

基于 MATLAB 编程的弗兰克 - 赫兹实验数据处理方法探讨*

李 立 张皓晶 张 雄

(云南师范大学物理与电子信息学院 云南 昆明 650500)

(收稿日期:2019-05-29)

摘 要: 弗兰克 - 赫兹实验是理工科近代物理实验教学中的一个重要实验,由于弗兰克 - 赫兹实验手动测量数据时,所得数据量大而且精度不高,学生人工处理数据的过程中往往面临繁、难等问题.本文提出运用 MATLAB GUI 的可视化,通过自动读取人工测量实验数据,进行图像拟合,进而使用逐差法和最小二乘法进行数据处理.教学实践表明,该方法不仅能够有效地解决实验数据处理中的繁琐、困难等问题,还能够充分发挥学生的主动性,使学生对实验原理的本质和实验数据的处理有更加深刻的理解和思考,提高物理实验教学的有效性.在教学实践中,使用该方法,不仅有了更多的时间综合训练学生的实验操作能力,同时也提高了实验教学的有效性,创新了传统实验教学的复杂数据处理过程,实验教学效果较佳.

关键词: 弗兰克 - 赫兹实验 数据处理 MATLAB GUI 可视化 辅助教学

1 引言

近代物理实验是物理本科专业教学的一门主干基础课程,是介于普通物理实验和物理专题研究之间的重要环节.

随着信息技术的不断发展,用信息技术辅助教学,已经成为教学过程中突破重难点,提高教学效率的重要技术性手段.中外学者在近期的研究中提出:“信息化教学是提高物理实验教学的重要手段之一,现代教师应实时掌握新的信息技术,充分利用信息化技术进行教学,为教学增加趣味性,提高学生的动手能力,使学生更加直观、具体和深刻地认识到物理实验的本质,促进学生思维发展”^[1,2].

作为原子物理发展史中一个重要的物理实验,弗兰克 - 赫兹实验是理工科大学生近代物理实验课中的必修实验,弗兰克 - 赫兹实验为能级的存在提供了直接的证据^[3].在各大高校开设的近代物理实验中,该实验由于手动测量所获得的实验数据量大而且不精确,学生手工处理实验数据繁琐和困难.因此在研究多篇关于弗兰克 - 赫兹实验数据处理的相关文章之后,基于对各种数据处理方法进行总结和对比,本文结合 MATLAB 的强大计算能力和可视

化性能,读取人工测量实验数据,并对图像进行拟合,进而使用逐差法和最小二乘法进行数据处理.

2 实验原理

弗兰克 - 赫兹实验原理如图 1 所示^[4,5],阴极 K, 极板 A, G_1 和 G_2 分别为第一、第二栅极.

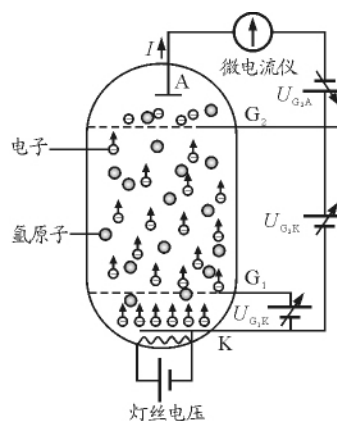


图 1 弗兰克 - 赫兹实验原理图

$K-G_1-G_2$ 加正向电压,为电子提供能量. U_{G_1K} 的作用主要是消除空间电荷对阴极电子发射的影响,提高发射的效率. G_2-A 加反向电压,形成拒斥电场.电子从 K 发出,在 $K-G_2$ 区域获得能量,在 G_2-A 区域损失能量.如果电子进入 G_2-A 区域时动能大

* 国家教育部高等学校本科“物理学专业综合改革试点”项目资助,项目编号:ZG489

作者简介:李立(1995-),男,在读研究生,研究方向为学科教学(物理).

通讯作者:张皓晶(1982-),男,副教授,研究生导师,研究方向为天体物理和学科教学(物理).

于或等于 eU_{G_2A} , 就能到达极板形成板极电流 I 。

电子在不同区域的情况:

(1) $K-G_1$ 区域: 电子迅速被电场加速而获得能量。

(2) G_1-G_2 区域: 电子继续从电场获得能量并不与氩原子碰撞。当其能量小于氩原子第一激发态与基态的能级差 $\Delta E = E_2 - E_1$ 时, 氩原子基本不吸收电子的能量, 碰撞属于弹性碰撞。当电子的能量达到 ΔE , 则可能在碰撞中被氩原子吸收这部分能量, 这时的碰撞属于非弹性碰撞, ΔE 称为临界能量。

(3) G_2-A 区域: 电子受阻, 被拒斥电场吸收能量。若电子进入区间时的能量小于 eU_{G_2K} 则不能到达极板 A。

由此可见, 若 $eU_{G_2K} < \Delta E$, 则电子带着 eU_{G_2K} 的能量进入 G_2-A 区域。随着 U_{G_2K} 的增加, 电流 I 增加(如图 2 中 Oa 段)。若 $eU_{G_2K} = \Delta E$ 则电子在达到 G_2 处刚好够临界能量, 不过它立即开始消耗能量。继续增大 U_{G_2K} , 电子能量被吸收的概率逐渐增加, 板极电流逐渐下降(如图 2 中 ab 段)。继续增大 U_{G_2K} , 电子碰撞后的剩余能量也增加, 到达极板的电子又会逐渐增多(如图 2 中 bc 段)。若 $eU_{G_2K} > \Delta E$, 则电子在进入 G_2-A 区域之前可能 n 次被氩原子碰撞而损失能量。板极电流 I 随加速电压 U_{G_2K} 变化曲线就形成 n 个峰值, 如图 2 所示。相邻峰值之间的电压差

ΔU 称为氩原子的第一激发电位。氩原子的第一激发态与基态能级差为 $\Delta E = e\Delta U$ 。

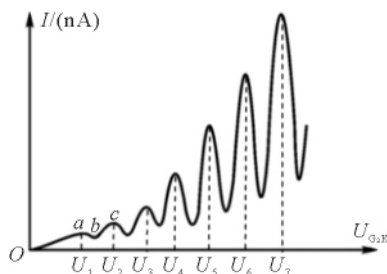


图 2 弗兰克-赫兹实验 $I-U_{G_2K}$ 曲线

3 软件界面及实验数据处理

3.1 软件界面

MATLAB 作为一款科学计算软件广泛地被科研人员所接受。其强大的数据计算能力、图像可视化界面及代码的可移植性受到了广大用户的认可。在图形用户界面(Graphical User Interface, GUI)设计领域, MATLAB 同样有着强大的设计能力, 从而被广泛地应用于 GUI 的设计。MATLAB GUI 是一个可视化的软件显示平台, 一旦程序设计完成后, GUI 采用定参数化的方法, 用户不需要修改程序设计部分, 而只需要在 GUI 界面中修改设定的参数即可, 因此 GUI 的人机交互性很好^[6]。基于此本文使用 MATLAB GUI 可视化编程对实验数据采用逐差法和最小二乘法进行数据处理和实验数据的图像拟合。如图 3 所示软件界面包括数据读取表、图像绘制框、拟合计算框、电压峰值、第一激发电压 U 、频率 f 、波长 λ , 以及图像显示框。

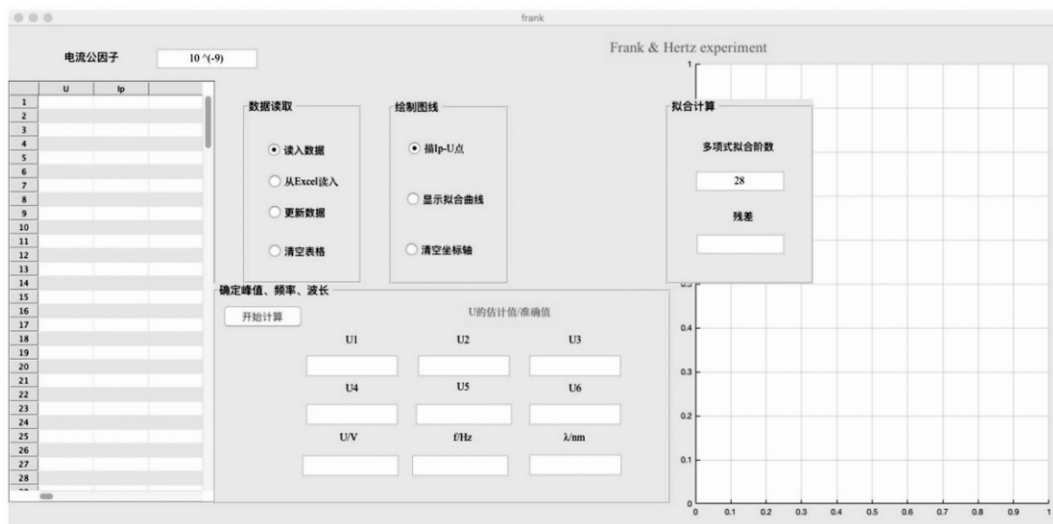


图 3 弗兰克-赫兹实验软件界面

3.2 实验数据处理

3.2.1 逐差法处理数据

逐差法是处理数据的一种常用方法^[7]. 当两变量有线性关系, 即

$$y = A + Bx$$

通过 N 组测量值, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 用逐差法拟合直线方程时, 基本假定是: 自变量 x 的测量值 x_i 是准确的, 或其不确定度远小于因变量 y 的测量值 y_i 的不确定度, 拟合是在 y 方向进行; 自变量 x 从小到大以等间距 d 值变化, 即 $d = x_{i+1} - x_i$; N 是偶数, 即 $N = 2n$, (n 是正整数), 拟合直线的斜率估值计算方法是: 首先把 N 组测量值 y_i 前后对半分, 然后两组相对应的项逐项相减, 即

$$Z_i = y_{n+i} - y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

再求 Z_i 的算术平均值

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2)$$

导入数据后, 点击开始计算按钮, 将会在显示框得到拟合数据图线的 6 个加速电压 U_{G2K} 的峰值, 同时会结合逐差法求得氩原子的第一激发电位、氩原子受激后回到基态辐射出的光波的波长 λ 以及频率 f , 如图 4 所示.

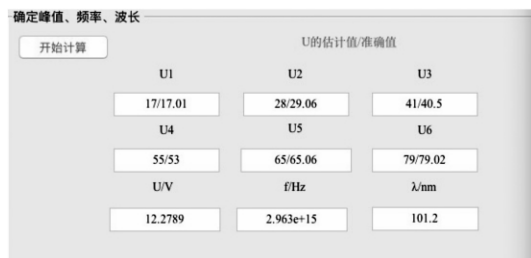


图 4 计算氩原子第一激发电位

根据软件对实验数据图像拟合之后, 可以得出所有峰谷的值, 共得 6 个峰值进行计算, 列出峰值序号与对应加速电压之间的对应关系, 如表 1 所示.

表 1 峰值序号与对应加速电压

峰值序号	1	2	3	4	5	6
U_{G2K}/V	17.01	29.06	40.50	53.00	65.06	79.02

根据逐差法计算, 氩原子的第一激发电位

$$U = \frac{1}{9} [(79.02 - 17.01) + (65.06 - 29.06) + (53.00 - 40.50)] V = 12.28 V$$

则第一激发能

$$\Delta E = eU = 12.28 \text{ eV}$$

根据 $h\nu = eU$, 及 $c = \lambda\nu$ 得氩原子受激后回到基态辐射出的光波波长 λ

$$\lambda = \frac{hc}{eU} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.60 \times 10^{-19} \times 12.28} \text{ m} = 1.012 \times 10^{-7} \text{ m} = 101.2 \text{ nm}$$

3.2.2 最小二乘法处理数据

假设变量 x 与 y 的关系是线性的, 回归方程的形式^[8]

$$y = a_0 + a_1 x$$

测得一组数据 $x_i, y_i (i = 1, 2, 3, \dots, k)$, 由于测得的 x_i 和 y_i 总是不可能完全落在 $y = a_0 + a_1 x$ 上, 对于与某一个 x_i 相对应的 y_i , 它用回归法求得的直线在 y 方向的偏差为

$$\epsilon_i = y_i - y = y_i - a_0 - a_1 x_i \quad (3)$$

即使使 $\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2$ 为最小, 写成

$$\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \quad (4)$$

为了求 $\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2$ 的最小值, 对 a_0, a_1 求偏微商得

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \left(\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 \right) = -2 \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 \right) = -2 \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0 \quad (6)$$

整理后写成

$$\bar{x} a_1 + a_0 = \bar{y} \quad (7)$$

$$\bar{x}^2 a_1 + \bar{x} a_0 = \overline{xy} \quad (8)$$

求得

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \quad (9)$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} \quad (10)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{k - 2}} \quad (11)$$

式中 S 叫做 y_i 的剩余标准偏差.

一元线性回归方程系数的方差

$$S_{a1}^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})} \right]^2 S^2 = \frac{S^2}{l_{xx}} \Rightarrow S_{a1} = \frac{S}{\sqrt{l_{xx}}} \quad (12)$$

$$S_{a0}^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{k} - \frac{\bar{x} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2} \right] S^2 = \left(\frac{1}{k} + \frac{\bar{x}^2}{l_{xx}} \right) S^2 = \frac{\bar{x}^2}{l_{xx}} S^2 \Rightarrow S_{a0} = \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}} S \quad (13)$$

一元线性回归的相关系数

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)(\bar{y}^2 - \bar{y}^2)}} \quad (14)$$

将数据导入后,拟合 $I-U$ 曲线,经经验得,当以 28 次多项式拟合时,得到的函数图线能够较好地符合所需的曲线形状.因此多项式的拟合阶数取为 28 次.得到的函数图像如图 5 所示.

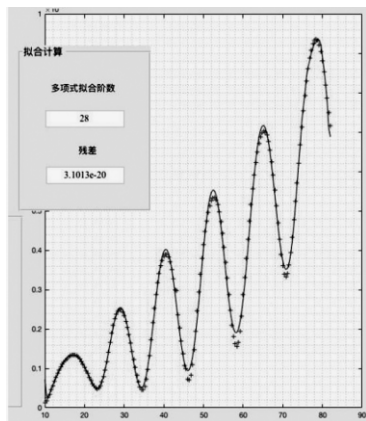


图 5 由实验数据拟合的 $I-U$ 图像

然后根据图像和已测得的相关数据,可以得到手动测量的电流峰值及其对应的电压值如表 2 所示.

表 2 电流峰值及其对应电压值

n	1	2	3	4	5	6
U_{G2K}/V	17.01	29.06	40.50	53.00	65.06	79.02
$I/(\times 10^{-9} A)$	36.1	48.7	61.2	72.5	83.4	106.1

设加速电压 U_{G2K} 和氩原子的第一激发电位 ΔU

满足线性关系

$$U_{G2K} = a + n\Delta U$$

其中以 n 为自变量, ΔU 氩原子的第一激发电位为斜率, a 为截距, 满足 $y = a_0 + a_1 x$ 的线性关系确, 如图 6 所示. 此时令

$$\begin{aligned} U_{G2K} &= y & a &= a_0 \\ n &= x & \Delta U &= a_1 \end{aligned}$$

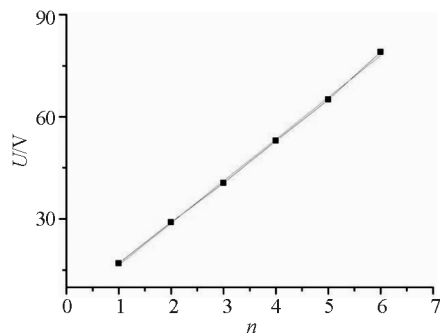


图 6 拟合直线

由式(9) ~ (14) 得

$$a_1 = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 12.301\ 43 \approx 12.30$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = 4.22$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{k - 2}} = 0.960\ 95$$

$$S_{a1}^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})} \right]^2 S^2 = \frac{S^2}{l_{xx}} \Rightarrow$$

$$S_{a1} = \frac{S}{\sqrt{l_{xx}}} = 0.181\ 03$$

$$S_{a0}^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{k} - \frac{\bar{x} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2} \right] S^2 =$$

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{\bar{x}^2}{l_{xx}} \right) S^2 = \frac{\bar{x}^2}{l_{xx}} S^2 \Rightarrow S_{a0} = \frac{\sqrt{\bar{x}^2}}{\sqrt{l_{xx}}} S = 0.704\ 99$$

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)(\bar{y}^2 - \bar{y}^2)}} = 0.998\ 92$$

$$P_r = 1 - \frac{1}{2n} = 91.67\%$$

氩原子的第一激发电位

$$\Delta U = (12.30 \pm 0.18) \text{ V}$$

氩原子的第一激发能

$$\Delta E = e\Delta U = (12.30 \pm 0.18) \text{ eV}$$

4 总结与展望

本文通过使用 MATLAB GUI,很好地解决了弗兰克-赫兹实验手动测量时获得数据量大,精度低,数据处理繁琐、复杂等问题.一方面创新了物理实验数据处理方式,提高了实验数据处理精度,另一方面充分强调学生在课堂的主导地位,加入编程的思想,有意识地开发了学生的模型建构思想和提升学生的编程能力,同时使教学效果得到明显提高.教学实践表明,该方法不仅使学生对实验原理的本质和实验数据的处理有更加深刻的理解和思考,提高了物理实验教学的有效性,而且基于 MATLAB 安装和操作的简易性,所以使得该方法在教学实践中更加易于推广,同时此教学方式的引入,也是推动国

家教育信息化的重要一步.

参 考 文 献

- 1 Castro-Palacio J C, Velázquez-Abad L, Gimenez M H, et al. Using a mobile phone acceleration sensor in Physics experiments on free and damped harmonic oscillations[J]. American Journal of physics, 81, (2013), 472 ~ 475
- 2 HEERMANN, Dieter W. TEACHING SCIENCE USING A MOBILE PHONE[J]. International Journal of Modern Physics C, 2002, 13(10): 1393 ~ 1398
- 3 杨福家. 原子物理学(第4版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008
- 4 余虹. 大学物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2001
- 5 褚圣麟. 原子物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979
- 6 余胜威. MATLAB GUI 设计入门与实战[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016
- 7 高永祥. 对逐差法拟合直线的讨论[J]. 大学物理, 2010, 29(11): 31 ~ 34
- 8 张雄. 物理实验设计与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2001

Discussion on Processing Method of Frank-Hertz Experimental Data Based on MATLAB Programming

Li Li Zhang Haojing Zhang Xiong

(School of Physics and Electronic Information, Yunnan Normal University, Kunming, Yunnan 650500)

Abstract: The Frank-Hertz experiment is an important experiment in the teaching of modern physics experiments in science and engineering. However, due to the manual measurement of data by Frank-Hertz experiment, the obtained data is large and intensive, which is often used in the process of manual processing of data by students. Faced with the problems of complexity and difficulty, this paper proposes the visualization of MATLAB GUI, automatically reads the artificial measurement experimental data, performs image fitting, and then uses the difference method and the least squares method for data processing. Teaching practice shows that this method can not only effectively solve the cumbersome and difficult problems in the processing of experimental data, but also give full play to the initiative of students, so that students have a deeper understanding and thinking on the nature of experimental principles and the processing of experimental data. To improve the effectiveness of physics experiment teaching. The use of this method not only has more time to comprehensively train the experimental operation ability of students, but also innovates the complex data processing process of traditional experimental teaching, and the experimental teaching effect is obviously improved.

Key words: Frank-Hertz experiment; data processing; MATLAB GUI; visualization; auxiliary teaching