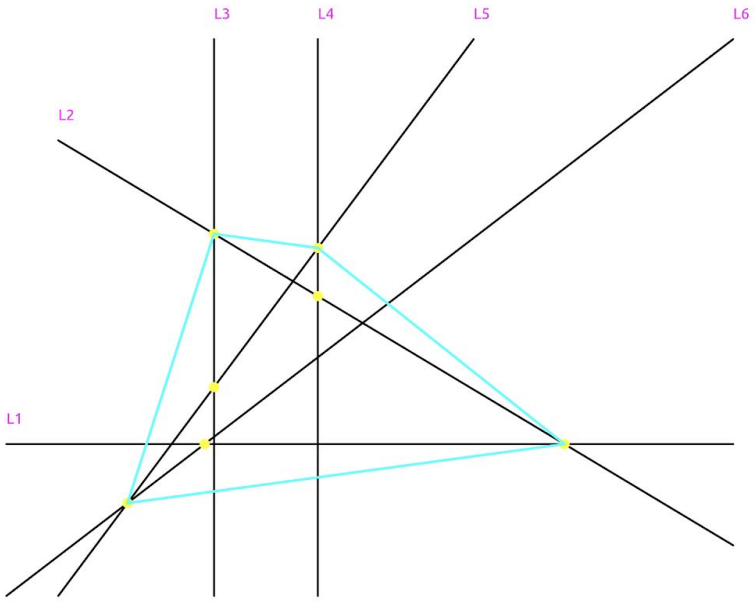
Geometrijski algoritmi @ MATF

Algoritam za izračunavanje konveksnog omotača preseka linija

Anđelka Milovanović



Opis problema

[*Tekst je preuzet iz knjige profesora Janičića] Skup tačaka X (ravni ili prostora) je konveksan ako za svake dve tačke A i B skupa X svaka tačka duži AB pripada skupu X. Za poligon (tj. za skup tačaka poligona) važi: poligon je konveksan ako su za svaku njegovu stranicu sve njegove tačke sa iste njene strane. Važi i sledeće: poligon je konveksan, ako su mu svi unutrašnji uglovi manji od opruženog. Konveksni omotač skupa tačaka je najmanji

konveksan skup tačaka koji sadrži X. Za konačan skup tačaka u ravni, konveksni omotač je (konveksni) poligon. Za fiksiran skup tačaka, konveksni omotač je određen jednoznačno.

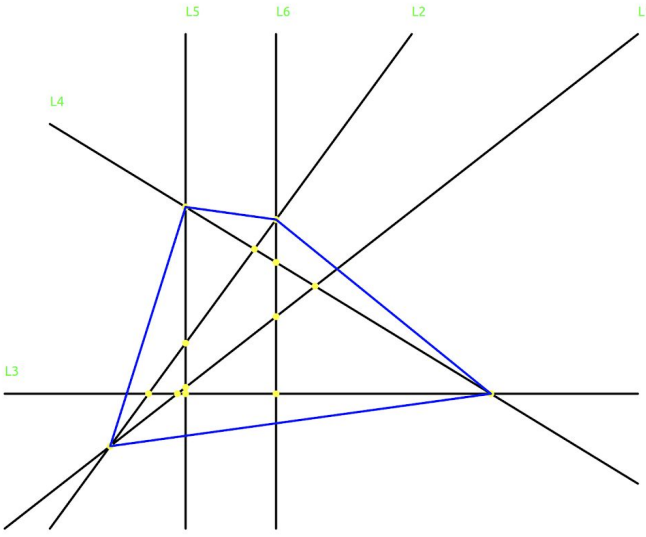
[*Atallah, M.J., 1986. Computing the convex hull of line intersections. *Journal of Algorithms*, *7*(2), pp.285-288.] Na osnovu algoritma predloženog u ovom radu, potrebno je pronaći konveksni omotač preseka svih linija, ali tako da vremenska složenost bude O(nlogn). Prema tome, nije opcija da pronađemo sve preseke (njih može biti $O(n^2)$ među n linija), nego da redukujemo broj pronađenih presečnih tačaka, od kojih se sigurno može napraviti konveksni omotač preseka svih linija.

Ulaz: *skup od 2*n tačaka u ravni, gde 2 tačke predstavljaju 1 liniju*

Izlaz: *skup tačaka koje predstavljaju konveksan omotač*

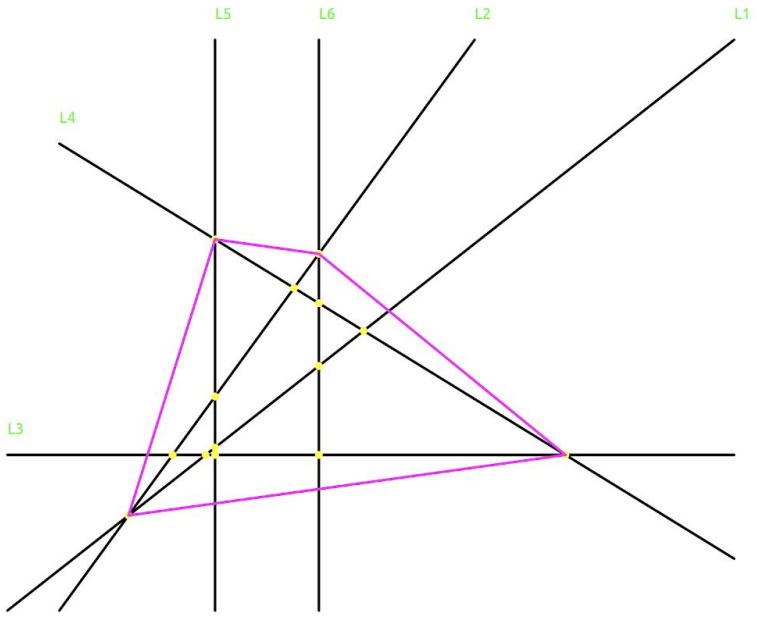
Naivno rešenje problema

Naivno rešenje ovog algoritma je implementirano na dva načina.
Prvi primarni način je da se pronađu svi preseci linija u složenosti $O(n^2)$, gde se gledaju preseci svake sa svakom, a zatim da se pozove Gremov algoritam koji pronalazi konveksni omotač od formiranih tačaka u složenosti O(nlogn). Primer tako formiranog konveksnog omotača nad jednim veštački generisanim ulazom linija prikazan je na slici 1.



Slika 1: Konveksni omotač svih preseka linija (gruba sila + Gremov algoritam)

Drugi način je da se pronađu svi preseci linija u složenosti $O(n^2)$, gde se gledaju preseci svake sa svakom, a zatim da se algoritmom grube sile pronađe konveksni omotač od svih tih preseka u složenosti $O(n^3)$. Primer tako formiranog konveksnog omotača nad jednim veštački generisanim ulazom linija prikazan je na slici 2.



Slika 2: Konveksni omotač svih preseka linija (gruba sila preseka + gruba sila omotača)

Gremov algoritam je rađen u okviru kursa i detalji implementacije se mogu pogledati u literaturi predmeta i knjizi Computational Geometry. Napomena je da ulazne tačke algoritma mogu biti zadate i tipom QPointF (float vrednosti) i obrađen je slučaj kolinearnih i paralelnih pravih.

Optimalni algoritam

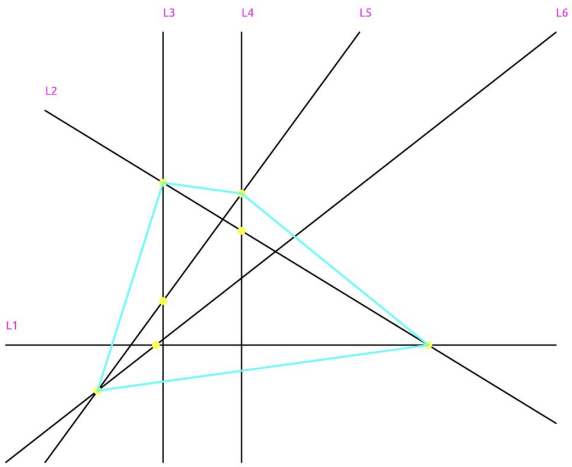
Implementiran algoritam u okviru ovog seminarskog rada je predstavljen u pomenutom radu: Computing the convex hull of line intersections (Atallah). Poenta ovog algoritma je vremenska složenost O(nlogn), gde n predstavlja broj ulaznih linija. Algoritam se sastoji iz 3 glavna koraka:

1. [O(nlogn)] Potrebno je sortirati sve linije prema nagibu ugla koji zaklapaju sa x-osom
2. [O(n)] Potrebno je proći kroz sortirane linije i pronaći preseke svake 2 susedne (prema uglu) - ukoliko je linija poslednja, onda se gleda njen presek sa prvom (preseka ima n i presek 2 se registruje u linearnom vremenu, tako da ovaj korak nosi O(n) vremena)
3. [O(nlogn)] Pozvati neki algoritam (u ovom slučaju Gremov algoritam) koji pronalazi konveksni omotač od pronađenih preseka

Ono što je zanimljivost je da u radu nije objašnjeno na koji način treba da se obrađuju specijalni slučajevi (kada postoje kolinearne tačke, kada je jedan presek dobijen od 3 ili više linija, kada imamo paralelne prave). Slučaj sa kolinearnim tačkama je rešen izbacivanjem svih središnjih tačaka u složenosti O(n), na kraju algoritma. Slučaj paralelnih linija je obrađivan tako što je korišćena struktura mape, gde ključ predstavlja vrednost ugla (koeficijent pravca), a vrednost je vektor linija koje imaju taj koeficijent pravca:

std::map<double, std::vector<QLineF>> _mapaUgaoDuzi;

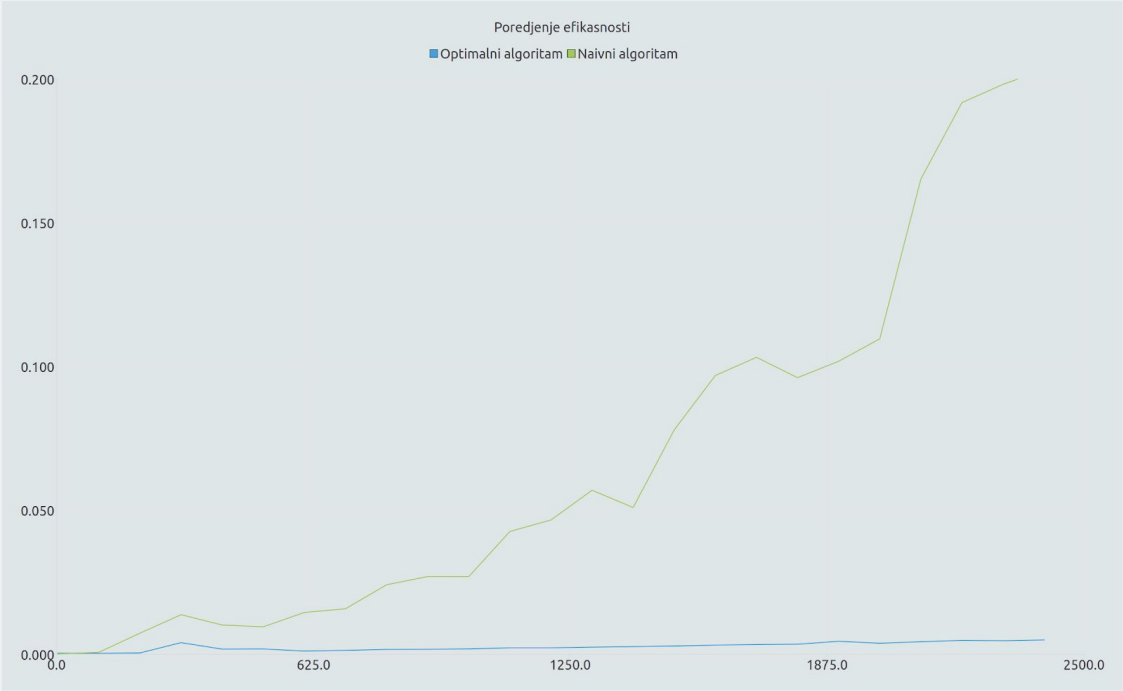
Ono što se radi je da se gledaju susedne linije prema uglu (odnosno 2 susedna ključa mape) i registruju se preseci prve i poslednje linije tekućeg ugla, sa prvom i poslednjom linijom susednog ugla. Na kraju se pozove Gremov algoritam za pronađene preseke. Primer ovako formiranog konveksnog omotača nad jednim veštački generisanim ulazom linija prikazan je na slici 3:



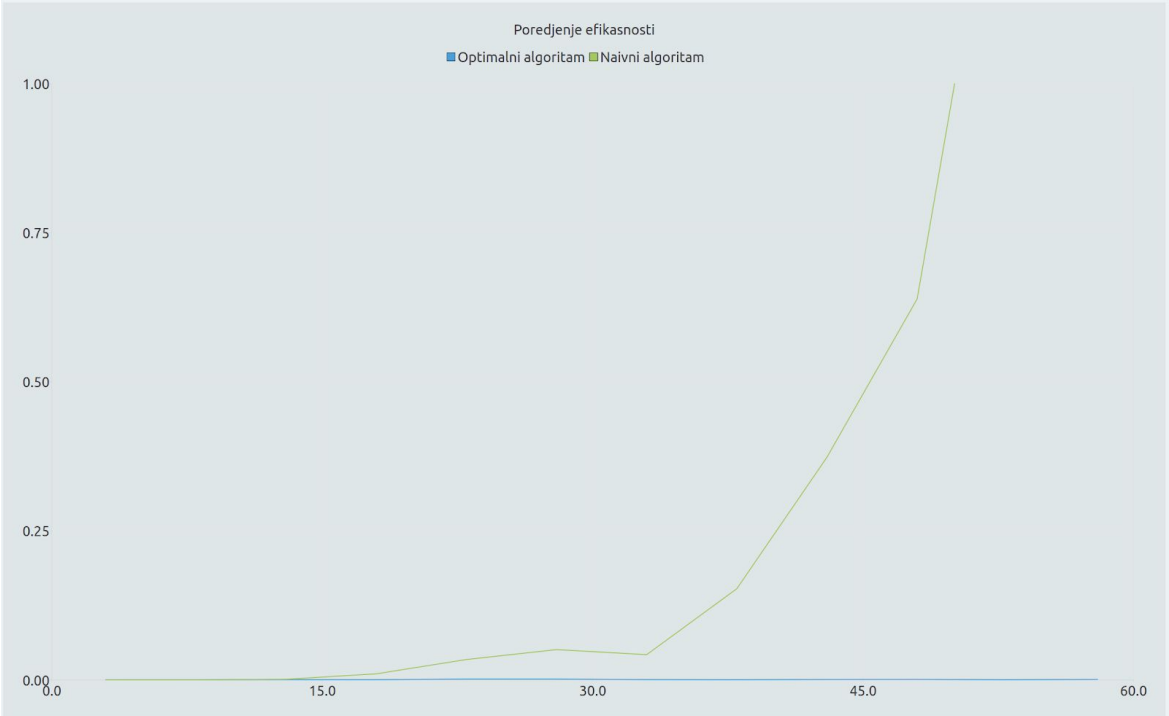
Slika 3: Konveksni omotač svih preseka linija (optimalni algoritam)

Poređenje efikasnosti naivnog i optimalnog algoritma

Poređenje je rađeno za optimalni algoritam i obe verzije naivnog algoritma.
Na slici 4 prikazan je grafik vremenskog izvršavanja u zavisnosti od veličine ulaza za optimalni algoritam (plavo) i naivni algoritam gde je Gremov algoritam korišćen za određivanje konveksnog omotača. Korišćeni parametri u config.h datoteci su MIN_DIM=3, step=100 , MAX_DIM=2500, Y_MAX_VAL=0.2.



Slika 4: Poređenje efikasnosti optimalnog algoritma i primarne verzije naivnog algoritma
Na slici 5 je prikazano isto to samo za drugu verziju naivnog algoritma (sve gruba sila). Korišćeni parametri u config.h datoteci su MIN_DIM=3, step=5 , MAX_DIM=50, Y_MAX_VAL=1.



Slika 5: Poređenje efikasnosti optimalnog algoritma i druge verzije naivnog algoritma

Testiranje ispravnosti algoritma

Testiranje algoritma je rađeno pomoću Google Test okruženja unutar QtCreatora. Testirano je 13 slučajeva sa različitim zadatim ulaznim konfiguracijama, kao i sa nasumičnim brojem željenih linija koje treba da se generišu i za koje se testiraju algoritmi. Praćeno je poklapanje konveksnih omotača.

Naziv testa	**Opis testa**	**Ulaz**	**Očekivani izlaz**
input10	Zadavanje vrednosti 10 za generisanje nasumičnih linija u programu i testiranje poklapanja	brojLinija1=10	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma

	konveksnih omotača		
input100	Zadavanje vrednosti 100 za generisanje nasumičnih linija u programu i testiranje poklapanja konveksnih omotača	brojLinija2=100	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
input1000	Zadavanje vrednosti 1000 za generisanje nasumičnih linija u programu i testiranje poklapanja konveksnih omotača	brojLinija3=1000	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
input10000	Zadavanje vrednosti 10000 za generisanje nasumičnih linija u programu i testiranje poklapanja konveksnih omotača	brojLinija4=10000	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma

inputFileBasic	Zadavanje tačaka iz datoteke, manuelan ulaz	ulaz1 tj. datoteka input1.txt	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
inputFileCollinear	Zadavanje tačaka iz datoteke, postoje kolinearne tačke	ulaz2 tj. datoteka input2.txt	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
inputFileGridParallel	Zadavanje grida paralelnih linija iz datoteke	ulaz3 tj. datoteka grid_parallel.txt	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
inputFileEmpty	Zadavanje prazne datoteke	ulaz4 tj. datoteka empty.txt	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
inputFile2Parallel	Zadavanje 2 paralelne prave	ulaz5 tj. datoteka 2_parallel.txt	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
inputFileRandom	Nasumičan ulaz koji je u nekom trenutku pravio problem	ulaz6 tj. datoteka random_generated.txt	Poklopljene tačke u konveksnim omotačima optimalnog i naivnog algoritma
testGenerisiLinije	Testiranje funkcije za nasumično generisanje linija	brojLinija1=10	Poklapanje vraćenih linija sa brojLinija1

testGenerisiLinijeInput0	Testiranje funkcije za nasumično generisanje linija kad je uneta 0	brojLinija=0	Poklapanje sa unetim brojem linija
testGenerisiUglove	Testiranje broja vraćenih uglova	brojLinija1=10	Broj vraćenih uglova treba da se poklopi sa brojem linija