Politechnika Wrocławska

Anna Modrzejewska

236642

Obliczenia naukowe

Lista nr 4

9 grudnia 2018

Zadanie 1

1) Ilorazy różnicowe

Należy napisać funkcję obliczającą ilorazy różnicowe bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

2) Algorytm rozwiązania

Funkcja przyjmuje na wejściu:
x – wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$
f – wektor długości $n+1$ zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach $f(x_0), ..., f(x_n)$

Do rozwiązania zadania można posłużyć się wzorem z wykładu (Wykład nr 5, Twierdzenie nr 3):

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ... x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \text{ przy czym } f[x_0] = f(x_0)$$

Przy pomocy powyższego wzoru można skonstruować trójkątną tablicę ilorazów różnicowych:

$$\begin{array}{lllll} x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_3] & & \\ x_3 & f[x_3] & & & \end{array}$$

gdzie kolejne wartości ilorazów różnicowych $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$ itd. są odpowiednio współczynnikami wielomianu w postaci Newtona. Do ich obliczenia wystarczy jednowymiarowa tablica $arr = f$ oraz uzupełnianie jej wyrazów "od dołu" za pomocą wzoru:

$$arr_i = \frac{arr_i - arr_{i-1}}{x_i - x_{i-j}}, \text{ gdzie } i \text{ - numer komórki, } j \text{ - numer kolumny}$$

Powyższa operacja jest wykonywana $\frac{n(n+1)}{2}$ razy, zatem złożoność obliczeniowa algorytmu to $O(n^2)$

Zadanie 2

1) Wielomian interpolacyjny/Algorytm Hornera

Należy napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona w danym punkcie za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.
Postać Newtona oznacza wielomian:

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

gdzie $f[x_n]$ oznacza iloraz różnicowy, a x_n - węzły.

2) Algorytm rozwiązania

Funkcja przyjmuje na wejściu:
x – wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$
fx – wektor długości $n+1$ zawierający ilorazy różnicowe
t – punkt, w którym należy obliczyć wartość wielomianu

Następnie są realizowane kroki (**Algorytm Hornera**):

1. Dla wielomianu stopnia n: do zmiennej nt przypisywana jest wartość ilorazu różnicowego $fx[n+1] = f[x_0, x_1, ..., x_n]$
2. W pętli od n do 1 do wyliczenia nowej wartości nt używa się rekurencji $nt = fx[i] + (t - x[i]) \cdot nt$, gdzie i oznacza numer aktualnej iteracji w kolejności malejącej
3. Zmienna nt przyjmuje wartość wielomianu interpolacyjnego dla $i = 1$.

Złożoność obliczeniowa podanego algorytmu dla wielomianu n-tego stopnia jest równa liczbie iteracji pętli, jest zatem liniowa

Zadanie 3

1) Postać naturalna

Należy napisać funkcję liczącą współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci naturalnej, znając współczynniki tego wielomianu w postaci Newtona oraz węzły $x_0, x_1, ..., x_n$.
Postać naturalna wielomianu interpolacyjnego oznacza wielomian:

$$W_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

2) Rozwiązanie

W rozwiązaniu ponownie skorzystano z uogólnionego algorytmu Hornera. Warto zwrócić uwagę, że współczynniki wielomianu przy najwyższych potęgach x są sobie równe w obu postaciach ($a_n = c_n$). Do obliczenia niższych współczynników można posłużyć się wzorem $a_i = c_i - a_{i+1} x^i$. Po każdej iteracji należy uaktualnić współczynniki przy obliczonych wcześniej wyższych potęgach. Kroki są powtarzane aż do obliczenia współczynnika a_0. Złożoność obliczeniowa algorytmu zależy od liczby iteracji pętli, czyli jest $O(n^2)$.

Zadanie 4

1) Wykres funkcji oraz wielomianu

Należy napisać funkcję, która interpoluje funkcję $f(x)$ w danym przedziale za pomocą wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona $N_n(x)$ oraz rysuje $N_n(x)$ i $f(x)$.

2) Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania zostały użyte funkcje `ilorazyRoznicowe` oraz `warNewton` z zadania 1 i 2, a także pakiet `Plots`.

Funkcja przyjmuje na wejściu:
f – funkcja $f(x)$
a, b – przedział interpolacji
n – stopień wielomianu interpolacyjnego

Następnie realizuje kroki:

1. Oblicza $n+1$ węzłów x_0, x_1, ... , x_n równo rozmieszczonych o odległość $h = \frac{b-a}{n}$, gdzie b oznacza koniec przedziału, a - początek,
2. Oblicza wartości funkcji $f(x)$ dla każdego węzła ($f(x_0)$, ... , $f(x_n)$),
3. Oblicza ilorazy różnicowe za pomocą poprzednio zaimplementowanej funkcji, podając za argumenty wcześniej policzone wektory węzłów i wartości funkcji.
4. Oblicza wartości wielomianu interpolacyjnego w punktach za pomocą wcześniej zaimplementowanej funkcji
5. Rysuje wielomian interpolacyjny $Nn(x)$ oraz zestawia go z wykresem funkcji f.

Zadanie 5

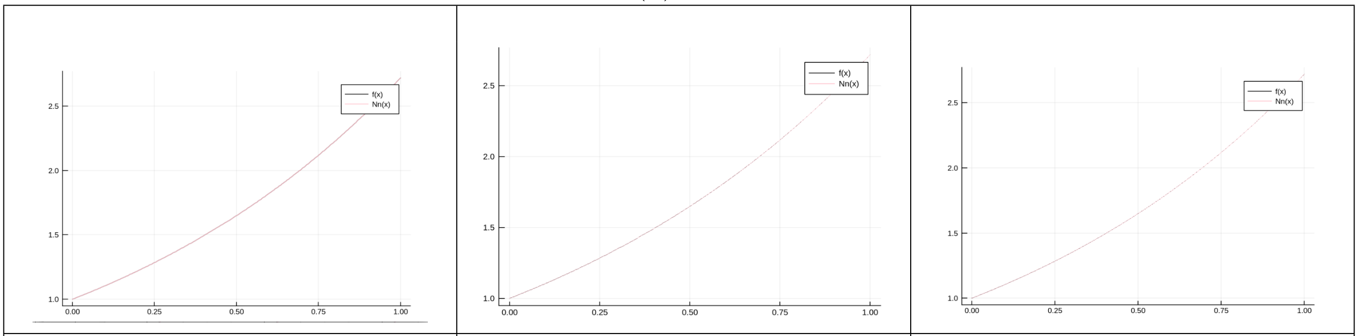
1) Opis problemu

Należy przetestować funkcję z zadania 4. na przykładach:

1. $e^x, [0,1], n \in \{5, 10, 15\}$,
2. $x^2 sinx, [-1,1], n \in \{5, 10, 15\}$

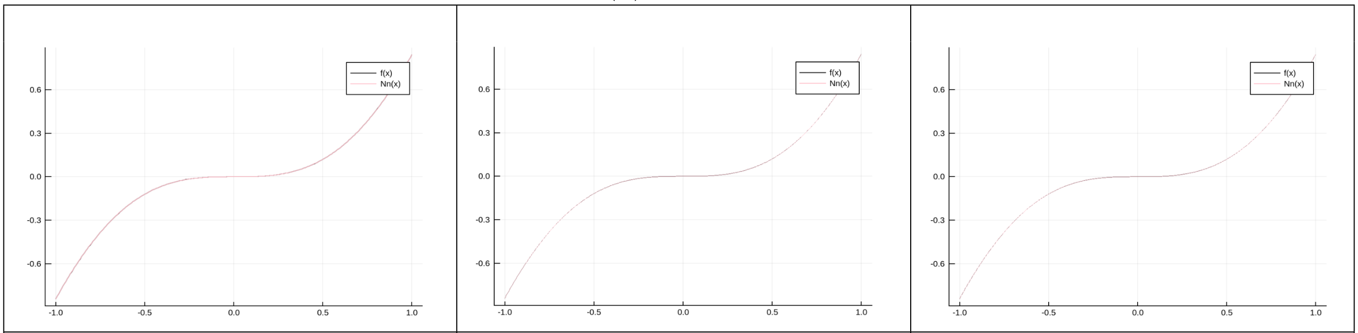
2) Wynik

$f(x) = e^x$



$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$

$f(x) = x^2 sinx$



$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$

3) Analiza i wnioski

Oba otrzymane wykresy ($f(x)$ i $Nn(x)$) mają niezauważalne różnice, co świadczy o poprawnej interpolacji. Po dokładniejszej analizie okazuje się, że różnice między nimi maleją wraz ze wzrostem stopnia wielomianu. Można zatem stwierdzić, że interpolacja dokładnie zobrazowała obie funkcje. Mimo że badane węzły były równoodległe, nie spowodowało to zjawiska Runge'ego.

Zadanie 6

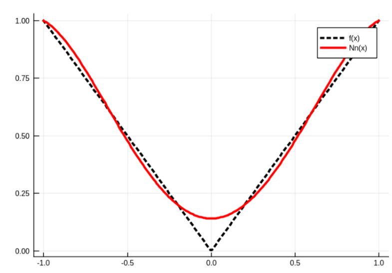
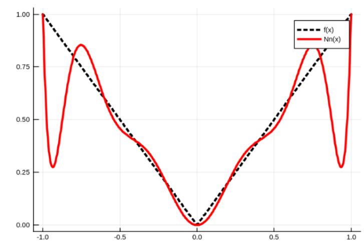
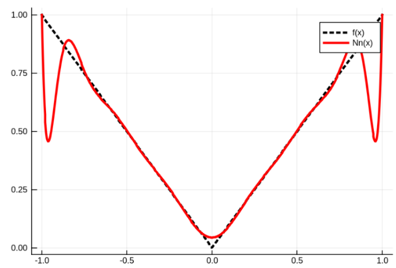
1) Opis problemu

Należy ponownie przetestować funkcję z zadania 4., tym razem dla innego zestawu danych:

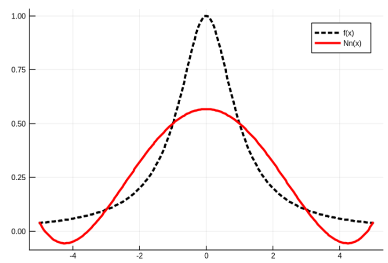
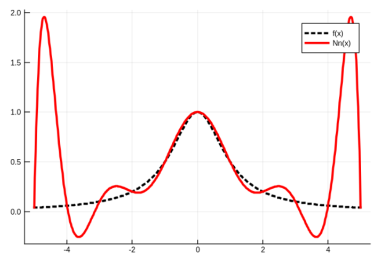
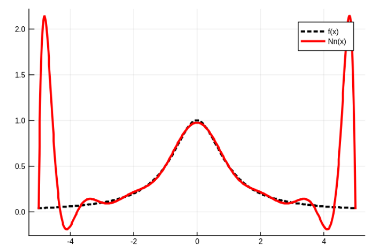
1. $|x|, [-1,1], n \in \{5, 10, 15\}$,
2. $\frac{1}{1+x^2}, [-5,5], n \in \{5, 10, 15\}$

2) Wynik

$f(x) = |x|$

		
$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

		
$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$

3) Analiza i wnioski

Dla $f(x) = |x|$ na wykresach widać duże rozbieżności między interpolowaną funkcją a interpolującym wielomianem w miejscu, gdzie $x \approx 0$, czyli funkcja jest nieróżniczkowalna. Można jednak spostrzec, że wzrost stopnia powoduje ujednolicanie się wyników w tym miejscu, natomiast na końcach przedziałów przeciwnie - odchyły są coraz większe. Nastąpiło tu zjawisko Runge'ego, spowodowane dużym stopniem wielomianu oraz jednakową odległością między kolejnymi węzłami.

W przypadku drugiej funkcji, można zaobserwować podobne zjawisko - wzrost stopnia wielomianu powoduje zbieganie się wykresów w centrum, natomiast rozbieganie na końcach przedziału. Tu także wystąpił efekt Runge'ego. Jedną z metod zapobiegania mu jest zagęszczanie węzłów na końcach przedziału, np. poprzez wybieranie jako węzłów miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa.