Задача о взаимодействии двух математических подсистем:

Исходные данные:

Даны две математические подсистемы, которые мы будем называть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Подсистема $\mathcal{A}$ находится в Гильбертовом пространстве размерности N_a, а подсистема $\mathcal{B}$ находится в Гильбертовом пространстве размерности N_b. До начала взаимодействия подсистемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ были не перепутаны между собой, то есть состояния каждой из подсистем можно было описать с помощью векторов в собственных Гильбертовых пространствах.

При взаимодействии между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ описание двух подсистем с помощью двух векторов в пространствах размерности N_a и N_b становится некорректным. Полная математическая система находится в Гильбертовом пространстве $\mathcal{C}$, базис которого записывается как набор тензорных произведений базисных векторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. То есть размерность полного пространства $\mathcal{C}$ равна $N_a \cdot N_b$. Обратите внимание, что количество чисел, которое требуется для полного описания двух невзаимодействующих подсистем, равно $N_a + N_b$, а двух взаимодействующих подсистем - $N_a \cdot N_b$. Большее количество чисел позвляет описать перепутанные состояния, когда от состояния одной подсистемы зависит состояние другой.

Определния:

Определение 1: Перепутанные состояния - это такие состояния двух математических подсистем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что характеризуюший их вектор в полном пространстве $\mathcal{C}$ не может быть представлен как тензорное произведение некоторых векторов в подпространствах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. В противном случае состояния называются неперепутанными.

Определение 2: Критерием перепутанности будем называть длину разницы между исследуемым вектором и ближайшим к нему вектором неперепутанного состояния. Длина определяется метрикой, которая в данной задаче может быть введена как простейшая Евклидова метрика. То есть квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций. Комментарий: ближайший вектор неперепутанного состояния в пространстве $\mathcal{C}$ является не единственным.

Постановка задачи:

- Задать начальные состояния двух математических подсистем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с помощью векторов в их Гильбертовых пространствах.

- С помощью тензорного произведения построить вектор в полном пространстве $\mathcal{C}$ в начальный момент времени. Это состояние является неперепутанным, так как оно факторизуется по векторам в Гильбертовых пространствах каждой подсистемы.

- Ввести оператор взаимодействия между двумя подсистемами. Комментарий: оператор может быть задан с помощью симметричной квадатной матрицы со стороной $N_a \cdot N_b$. Построение матрицы взаимодействия $\hat{V}$ следует обсудить перед решением задачи.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \hat{V}\mathbf{c} \tag{1}$$

- Построить оператор эволюции $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в полном пространстве $\mathcal{C}$, который представляет собой матричную экспоненту от оператора взаимодействия, умноженного на время.

- Написать код, который позволяет получить вектор двух подсистем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в любой момент времени.

- Написать код, который позволяет вычислить критерий перепутанности двух подсистем в полном Гильбертовом пространстве.
- Построить график зависимости критерия перепутанности двух подсистем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ от времени.