

## Численный пример

Рассмотрим основные положения принципа построения сценарного дерева, которое мы будем использовать в расчётах. Общее неопределённое состояние внешней среды характеризуется переменной  $\xi(t)$ , принимающей в различные от начального момента времени одно из двух возможных значений:  $-1, +1$ . Достаточно условно для предприятия первое из них можно ассоциировать с неблагоприятным состоянием, а второе – с благоприятным. Начальному моменту времени сопоставляется нейтральное состояние  $\xi(0) = 0$ .

Каждый узел  $v$  дерева задаётся реализациями переменной  $\xi(t)$  от начального момента  $t = 0$  до момента  $l(v)$ , соответствующего уровню дерева, на котором этот узел располагается. Таким образом, можно записать:  $v = (\xi(t), t = 0, \dots, l(v))$ .

В такой форме корень определяется как  $v_r = (0)$ , а каждая терминальная вершина – набором значений  $(\xi(t), t = 0, \dots, T)$ . Сценарию  $\sigma$  ставится в соответствие одна из  $2^T$  возможных таких последовательностей и путь от корня до некоторого листа. Всего рассматриваемое бинарное дерево содержит  $2^{T+1} - 1$  узла. Текущее состояние неопределённости в узле  $v$  обозначается через  $s(v)$  и определяется последней компонентой набора, которым задаётся данный узел.

Рассмотрим, например, узел  $v' = (0, -1, -1, -1)$  (предполагая, что  $T \geq 3$ ). Он расположен на уровне  $t = 3$  и текущее состояние неопределённости в этом узле  $s(v') = -1$ . Через него проходит  $2^{T-3}$  маршрута от корня до вершин терминального уровня, один из которых соответствует “крайнему” сценарию с  $\xi(t) = -1, t = 1, \dots, T$ .

Выполним вначале простой тестовый расчёт. Примем шаг модели равным одному кварталу и положим  $T = 12$ , что соответствует горизонту планирования в три года. Тогда полученное бинарное дерево будет содержать 8192 узла, из которых 4096 являются листьями.

Зададим в его узлах ставки депозитов и кредитов. Тот же способ задания и те же значения будут использоваться для этих ставок в узлах бинарного дерева, используемого и в расчёте на самой модели экспортного предприятия. В начальный момент времени, то есть в корневом узле  $v_r = (0)$ , депозитная ставка задается как  $\zeta^d(v_r) = 4\%$ , а кредитная – как  $\zeta^c(v_r) = 7\%$ . Ставки, которые присутствуют в модели (депозитов, кредитов, а также введенные далее ставки изменения рыночных цен продуктов), указываются в процентах годовых, с добавлением значка процента после числа. В остальных вершинах: с текущим состоянием  $-1$  установим для депозитной и кредитной ставок значения  $3\%$  и  $8\%$ , а в узлах с текущим состоянием  $+1$  значения  $5\%$  и  $6\%$ , соответственно.

В каждой вершине  $v$  сценарного дерева при помощи датчика псевдослучайных вещественных чисел, равномерно распределённых на интервале от  $-1$  до  $1$ , зададим поток денежных средств  $Q^p(v)$  (соответствующие данные мы вынесли в отдельный файл, который разместили в репозитории [8]). Решая задачи (6) и (8) в случае отсутствия субсидирования, получим  $R_{adj}^*(0) = -4.96$  и  $R^*(0) = -5.02$ . На основе (9) рассчитаем минимальные значения субсидий, достаточные для безубыточности предприятия в конечный момент:  $m_{adj}^* = 4.29, m^* = 4.33$ .

Построим графики зависимостей собственного капитала от времени, полученные при решении двух рассматриваемых задач, в случае отсутствия субсидирования (рис. 1) и при минимальном достаточном субсидировании (рис. 2).

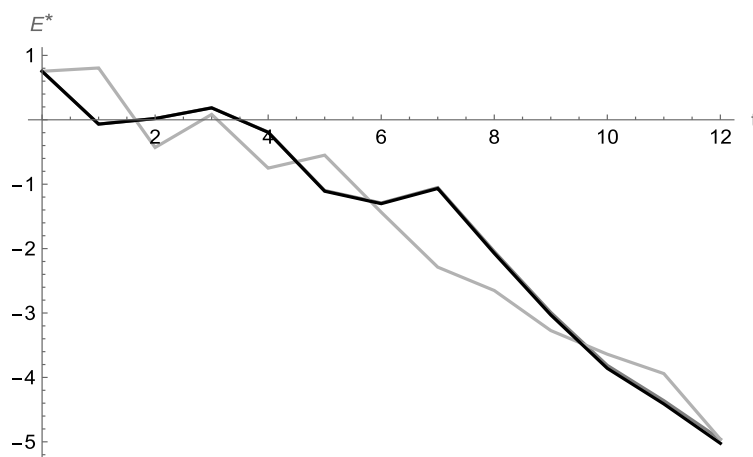


Рис. 1. Зависимость собственного капитала от времени в тестовом примере при двух регулируемых робастных решениях (серые кривые) и при робастном решении (чёрная кривая) без субсидирования.

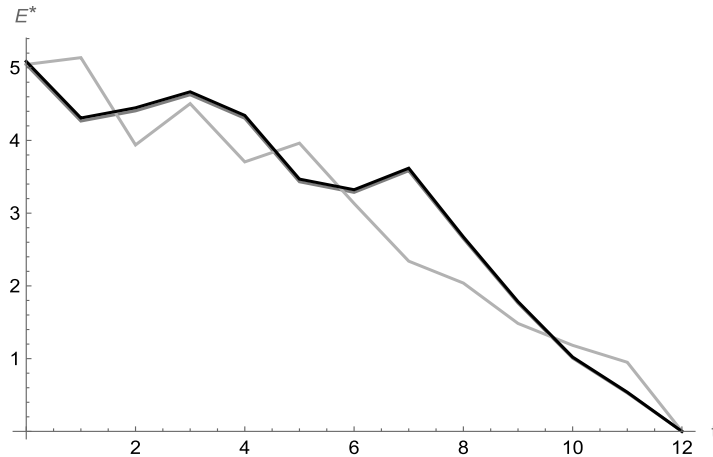


Рис. 2. Зависимость собственного капитала от времени в тестовом примере при двух регулируемых робастных решениях (серые кривые) и при робастном решении (чёрная кривая) в случае минимального достаточного субсидирования.

Траектории, изображённые на первом рисунке серым цветом, соответствуют двум решениям (из трёх возможных) задачи в регулируемой робастной постановке – управлениям  $\bar{\mathbf{u}}_{adj}^*(v_{3696}^<(12); 0)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{adj}^*(v_{1488}^<(12); 0)$  и соответствующим реализациям неопределённых факторов  $\bar{\mathbf{w}}_{adj}^*(v_{3696}^<(12); 0)$ ,  $\bar{\mathbf{w}}_{adj}^*(v_{1488}^<(12); 0)$ . Минимаксное решение здесь соответствует кривой, которая “ближе” к чёрной и на рисунке едва отличима от нее. Естественно, что на обоих решениях конечный собственный капитал будет равен  $R_{adj}^*(0) = -4.96$ . Чёрным цветом выделена траектория, рассчитанная при решении задачи в робастной постановке, то есть при управлении  $\bar{\mathbf{u}}^*(11; 0) = (\mathbf{u}^*(0; 0), \dots, \mathbf{u}^*(11; 0))$  и реализации неопределённых факторов  $\bar{\mathbf{w}}^*(v_{3696}^<(12); 0)$ .

В случае субсидирования число сценариев, доставляющих решение задаче (6) значительно больше, чем в случае без субсидирования. Среди них мы выделили те же два сценария, которые использовали ранее. Субсидирование сдвигает эти кривые в область неотрицательных значений так, что терминальное значение собственного капитала, полученное при решении каждой из задач, становится равным нулю. Минимаксное решение здесь опять же соответствует той серой кривой, которая значительно ближе к чёрной. На обоих рисунках мы использовали линейную интерполяцию между соседними точками.

Расчёт на модели экспортного предприятия будем проводить в предположении, что предприятие использует в своей деятельности продукты трёх видов, то есть  $|I| = 3$ . Несколько сократим временной горизонт, выберем  $T = 9$ . Сценарное дерево в таком случае будет содержать 1023 узла, из которых 512 располагаются на терминальном уровне. Перейдём к заданию неопределённых факторов в каждом узле этого дерева.

Поставщики и покупатели продукта данного вида, формируя соответственно предложение и спрос, ориентируются на его рыночную цену. Начальные цены продуктов  $\tilde{c}_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, 3$  зададим равными  $\{1, 1.5, 2\}$ . Здесь каждая компонента такого набора равна рыночной цене соответствующего продукта. Будем и далее использовать подобную запись, специально не оговариваясь.

Рыночная цена  $i$ -го продукта в последующие моменты времени задаётся рекуррентной формулой:

$$\tilde{C}_i(0) = \tilde{c}_i(0), \quad \tilde{C}_i(t) = \tilde{C}_i(t-1) (1 + \mu_i)^{\xi(t)}, \quad t = 1, \dots, 9,$$

где  $\mu_i$  – некоторая постоянная ставка изменения рыночной цены продукта  $i$ . Установим для этих величин следующие значения, выраженные в процентах годовых:  $\{5\%, 10\%, 15\%\}$ .

Реализацию процесса (1) в узле  $v$  будем обозначать через  $\tilde{c}_i(v)$ . Корню дерева,  $v_r = (0)$ , соответствует фиксированная цена  $\tilde{c}_i(0)$ . Рассмотрим, например,  $v' = (0, -1, -1, +1)$  и на основе предыдущего уравнения определим в этой вершине рыночную цену:

$$\tilde{c}_i(v') = \tilde{c}_i(0) (1 + \mu_i)^{-1} \cdot (1 + \mu_i)^{-1} \cdot (1 + \mu_i) = \tilde{c}_i(0) (1 + \mu_i)^{-1}.$$

Количества поставщиков и заказчиков, доступных предприятию для продукта вида  $i$  в узле  $v$ , обозначим через  $N_i^+(v)$  и  $N_i^-(v)$ . В момент  $t = 0$  для каждого продукта присутствовало по 10

поставщиков и заказчиков. В остальных узлах дерева эти количества задавались табличным способом при помощи датчика псевдослучайных целых чисел (как и значения потоков денежных средств из тестового примера эти данные расположены в [8]). И для поставщиков, и для заказчиков соответствующие количества изменяются в пределах от 5 до 10 для вершин с текущим состоянием  $-1$ , и от 10 до 15 для вершин с текущим состоянием  $+1$ . Что можно интерпретировать как меньшую деловую активность в неблагоприятном текущем состоянии и большую – в благоприятном.

Будем считать, что цены, по которым предприятие покупает продукты у поставщиков и продаёт заказчикам, в каждом узле дерева равномерно заполняют некоторые интервалы значений. Границы этих интервалов устанавливаются исходя из рыночных цен в данном узле. Предположим, что поставщики расставлены в порядке возрастания, а заказчики – в порядке убывания предлагаемых ими цен за одну единицу продукта. В упорядоченном наборе поставщиков лучшая для предприятия (первая) цена предложения вводится как произведение коэффициента  $\eta_i^+(v)$  на рыночную цену  $\tilde{c}_i(v)$ , а худшая (последняя) цена, которая задает правую границу соответствующего интервала, как произведение коэффициента  $\gamma_i^+(v)$  на первую цену. Аналогично задаются границы интервала значений для цены продажи продукта заказчикам, однако в данном случае первая цена задаёт правую границу интервала, а последняя – левую. Сказанное позволяет выписать для элементов двух отсортированных массивов цен в вершине  $v$  следующие формулы:

$$c_1(v) = \eta(v) \tilde{c}(v), c_n(v) = (1 + (\gamma(v) - 1) (n - 1) / (N(v) - 1)), \quad n = 1, \dots, N(v).$$

Здесь в формулах для цен и далее для количеств продуктов, которые характеризуют предложение поставщиков и спрос заказчиков, во избежания нагромождения символов, мы опускаем у соответствующих величин нижний индекс вида продукта и верхний идентификатор “+” или “-”.

В начальный момент времени коэффициенты  $\eta_i^+(v_r)$ ,  $\eta_i^-(v_r)$  полагаются равными 1 и 1.2 соответственно. В остальных узлах: с текущим состоянием  $s(v) = -1$  зададим для них значения 1.05 и 1.15, а в узлах с  $s(v) = +1$  значения 0.95 и 1.25. Коэффициенты, которые определяют последние цены поставщиков и заказчиков, устанавливаются так:  $\gamma_i^+(v) = 1.3$ ,  $\gamma_i^-(v) = 1/1.3$ . При таком выборе коэффициентов относительная длина диапазона цен обоих видов (для данного вида цен – это разность между наибольшей и наименьшей, делённая на наименьшую) остаётся постоянной для всех узлов дерева. При этом относительная длина диапазона “перекрёстных” цен (разность между лучшей ценой продажи и лучшей ценой покупки, делённая на вторую из названных) в положительных узлах больше, чем в отрицательных.

Далее задаются переменные  $\chi_{i,n}^+(v)$ ,  $\chi_{i,n}^-(v)$ , которые для продукта  $i$ -го вида в узле  $v$  определяют предложение поставщика и спрос заказчика с порядковым номером  $n$ . Сперва фиксируются их значения  $\chi_{i,1}^+(v)$ ,  $\chi_{i,1}^-(v)$ , соответствующие первой цене ( $n = 1$ ), как некоторые целые положительные числа. Затем вводятся параметры  $\alpha_i^+(v)$ ,  $\alpha_i^-(v)$ , которые характеризуют в некотором смысле кривизну “кривых” предложения и спроса. Для других номеров  $n$  значения этих переменных определяются на основе одной из двух зависимостей:

$$\begin{aligned} \chi_n(v) &= \lceil \chi_1(v) n^{\alpha(v)} \rceil, \quad 0 \leq \alpha(v) \leq 1; \\ \chi_n(v) &= \lfloor \chi_1(v) (1 - (n - 1) / N(v))^{-\alpha(v)} \rfloor, \quad \alpha(v) \geq 0. \end{aligned}$$

В этих формулах  $n$  пробегает значения от 1 до  $N(v)$ , и каждая величина  $\chi_n(v)$  выражается целым положительным числом. В первой формуле присутствует функция “потолок”  $\lceil \cdot \rceil: x \rightarrow \lceil x \rceil$ , которая определяется как наименьшее целое, большее или равное  $x$ . Во второй формуле используется обозначение для функции “пол”  $\lfloor \cdot \rfloor: x \rightarrow \lfloor x \rfloor$  – это наибольшее целое, меньшее или равное  $x$ .

Монотонный характер обеих зависимостей от  $n$  позволяет сделать следующий вывод. Поставщику с большим порядковым номером (с более высокой ценой), соответствует предложение не меньше, чем поставщику с меньшим порядковым номером. Заказчику с большим  $n$  (с более низкой ценой), соответствует спрос не меньше, чем заказчику с меньшим порядковым номером. Сказанное отражает закономерность: поставщики (продавцы) стремятся продать продукт подороже, а заказчики (покупатели) – приобрести его подешевле.

В последующем расчёте, в каждом узле и для каждого продукта мы использовали первый вариант зависимости  $\chi_n(v)$  для поставщиков и второй – для заказчиков.

В начальном состоянии значения  $\chi_{i,1}^+(v_r)$ ,  $\chi_{i,1}^-(v_r)$  выбирались равными 5. В других узлах: с текущим отрицательным состоянием, то есть при  $s(v) = -1$ , равными 4, а в узлах с  $s(v) = +1$

равными 6. В корне дерева параметры  $\alpha_i^+(v_r)$ ,  $\alpha_i^-(v_r)$  задавались как  $\{0.4, 0.45, 0.5\}$ . В отрицательных узлах их значения для продуктов трёх видов заполняли массив  $\{0.3, 0.35, 0.4\}$ , а в положительных – массив  $\{0.5, 0.55, 0.6\}$ .

Рассмотрим, например, первый продукт и два узла  $(0, -1)$ ,  $(0, +1)$ , расположенные на первом уровне ( $t = 1$ ). Для наглядности проиллюстрируем полученные зависимости графически (рис. 3, 4).

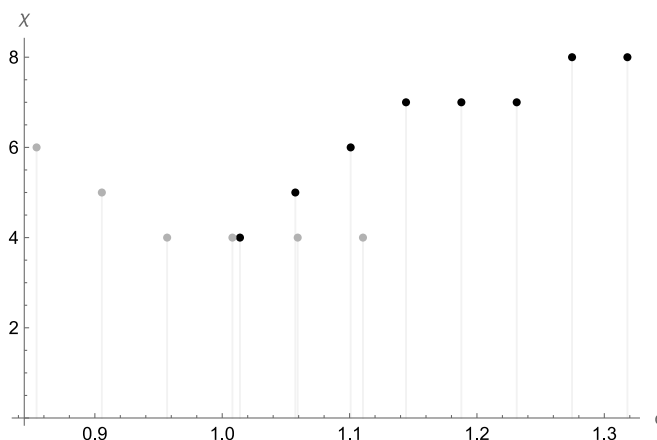


Рис. 3. Предложение поставщиков и спрос заказчиков для первого продукта в узле  $(0, -1)$ .

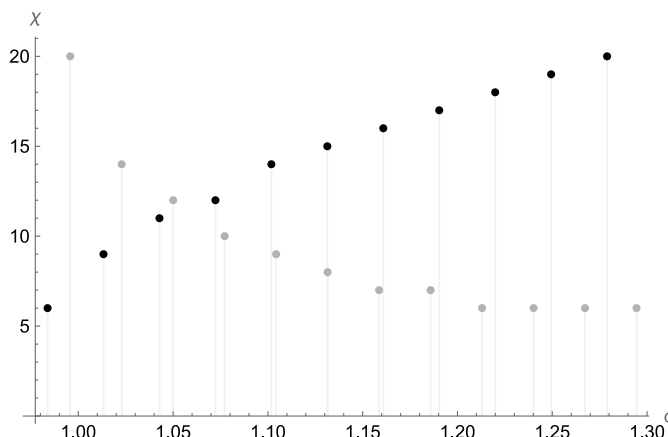


Рис. 4. Предложение поставщиков и спрос заказчиков для первого продукта в узле  $(0, +1)$ .

Здесь, для данного узла  $v$ , по оси абсцисс откладываются цены, а по оси ординат – соответствующие им количества единиц продукта. Каждая чёрная точка задается парой значений  $(c_{1,n}^+(v), \chi_{1,n}^+(v))$  и соответствует предложению некоторого поставщика с данной ценой, а каждая серая точка – парой  $(c_{1,n}^-(v), \chi_{1,n}^-(v))$  и соответствует спросу некоторого заказчика. В данном случае, в узле  $(0, -1)$  присутствует 12 поставщиков и 7 заказчиков, а в узле  $(0, +1)$  – 10 поставщиков и 7 заказчиков.

Для знаковой переменной, которая в вершине  $v$  сценарного дерева определяет взаимодействие предприятия с Центром, используем следующую зависимость:  $\delta_i(v) = ((-1)^{l(v)} - 1)/2$ . Здесь  $l(v)$  обозначает номер уровня, на котором располагается вершина  $v$ . Этот номер на единицу меньше длины последовательности, описывающей данный узел. Корню дерева соответствует значение знаковой переменной  $-1$ , а двум узлам первого уровня – значение 0. Все вершины одного уровня имеют одинаковое значение этой величины. В результате, знаковая переменная, изменяясь со временем, попеременно принимает значения  $-1$  и 0.

Далее, в каждом узле  $v$  для  $i$ -го продукта решается транспортная задача (1) и рассчитывается поток денежных средств предприятия по операциям купли-продажи продукта данного вида. Например, в узле  $v' = (0, +1, -1, +1)$  для трёх потоков  $Q_i^{p*}(v')$  мы получим  $\{2.526, 3.336, -2.275\}$ . Полный поток определяется суммированием частных и в этом узле будет равен 3.587.

Следует отметить следующий факт. Хотя для всех узлов уровня  $t = 3$  (на нём расположен рассматриваемый узел  $v'$ ) и для каждого продукта знаковая переменная равна 0, а соответствующие задачи (1) содержат ограничения-равенства, частные потоки (оптимальное значение критерия) могут быть как отрицательными, так и положительными.

На рис. 5 изображены рассчитанные временные развёртки суммарного потока денежных средств предприятия для трёх произвольно выбранных сценариев.

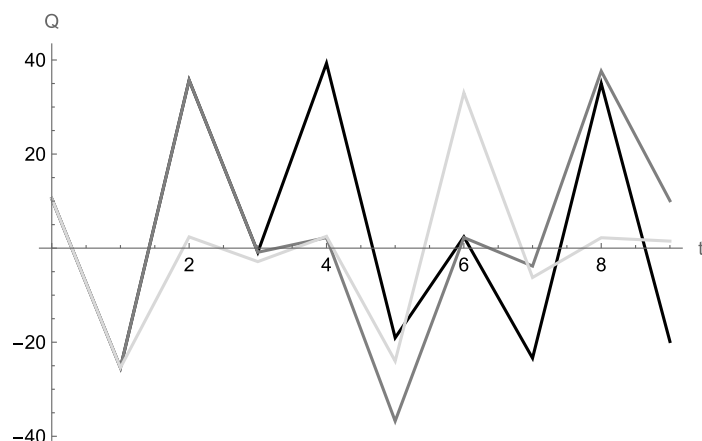


Рис. 5. Зависимость суммарного потока денежных средств экспортного предприятия от времени для трёх произвольно выбранных сценариев.

Теперь мы можем повторить всю процедуру расчёта, выполненную для тестового примера. Решая задачи (6) и (8) в случае отсутствия субсидирования, получим  $R_{adj}^*(0) = -100.31$  и  $R^*(0) = -101.37$ . С использованием итерационной процедуры рассчитаем минимальные значения субсидий, при которых решения этих задач становятся неотрицательными:  $m_{adj}^* = 89.74$ ,  $m^* = 90.27$ .

Построим графики зависимостей собственного капитала экспортного предприятия от времени, полученные при решении двух рассматриваемых задач, в случае отсутствия субсидирования (рис. 5) и при минимальном достаточном субсидировании (рис. 6).

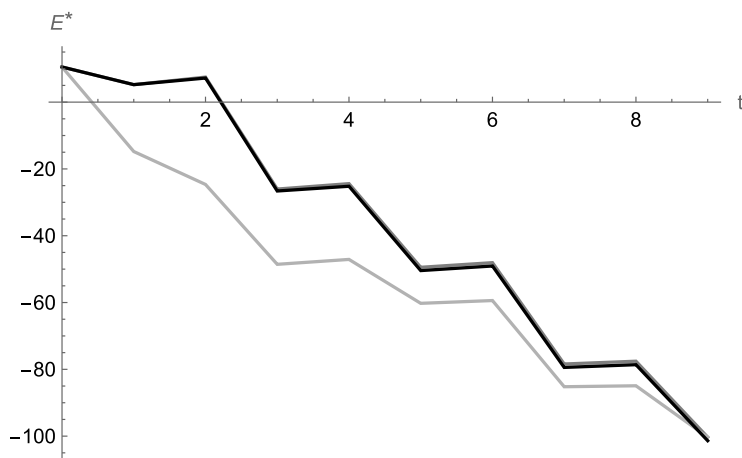
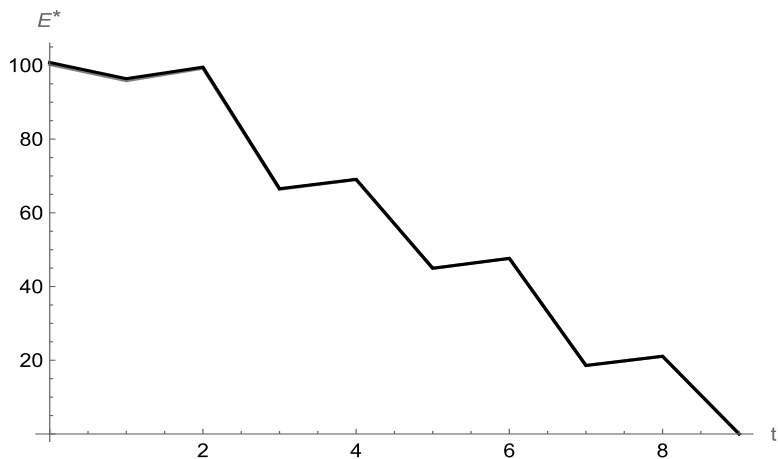


Рис. 6. Зависимость собственного капитала от времени экспортного предприятия при регулируемых робастных решениях (серые кривые) и робастном решении (чёрная кривая) без субсидирования.



*Рис. 7. Зависимость собственного капитала от времени экспортного предприятия при регулируемом робастном решении (серая кривая) и робастном решении (чёрная кривая) в случае минимального достаточного субсидирования.*

В регулируемой робастной постановке без субсидирования задача для экспортного предприятия имеет два решения. Соответствующие им траектории собственного капитала выделены на рисунке серым цветом. Минимаксное решение, как и в тестовом примере, соответствует кривой, которая “ближе” к чёрной – траектории собственного капитала при робастном решении. Различие между этими траекториями становится лучше заметным уже ближе к концу временного интервала.

В случае минимального достаточного субсидирования в задаче (6) присутствует только одно решение, оно совпадает с минимаксным (10). На последнем рисунке расхождение между траекториями собственного капитала присутствует в первые пять моментов времени (хотя здесь его уже совсем сложно выделить); с момента  $t = 5$  значения собственного капитала для двух решений совпадают и в конечный момент времени достигают нуля.