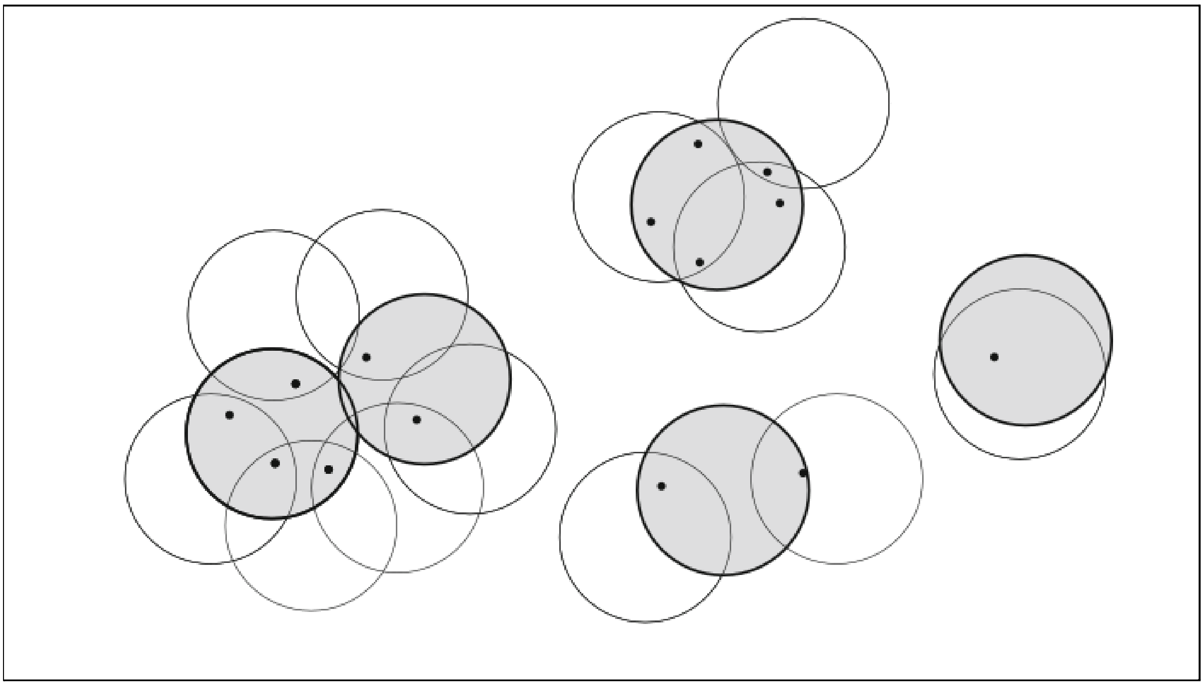
Algoritam za pokrivanje skupa tačaka jediničnim krugovima

Ana Jakovljević



Opis problema

Problem pokrivanja jediničnim krugovima (*engl*. *Unit Disk Cover problem*) predstavlja problem izračunavanja minimalnog skupa jediničnih krugova potrebnih za pokrivanje zadatog skupa tačaka.

Jedinični krugovi su krugovi poluprečnika jedan, ali se to lako uopštava na krugove bilo kog fiksiranog poluprečnika.

Problem je *NP težak*, a u ovom radu su implementirana četiri algoritma različitih vremenskih složenosti i faktora aproksimacije za primenu na tačke zadate u ravni.

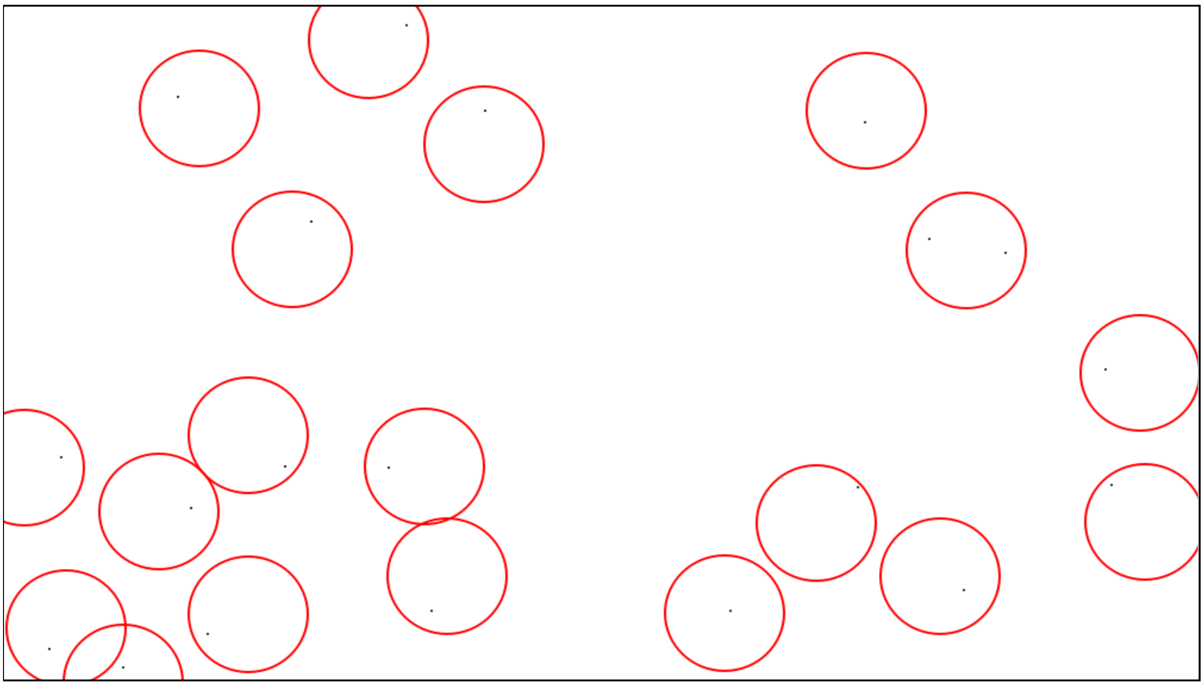
Ulaz: *skup od n tačaka ravni*

Izlaz: *skup tačaka koje predstavljaju centre krugova fiksiranog poluprečnika za pokrivanje ulaznog skupa od n tačaka*

Naivno rešenje problema

Ograničenja za pozicije krugova ne postoje, pa kandidati za centre krugova mogu biti bilo koji parovi realnih brojeva. Zbog toga je iscrpna pretraga za rešavanje ovog problema nemoguća i kao prvi naivni pristup korišćeno je slučajno generisanje jednog po jednog kruga uz proveravanje da li novi generisani krug pokriva neku od do tada nepokrivenih tačaka.

Međutim, besmisleno je proveravati krugove koji se ne nalaze u okolini bilo koje tačke datog skupa, a ovaj algoritam gubi značajno vreme na proveru takvih krugova. Iz tog razloga implementiran je "manje" naivan algoritam koji se takođe zasniva na slučajnom generisanju krugova, ali se slučajnost odnosi na izbor u okolini neke od tačaka koje treba pokriti.

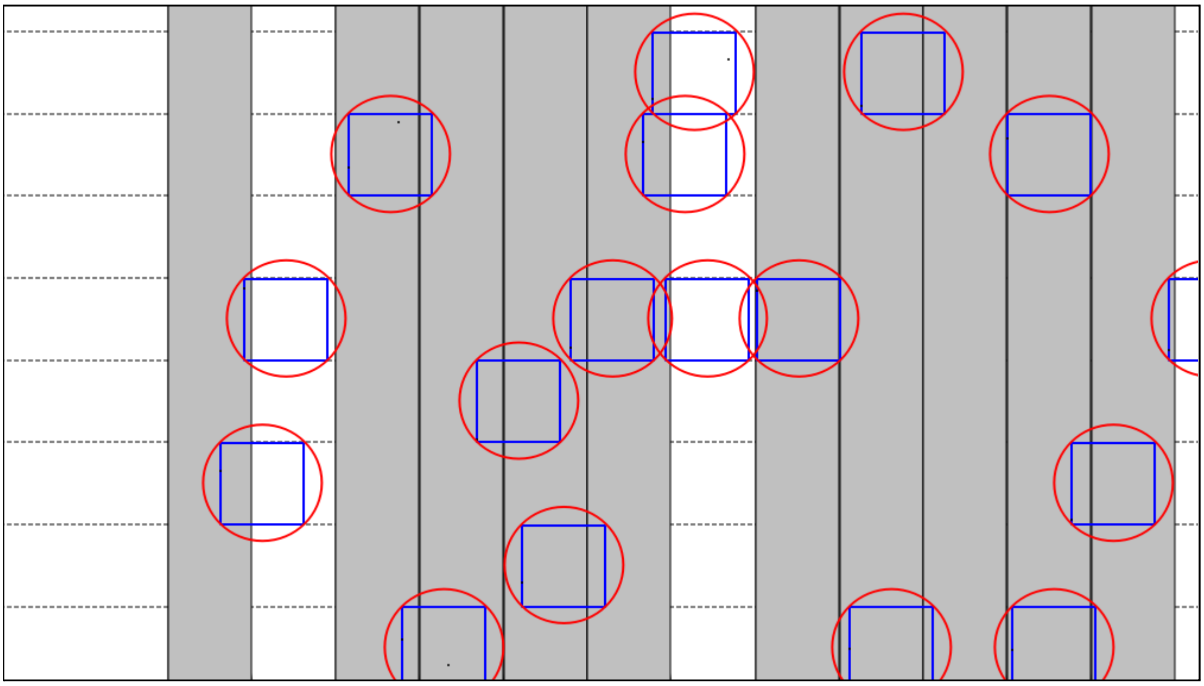


Nakon predstavljanja ostalih algoritama biće upoređene njihove performanse sa performansama naivnih algoritama.
Glavni problem ovih algoritama je nepostojanje teorijskog dokaza o faktoru aproksimacije. U nastavku će biti predstavljeni algoritmi sistematičnog pristupa za koje postoje teorijski dokazi njihovih faktora aproksimacije. Algoritmi će biti opisani pretpostavljajući opštu vrednost poluprečnika R.

Algoritam1: Gonzalez [1]

Autor u ovom radu opisuje algoritam za rešavanje problema pokrivanja skupa tačaka kvadratima fiksirane veličine, stranica paralelnih osama. Rešenje ovog problema će biti iskorišćeno za dobijanje rešenja problema pokrivanja krugovima poluprečnika R.

Pre svega, predstavljen je jednostavniji problem ploča (*engl. slab problem*) u kom su sve tačke locirane unutar pravougaonika visine D, stranica paralelnih osama. Algoritam za problem ploča iterativno pokriva najlevlju nepokrivenu tačku kvadratom dimenzija $D \times D$ i na taj način kreira optimalno rešenje. Problem ploča se dalje uopštava na problem pokrivanja šireg skupa tačaka. Ideja je da se prostor podeli na ploče visine D i da se svaka ploča nezavisno obradi predstavljenim algoritmom. Na osnovu ovoga, rešenje polaznog problema pokrivanja krugovima se dobija postavljanjem ivice kvadrata na $R\sqrt{2}$, rešavanjem međuproblema sa kvadratima i konačno, opisivanjem krugova poluprečnika R oko svakog kvadrata koji čini rešenje međuproblema. Navedeni algoritam ima vremensku složenost izvršavanja $O(n \cdot log|OPT|)$, dok faktor aproksimacije iznosi 4.



Vizuealizacija:

Vizuealizacija je izvršena u skladu sa navedenim načinom rada algoritma. Tačke su prvo podeljene po horizontalnim trakama, a zatim su parne i neparne horizontalne trake nezavisno obrađene na isti način: tačke su dalje podeljene po vertikalnim trakama koje su prikazane sivo obojenim pravougaonicima. Algoritam obrađuje dve po dve susedne trake i iscrtava se postupak pokrivanja tačaka kvadratima. Na kraju se opisuju krugovi oko svakog kvadrata koji čini rešenje.

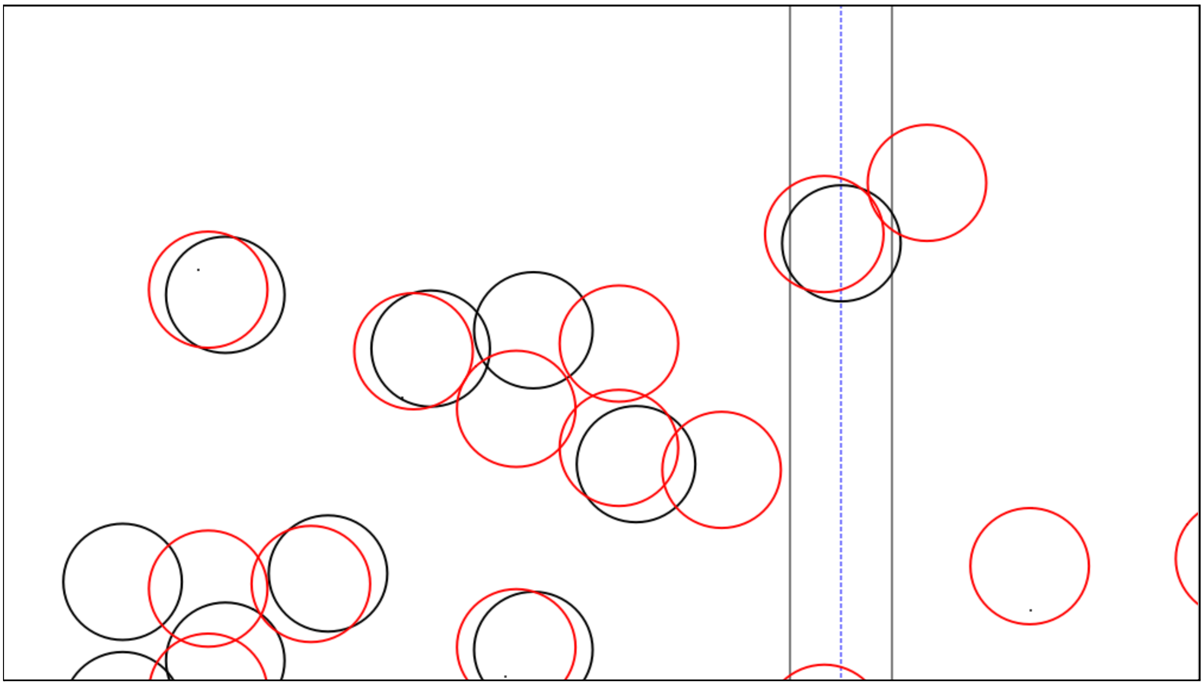
Algoritam2: Liu Lu [2]

Autori su u radu predstavili $\frac{25}{6}$- aproksimacioni algoritam za pronalaženje pokrivača skupa tačaka koji se izvršava u vremenu$O(n \cdot log\, n)$. Algoritam se zasniva na podeli prostora na trake širine $R\sqrt{3}$, gde se za svaku nepraznu traku koristi jednostavna pohlepna procedura koja postavlja krug što je niže moguće tako da on pokriva najvišu nepokrivenu tačku. Zbog jednostavnosti, za svaku traku se pretpostavlja da su u njoj sve tačke nepokrivene. Za preciznije objašnjenje pohlepnog pristupa postavljanja krugova u traci uvodi se pojam *prave ograničenja* koja predstavlja pravu koja prolazi kroz sredinu trake i na koju se postavljaju centri krugova koji ulaze u rešenje. Pohlepni pristup se tada zasniva na konstrukciji segmenta na pravoj ograničenja na kojoj se mogu nalaziti centri krugova tako da pokrivaju datu tačku. Segmenti se kreiraju za svaku tačku, zatim se sortiraju neopadajuće i za svaki segment se bira njegova najniža tačka za centar kruga. Proverava se koji su dodatno segmenti obezbeđeni ovakvim izborom, i smatra se da su njima odgovarajuće tačke pokrivene.

Osnovna verzija algoritma ima aproksimacioni faktor 5, ali korišćenjem strategije pomeranja (*engl. shifting strategy*) dobija se navedeni aproksimacioni faktor od $\frac{25}{6}$. Ova strategija se zasniva na pomeranju svake trake udesno za $\frac{\sqrt{3}}{6}$ i traženju najboljeg rešenje između svih pronađenih kojih ima šest.

Vizuealizacija:

Pretraga se vrši po traci širine $R\sqrt{3}$ koja se iscrtava svakim pomerajem, a u sredini se nalazi isprekidana prava ograničenja na kojoj se pozicioniraju centri krugova. Prilikom izvršavanja algoritma postoji šest iteracija i tokom svake se iscrtavaju krugovi u crnoj boji koji predstavljaju rešenje za trenutnu iteraciju, dok je trenutno najbolje pronađeno rešenje iscrtano krugovima crvene boje.



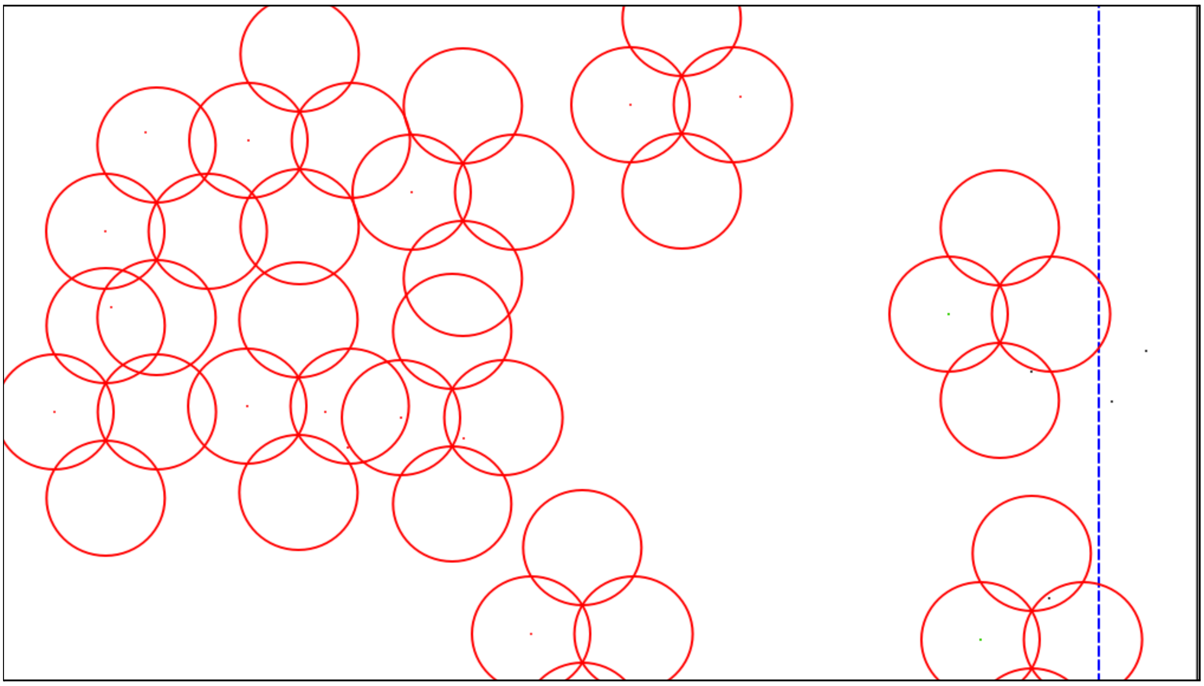
Algoritam3: Biniaz Liu Maheshwari Smid [3]

U ovom radu prikazan je 4- aproksimacioni algoritam koji se zasniva na činjenici da je za pokrivanje polukruga poluprečnika 2 potrebno i dovoljno 4 jedinična kruga. Ideja za algoritam se krije u tehnici brišuće prave. Tokom izvršavanja algoritma održavaju se dve strukture podataka: red događaja koji sadrži događaje položaja i događaje brisanja i pomoću kog se svaka tačka ulaznog skupa obrađuje na adekvatan način kada se na nju naiđe; i binarno stablo pretrage koje sadrži centre krugova, kandidate čiji polukrug poluprečnika 2 potencijalno pokriva tačku koja se u tom trenutku obrađuje. Algoritam se izvršava u vremenu $O(n \cdot log\, n)$.

Mana ovog algoritma je što za nepokrivene tačke uvek postavlja 4 nova kruga. To obezbeđuje fiksiran aproksimacioni faktor, međutim ukoliko optimalno rešenje sadrži onoliko krugova koliko ulazni skup ima tačaka, rešenje dobijeno ovim algoritmom će uvek sadržati 4 puta više krugova od optimalnog rešenja.

Vizuealizacija:

Tokom izvršavanja algoritma iscrtava se kretanje brišuće prave po tačkama događaja i dodavanje 4 nova kruga pokrivača kad god brišuća prava naiđe na nepokrivenu tačku.



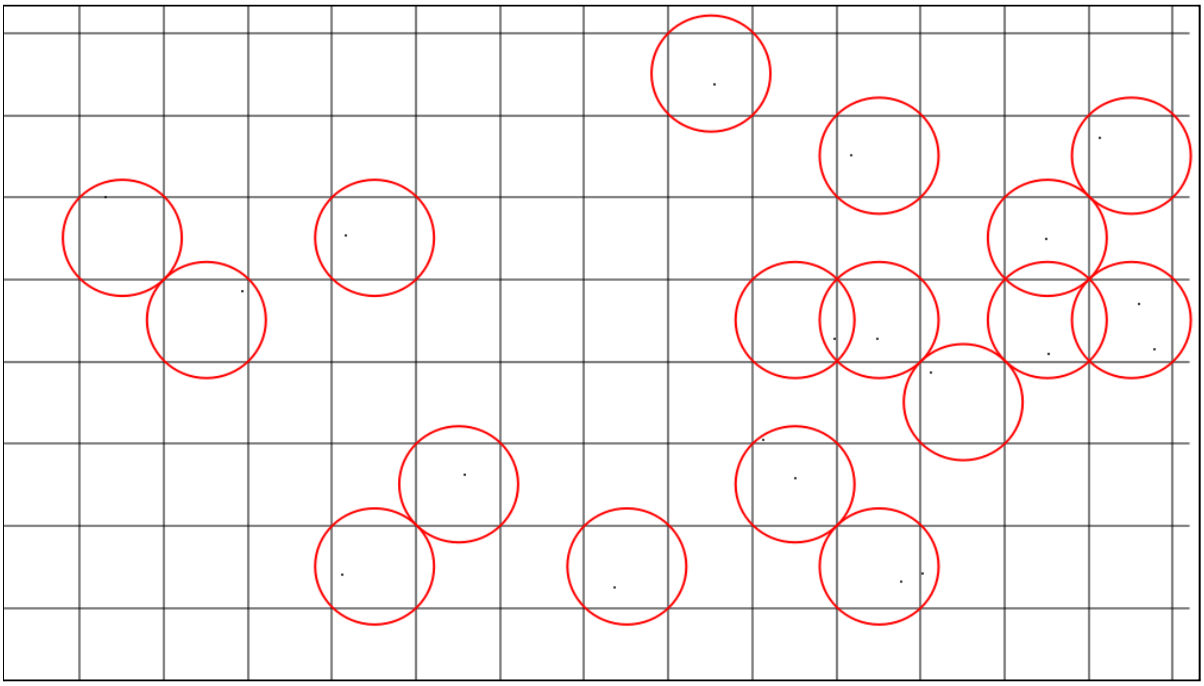
Algoritam4: Ghosh Hicks Shevchenko [4]

Algoritam predstavljen u ovom radu predstavlja online algoritam koji se u odnosu na ostale algoritme brže izvršava, a da pri tome zadržava dovoljno kvalitetna pronađena rešenja. Brzo izvršavanje algoritma omogućeno je nedostatkom potrebe za prethodnom pripremom podataka i čuvanjem podataka u heš tabeli. Autori ovog algoritma su u navedenom radu uporedili algoritam sa nekoliko drugih algoritama (uključujući ovde navedene algoritme implementirane) i dosli do zaključaka o kvalitetu algoritma, ali su takođe izložili dokaz da je ovaj algoritam 7-aproksimacioni.

Algoritam obilazi tačke u proizvoljnom redosledu (nezavisnom od njihovog položaja) i proverava da li je je ona sigurno nepokrivena, da li je pokrivena krugovima koji odgovaraju kvadratima levo, desno, gore i dole ukoliko ti krugovi postoje u pokrivaču i na osnovu toga donosi odluku da li treba postaviti krug u centar kvadrata u kom je tačka trenutno locirana. Kvadrati oko kojih su opisani krugovi rešenja se čuvaju u heš tabeli.

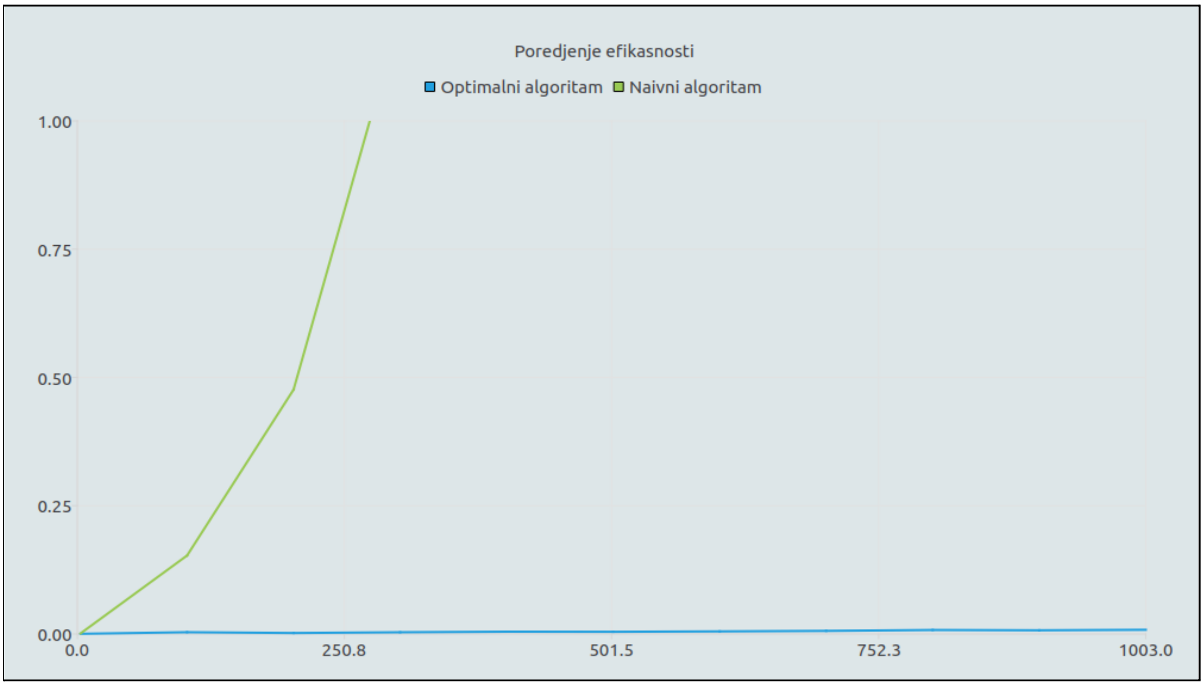
Vizuealizacija:

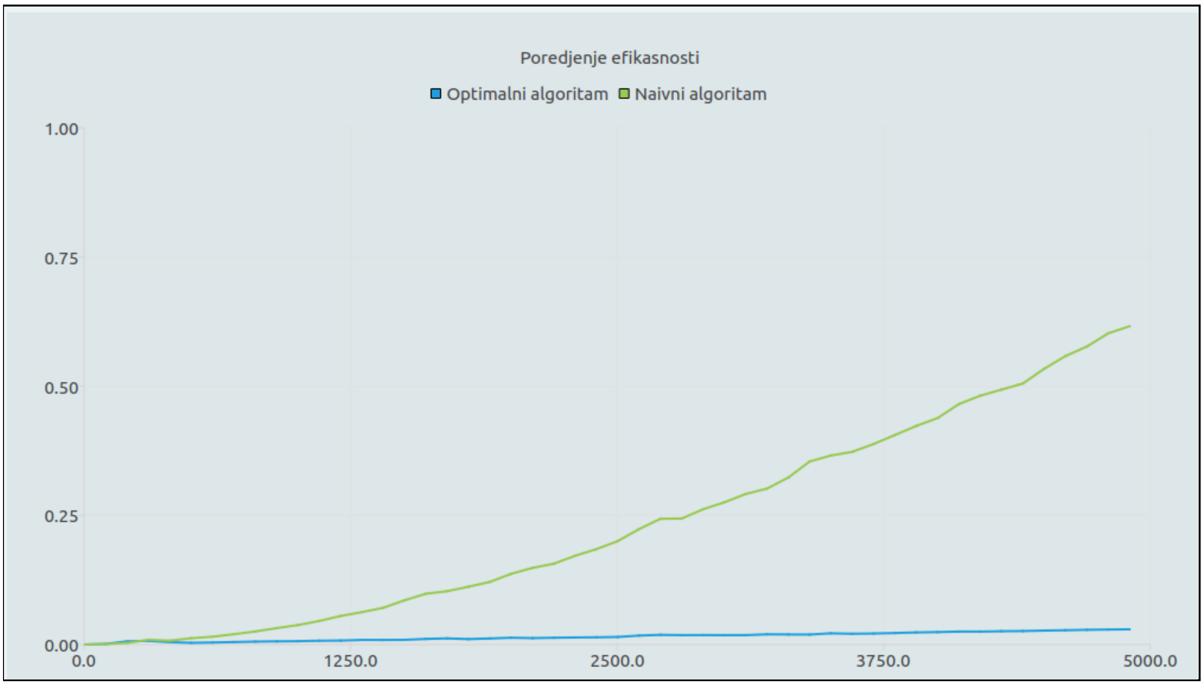
Prilikom izvršavanja algoritma iscrtava se mreža kvadrata nad kojima se vrši pretraga pokrivača i iscrtavaju se jedan po jedan krugovi opisani oko pojedinačnih kvadrata koji odgovaraju konačnom rešenju.



Poredjenje efikasnosti naivnog i naprednog algoritma

Izvršeno je poređenje efikasnosti naivnih i svih ostalih algoritama. Može se uočiti značajno povećanje vremena izvršavanja naivnih algoritama. Na slikama je predstavljeno poređenje prvog i drugog slučajnog algoritma sa LL2014, redom.





Testiranje ispravnosti algoritma

Testovi su pokretani nad svakim od implementairanih algoritama, uključujući i naivne. Testirani su slučajevi sa specifičnim tačkaa i nasumično generisanim tačkama. Kao najbitnija osobina, u svakom testu se proverava da li algoritam zaista pokriva sve tačke.
Za svaki algoritam je napravljen zaseban test sa nazivom sastavljenim od naziva datog u tabeli i oznakom algoritma koji se testira.

Naziv testa	Opis testa	Ulaz	Očekivani izlaz
NoPoints	Ulaz ne sadrži nijednu tačku	Niz dimenzija 0	Pokrivač veličine 0
SamePoints	Ulaz sadrži više tačaka na istoj poziciji	Niz dimenzije 4 iz datoteke file1.txt gde su sve tačke iste	Pokrivač veličine 1
RandomInput1	Slučajno generisan niz od 20 tačaka	Niz dimenzije 20	Nema nepokrivenih tačaka
RandomInput2	Slučajno generisan niz od 500 tačaka	Niz dimenzije 500	Nema nepokrivenih tačaka

Dodatak

Osnovnu literaturu predstavljao je rad koji sumira ponašanje svih poznatih algoritama za ovaj problem [4]. Dodatna literatura bili su originalni radovi u kojima su predstavljeni algoritmi, radi lakšeg razumevanja istih.

U radu [4] su izloženi kvalitet rešenja i vreme izvršavanja različitih algoritama nad velikim skupovima tačaka. Algoritmi su dodatno opisani, diskutovani i izabrani su najbolji i oni su implementirani u ovom seminarskom radu. Najbolje vreme izvršavanja imao je algoritam GHS2019, dok su algoritmi LL2014 i G1991 pokazali najkvalitetnija rešenja sa najmanjim skupom krugova u pokrivaču.

[1] Teofilo F. Gonzalez: Covering a set of points in multidimensional space (https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/002001909190075S)

[2] Paul Liu, Daniel Lu: A fast 25/6-approximation for the minimum unit disk cover problem (https://arxiv.org/abs/1406.3838)

[3] Ahmed Biniaz, Paul Liu, Anil Maheshwari, Michiel Smid: Approximation algorithms for the unit disk cover problem in 2D and 3D (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092577211630030X)

[4] Anirban Ghosh, Brian Hicks, Ronald Shevchenko: Unit Disk Cover for Massive Point Sets (https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-34029-2_10)