Prelucrarea Imaginilor (CO) Anul 3

Laborator 4

Filtrarea imaginilor

Imaginile pot fi prelucrare în:

- ***Domeniul spațial***: observarea distribuției nivelurilor de gri sau a culorilor;
- ***Domeniul frecvențial***: observarea variațiilor intensităților de culoare din imagini. Imaginile sunt descompuse în frecvențe, de la cele mai joase, la cele mai ridicate. Frecvențele joase corespund regiunilor unde intensitățile variază ușor (fundal, texturi omogene), iar frecvențele ridicate corespund regiunilor unde apar schimbări bruște de intensități (acolo unde apar modificări mari de-a lungul unor distanțe mici, cum ar fi muchii sau zgomot).

3

Filtrarea imaginilor în domeniul spațial

Operatorul de convoluţie stă la baza aplicării operaţiilor liniare de filtrare a imaginilor aplicate în domeniul spaţial (în planul imagine prin manipularea directă a pixelilor din imagine).

Exemple de astfel de filtre sunt: filtre trece jos (de netezire a imaginilor, de eliminare a zgomotelor), filtre trece sus (de evidenţiere a muchiilor) etc.

4
Operația de convoluție în domeniul spațial

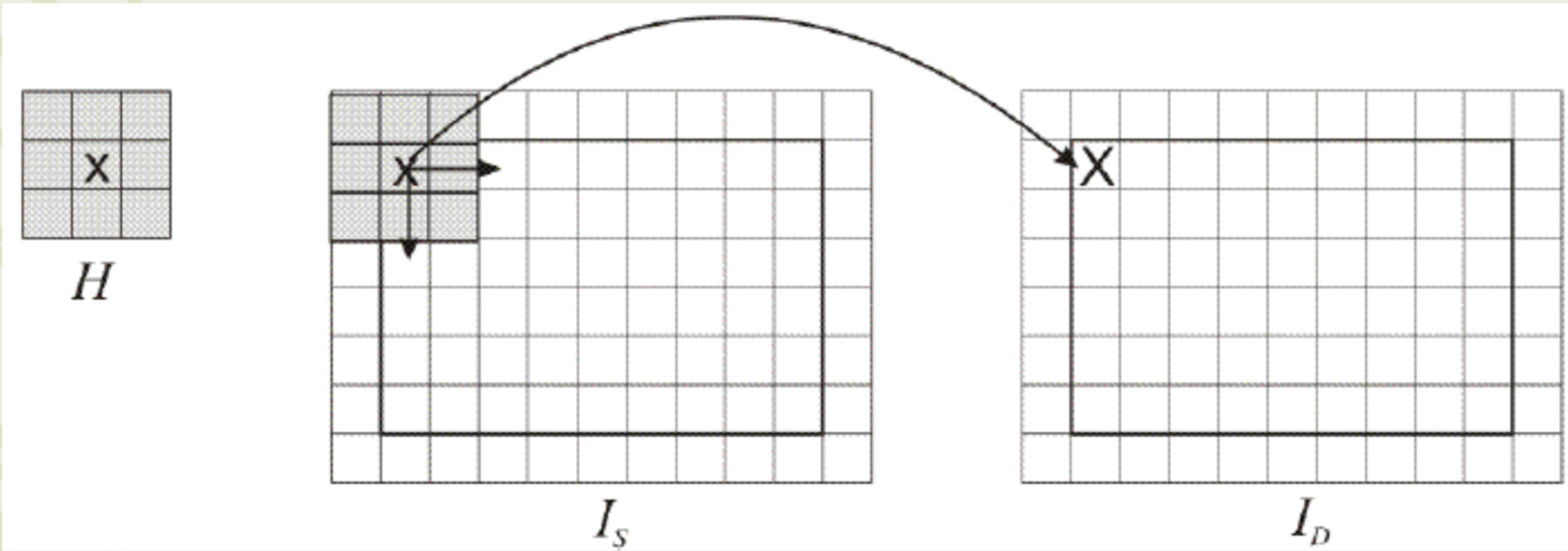
Operaţia de convoluţie implică folosirea unei măşti/nucleu de convoluţie *H* (de obicei de formă simetrică de dimensiune $w \times w$, cu $w=2k+1$) care se aplică peste imaginea sursă în conformitate cu (2).

$$I_D(i,j) = H * I_S \qquad (1)$$

$$I_D(i,j) = \sum_{u=0}^{w-1} \sum_{v=0}^{w-1} H(u,v) \cdot I_S(i+u-k, j+v-k) \qquad (2)$$

Aceasta implică parcurgerea imaginii sursă I_S, pixel cu pixel, ***ignorând primele şi ultimele k linii şi coloane*** (vezi figura) şi calcularea valorii intensităţii de la locaţia curentă (i, j) a imaginii de ieşire I_D în conformitate cu (2). Nucleul de convoluţie se poziţionează cu elementul central peste poziţia curentă (i,j).

Ilustrarea operaţiei de convoluţie



Nucleele de convoluţie pot avea şi forme ne-simetrice (elementul central/de referinţă nu mai este poziţionat în centrul de simetrie). Modul de aplicare a operaţiei de convoluţie cu astfel de nuclee este similar.

Filtre de tip „trece-jos”

Aceste nuclee se folosesc pentru operaţii de netezire şi/sau filtrare a zgomotelor (sunt filtre de tip „trece-jos”/”low-pass” care permit trecerea doar a frecvenţelor joase).

Efectul lor este o mediere a pixelului curent cu valorile vecinilor săi, observabilă prin netezirea („blur”) imaginii de ieşire.

Aceste nuclee au doar elemente pozitive.

Din acest motiv, o practică curentă este împărţirea rezultatului convoluţiei cu suma elementelor nucleului de convoluţie cu scopul de a scala rezultatul în domeniul de valori al intensităţii pixelilor din imaginea de ieşire:

$$I_D(i,j) = \frac{1}{c} \sum_{u=0}^{w-1} \sum_{v=0}^{w-1} H(u,v) \cdot I_S(i+u-k, j+v-k)$$

unde:

$$c = \sum_{u=0}^{w-1} \sum_{v=0}^{w-1} H(u,v)$$

Exemple:

Filtrul medie aritmetică (3×3):

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtrul gaussian (3×3):

$$\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

8

a. *Imaginea originală;*

b. *Rezultatul obţinut în urma filtrării de tip medie aritmetică cu un nucleu de dimensiune* 3×3*;*

c. *Rezultatul obţinut în urma filtrării de tip medie aritmetică cu un nucleu de* 5×5

a. b. c.

Filtre de tip „trece-sus”

9

Operaţia de convoluţie cu nuclee de acest tip are ca efect punerea în evidenţă a zonelor din imagine în care există variaţii bruşte ale intensităţii pixelilor (cum sunt de exemplu muchiile).

Ele realizează o filtrare de tip “trece-sus” (vor permite doar trecerea frecvenţelor înalte din imagine).

Nucleele folosite pentru detecţia punctelor de muchii au suma elementelor componente egală cu 0:

Filtre Laplace (detecţie de muchii) (3×3):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Filtre high-pass (trece sus) (3×3):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

11

a.   b.   c.

a. Rezultatul aplicării filtrului Laplace de detecţie a muchiilor (3) pe imaginea originală (vezi slide 8/a);

b. Rezultatul aplicării filtrului Laplace de detecţie a muchiilor (3) pe imaginea din figura de la slide-ul 8/b (filtrată în prealabil cu filtrul medie aritmetică);

c. Rezultatul obţinut în urma filtrării de tip high-pass cu nucleul (4)

12 *Detalii de implementare*

Filtre în domeniul spațial

Filtrele de tip „trece-jos” vor avea întotdeauna coeficienţi pozitivi şi, astfel, imaginea rezultată după aplicarea filtrului va conţine valori pozitive. Trebuie să ne asigurăm că imaginea rezultată are valori cuprinse în intervalul dorit (în cazul nostru 0-255). Pentru a realiza acest lucru, trebuie să verificăm ca suma coeficienţilor din filtrul “trece-jos” să fie 1. Dacă folosim operaţii întregi, este importantă ordinea operaţiilor! În mod normal, împărţirea este ultima operaţie care ar trebui efectuată, pentru a minimiza erorile datorate rotunjirii.

Filtrele de tip „trece-sus” vor avea coeficienţi pozitivi şi negativi. Trebuie să ne asigurăm că valorile din imaginea rezultat sunt numere întregi cuprinse în intervalul 0 şi 255!

Există trei posibilităţi pentru a ne asigura că imaginea rezultat este în intervalul dorit. *Prima metodă* presupune calculul următor:

$$S_+ = \sum_{F_k>0} F_k\,, \qquad S_- = \sum_{F_k<0} -F_k\,,$$

$$S = \frac{1}{2\max\{S_+, S_-\}}$$

$$I_D(u,v) = S(F * I_S)(u,v) + \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor$$

În formula de mai sus, S_+ reprezintă suma coeficienţilor pozitivi din filtru şi S_- suma valorilor absolute ale coeficienţilor negativi. Rezultatul aplicării filtrului de tip „trece-sus” este întotdeauna în intervalul $[-LS_-, LS_+]$ unde L este nivelul maxim de gri din imagine (255). Rezultatul acestei transformări va plasa scala rezultatului la $[-L/2, L/2]$ şi apoi va muta nivelul 0 la $L/2$.

O altă abordare constă în realizarea tuturor operaţiilor folosind numere întregi cu semn, apoi determinarea valorii minime şi maxime din rezultat urmată de o transformare liniară a valorilor rezultate folosind formula:

$$D = \frac{L(S - \min)}{\max - \min}$$

A treia abordare calculează magnitudinea rezultatului şi saturează toate valorile care depăşesc nivelul maxim *L*.

La laborator se vor implementa câte doi algoritmi de filtrare în domeniul spațial:

- *de tip trece-jos (medie aritmetică și gaussian)*
- *de tip trece-sus (Laplace și folosind nucleul indicat la slide-ul 10, relația (4)).*

Filtrarea imaginilor în domeniul frecvențial

Operatorul de convoluţie stă la baza aplicării operaţiilor liniare de filtrare a imaginilor aplicate în domeniul frecvenţelor (aplicarea unei transformate Fourier, filtrare şi apoi aplicarea transformatei Fourier inversă).

Exemple de astfel de filtre sunt: filtre trece jos (de netezire a imaginilor, de eliminare a zgomotelor), filtre trece sus (de evidenţiere a muchiilor) etc.

Filtrarea imaginilor în domeniul frecvențial

Transformata Fourier discretă (DFT) unidimensională a unui şir format din N numere reale sau complexe este un şir de N numere complexe, date de:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}, \qquad k = \overline{0 \ldots N-1}$$

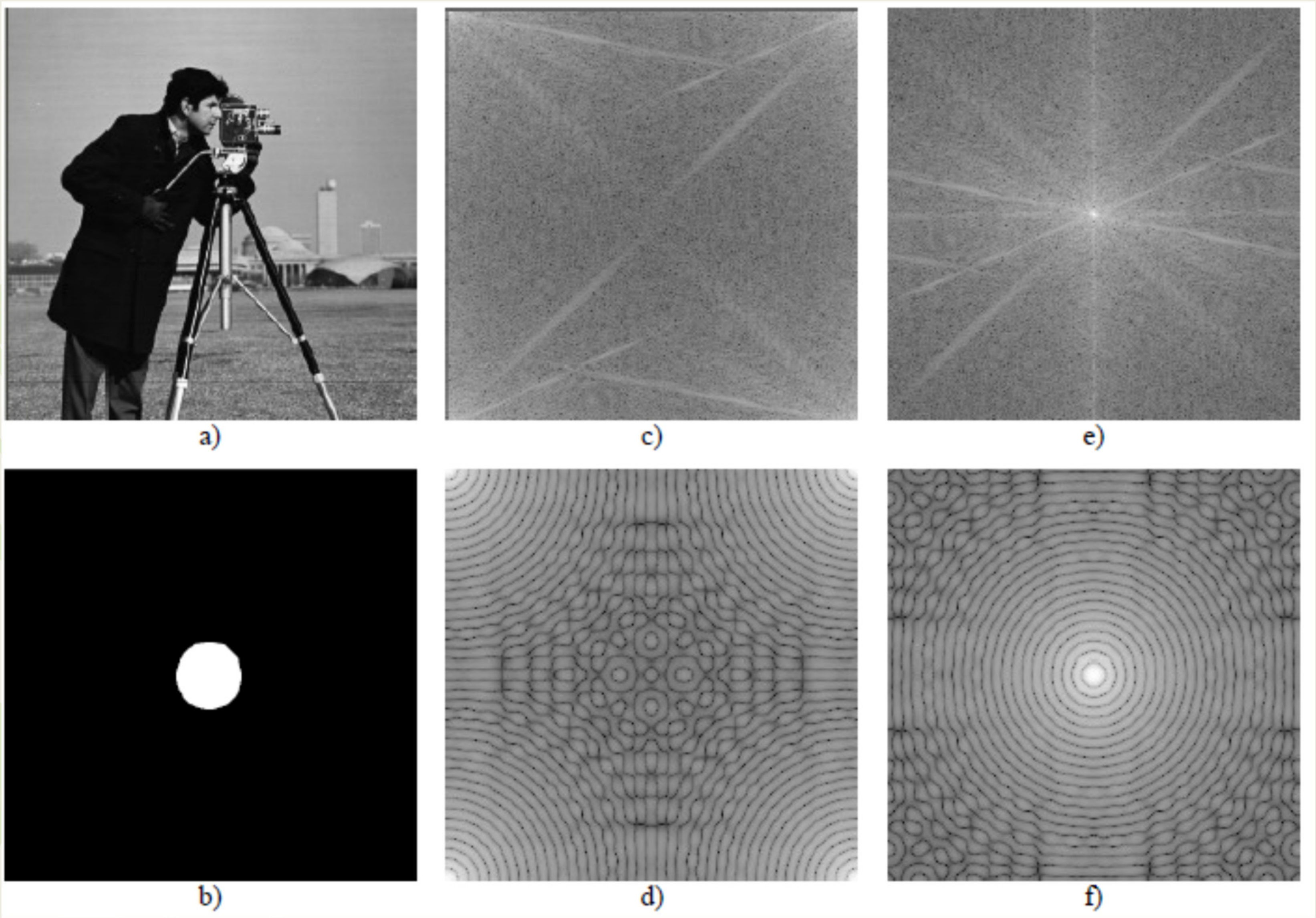
Inversa transformatei Fourier discrete (IDFT) este dată de:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi jkn}{N}}, \qquad n = \overline{0 \ldots N-1}$$

Transformata Fourier discretă bidimensională este obţinută prin aplicarea DFT unidimensionale pe fiecare rând al imaginii de intrare şi apoi pe fiecare coloană a rezultatului obţinut la aplicarea pe linii.

Transformata inversă este obţinută prin aplicarea IDFT unidimensionale pe fiecare coloană a imaginii DFT şi apoi pe fiecare linie a rezultatului precedent. Setul de numere complexe rezultat după aplicarea DFT poate fi reprezentat şi în coordonate polare (magnitudine şi fază). Mulţimea magnitudinilor (numere reale) reprezintă spectrul de frecvenţă (frequency power spectrum) al şirului original.

DFT şi inversa ei sunt realizate folosind o abordare recursivă a transformatei Fourier rapide (Fast Fourier Transform), care reduce timpul de calcul de la $O(n^2)$ la $O(n \ \ln n)$ fapt care reprezintă o creştere a vitezei de calcul, mai ales în cazul procesării imaginilor bidimensionale, la care o complexitate de $O(n^2m^2)$ ar fi foarte mare în raport cu complexitatea aproape liniară, în număr de pixeli, de $O(nm \ln(nm))$ dată de transformata Fourier rapidă (FFT).



a) şi b) imagini originale;

c) şi d) logaritmul spectrului magnitudinii;

e) şi f) logaritm centrat al spectrului magnitudinii.

Aliasing

Fenomenul de aliasing este o consecinţă a limitei frecvenţei Nyquist (un semnal eşantionat nu poate reprezenta frecvenţe mai mari decât jumătate din frecvenţa de eşantionare).

Astfel, jumătatea de sus a reprezentării în domeniul de frecvenţă este redundantă. Acest lucru poate fi observat din identitatea:

$$X_k = X_{N-k}^*$$

(unde * se referă la conjugata complexă) care este adevărată dacă numerele din şirul de intrare sunt reale.

Astfel, spectrul tipic Fourier 1D va conţine componentele de frecvenţă joasă atât în partea de jos cât şi în partea de sus, iar frecvenţele înalte sunt localizate simetric în raport cu centrul.

În spaţiul 2D, componentele de frecvenţă joasă vor fi localizate lângă colţurile imaginii, iar componentele de frecvenţă înaltă vor fi în centru (vezi figura de la slide-ul 5/c,d).

Acest lucru face ca spectrul să fie destul de greu de citit şi de interpretat.

Pentru a centra componentele de frecvenţă joasă în mijlocul spectrului, ca prim pas, ar trebui realizată următoarea transformare a datelor de intrare:

$$x_k \longleftarrow (-1)^k x_k$$

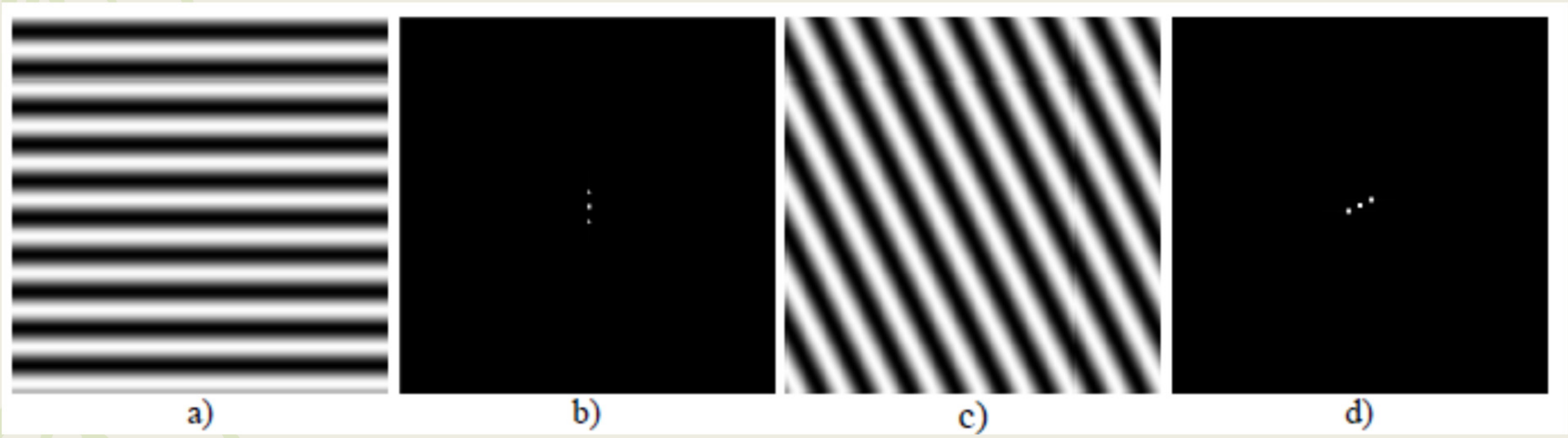
În spaţiul 2D transformarea de centrare devine:

$$x_{uv} \leftarrow (-1)^{u+v} x_{uv} \qquad (1)$$

După aplicarea acestei transformări în spaţiul 1D spectrul va conţine în mijloc componentele de frecvenţă joasă şi componentele de frecvenţă înaltă vor fi localizate simetric spre capetele stâng şi drept ale spectrului.

În 2D, componentele de frecvenţă joasă vor fi localizate în mijlocul imaginii, în timp ce diversele componente de frecvenţă înaltă vor fi localizate spre muchii.

Magnitudinile localizate pe orice linie care trece prin centrul imaginii DFT reprezintă componentele 1D din spectrul de frecvenţă al imaginii originale, pe direcţia liniei. Toate liniile de acest fel sunt simetrice în raport cu mijlocul (centrul imaginii).



Transformate Fourier ale imaginilor cu unde sinusoidale a) şi c).

Punctul de centru în b) şi d) reprezintă componenta continuă, celelalte două puncte simetrice se datorează frecvenţei undelor sinusoidale.

Filtre ideale de tip „trece-jos” şi „trece-sus”, în domeniul frecvențial

Operaţia de convoluţie în domeniul spaţial este echivalentă cu înmulţirea scalară în domeniul frecvenţial. Astfel, pentru nuclee de convoluţie mari, este mai convenabil din punct de vedere computaţional să se realizeze operaţia de convoluţie în domeniul frecvenţial.

Algoritmul de filtrare în domeniul frecvenţial este următorul:

a) Se realizează transformata de centrare a imaginii pe imaginea originală (1)

b) Se realizează transformata DFT

c) Se schimbă coeficienţii Fourier în funcţie de filtrarea dorită

d) Se realizează transformata IDFT

e) Se realizează transformata de centrare a imaginii (anulează efectul primei centrări a imaginii).

Un filtru ideal de tip „trece-jos” va modifica toţi coeficienţii Fourier care sunt mai departe de centrul imaginii $(W/2, H/2)$ decât o distanţă R dată. Aceşti coeficienţi vor primi valoarea 0 (W este lăţimea imaginii şi H este înălţimea imaginii):

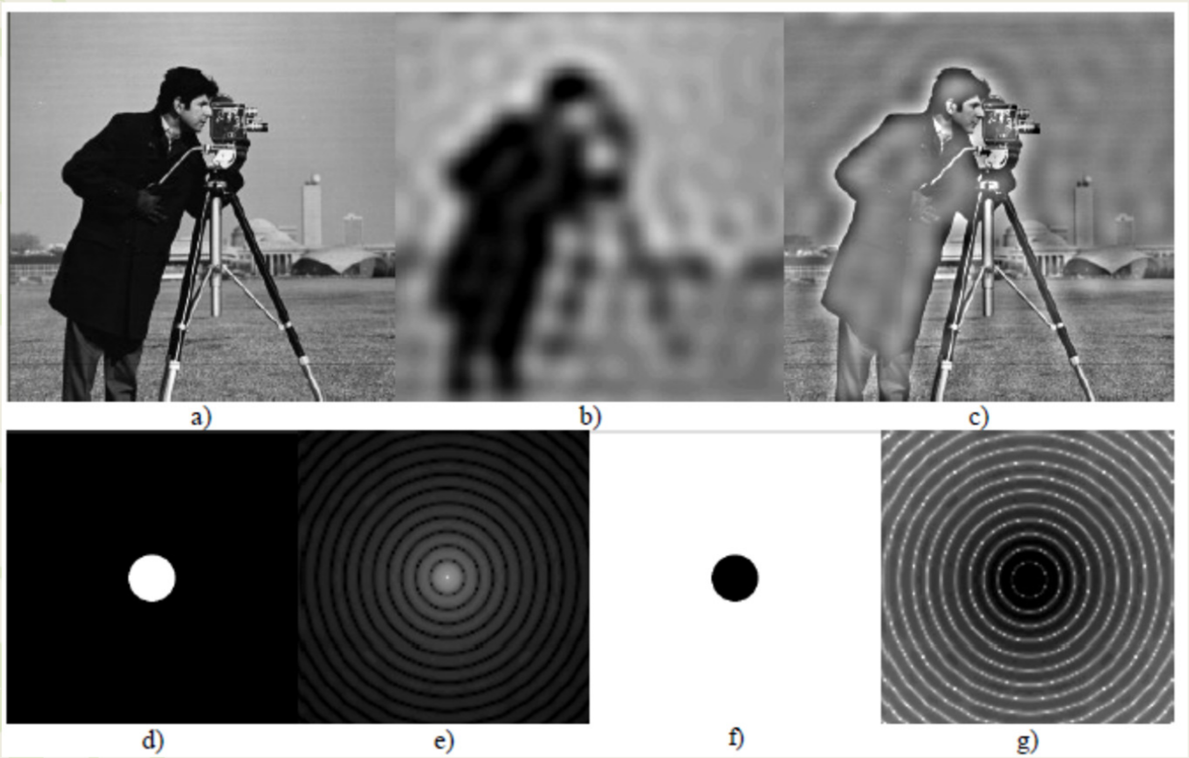
$$X'_{uv} = \begin{cases} X_{uv}, & \left(\frac{H}{2} - u\right)^2 + \left(\frac{W}{2} - v\right)^2 \leq R^2 \\ 0, & \left(\frac{H}{2} - u\right)^2 + \left(\frac{W}{2} - v\right)^2 > R^2 \end{cases}$$

26

Un filtru ideal de tip „trece-sus” va schimba în 0 toţi coeficienţii Fourier aflaţi la o distanţă mai mică decât R faţă de centrul imaginii *(W/2, H/2)*.

$$X'_{uv} = \begin{cases} X_{uv}, & \left(\frac{H}{2} - u\right)^2 + \left(\frac{W}{2} - v\right)^2 > R^2 \\ 0, & \left(\frac{H}{2} - u\right)^2 + \left(\frac{W}{2} - v\right)^2 \leq R^2 \end{cases}$$

Rezultatele aplicării unui filtru ideal de tip „trece-jos” şi de tip „trece-sus” sunt prezentate în figura de mai jos, b) şi c). Din păcate, filtrele spaţiale corespunzătoare din figură, e) şi d), nu sunt FIR (au un suport infinit) şi oscilează îndepărtându-se de centrele lor. Din această cauză, imaginile rezultate după aplicarea celor două filtre (trece-sus şi trece-jos) au un aspect de undă circulară. Pentru a corecta acest lucru, tăierea (suprimarea) în domeniul frecvenţial trebuie să fie mai netedă, aşa cum este prezentat în secţiunea următoare.



a) imaginea originală; b) rezultatul aplicării filtrului ideal de tip „trece-jos”; c) rezultatul aplicării filtrului ideal de tip „trece-sus”; d) filtru ideal de tip „trece-jos” în domeniul frecvenţial; e) filtrul ideal de tip „trece-jos”corespunzător în domeniul spaţial; f) filtru ideal de tip „trece-sus” în domeniul frecvenţial; g) filtrul ideal de tip „trece-sus”corespunzător în domeniul spaţial

Filtru Gausian de tip „trece-jos” şi „trece-sus” în domeniul frecvențial

În cazul filtrului de tip Gauss, coeficienţii de frecvenţă nu sunt tăiaţi brusc, ci este folosit un proces de suprimare mai netedă. Acest proces ţine cont şi de faptul că DFT a unei funcţii de tip Gauss este tot o funcţie de tip Gauss (figura anterioară/d-g).

Filtrul Gaussian de tip „trece-jos” atenuează componentele din domeniul de frecvenţă care sunt mai îndepărtate faţă de centrul imaginii $(W/2, H/2)$. $A \sim \frac{1}{\sigma}$ unde σ este deviaţia standard a filtrului Gaussian echivalent în domeniul spaţial.

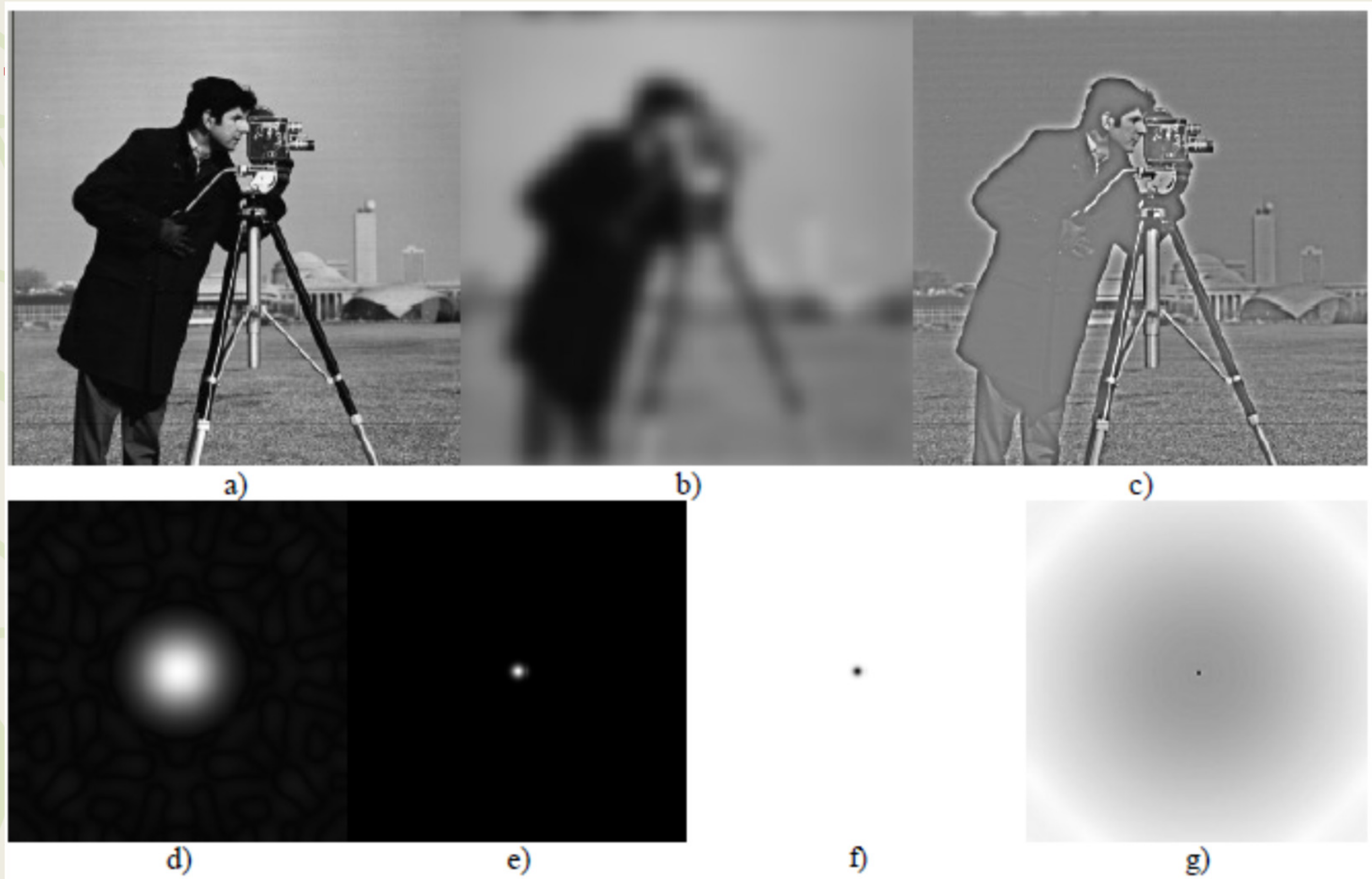
$$X'_{uv} = X_{uv} e^{-\frac{\left(\frac{H}{2}-u\right)^2+\left(\frac{W}{2}-v\right)^2}{A^2}}$$

Filtrul Gaussian de tip „trece-sus” atenuează componentele de frecvenţă care sunt aproape de centrul imaginii $(W/2, H/2)$:

$$X'_{uv} = X_{uv}\left(1 - e^{-\frac{\left(\frac{H}{2}-u\right)^2+\left(\frac{W}{2}-v\right)^2}{A^2}}\right)$$

În figură se observă rezultatele aplicării unui filtru de tip Gauss.

A se remarca faptul că efectul de unde circulare vizibil în figura anterioară a dispărut.



a) imaginea originală; b) rezultatul aplicării unui filtru Gaussian de tip „trece-jos”; c) rezultatul aplicarii unui filtru Gaussian de tip „trece-sus”; d) Filtru Gaussian de tip „trece-jos” în domeniul frecvenţial; e) filtru Gaussian corespunzător de tip „trece-jos” în domeniul spaţial; f) Filtru Gaussian de tip „trece-sus” în domeniul frecvenţial; g) filtru Gaussian corespunzător de tip „trece-sus” în domeniul spaţial

TEMA 3

Să se implementeze câte doi algoritmi de filtrare în domeniul frecvențial (din cei descriși în laborator):

1. *de tip trece-jos*
2. *de tip trece-sus*