore di Green-Lagrange: } E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tensore delle piccole deformazioni: } \epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerazioni geometriche sulla Figura S4 mostrano che risulta

$$\overline{AC}' = \overline{BC}' = h \sqrt{1 + k^2}; \quad \overline{CC}' = \overline{DD}' = kh$$

si ha quindi

$$\Lambda_2 = \overline{AC}' / \overline{AC} = \sqrt{1 + k^2} = \sqrt{1 + 2E_{22}}$$

$$\cos \vartheta_{12} = \sin \gamma_{12} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}}$$

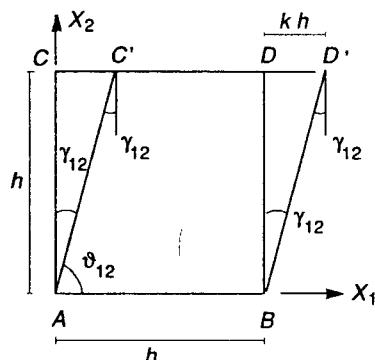


Figura S4

(gli altri spigoli non cambiano di lunghezza e gli altri angoli si mantengono retti). Per $k \rightarrow 0$
si può scrivere

$$\sqrt{1 + k^2} \approx 1 + \frac{1}{2} k^2 \approx 1; \quad \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} \approx k \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) \approx k; \quad \sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$$

$$\text{È allora: } \Lambda_2 - 1 \approx 0 = \epsilon_{22}; \quad \gamma_{12} \approx k = 2\epsilon_{12}.$$

CAPITOLO 3

3.1 Dello 0.045 %

$$3.2 \quad \epsilon_\delta = 0.083\%, \quad \epsilon_z = 0.019\%, \quad \epsilon_r = -0.044\%$$

$$3.3 \quad a): \quad E > 0, \quad n > 0, \quad Z > 0, \quad \nu > -1, \quad \nu + \frac{2\mu^2}{n} < 1$$

$$b): \quad 1. \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{1}{6} \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_z = -4 \frac{\sigma}{E}; \quad \Delta V/\bar{V} = -\frac{13}{3} \frac{\sigma}{E}$$

$$2. \quad \epsilon_x = -\frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_y = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_z = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{E}; \quad \Delta V/\bar{V} = -\frac{1}{6} \frac{\sigma}{E}$$

$$3. \quad \epsilon_x = \epsilon_y = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_z = -5 \frac{\sigma}{E}; \quad \Delta V/\bar{V} = -\frac{13}{3} \frac{\sigma}{E}$$

$$3.4 \quad \varphi = 30^\circ : \epsilon_\xi = \frac{17}{16} \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_\eta = -\frac{7}{16} \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma_{\xi\eta} = 0$$

$$\varphi = 45^\circ : \epsilon_\xi = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_\eta = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma_{\xi\eta} = -\frac{1}{4} \frac{\sigma}{E}$$

$$\varphi = 120^\circ : \epsilon_\xi = \frac{13}{16} \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_\eta = -\frac{7}{16} \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma_{\xi\eta} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sigma}{E}$$

$$3.5 \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta (\cos^2 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta) \frac{\sigma}{E} = 0 \quad \text{per } \vartheta = 0, \pm 30^\circ, \pm 90^\circ, \pm 150^\circ, 180^\circ$$

$$3.6 \quad E_{45} = \frac{4E}{4 + (\alpha - 2)(1 + \nu)}; \quad \nu_{45} = \frac{4\nu + (\alpha - 2)(1 + \nu)}{4 + (\alpha - 2)(1 + \nu)}; \quad G_{45} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\alpha = 3, \quad \nu = 0 : E_{45} = .8E; \quad \nu_{45} = .2; \quad G_{45} = .5E$$

3.7 L'inclinazione della terza principale è $\varphi = \frac{1}{2} \arctan(\alpha \sqrt{3}/2)$. Alcuni valori sono riportati nella tabella che segue

α	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
φ	0°	20.45°	30°	34.47°	36.95°	38.50°

- 3.8 $R = 200 \text{ mm}$, a): $p = 28.9 \text{ MPa}$; b): $p = 26.2 \text{ MPa} (-9.2\%)$
 $R = 400 \text{ mm}$, $p = 14.4 \text{ MPa}$; $p = 13.7 \text{ MPa} (-4.8\%)$
 $R = 600 \text{ mm}$, $p = 9.62 \text{ MPa}$; $p = 9.31 \text{ MPa} (-3.2\%)$

- 3.9 Sforzi: $\sigma_x = 4\tau_0$, $\sigma_y = 5\tau_0$, $\sigma_z = 3\tau_0$, $\tau_{xy} = \tau_0/4$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

Tensioni principali: $s_I = 5.059\tau_0$, $s_{II} = 3.941\tau_0$, $s_{III} = 3\tau_0$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (s_I - s_{III}) = 1.030\tau_0 > \tau_0 \quad (\text{non verificato})$$

- 3.10 $\sqrt{3J_2} = .71 \sigma_0 < \sigma_0$ (elastico)

- 3.11 a): no ($s_I - \nu s_{II} = 32 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_T$)

b): Rankine: $-50 \text{ MPa} \leq s \leq 30 \text{ MPa}$; Grashof: $-50 \text{ MPa} \leq s \leq 42.86 \text{ MPa}$

3.12

σ/σ_0	$\lambda_1(E/\sigma_0)$	$\lambda_2(E/\sigma_0)$	$p(E/\sigma_0)$	$\epsilon(E/\sigma_0)$	$\bar{\sigma}_{01}/\sigma_0$	$\bar{\sigma}_{02}/\sigma_0$	$(\bar{\sigma}_{01} + \bar{\sigma}_{02})/\sigma_0$
1.5	5.0	0.0	5.0	6.5	1.5	.6	2.1
-1.5	5.0	9.0	-4.0	-5.5	.78	1.5	2.28
1.5	12.2	9.0	3.2	4.7	1.5	.924	2.424
-1.5	12.2	14.76	-2.56	-4.06	1.039	1.5	2.539
1.5	16.808	14.76	2.048	3.548	1.5	1.131	2.631
-1.5	16.808	18.446	-1.638	-3.138	1.205	1.5	2.705

- 3.13 1: $k = .452 \times 10^8$, $n = 3.77$

- 2: $k = .259 \times 10^{11}$, $n = 4.97$

- 3.14 a): $\alpha = 2/3$;

$$b): \tau_0 = \pm \sigma_0 \sqrt{(4 - 9\alpha^2)/12}$$

3.15 Si può operare all'interno della terna (x, y, z) , ponendo

$$\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z]^t = (\sigma_0/\sqrt{3})[2 \ 1 \ 0]^t; \quad \dot{\varepsilon} = [\dot{\varepsilon}_x \dot{\varepsilon}_y \dot{\varepsilon}_z]^t = \dot{\varepsilon}[1 \ 0 \ 0]^t$$

$$\text{È inoltre: } d = \frac{3}{4} E \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad n = 3\sqrt{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad n' d \dot{\varepsilon} = \frac{9\sqrt{3}}{4} E \dot{\varepsilon} > 0$$

Si ottiene quindi

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{18} \dot{\varepsilon}; \quad \dot{p} = \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \dot{e} = \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \dot{\sigma} = \frac{3}{8} E \dot{\varepsilon} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$3.16 u(t) = \frac{\bar{F}}{K} \begin{cases} \exp(-t/t_0) + t/t_0 - 1 & t \leq t_0 \\ \exp(-t/t_0) & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$3.17 u(t) = \frac{R}{2} \left(\frac{3}{K} + Vt \right)$$

CAPITOLO 4

$$4.1 \nabla_2 s_i + \frac{1+\nu}{1-\nu} s_{k,k} + \frac{F_i}{G} = 0 \quad \text{in } A$$

$$(s_{ij} + s_{ji})n_j + 2 \frac{\nu}{1-\nu} s_{k,k} n_i = \frac{f_i}{G} \quad \text{su } \Gamma_F; \quad s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } \Gamma_u$$

$$4.2 \varphi(x, y) = A_1 x^3 y (3x^2 - 5y^2) + A_2 (-2x^6 + 15x^4 y^2 - y^6) + A_3 (-x^6 + 15x^2 y^4 - 2y^6) + A_4 x y^3 (-5x^2 + 3y^2)$$

$$4.3 M_1 = -\frac{A}{3} (a^3 h^3); \quad M_2 = A \left(\frac{2}{5} a^5 h - \frac{1}{3} a^3 h^3 \right); \quad T_1 = A(a^2 h^3 - a^4 h)$$

$$T_2 = A \left(a^3 h^2 - \frac{1}{5} a^5 \right) \quad (\text{vedi Figura S5})$$

4.4 Equilibrio indefinito: per $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$ e $\tau_{r\theta} = 0$, le (4.65) si riconducono alla (4.95) (verificata).

$$\text{Legame elastico: } \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) = \epsilon_r(r); \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = \epsilon_\theta(r); \quad \gamma_{r\theta} = 0$$

Congruenza interna: la (4.69) diviene

$$\frac{d^2 \epsilon_\theta}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{2}{r} \frac{d\epsilon_\theta}{dr} = 0 \quad (\text{verificata})$$

Equilibrio al contorno

lati curvi: $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$

(verificate)

lati rettilinei (condizioni globali):

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0; \quad - \int_a^b \sigma_\theta \left(r - \frac{a+b}{2} \right) dr = M \quad (\text{verificate})$$

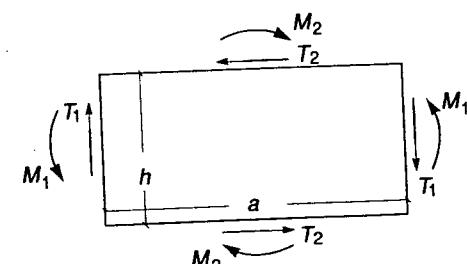


Figura S5

4.5 Dalla (4.104b) si ottiene

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = p \frac{a}{b} (b-a) + \frac{K}{b} (b^2 - a^2) - \int_a^b \Theta(r) dr + \int_a^b \frac{1}{r^2} \left[\int_a^r \Theta(r') dr' \right] dr$$

Integrando per parti l'ultimo addendo, risulta

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{r^2} \left[\int_a^r \Theta(r') dr' \right] dr &= - \int_a^b \left[\int_a^r \Theta(r') dr' \right] d\left(\frac{1}{r}\right) = \\ &= -\frac{1}{b} \int_a^b r \Theta(r) dr + \int_a^b \Theta(r) dr \end{aligned}$$

Peraltro, dalla (4.103) si ottiene anche

$$\frac{K}{b} (b^2 - a^2) = -qb + \frac{pa^2}{b} + \frac{1}{b} \int_a^b r \Theta(r) dr$$

e il risultato consegue.

$$4.6 \quad \sigma_r = -\frac{2}{\pi} \frac{p}{r} \cos(\alpha + \vartheta)$$

$$4.7 \quad \sigma_x = \sigma_y = -\frac{3\sqrt{2}}{4\pi} \frac{q}{a}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{q}{a}$$

4.8 Per la porzione cilindrica, dalle (1.35) si ottiene $\sigma_\theta = p(R/b)$, $\sigma_z = \sigma_\theta/2$ e $\sigma_r = 0$. Il legame isotropo fornisce quindi $\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu \sigma_z)/E = \frac{pR}{Eb} (1 - \nu^2/2)$ e lo spostamento radiale risulta

$$u_1 \approx s_r(R) = R \varepsilon_\theta = \frac{p}{E} \frac{R^2}{b} \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)$$

La sollecitazione radiale sulle lastre terminali è $q = -pL/2t$ per unità di spessore; dalla (4.139d) si ottiene allora il seguente valore per lo spostamento radiale in corrispondenza del raggio medio del cilindro

$$u_2 = s(R) = \frac{1-\nu}{E} \frac{pL}{2t} R$$

Perché le sezioni estreme del cilindro non siano soggette a forze in direzione radiale dovrà risultare $u_1 = u_2$. Ciò implica

$$\frac{t}{b} = \frac{1-\nu}{2-\nu} \frac{L}{R} = 4.118$$

$$4.9 \quad w = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{21} P_2; \quad \alpha_{11} = 3f/P_1, \quad \alpha_{12} = f/P_1 = \alpha_{21} \quad (\text{Betti})$$

Pertanto: $w = f(3 + P_2/P_1) = 1.144 \text{ mm}$

4.10 Si ponga $\delta K = \delta_s K + \delta_\theta K + \delta_e K$, dove

$$\delta_s K = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta s_{i,j} + \delta s_{j,i}) dV - \int_V F_j \delta s_j dV - \int_{S_F} f_j \delta s_j dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_i \delta s_j dS$$

$$\delta_\theta K = \int_V \left[\frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) - \varepsilon_{ij} \right] \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_u} n_i (s_j - \bar{s}_j) \delta \sigma_{ij} dS$$

$$\delta_e K = \int_V [-\sigma_{ij} + D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \vartheta_{kl})] \delta \varepsilon_{ij} dV$$

I tre addendi devono annullarsi indipendentemente. Dalle condizioni $\delta_e K = 0$ e $\delta_s K = 0$ si ottiene, rispettivamente

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \vartheta_{kl}) \quad \text{in } V \quad (\text{legame elastico})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) \quad \text{in } V; \quad s_j = \bar{s}_j \quad \text{su } S_u \quad (\text{congruenza})$$

La condizione $\delta_s K = 0$ diviene allora

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta s_{i,j} + \delta s_{j,i}) dV - \int_V F_j \delta s_j dV - \int_{S_F} f_j \delta s_j dS = 0 \quad \forall \quad \delta s_j = 0 \quad \text{su } S_u$$

relazione che esprime le condizioni di equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali.

4.11 Si ponga $\delta M = \delta_P M + \delta_s M$; deve essere

$$\delta_P M = \int_V \left(\hat{\varepsilon}_{kk} - \frac{P}{\lambda} \right) \delta P dV = 0 \quad \forall \quad \delta P$$

$$\delta_s M = \int_V [2G \hat{\varepsilon}_{ij} \delta \hat{\varepsilon}_{ij} + P \delta \hat{\varepsilon}_{kk}] dV - \int_V F_j \delta \hat{s}_j dV - \int_{S_F} f_j \delta \hat{s}_j dS =$$

$$= \int_V [2G \hat{\varepsilon}_{ij} + P \delta_{ij}] \delta \hat{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V F_j \delta \hat{s}_j dV - \int_{S_F} f_j \delta \hat{s}_j dS =$$

$$= \int_V \hat{\sigma}_{ij} \delta \hat{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V F_j \delta \hat{s}_j dV - \int_{S_F} f_j \delta \hat{s}_j dS = 0$$

$$\forall \quad \delta \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \hat{s}_{i,j} + \delta \hat{s}_{j,i}) \quad \text{in } V; \quad \delta \hat{s}_j = 0 \quad \text{su } S_u$$

La prima condizione impone $P = \lambda \hat{\varepsilon}_{kk}$, la seconda l'equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali. Ponendo a priori $P = \lambda \hat{\varepsilon}_{kk}$ risulta $\mu = \frac{1}{2} [2G \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + \lambda (\hat{\varepsilon}_{kk})^2] = \omega(\hat{\varepsilon}_{ij})$ e quindi $M = V$. Per $\nu \rightarrow 0.5$, è $\lambda \rightarrow \infty$ ed ω non è definito, mentre $\mu \rightarrow G \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + P \hat{\varepsilon}_{kk}$, comunque definito; in tal caso $\delta_P M = 0$ impone la condizione di incompressibilità $\hat{\varepsilon}_{kk} = 0$.

CAPITOLO 5

$$5.1 \quad \sigma_{\max} = \frac{Wh}{2I} = 147.1 \text{ MPa}; \quad f = \frac{Wl^2}{2EI} = 16.54 \text{ mm}$$

$$5.2 \quad v(z) = -\frac{Wz^2}{2EI} + V_0 + \Omega_x z = \frac{W}{2EI} (tz - z^2) \quad (\text{per le C.C. } v(0) = v(l) = 0)$$

$$f = v \left(\frac{\ell}{2} \right) = \frac{W\ell^2}{8EI}; \quad \varphi = v'(0) = \frac{W\ell}{2EI}$$

5.3 a) $\sigma_z^A = \frac{2F}{a^2}; \quad \sigma_z^B = 0;$

b) $\sigma_z^A = \frac{4F}{a^2}; \quad \sigma_z^B = -\frac{2F}{a^2}$

5.4 $\sigma_z(x, y) = \frac{F}{a^2} \left[\frac{1}{6} - \frac{3}{5} \frac{x}{a} - \frac{3}{17} \frac{y}{a} \right]$

Equazione dell'asse neutro: $\frac{18}{17} \frac{y}{a} + \frac{18}{5} \frac{x}{a} = 1$

$\sigma_z^1 = 1.331 \frac{F}{a^2}$ (massima trazione); $\sigma_z^2 = -.645 \frac{F}{a^2}; \quad \sigma_z^3 = -.575 \frac{F}{a^2}$

$\sigma_z^4 = .025 \frac{F}{a^2}; \quad \sigma_z^5 = -.645 \frac{F}{a^2}$ (massima compressione); $\sigma_z^6 = 1.155 \frac{F}{a^2}$

5.5 $e = \frac{1}{4} h = 150 \text{ mm}$

5.6 $I_\xi = \frac{8}{3} bd^3; \quad I_\eta = \frac{2}{3} db^3; \quad I_{\xi\eta} = bd^3; \quad D = I_\xi I_\eta - I_{\xi\eta}^2 = \frac{7}{9} b^2 d^6$

dalle (5.17): $a_1 = -\frac{W}{D} I_{\xi\eta}; \quad a_2 = \frac{W}{D} I_\eta \rightarrow \sigma_z = a_1 \xi + a_2 \eta = -\frac{W}{bd^3} \left(\frac{6}{7} \eta - \frac{9}{7} \xi \right)$

L'andamento e i valori caratteristici sono riportati in Figura S6.

Equazione dell'asse neutro: $\eta = \frac{3}{2} \xi$

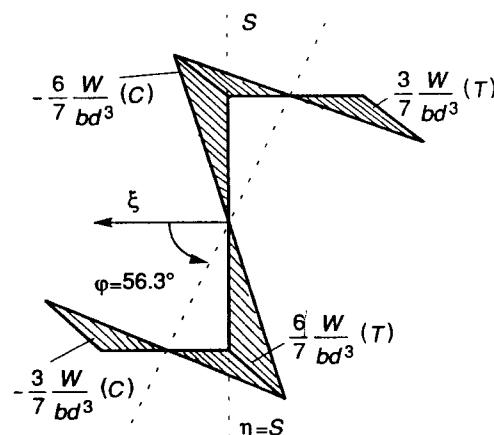


Figura S6

Inclinazione dell'asse neutro: $\varphi = \arctan \left(\frac{3}{2} \right) = .983 \text{ rad} = (56.3)^\circ$

5.7 $\tau_{\max} = \frac{W}{2\Omega b_{\min}} = 200 \text{ MPa}; \quad \Omega = \frac{W\ell}{GJ} = .03125 \text{ rad} = (1.79)^\circ$

5.8 Sezione aperta: $J = 3.351 \times 10^6 \text{ mm}^4; \quad \tau_{\max} = 298.4 \text{ MPa}; \quad \Theta = .746 \text{ rad} = (42.75)^\circ$

Sezione chiusa: $J = 1.005 \times 10^9 \text{ mm}^4; \quad \tau_{\max} = 9.95 \text{ MPa}; \quad \Theta = .00249 \text{ rad} = (0.14)^\circ$

5.9 $A = \pi R^2; \quad I = \frac{1}{4} \pi R^4; \quad b = 2R \sin \vartheta; \quad y = -R \cos \vartheta; \quad x = -r \sin \vartheta$

$$S' = \int_{-R}^y y b dy = -2R^3 \int_0^\vartheta \sin^2 \vartheta' \cos \vartheta' d\vartheta' = -\frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta; \quad \tan \alpha = \cot \vartheta \quad (\text{vedi Figura S7})$

$\tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \sin^2 \vartheta; \quad \tau_{zx} = -\frac{4}{3} \frac{T}{A} \frac{r}{R} \sin \vartheta \cos \vartheta$

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \sin \vartheta \sqrt{\sin^2 \vartheta + \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \vartheta};$$

$\tau_{\max} = \tau \left(r = R, \vartheta = \pm \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{3} \frac{T}{A}$

$$\mu = \frac{A}{I^2} \int_{-R}^R \frac{S'^2}{b} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right) dy = \frac{32}{9\pi} \int_0^\pi \sin^6 \vartheta \left(1 + \frac{1}{3} \cotan^2 \vartheta \right) d\vartheta = \frac{32}{27} = 1.185$$

5.10 $I = \frac{1}{4} bh^3; \quad \tau_{zs}^{\text{flangia}} = \frac{2}{3} \frac{T}{bh} \frac{s}{h}; \quad \tau_{zs}^{\text{anima}} = 2 \frac{T}{bh} \left(\frac{25}{36} - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (\text{vedi Figura S8})$

$$\tau_{\max} = \tau_{zs}^{\text{anima}}(y=0) = \frac{25}{18} \frac{T}{bh}; \quad \mu = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S'^2}{b^2} dA = \frac{56}{15} = 3.733$$

5.11 $\mu = 2.0$

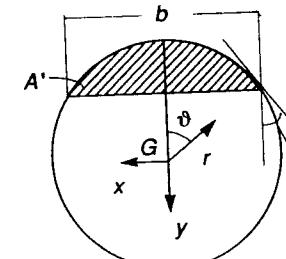


Figura S7

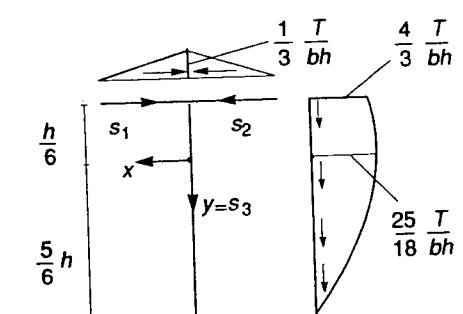


Figura S8

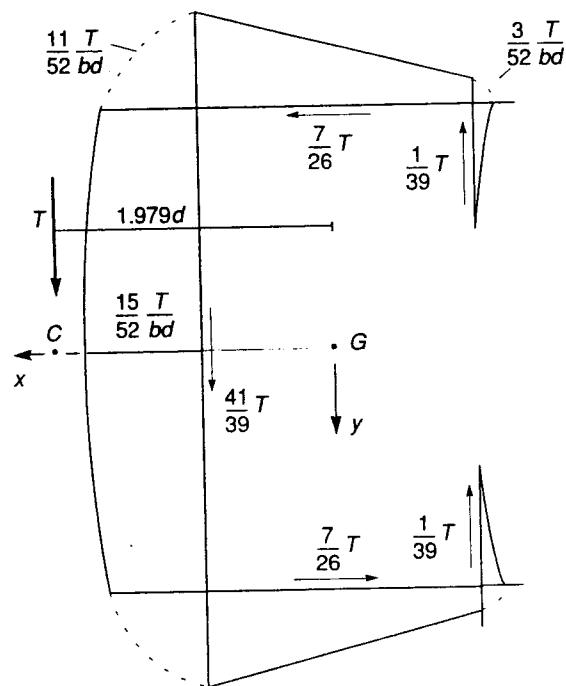


Figura S9

$$5.12 \quad x_c = \frac{386}{195} d = 1.979 d$$

L'andamento delle tensioni tangenziali è riportato in Figura S9.

$$5.13 \quad I_x = \frac{3}{32} b h^3; \quad J = \frac{5}{6} b^3 h$$

tensioni da taglio: $\tau = \frac{16}{3} \frac{F}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ nella flangia di sinistra

$\tau = \frac{16}{3} \frac{F}{b h^3} \left(\frac{h^2}{16} - y^2 \right)$ nella flangia di destra

Posizione del centro di taglio: $\eta = \frac{8}{9} h$ (vedi Figura S10)

Momento torcente: $M_t = -\frac{8}{9} F h$

$$\tau_{\max}^{(\text{taglio})} = \frac{4}{3} \frac{F}{b h} = .089 \frac{F}{b^2}; \quad \tau_{\max}^{(\text{tors.})} = \frac{|M_t| b}{J} = 1.350 \frac{F}{b^2}; \quad \tau_{\max} = 1.439 \frac{F}{b^2}$$

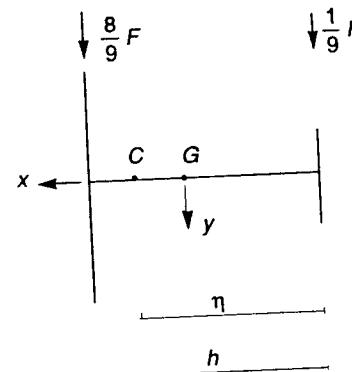


Figura S10

$$5.14 \quad T = F; \quad M_t = -\frac{F d}{\sqrt{2}}; \quad \tau_{zz}^{(\text{taglio})} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{F}{b d^3} \left(s d - \frac{s^2}{2} \right); \quad \tau_{zz}^{(\text{tors.})} = .374 \frac{F}{b d}$$

$$\tau_{\max} = \tau_{zz}^A = (1.061 + .374) \frac{F}{b d} = 1.435 \frac{F}{b d}$$

Gli andamenti delle tensioni tangenziali sono illustrati in Figura S11.

$$5.15 \quad I = \frac{2}{3} b d^3 = 1.067 \times 10^9 \text{ mm}^4; \quad \sigma^A = \frac{W}{I} \frac{d}{\sqrt{2}} = 198.8 \text{ MPa}$$

$$\tau^A = 1.435 \frac{F}{b d} = 71.75 \text{ MPa} \quad (\text{vedi esercizio 5.14})$$

Tresca: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 245.2 \text{ MPa}; \quad s = 1.020$

H.H.M.: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 234.4 \text{ MPa}; \quad s = 1.067$

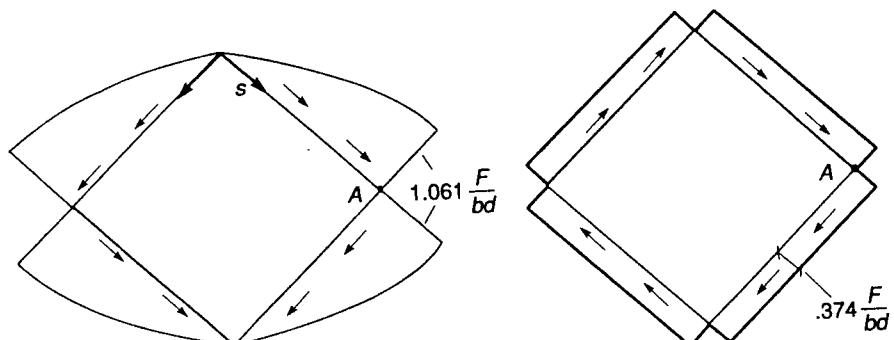


Figura 5.S11

- 5.16 All'incastro: momento flettente $M_f = Fl_1 = 300 \times 10^3$ Nmm
 momento torcente $M_t = Fl_2 = 150 \times 10^3$ Nmm
 azione tagliante $T = -F = -1500$ N

$$I = \frac{1}{4} \pi R^4 = 19.17 \times 10^3 \text{ mm}^4; \quad J = \frac{1}{2} \pi R^4 = 38.35 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max}^{(\text{fless.})} = \frac{M_f R}{I} = 195.6 \text{ MPa}; \quad \tau_{\max}^{(\text{tors.})} = \frac{M_t R}{J} = 48.89 \text{ MPa}$$

$\tau^{(\text{taglio})} = 0$ dove σ è massimo.

Tresca: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 218.7$ MPa; $s = 1.143$

H.H.M.: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 213.2$ MPa; $s = 1.173$

- 5.17 Barra 1: $M_t = W$ (mom. torcente); barra 2: $M_f = -W$ (mom. flettente)

$$\text{Rotazione all'estremo della barra 1: } \Theta = \frac{M_t l_1}{GJ} \quad (G = 76923 \text{ MPa})$$

$$\text{Spostamento verticale dell'estremo libero: } f = \Theta l_2 + \frac{W l_2^2}{2EI} = .404 \text{ mm}$$

CAPITOLO 6

$$6.1 \quad 0 \leq P \leq \frac{6}{5} A\sigma_0 = P_E: \quad N_1 = \frac{5}{6} P; \quad N_2 = \frac{1}{3} P; \quad N_3 = -\frac{1}{6} P$$

$$\delta_1 = \frac{5}{6} \frac{P\ell}{EA}; \quad \delta_2 = \frac{1}{3} \frac{P\ell}{EA}; \quad \delta_3 = -\frac{1}{6} \frac{P\ell}{EA}$$

$$\frac{6}{5} A\sigma_0 \leq P \leq \frac{3}{2} A\sigma_0 = P_L: \quad N_1 = A\sigma_0; \quad N_2 = 2(P - A\sigma_0); \quad N_3 = -(P - A\sigma_0)$$

$$\delta_1 = 5 \frac{(P - A\sigma_0)\ell}{EA}; \quad \delta_2 = 2 \frac{(P - A\sigma_0)\ell}{EA}; \quad \delta_3 = -\frac{(P - A\sigma_0)\ell}{EA}$$

$$6.2 \quad a): \quad \bar{S}_1 = -1/11, \quad \bar{S}_2 = 3/11; \quad \bar{u} = 9/22$$

$$b): \quad \bar{S}_1 = -4/55, \quad \bar{S} = 12/55; \quad \bar{u} = 84/55$$

$$6.3 \quad p = -0.00029 \text{ (accorciamento); } \bar{\sigma} = 59 \text{ MPa (trazione)}$$

$$6.4 \quad p = -0.00048 \text{ (accorciamento); } \bar{\sigma} = 99 \text{ MPa (trazione)}$$

- 6.5 a): per sola temperatura, gli sforzi si ottengono ponendo nelle (4.137) $\Theta_a = \Theta/(1-\nu)$ e $\Theta_b = 0$. Risulta, per $\beta = 2$

$$S_r = -\Theta \left(\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2} - 1.082 \ln \varrho \right); \quad S_\theta = -\Theta \left(\frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2} - 1.082(1 + \ln \varrho) \right)$$

$$S_z = -\Theta(1.306 - 2.164 \ln \varrho)$$

Il limite di snervamento viene raggiunto per $\varrho = 1$, dove

$$S_r = 0, \quad S_\theta = -0.918\Theta, \quad S_z = -1.306\Theta$$

La condizione critica è quindi $|S_z| = 1.306\Theta = 1$, da cui $\Theta_E = .766$

b): gli sforzi residui dovuti alla pressione si ottengono dalle (6.104) e risultano, nel caso in esame

$$\bar{S}_r = \ln \varrho + .832 \frac{1 - \varrho^2}{\varrho^2}; \quad \bar{S}_\theta = 1 + \ln \varrho - .832 \frac{1 + \varrho^2}{\varrho^2};$$

$$\bar{S}_z = \frac{2}{3} \ln \varrho - .221 \quad (1 \leq \varrho \leq 1.5)$$

$$\bar{S}_r = -.073 \frac{4 - \varrho^2}{\varrho^2}; \quad \bar{S}_\theta = .073 \frac{4 + \varrho^2}{\varrho^2}; \quad \bar{S}_z = .049 \quad (1.5 \leq \varrho \leq 2)$$

a questi valori vanno sovrapposti gli sforzi termici (A.1). Il primo snervamento si verifica ancora per $\varrho = 1$, dove

$$S_r = 0; \quad S_\theta = -(.664 + .918\Theta); \quad S_z = -(0.221 + 1.306\Theta)$$

La condizione critica è adesso $|S_\theta| = .918\Theta + .664 = 1$, da cui $\Theta_E = .336$.

Si osservi come le tensioni residue abbassino il limite elastico

$$6.6 \quad M_t = 2\pi \left\{ \frac{\tau_0 R^3}{3} - \frac{\tau_0^4}{12(G\beta)^3} - \frac{G\beta R^4}{64} \right\} \quad (\beta \geq \tau_0/RG)$$

$$M_{tE} = \frac{15}{32} \tau_0 \pi R^3, \quad M_{tL} = \frac{7}{12} \tau_0 \pi R^3 \rightarrow f = \frac{M_{tL}}{M_{tE}} = 1.244$$

$$6.7 \quad M_{tL} = \frac{1}{12} a^3 \tau_0$$

$$6.7 \quad \pi = .06 \sqrt{3} \left(\sqrt{3} \frac{\tau}{\sigma_0} - 1 \right)^{5/2} \quad (\tau \geq \sigma_0/\sqrt{3}); \quad \tau = .8\sigma_0 \rightarrow \pi = .0096$$

Indice analitico

A

Airy, funzione di 224
analoga
 del cumulo di sabbia 403
 della membrana 311, 403
 idrodinamica 311
anisotropi, legami 149
area settoriale 318
articolati, sistemi 58
asse neutro 288, 292, 294
associato, legame 173
atto di moto
 deformativo 99
 dell'intorno infinitesimo 97
 rigido 53, 98
 virtuale 100
autotensioni 46
azione assiale 44, 233, 278, 285, 286
azione tagliante 44, 234, 237, 278,
 328
azioni interne 44, 278
 diagrammi delle 47

B

barreling 25
Beltrami
 criterio di 154
 equazioni di Mitchell e - 210
Bernoulli-Navier, legge di 291
Betti, teorema di 266, 330
Boussinesq 213, 252, 258
Bredt, formula di 325

C

calcolo a rottura 69
Capurso-Maier, teoremi di 373
Castigliano, teoremi di 266
Cauchy
 continuo di 75
 sforzo di 76
Ceradini, teorema di 379
cilindro piano assialsimmetrico 238,
 385
cinematicamente ammissibile 100,
 259, 368
Clapeyron, teorema di 265
coazione, stato di 46, 237, 247, 407
collasso
 carico di 20, 388, 400
 meccanismo di 368
Colonnelli, approccio alla 377
condizioni di plasticità 169, 174
 di Hüber-Henry-von Mises 175,
 410, 416
 di Tresca 176, 386
 regolare 176, 365
 singolare 176
congruenza 21, 96
 interna (equazioni di) 121
contrazione trasversale, coefficiente di
 24, 145
Cosserat, corpi di 76
costanti elastiche 144, 147
 definizione ingegneristica 145
Coulomb, elemento di 186
creep 134, 190

funzione di 197
secondario 192
tensore di 201
criterio di resistenza
di Beltrami 154
di Galileo-Rankine-Navier 152, 352
di Grashof-de Saint Venant 154
criterio di snervamento
di Hüber-Henky-von Mises 158, 175, 353
di Tresca-Guest 157, 176, 244, 352
curva limite 163
curvatura flessionale 290, 298, 357

D

De Saint Venant
criteri di Grashof e 154
principio di 213
problema di 277
deformazione
assiale 298
diretta 22, 106, 115
gradiente di 106
logaritmica 26, 104
metrica della 106
velocità di 99
viscosa 195
volumetrica 120, 147, 196, 200, 201
deformazione plastica efficace 411
deformazioni
anelastiche 142
deviatoriche 156, 179, 196
elastiche 142
finite 103
generalizzate 298, 356
permanenti 132
plastiche 132, 173
principali 119, 154
tensore delle piccole 113
termiche 148, 185, 220, 222, 249
deviatore
di deformazione 120, 196, 200, 201
di sforzo 82, 196, 200, 201

dilatazione termica, coefficiente di 148
direzione principali
di deformazione 119
di sforzo 81
Dirichlet, problema di 284, 303, 402
Drucker, postulato di 182, 366
duttile, comportamento 19, 156

E

effetto P- Δ 68
elasticità, teoria matematica della 69
elastico, comportamento 131
legame 137
limite 135, 151
elastico-lineare
comportamento 22
legame isotropo 144
legami anisotropi 149
elasto-plastico, comportamento 22, 132
elasto-plastico incrementale
legame 164, 366
legame associato 173
legame non associato 178
problema 365
elasto-viscoplastico
comportamento 193
modello reologico 193
energia complementare 139
energia complementare totale 259,
261
energia di deformazione 137
energia di distorsione 158
energia dissipata 176
energia potenziale totale 259, 260
equilibrio
condizioni al contorno 94
condizioni per deformazioni finite
110
equazioni indefinite di 93
equivalenza elastica, principio di 213
euleriana, misura di
deformazione 104

F

fatica 136
flessione
con taglio costante 328
deviata 291
retta 287
fragile, comportamento 17, 151
frattura, meccanica della 136

G

Galileo-Rankine-Navier, criterio di
resistenza di 152
Grashof-De Saint Venant, criterio di
resistenza di 154
Greenberg, teorema di 368
Green-Lagrange, tensore di 28, 105

H

Hellinger-Reissner 270
Herrmann, teorema di 275
Hodge, teorema di Prager e 370
Hüber-Henky-von Mises, criterio di
158, 175, 353
Hu-Washizu, teorema di 274

I

idrostatica, pressione 156
incompressibile, materiale 147, 200,
201
incrudimento 166, 413
ciclico 171, 178
cinematico 171, 176
coefficiente di 178
di Koiter 171
isotropo 171, 176, 410, 416
lineare 170, 399, 414
matrice di 170
negativo (softening) 167, 180
inflessione, piano di 289, 294

influenza, coefficienti di 267
ingobbamento, funzione di 299, 316,
325
instabilità 69
invarianti
del deviatore di sforzo 83, 158
di deformazione 119, 144
di sforzo 81
iperelastico, legame 139
ipostatica, trave 50
ipostatica, trave 52
isostatica, trave 50
isostatico, problema 40
isotropia 137, 144, 196

J

Jourawsky, trattazione di 331

K

Kelvin-Voigt, modello di 189
Kirchhoff, teorema di 209, 214, 279

L

labilità 52
lagrangiana, misura di deformazione
105
Lamé, costanti di 144
lavori virtuali, principio dei 113, 208
lavoro di deformazione 265, 296,
309, 346
lavoro mutuo 266, 330
lavoro plasticò 176, 412
legame costitutivo 22, 129
legame diretto 140, 166, 179
legame inverso 140, 166, 179

M

Maier, teoremi di Capurso e 373
Mariotte, formula di 42
Maxwell, modello di 189, 198

memoria
del materiale 189, 200
funzioni di 201

Mitchell-Beltrami, equazioni di 210

modulo di elasticità
diretto (di Young) 145
tangenziale 145

Mohr

criterio di 163
diagramma di 87, 91

momento flettente 44, 233, 235, 237,
278, 285

momento torcente 44, 278, 298, 391,
394

limite 400, 402

N

Navier
equazioni di 210, 272
legge di Bernoulli e 291

Neumann-Dini, problema di 284, 300

nocciolo centrale d'inerzia 295

normalità, legge di 174, 365

O

olonomo
comportamento 409

legame 414

percorso 408, 417

ortotropo, legame 149

P

percorso
olonomo 408, 417

ottimale 417

radiale 414

Piola-Kirchhoff, tensore di 28, 110

plasticità

funzioni di 169, 174

ideale 22, 166, 175, 413

plastico, comportamento 132

potenze virtuali, principio delle 26,
100

potenziale plastico 179

Prager, regole di consistenza di 174

Prager-Hodge, teorema di 370

Prandtl-Reuss, legge di 410

principi variazionali 260, 261, 269

problema piano 215

negli sforzi 220

nelle deformazioni 218

R

reciprocità, teorema di 266, 330

Reissner 270

reologici, modelli 186

resistenza elastica, criteri di 151

reticolari, travature 59

rilassamento 134, 190

funzione di 198

tempi di 198

tensore di 200

risposta

a lungo termine 197

funzioni di 132

ritardo, tempi di 197

rotazione

tensore di 114

velocità di 99

rottura

calcolo a 69

del materiale 135

duttile 135

fragile 135

S

scorrimento

angolare 31, 108, 115

legge di 174

medio 347, 349

sforzi

generalizzati 356

principali 81, 152, 154, 157

residui 405

tensore degli 77

sforzo

componente vettoriale di 77

efficace 410

funzione (potenziale) di 222, 228,
272, 302

idrostatico 82, 148, 196, 200, 201

nominale 24, 34

normale 24, 86, 90

piano 85

stati di omogenei 41

stato di 39, 75

tangenziale 31, 33, 86, 90, 331

vero 26, 34

snervamento

criteri di 156, 175

limite di 19, 135, 157, 165

softening 167

critico e sub-critico 167, 180

sollecitazione, piano di 287

spin, tensore di 99

spostamenti, ipotesi di piccoli 112

spostamento, gradiente di 113

stabilità del materiale 183

staticamente ammissibile 100, 259,
370

stretch 106

stretching, tensore di 99

strizione 25

T

taglio

area di 347

centro di 329, 341

fattore di 347, 349

problema del 328

tangente, modulo 166

tangenti, rigidezze 180

torsione

centro di 308, 330

circolare 306, 396

elasto-plastica 394

ellittica 304

problema della 298

trasversalmente isotropo, legame 149

trave 44

piana 46

Tresca-Guest, criterio di 157, 176,
244, 352

V

variabili interne 132, 170, 175

velocità, gradiente di 98

vincolari, reazioni 47

vincoli 47

virtuale, atto di moto 100

virtuali

principio dei lavori 113, 208

principio delle potenze (velocità)
100

viscoelastico

comportamento 189

modelli reologici 188

viscoelastico lineare (legame)

formulazione differenziale 197

formulazione integrale 200

viscosità, costante di 188

viscoso

comportamento 134

modello 188

Voigt, modello di 189, 197

volumetrico, modulo 148

Y

Young, modulo di 145

