Politechnika Wrocławska

Anna Modrzejewska

236642

Obliczenia naukowe

Lista nr 3

25 listopada 2018

Zadanie 1

1) Metoda bisekcji

Należy zaimplementować funkcję obliczającą pierwiastki równania $f(x) = 0$ metodą bisekcji (połowienia). Opiera się ona na twierdzeniu Darboux:

> **Twierdzenie** (Darboux). Funkcja ciągła f na przedziale $[a, b]$ przyjmuje w nim wszystkie wartości między $f(a)$ a $f(b)$.

W szczególności, dla f przyjmującej różne znaki na końcach przedziału, można znaleźć miejsce zerowe funkcji w pewnym punkcie wewnątrz przedziału.

2) Algorytm rozwiązania

Metoda przyjmuje na wejściu:

f	– funkcja f(x)
a, b	– końce przedziału
delta, epsilon	– dokładność obliczeń

Następnie są wykonywane następujące kroki:

1. Jeśli $f(a)$ ma inny znak niż $f(b)$, metoda bisekcji zwraca błąd ($err = 1$), ponieważ na badanym przedziale nie można znaleźć jednoznacznie miejsca zerowego. Sprawdzanie, czy wartości są różnych znaków, jest wykonywane za pomocą porównania: $sgn(f(a)) \neq sgn(f(b))$. Nie może być to sprawdzane metodą $f(a) \cdot f(b) < 0$, ponieważ może wystąpić zjawisko nadmiaru lub niedomiaru, co dla mnożenia bardzo małych liczb zwróci 0, a dla bardzo dużych zwróci ∞
2. W przeciwnym przypadku obliczany jest środek przedziału ze wzoru $c = a + \frac{b-a}{2}$. Nie może być on obliczany z matematycznie równoważnego działania $c = \frac{a+b}{2}$, ponieważ mogłoby to spowodować, że środek c wypadnie poza przedział (a, b).
3. Jeśli długość badanego przedziału będzie wystarczająco mała ($< \delta$) lub wartość funkcji dla wyliczonego środka tego przedziału będzie bliska zeru ($< \epsilon$) metoda zwraca miejsce zerowe i kończy działanie.
4. W przeciwnym przypadku jest porównywany znak początku a i środka c przedziału. Jeśli są różne, miejsce zerowe znajduje się w nowym badanym przedziale (a, c). Jeśli takie same, miejsce zerowe jest w (c, b).
5. Kroki 2-4 są powtarzane do momentu znalezienia miejsca zerowego z podaną dokładnością.

Metoda zwraca na wyjściu:

r	– przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$
v	– wartość f(r)
it	– liczba wykonanych iteracji
err	– sygnalizacja błędu

Zadanie 2

1) Metoda Newtona

Należy zaimplementować funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona (metodą stycznych). Metoda Newtona polega na obliczaniu kolejnych wartości x_n ze wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

gdzie x_{n+1} jest miejscem przecięcia osi OX ze styczną do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_n.
Ma zastosowanie do funkcji na przedziale $[a, b]$ spełniającym następujące warunki:

1. funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości różnych znaków na końcach przedziału
2. $f''(x)$ jest ciągła i nie zmienia znaku w $[a, b]$
3. styczne do krzywej $f(x)$ poprowadzone w punktach o odciętych a, b przecinają OX wewnątrz $[a, b]$

2) Algorytm rozwiązania

Metoda przyjmuje na wejściu:

f, pf	– funkcja $f(x)$ oraz pochodna $f'(x)$
x0	– przybliżenie początkowe
delta, epsilon	– dokładność obliczeń
maxit	– maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Następnie są wykonywane następujące kroki:

1. Jeśli wartość funkcji dla x_0 jest wystarczająco mała ($< \epsilon$) metoda zwraca wynik i kończy działanie
2. Jeśli wartość pochodnej w punkcie x_0 jest bliska zeru, metoda zwraca błąd.
3. Z podanego wzoru wyliczany jest kolejne przybliżenie x
4. Jeśli wartość funkcji dla wyliczonego x jest mniejsza od epsilonu lub różnica między kolejnymi przybliżeniami jest mniejsza od delty, metoda zwraca wynik i kończy działanie
5. W przeciwnym przypadku punkty 3-4 są wykonywane zadaną liczbę iteracji

Metoda zwraca na wyjściu:

r	– przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$
v	– wartość f(r)
it	– liczba wykonanych iteracji
err	– sygnalizacja błędu

Zadanie 3

1) Metoda siecznych

Należy zaimplementować funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.
Kolejne wartości x_n są obliczane ze wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\tfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

gdzie x_{n+1} jest miejscem przecięcia osi OX z sieczną funkcji $f(x)$ przechodzącej przez punkty $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

2) Algorytm rozwiązania

Metoda przyjmuje na wejściu:

f, pf	– funkcja $f(x)$ oraz pochodna $f'(x)$
x0, x1	– przybliżenia początkowe
delta, epsilon	– dokładność obliczeń
maxit	– maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Następnie są wykonywane następujące kroki:

1. Jeśli wartość bezwzględna początku przedziału a jest większa od wartości bezwzględnej końca przedziału b, a z b są zamieniane.

2. Kolejna wartość przybliżenia pierwiastka jest obliczana ze wzoru
3. Jeśli wartość funkcji dla wyliczonego x jest mniejsza od epsilonu lub różnica między kolejnymi przybliżeniami jest mniejsza od delty, metoda zwraca wynik i kończy działanie
4. W przeciwnym przypadku operacja jest powtarzana zadaną liczbę iteracji

Metoda zwraca na wyjściu:

r	– przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$
v	– wartość f(r)
it	– liczba wykonanych iteracji
err	– sygnalizacja błędu

Zadanie 4

1) Opis problemu

Należy porównać wyniki równania $f(x) = 0$ otrzymane metodą bisekcji, stycznych i siecznych.

2) Analiza rozwiązania

Wynik równania $sin(x) + (\frac{1}{2} \cdot x)^2 = 0$ wygenerowany przez program `Wolfram Alpha`:
$x \approx 1.93375376282702125330847566909068005653 7$
Metody są zestawione w tabeli poniżej:

metoda	przybliżenie pierwiastka	wartość funkcji	liczba iteracji
bisekcji	1.9337539672851562	$-2.7027680138402843 \cdot 10^{-7}$	16
stycznych	1.933753779789742	$-2.2423316314856834 \cdot 10^{-8}$	4
siecznych	1.933753644474301	$1.564525129449379 \cdot 10^{-7}$	4

Wszystkie metody zwróciły poprawny co do dokładności obliczeń wynik. Metoda bisekcji potrzebowała 4 razy więcej iteracji niż metoda stycznych lub siecznych. Można zauważyć, że tempo zbieżności metody bisekcji jest wolniejsze niż w przypadku metody stycznych lub siecznych. Dla bisekcji jest to liniowa zbieżność ($p = 1$), dla stycznych kwadratowa ($p = 2$), a dla siecznych szybsza niż liniowa
($p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

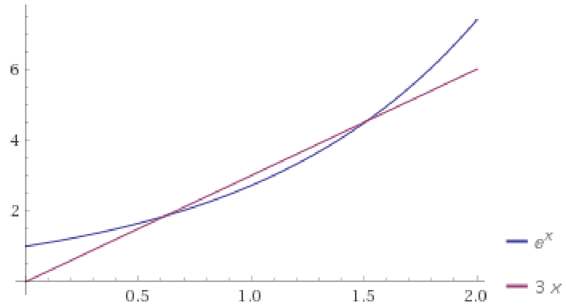
Zadanie 5

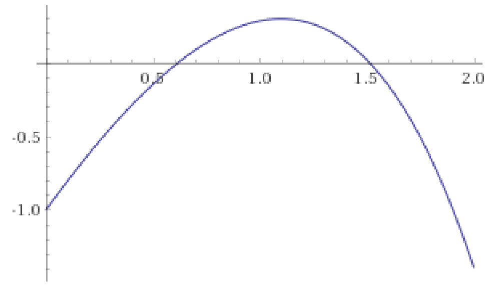
1) Opis problemu

Należy znaleźć rozwiązanie równania $3x = e^x$ za pomocą metody bisekcji o dokładności obliczeń $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$

2) Rozwiązanie i analiza wyników

Na lewym wykresie zestawiono funkcje e^x oraz $3x$, na prawym funkcję $3x - e^x$. Można oszacować, że funkcje przecinają się dla $x_1 \approx 0.6$ i $x_2 \approx 1.5$





Wyniki wywołania metody bisekcji dla funkcji $h(x) = 3x - e^x$ dla różnych przedziałów zestawiono w tabeli poniżej:

przedział	miejsce zerowe r	wartość $h(r)$	liczba iteracji
(0.0, 1.0)	0.619140625	9.066320343276146e-5	9
(0.5, 0.65)	0.6190917968749999	3.486661493345977e-5	10
(1.0, 2.0)	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13
(1.45, 1.75)	1.512109375	3.868007140983565e-5	8

Przy wywoływaniu tej metody ważnym jest wybór początkowego przedziału. Warto mieć wyobrażenie o wykresie funkcji, aby znaleźć końce przedziału, dla których funkcja zmienia znak. Po przeanalizowaniu wyników można zauważyć, że skracanie początkowego przedziału niezawsze prowadzi do zmniejszenia liczby wykonanych bisekcji. Zależy to od położenia pierwiastka na danym przedziale.

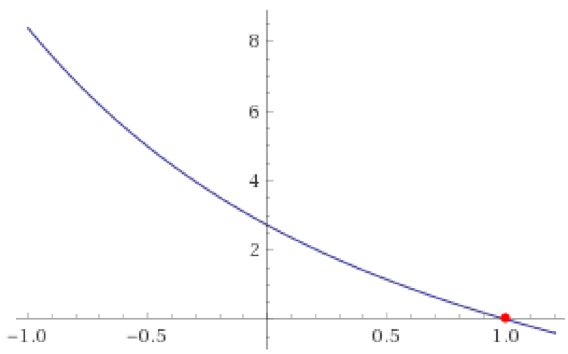
Zadanie 6

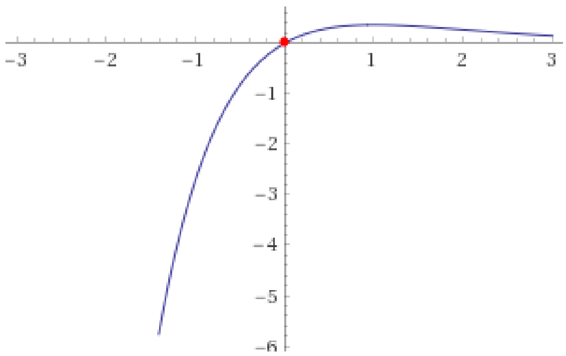
1) Opis problemu

Należy znaleźć miejsca zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych z dokładnością $\delta, \epsilon = 10^{-5}$

2) Rozwiązanie

Wykresy funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$:





Z wykresu można odczytać orientacyjnie miejsca zerowe funkcji, dla f_1 jest to $x \approx 1$, dla f_2 to $x \approx 0$. Rozwiązanie równania znajduje się z pewnością w przedziale $(0.0, 2.0)$ dla $f_1(x)$ oraz $(-1.0, 1.0)$ dla $f_2(x)$. Dla metody Newtona wybrano x początkowy $x_0 = -1.0$ i $x_0 = -0.5$, dla metody siecznych $x_0 = 0.0$, $x_1 = 2.0$ oraz $x_0 = -1.0$, $x_1 = 1.0$

3) Otrzymane wyniki

Dla funkcji $f_1(x)$:

Metoda bisekcji

przedział	pierwiastek r	$f(r)$	liczba iteracji
$(0.0, 2.0)$	1.0	0.0	1
$(0.1, 2.1)$	0.999993896484375	6.1035342515669555e-6	16
$(-200.0, 1000.0)$	1.0000050067901611	-5.006777627158954e-6	26

Metoda Newtona

x_0	pierwiastek r	$f(r)$	liczba iteracji
-1.0	0.9999922654776594	7.734552252003368e-6	5
-0.5	0.9999999791619734	2.083802685959313e-8	5
1.2	0.999999974143462	2.585653846587377e-8	3
4.0	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21
7.4	0.9999999372698817	6.273012020940882e-8	599
7.6	błąd - nie osiągnięto wymaganej dokładności w 1000 iteracjach		
12.6	błąd - pochodna bliska 0		

Metoda siecznych

x_0	x_1	pierwiastek r	$f(r)$	liczba iteracji
0.0	2.0	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6
-1.0	1.0	1.0	0.0	1

Dla funkcji $f_2(x)$:

Metoda bisekcji

przedział	pierwiastek r	$f(r)$	liczba iteracji
$(0.0, 2.0)$	0.0	0.0	1
$(-1.2, 0.8)$	-3.051757812455591e-6	-3.051767125695548e-6	17
$(-200.0, 1000.0)$	400.0	7.660678386856023e-172	1

Metoda Newtona

x_0	pierwiastek r	$f(r)$	liczba iteracji
-1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
-0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	4
1.0	błąd - pochodna bliska 0		
1.2	14.974320149741843	4.699833827208103e-6	8
14.4	błąd - pochodna bliska 0		

Metoda siecznych

x_0	x_1	pierwiastek r	$f(r)$	liczba iteracji
0.0	2.0	0.0	0.0	1
-1.0	1.0	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18

4) Analiza wyników

W przypadku f_1 można zauważyć, że metodą bisekcji można znaleźć miejsce zerowe nawet dla dużego przedziału początkowego. Metoda Newtona dla $x > 1$ potrzebuje coraz większej liczby iteracji, aż dla $x \approx 7.6$ nie jest w stanie się zrealizować. Pochodna również szybko osiąga wartość bliską zeru.

W przypadku f_2 wykres pokazuje, że funkcja dla $x \to \infty$ zbiega do zera, dlatego wybranie za dużego przedziału początkowego spowoduje błędny wynik. Po wywołaniu metody Newtona z początkowym $x_0 \in (0.0, 1.0)$ wynik był poprawny, dla $x = 1.0$ pojawił się błąd, gdyż funkcja $f_2(x)$ dla takiego x przyjmuje wartość 0, czyli styczna w tym punkcie jest równoległa do osi OX, co przeczy warunkom metody. Dla $x_0 \in (1.0, 14.2)$ metoda zwracała niepoprawny wynik ($r \approx 15.0$), natomiast dalej pochodna była zbyt bliska zeru, by wyliczyć pierwiastek.

To pokazuje, jak istotny jest prawidłowy wybór parametrów początkowych. Jest to wynikiem tego, że metody Newtona oraz siecznych są zbieżnie lokalnie, w przeciwieństwie do metody bisekcji, która jest zbieżna globalnie.