

电阻应变片传感器应力公式推导

李均之 沈 壮

(地震研究室)

本文介绍了四种电阻应变片传感器及其主应力公式,经实验证明,公式是准确的。

The Derivation of the Stress Formulas of the Electric-Resistance Strain Gauge Transducer

Li Jun-zhi Shen zhuang

Abstract

This paper describes four kinds of electric-resistance strain gauge transducers and the formulas of their principal stresses. Experience has shown that those formulas are accurate.

一、前 言

测量地应力对预报地震三要素是一个有效的方法。经过几年实践证明,电阻应变片传感器是一种可靠的地应力测量装置。它有下列优点:

(1) 在地应力测量范围内,应力与应变成正比;当外力去掉后,应变可以完全恢复。(2) 它有简便的应力计算公式。

用测量地应力预报地震,从实际效果看,对于发震时间、震级是比较准确,对于发震地点尚需用实践进一步证明。从现有理论可知,在仅考虑简单均匀介质情况下,根据活动性断层破坏形式,可分三种情况,见下列主应力迹线图^[1]。

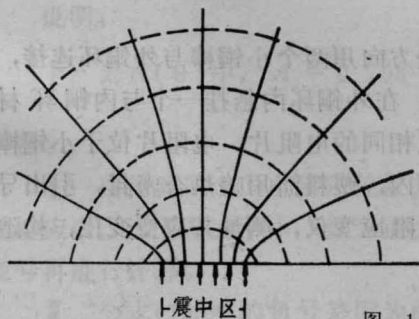


图 1

--- 最大主应力 σ_1 方向
—— 最小主应力 σ_2 方向
图 1 中 σ_2 指向震中

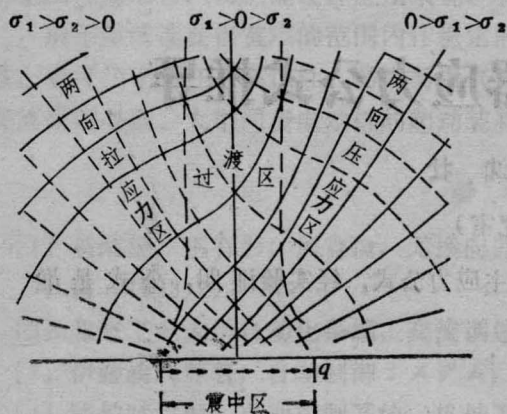


图 2

----- 最大主应力 σ_1 方向

————— 最小主应力 σ_2 方向

图 2 中: 两向压力区, σ_2 指向震中; 两向拉应力区,

σ_1 指向震中; 过渡区, 主应力不指向震中。

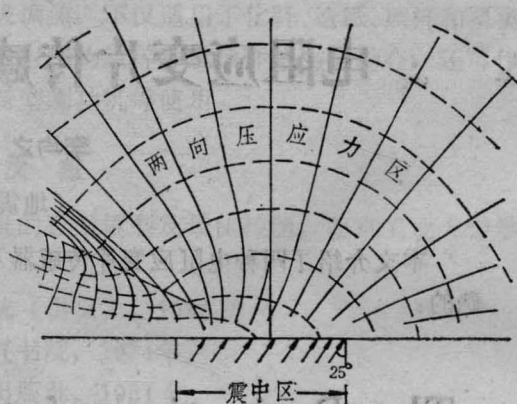


图 3

----- 最大主应力 σ_1 方向

————— 最小主应力 σ_2 方向

图 3 中: 应力指向震中情况与图 2 相同

由以上论述可知, 要确定震中位置, 必须计算测量点的两个主应力大小及方向, 这样才能判断出震中方向。再通过两个以上观测点的主应力方向交汇出震中位置。

我们所设计、制造的电阻应变片传感器, 以及根据测得应变导出的主应力大小及方向的公式满足上述理论要求。经过室内实验和实地应用, 效果都是较为理想的。

二、几种电阻应变片传感器的结构

传感器的材料采用弹性较好的磷铜。

1. GD—4型

该传感器的结构为: 三个内铜环, 每个内铜环沿直径方向用两个小铜棒与外铜环连接, 三对小铜棒方向分别为南北向, 南偏东 45 度向, 东西向, 在外铜环内悬挂一个与内铜环材料相同的铜片为补偿片(不受力)。铜片与铜环上均贴上相同的电阻片, 电阻片位于小铜棒轴线相垂直的内铜环外侧, 外铜环紧密地安装在软塑料筒内, 塑料筒用盖热合密封, 引出导线, 将此传感器埋入土体或岩石中, 用金属屏蔽线连接电阻应变仪, 测量其应变变化, 构造图见[2]。

2. GD—5型

为了使 GD—4 型在结构上更为合理, 将三个内铜环之小铜棒按 60° 均布在外铜环内, 其它皆与 GD—4 型相同。

3. GD—6型

为了进一步简化上述结构, 舍去三个内铜环, 在外铜环内侧沿周向直接贴电阻应变片,

电阻片的位置如图 4 所示。

4.1 GD-7 型

同 GD-6 型, 只是把电阻应变片按相间 120° 贴在外铜环内侧。

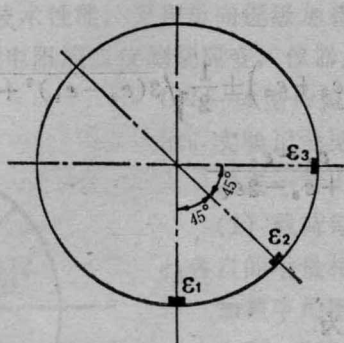


图 4

三、电阻应变片传感器应力公式推导

1. GD-4 型应力公式

详细推导请参见[2]。

将三个方向测得应变 ε_1 , ε_2 , ε_3 代入(5)式,

$$A\varepsilon = (\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \quad (5)$$

并联立求得

$$\sigma_1 = \frac{A}{4} \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 \right]} \right\} \quad (9)$$

$$\tan 2\theta = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (10)$$

说明:

I. 公式(9)中, $A = 0.758 \frac{R^2 E}{\delta a}$, R 为内铜环半径, δ 为内铜环厚度, a 为外铜环半径。

II. 由传感器上的电阻片位置知, 若在某内铜环小铜棒方向加压, 则由该环测得的应变为拉应变, 为了与力学中“拉为正、压为负”的规定一致, 需先将测得的应变 ε_1 , ε_2 , ε_3 变号再进行计算。

III. 公式(10)中的负号是因为由 ε_1 到 σ_1 方向之夹角为顺时针。由(10)式求出 θ 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内有二个解 θ_1 , θ_2 , 然而 θ_1 或 θ_2 与 ε_1 , ε_2 , ε_3 中代数值最大的接近者为 σ_1 方向, 另一角度为 σ_2 方向, θ 从 ε_1 量起, θ 为正, 逆时针量; θ 为负, 顺时针量。

2. GD-5 型应力公式

三个内铜环测得应变仍为 ε_1 , ε_2 , ε_3 , 代入公式(5)得

$$A\varepsilon_1 = (\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \quad (11)$$

$$A\varepsilon_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta + 120^\circ) \quad (12)$$

$$A\varepsilon_3 = (\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta + 240^\circ) \quad (13)$$

联立解出

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{A}{6} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \pm \frac{1}{2} \sqrt{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1)^2} \right] \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1} \quad (15)$$

公式说明与GD-4型相同。

3. GD-6型应力公式

距园孔中心为处 r 的应力公式为

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (b)$$

由虎克定律知

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \quad (c)$$

将(a)、(b)式代入(c)式, 并令 $r=a$, 得

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \right] \quad (16)$$

将测得环向应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 代入(16)式, 得

$$E\varepsilon_1 = (\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \quad (17)$$

$$E\varepsilon_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta + 45^\circ) \quad (18)$$

$$E\varepsilon_3 = (\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2(\theta + 90^\circ) \quad (19)$$

上三式联立求解得

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E}{4} \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 \right]} \right\} \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (21)$$

式中 E 为弹性系数, 公式说明同前。

4. GD-7型应力公式

把环向三个相间 120° 的电阻片所测得的应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 代入(16)式, 联立求得

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E}{6} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \pm \frac{1}{2} \sqrt{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1)^2} \right] \quad (22)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{3} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1} \quad (23)$$

中公式说明同上。

四、电阻应变片传感器的室内实验

1. 为了验证传感器的技术性能，采用单向逐级加载，载荷增量 $P=0.275$ 公斤，周围为空气介质，用 $YJD-1$ 型电阻应变仪测量应变，仪器最小应变读数为 5×10^{-6} 。现以 $GD-4$ 型传感器为例，在 ε_2 方向加载，如图 5 所示。实验记录见表一。

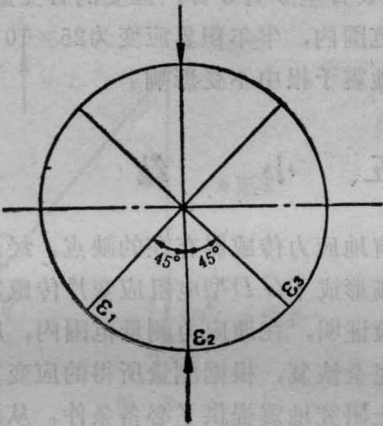


图 5

由表一看出：

(1) 载荷每增加（减小）一个 P 时， ε_1 ， ε_2 ， ε_3 各自的增量相近。

加载平均增量分别为 $\varepsilon_1 = -1.7 \times 10^{-6}$ ，
 $\varepsilon_2 = +77 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_3 = -4.1 \times 10^{-6}$ 。

卸载平均增量分别为 $\varepsilon_1 = +1.7 \times 10^{-6}$ ，
 $\varepsilon_2 = -76.8 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_3 = +3.3 \times 10^{-6}$ 。

加载增量与卸载增量近似相等。上述说明载荷与应变符合线性关系。

(2) 初读数

$\varepsilon_1 = +10 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = +40 \times 10^{-6}$ ，
 $\varepsilon_3 = +35 \times 10^{-6}$ 。

其卸载后的读数：

$\varepsilon_1 = +10 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = +40 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_3 = +30 \times 10^{-6}$ 。

说明卸载后应变基本恢复原读数。

表一

载 荷	应 变					
	$\varepsilon_1 \times 10^{-6}$		$\varepsilon_2 \times 10^{-6}$		$\varepsilon_3 \times 10^{-6}$	
初 载	+10	$\Delta \varepsilon_1$	+40	$\Delta \varepsilon_2$	+35	$\Delta \varepsilon_3$
P	+5	-5	+120	+80	+30	-5
$2P$	+2	-3	+200	+80	+25	-5
$3P$	+2	0	+278	+78	+20	-5
$4P$	+1	-1	+352	+74	+18	-2
$5P$	0	-1	+427	+75	+13	-5
$6P$	0	0	+502	+75	+10	-3
$5P$	0	0	+428	-74	+12	-12
$4P$	0	0	+352	-76	+15	+3
$3P$	+1	+1	+277	-75	+20	+5
$2P$	+3	+2	+200	-77	+23	+3
P	+5	+2	+120	-80	+25	+2
初 载	+10	+5	+ 40	-80	+30	+5
加载平均增量		-1.7		+77.0		-4.1
卸载平均增量		+1.7		-76.8		+3.3

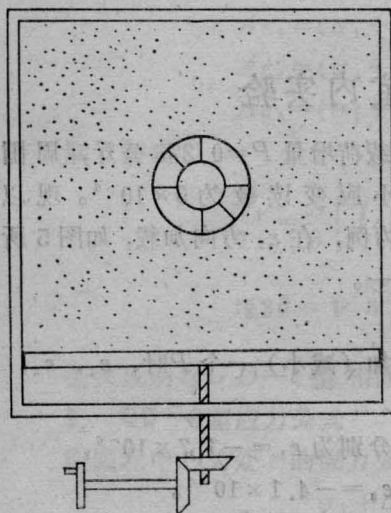


图 6

2. 为了验证公式的正确性,模拟传感器在土体中受力情况,其装置草图如图6所示。实验证明,公式是正确的,其主应力方向误差小于4度。

3. 悬空试验

将传感器悬放在铁筒内,埋入室外一米深的土体中,自81年3月9日至9月9日,应变的日变量很小,在仪器允许误差范围内,半年积累应变为 25×10^{-6} ,此种应变变化量在地震预报中不受影响。

五、小 结

为了克服现有地应力传感器存在的缺点,经过几年的不断改进,逐渐形成了GD型电阻应变片传感器。该传感器经室内实验证明,在地应力测量范围内,应力与应变成正比,线性关系较好;当外力去掉后,应变能完全恢复,根据测量所得的应变算出的主应力方向与实际方向误差在四度以内。它为从力学上研究地震提供了必备条件。从测得地应力曲线图上可以看出地震发展的趋势异常和确定地震发生的三要素,而且还可以根据地应力的突跳变化做出临震预报。现举二个应用的例子如下:

(一) 趋势异常

北京工业大学地震研究室在土层七米深处安装一个地应力传感器,从测得的地应变图(见图7)上看出它完成了一个地震。

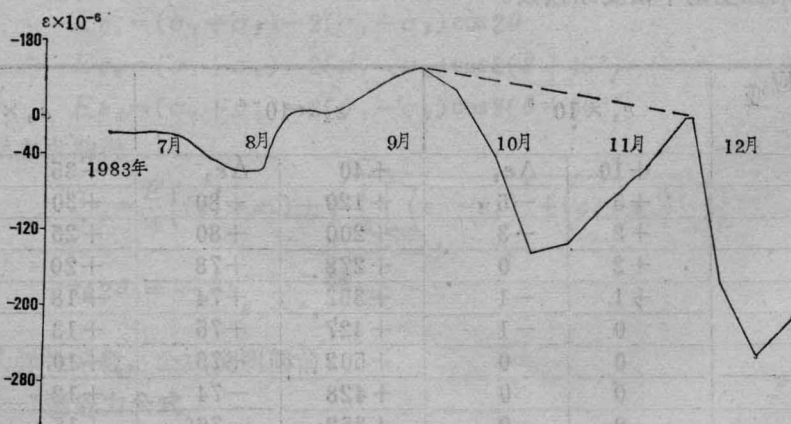


图 7

(1) 异常时间: 1982年9月20日至11月24日共65天。

(2) 震级: $M_s = 3.81 + 0.0091 \times 65 = 4.43$ 级(据地震地质大队公式)

相当于 $M_L = 4.9$ 级。

(3) 震中位置:

由工业大学所测得的主应力 $\sigma_1 = -2.7 \times 10^{-2} \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = -5.08 \times 10^{-2} \text{ kg/cm}^2$, 二向主应力皆为压应力, 故 σ_2 方向指向震中,

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{-202-50-2 \times (-124)}{-202-(-50)} \quad \theta = -0.75^\circ$$

σ_1 方向为北偏东 0.75° 。

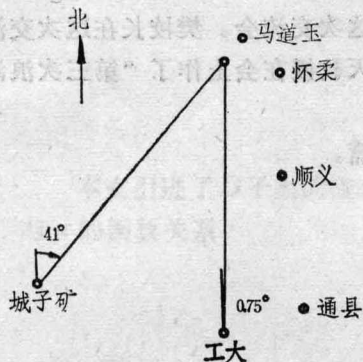


图 8

门头沟煤矿在三十米深的岩石处埋设该传感器, 测得二个主应力皆为压应力, σ_2 方向指向震中, σ_2 的方向为北偏东 41° , 交汇震中位置见图 8。

(4) 发震时间: 82 年 12 月 9 日至 24 日或在 83 年 2 月 24 日前。

(5) 12 月 3 日至 7 日出现较大的地应变速率异常 (见图 7), 这是一种临震讯号。

(6) 1982 年 12 月 10 日 2 点 16 分在本市怀柔县马道玉发生 $M_L = 4.9$ 级地震。

实际证明, 马道玉发生的 4.9 级地震与地应力测量的地震三要素完全一致。

(二) 临震实践

门头沟煤矿于 1981 年在三十米深的岩石中埋设传感器。自安装以来, 应变突跳不超过 200 微应变。在 82 年内, 北京市仅有二次有感地震, 震前 5 天应变有较大的突跳。10 月 14 日应变突跳 $\Delta \varepsilon = 660 \times 10^{-6}$, 19 日河北卢龙发生 $M_s = 5.9$ 级地震。12 月 5 日应变突跳 $\Delta \varepsilon = 900 \times 10^{-6}$, 10 日本市怀柔县马道玉发生 $M_L = 4.9$ 级地震。地应变突跳对于临震预报是很有效的。

总之, 这类传感器经过几年的实际应用, 证明性能是良好的, 值得推广应用。

参 考 文 献

- [1] 王仁等, 固体力学基础, 地质出版社, 1979 年 1 月。
- [2] 李均之, 地应力测量与地震预报, 北京工业大学学报, 1981 年第 3 期。

(李均之 袁国科)