Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi 2

Seminarski rad: Zadatak RT-P1

Ana Nedić, Valentino Novak

rujan, 2020.

Sadržaj

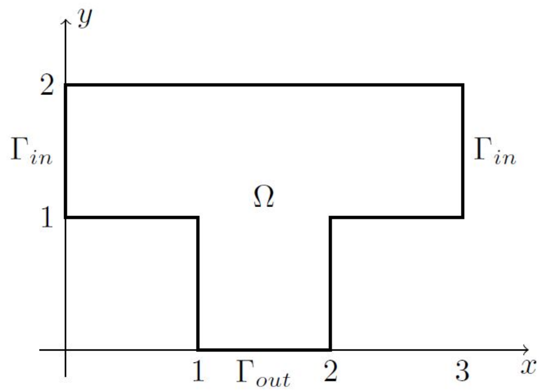
1 Opis zadaće

Zadani problem je sljedeći:

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \quad \text{u} \quad \Omega \\ p = 10 \quad \text{na} \quad \Gamma_{in} \\ p = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_{out} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_{imp}, \end{cases}$$

pri čemu je $\mathbf{q} = -\nabla p$ brzina fluida.
Domena $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ našeg problema ima granicu podijeljenu na ulazni, izlazni i nepropusni dio: $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_{imp}$, pri čemu je $\Gamma_{in} = \{0\} \times (1,2) \cup \{3\} \times (1,2)$, $\Gamma_{out} = (1,2) \times \{0\}$.

Promotrimo skalarnu eliptičku zadaću za tlak:



$$\begin{cases} -\text{div}(\nabla p) = 0 \quad \text{u} \quad \Omega \\ p = g \quad \text{na} \quad \partial\Omega_D \\ -\nabla p \cdot \mathbf{n} = h \quad \text{na} \quad \partial\Omega_N, \end{cases}$$

pri čemu je $|\partial\Omega_D| > 0$.
Uvođenjem oznake $\mathbf{q} = -\nabla p$ zapišimo gornju jednadžbu drugog reda kao sustav prvog reda:

$$\begin{cases} \text{div}(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{u} \quad \Omega \\ \mathbf{q} = -\nabla p \quad \text{u} \quad \Omega \\ p = g \quad \text{na} \quad \partial\Omega_D \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h \quad \text{na} \quad \partial\Omega_N. \end{cases}$$

Izvedimo mješovitu varijacijsku formulaciju.
Iz prve jednadžbe dobivamo:

$$\int_\Omega div(\mathbf{q}) \cdot v dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

a iz druge jednadžbe dobivamo da za svaki $\mathbf{w} \in H(div; \Omega)$ takav da je $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ na $\partial\Omega_N$ vrijedi:

$$\int_\Omega (\mathbf{q} + \nabla p) \cdot \mathbf{w} dx = \int_\Omega \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} dx + \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{w} dx = \int_\Omega \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} dx + \int_\Omega \text{div}(p \cdot \mathbf{w}) dx - \int_\Omega \text{div}(\mathbf{w}) \cdot p dx$$
$$\int_{\partial\Omega} p(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_\Omega (\text{div}(\mathbf{w}) \cdot p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}) dx = \int_{\partial\Omega_D} g(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_\Omega (p \cdot \text{div}(\mathbf{w}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{w}) dx =$$
$$\int_\Omega (\mathbf{q} \cdot \mathbf{w} - p \cdot \text{div}(\mathbf{w})) dx + \int_{\partial\Omega_D} g\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Dobili smo mješovitu varijacijsku formulaciju:
naći $\mathbf{q} \in H(div; \Omega)$ takav da je $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h$ na $\partial\Omega_N$ te $p \in L^2(\Omega)$ takve da vrijedi:

$$\int_\Omega (\mathbf{q} \cdot \mathbf{w} - p \cdot div\mathbf{w}) dx + \int_{\partial\Omega_D} g\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in H(div; \Omega), \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_N \tag{1}$$

$$\int_\Omega div(\mathbf{q}) \cdot v dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2}$$

2 Opis numeričke metode

Problem ćemo implementirati u Dune::PDELab-u, koristeći mješovitu metodu konačnih elemenata kojom se konstruiraju dva prostora konačnih elemenata, $\mathbf{W}_h \subset H(div;\Omega)$ za vektorske funkcije s određenom globalnom glatkoćom i prostor $Y_h \subset L^2(\Omega)$ koji ne zahtijeva glatkoću po dijelovima konstantnih funkcija. Na svakom elementu triangulacije ćemo izabrati polinome iz $\mathbb{P}_0$ za tlak p i Raviart-Thomasove elemente tipa RT_0 na simpleksima za brzinu (fluks) $\mathbf{q} = -\nabla p$. RT_0 je prostor polinoma:

$$RT_0 = (\mathbb{P}_0)^2 \oplus \mathbf{x}\mathbb{P}_0.$$

Dakle, riječ je o funkcijama $\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} b, \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$.
U općenitom slučaju, $\phi \in RT_k$ je oblika

$$\phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\alpha(\mathbf{x}), \quad \text{za} \quad \psi \in (\mathbb{P}_k)^d, \quad \alpha \in \mathbb{P}_k.$$

Neka je $\mathcal{T}_h$ triangulacija poligonalne domene $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pomoću 2-simpleksa. Konstruirajmo prostor:

$$\mathbf{W}_h^k = \{\phi \in H(div;\Omega) : \phi|_K \in RT_0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3}$$

Neka je funkcija $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definirana po elementima zadane triangulacije $\mathcal{T}_h$ takva da zadovoljava sljedeća svojstva:

1. Za svako $K \in \mathcal{T}_h$ vrijedi $\phi \in H^1(K)^2$.
2. Na stranici F koja spaja susjedne elemente normalni trag funkcije je neprekidan.
   Za svaku stranicu $F = K_1 \cap K_2$ triangulacije $\mathcal{T}_h$, za neke $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, vrijedi $\phi \cdot \mathbf{n}|_{K_1} = \phi \cdot \mathbf{n}|_{K_2}$ na F, pri čemu je $\mathbf{n}$ normala na F.

Tada funkcija ϕ pripada prostoru $H(div;\Omega)$.

Taj kriterij sugerira i stupnjeve slobode koje treba odabrati. S druge strane, za svako $\phi \in H(div;\Omega)$ koje zadovoljava 1. svojstvo, vrijedi i 2. svojstvo.
Pitamo se kako odrediti stupnjeve slobode koji će osigurati da $\phi \in H(div;\Omega)$. Uočimo da ako je $\phi \in RT_0$ i $\mathbf{n}$ normala na jednu stranicu F promatranog elementa, tada je $\phi \cdot \mathbf{n}|_F \in \mathbb{P}_0$ i div $\phi \in \mathbb{P}_0$.
U našem slučaju je domena $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, elementi triangulacije su trokuti i dimenzija prostora RT_0 je 3. Stupnjevi slobode na stranicama trokuta su zadani pomoću normale na stranicu. Dakle, za stupnjeve slobode uzimamo tri vrijednosti $\phi \cdot \mathbf{n}|_{\gamma_i}$, pri čemu je γ_i stranica proizvoljnog trokuta $K \in \mathcal{T}_h$, za $i = 1, 2, 3$. Potrebno je na svakoj stranici izabrati orijentaciju njezine normale, pri čemu je svaki izbor orijentacije jednako dobar. Bitno je napomenuti da se na stranicama koje se nalaze na $\partial\Omega$ izabire vanjska normala, no ne i na stranicama u unutrašnjosti Ω jer su stupnjevi slobode vezani samo uz stranicu, no ne i element (trokut). Bitno je i napraviti simetričnu razdiobu točaka na stranici zbog uvođenja referentnog elementa.
Kako su normalne komponente funkcije na stranicama trokuta konstantne, imamo točno tri stupnja slobode. Upravo smo tim izborom stupnjeva slobode zadovoljili 2. svojstvo.
U prostoru $\mathbf{W}_h^k$ definiranom na triangulaciji $\mathcal{T}_h$ domene $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ukupan broj stupnjeva slobode je jednak broju stranica u triangulaciji. Zadavanjem Neumannovog rubnog uvjeta $\phi \cdot \mathbf{n} = f$ na nekoj stranici granice $\partial\Omega$ broj stupnjeva slobode se smanjuje za jedan jer se vrijednost stupnju slobode zadaje direktno.

Kako bismo dokazali da je funkcija $\phi \in RT_0$ na jedinstven način određena svojim stupnjevima slobode, dovoljno je pokazati da je funkcija $\phi = 0$ ako su svi njeni stupnjevi slobode jednaki nuli jer znamo da se koeficijenti funkcije ϕ određuju iz zadanih stupnjeva slobode rješavanjem linearnog sustava algebarskih jednadžbi s kvadratnom matricom.

Dakle, ako $\phi \in RT_0$ na trokutu K zadovoljava $\phi \cdot \mathbf{n} = 0$, na svakoj stranici γ_i^K trokuta K, za $i = 1, 2, 3$ u jednoj različitoj točki, onda je $\phi = 0$.

Time smo pokazali da ovako definirani stupnjevi slobode zadovoljavaju svojstvo unisolventnosti, to jest da je s njima dobro definiran Raviar-Thomasov konačni element.

Zapišimo brzinu $\mathbf{q}$ i tlak p preko njihovih globalnih baza:

$$\mathbf{q} = \sum_j q_j \phi_j, \quad p = \sum_j p_j \psi_j,$$

pri čemu je ϕ_j globalna baza RT_0 elemenata, ψ_j je globalna baza P_0 elemenata, a koeficijenti q_j koji odgovaraju stupnjevima slobode na $\partial\Omega_N$ su zadani Neumannovim rubnim uvjetom.
Diskretna zadaća je sljedećeg oblika:

$$\sum_K \int_K (\mathbf{q} \cdot \phi_i - p \cdot \mathrm{div}\phi_i)dx + \sum_K \int_{\partial\Omega_D \cap \partial K} g\phi_i \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \forall i, \quad \phi_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_N \tag{4}$$

$$\sum_K \int_K (\mathrm{div}(\mathbf{q}) \cdot \psi_i)dx = 0, \quad \forall i, \tag{5}$$

pri čemu suma ide po svim elementima mreže.
Neka je geometrijsko preslikavanje $g_K : \hat{K} \to K$ afino:

$$g_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + \mathbf{b}_K,$$

pri čemu smo s $\hat{K}$ označili referentni element, a s K fizički element. Obzirom da se nalazimo u vektorskom slučaju, zahtijeva se da uvedemo novu transformaciju kojom se bazne funkcije transformiraju pomoću Pioline transformacije.
Formula za funkciju na fizičkom elementu K je dana s:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\det(B_K)|} B_K \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}),$$

pri čemu je $\hat{\phi}$ funkcija na referentnom elementu te $\mathbf{x} = g_K(\hat{\mathbf{x}})$. Piolina transformacija čuva strukturu prostora RT_0: ako je $\phi \in RT_0$ tada $\phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})$, pri čemu je $\psi \in (\mathbb{P}_0)^2, \alpha \in \mathbb{P}_0$. Također, Piolina transformacija čuva i stupnjeve slobode. Drugim riječima, stupnjevi slobode se prelaskom s referentnog na fizički element i obratno ne mijenjaju.
Bazne funkcije na referentnom elementu $\hat{K}$ dobivaju sljedeći oblik:

$$\hat{\phi}_j(\hat{\mathbf{x}}) = |\det(B_K)| B_K^{-1} (\phi_j \circ g_K)(\hat{\mathbf{x}}).$$

Neka je

$$\hat{\mathbf{q}} = \sum_j q_j \hat{\phi}_j.$$

Uvrštavanjem $\hat{\phi}_j$ slijedi

$$\hat{\mathbf{q}} = |\det(B_K)| B_K^{-1} (\mathbf{q} \circ g_K).$$

Nakon zamjene varijabli na fizičkom elementu dobivamo:

$$\int_K (\mathbf{q} \cdot \phi_i - p \cdot \mathrm{div}\phi_i)dx = \int_{\hat{K}} (\mathbf{q} \circ g_K \cdot \phi_i \circ g_K - p \circ g_K(\mathrm{div}\phi_i) \circ g_K)|\det(B_K)|d\hat{x}.$$

Kako je

$$(\mathrm{div}\phi) \circ g_K = \mathrm{div}(B_K^{-1}(\phi \circ g_K) = \frac{1}{|\det(B_K)|}\mathrm{div}(\hat{\phi}),$$

uz oznaku $\hat{p} = p \circ g_K$, dobivamo:

$$\int_K (\mathbf{q} \cdot \phi_i - p \cdot \mathrm{div}\phi_i)dx = \int_{\hat{K}} \left(\frac{1}{|\det(B_K)|} B_K \hat{\mathbf{q}} \cdot B_K \hat{\phi}_i - \hat{p}\mathrm{div}(\hat{\phi}_i) \right) d\hat{x}.$$

Znamo da Piolina transformacija čuva stupnjeve slobode pa vrijedi:

$$\int_{\partial K} g\phi_i \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial \hat{K}} \hat{g}\hat{\phi}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S},$$

uz oznaku $\hat{g} = g \circ g_K$. Time smo transformirali prvu jednadžbu.

Zamjenom varijabli na fizičkom elementu dobivamo transformaciju druge jednadžbe:

$$\int_K (\mathrm{div}\mathbf{q} \cdot \psi_i)dx = \int_{\hat{K}} (\mathrm{div}\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\psi}_i)d\hat{x}.$$

Zapišimo lokalni doprinos rezidualu od elementa K:

$$R_K^1 = \int_{\hat{K}} \left(\frac{1}{|\det(B_K)|} B_K \hat{\mathbf{q}} \cdot B_K \hat{\phi}_i \right) d\hat{x} - \int_{\hat{K}} \left(\hat{p}\mathrm{div}\hat{\phi}_i\right) d\hat{x} + \int_{\partial \hat{K}} \hat{g}\hat{\phi}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S},$$

$$R_K^2 = \int_{\hat{K}} (\mathrm{div}\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\psi}_i)d\hat{x}.$$

3 Implementacija

Obzirom da mješovita varijacijska formulacija sadrži dva prostora, implementirat ćemo prostor po dijelovima konstantnih funkcija za tlak p i RT_0 prostor za fluks (brzinu). Od ta dva prostora napravit ćemo kompozicijski prostor za tlak i fluks, koristeći Dune::PDELab::CompositeGridFunctionSpace. U tom produktnom prostoru tražimo rješenje.

Tip rubnog uvjeta zadat ćemo posebno za tlak i posebno za fluks te ćemo od njih napraviti vektorski rubni uvjet, koristeći Dune::PDELab::CompositeConstraintsParameters.

Rubni uvjet za tlak nije ugrađen u prostor. Dirichletov rubni uvjet za tlak se zadovoljava varijacijski kroz funkciju g kad želimo izračunati vrijednost Dirichletovog rubnog uvjeta u integracijskoj točki stranice.

U mješovitoj varijacijskoj formulaciji Dirichletov rubni uvjet za brzinu (fluks) ulazi u varijacijsku formulaciju, dok se Neumannov rubni uvjet za brzinu ugrađuje u prostor.

Kod funkcija za interpolaciju rubnog uvjeta, koristimo Dune::PDELab::PiolaBackwardAdapter jer se Raviart-Thomasovi elementi transformiraju Piolinom transformacijom s referentnog na fizički element. Koristimo i Dune::PDELab::CompositeGridFunction kako bismo konstruirali vetorsku funkciju za rubni uvjet svih komponenti.

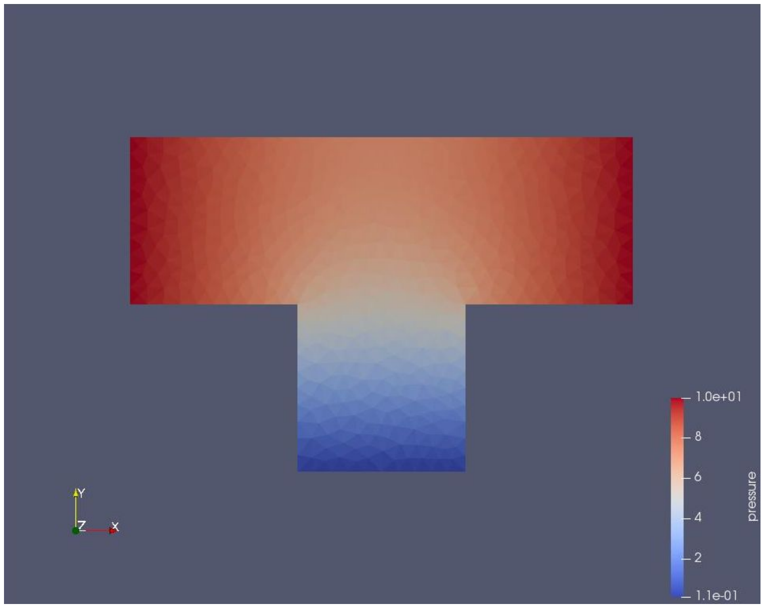
U lokalnom operatoru imamo dva prostora komponenti, prostor za tlak i prostor za brzinu jer radimo s vektorskim prostorom funkcija. Računamo volumni integral te integral po rubu koji dolazi od Dirichletovog uvjeta.

Koristimo SuperLU solver jer imamo indefinitnu matricu sustava.

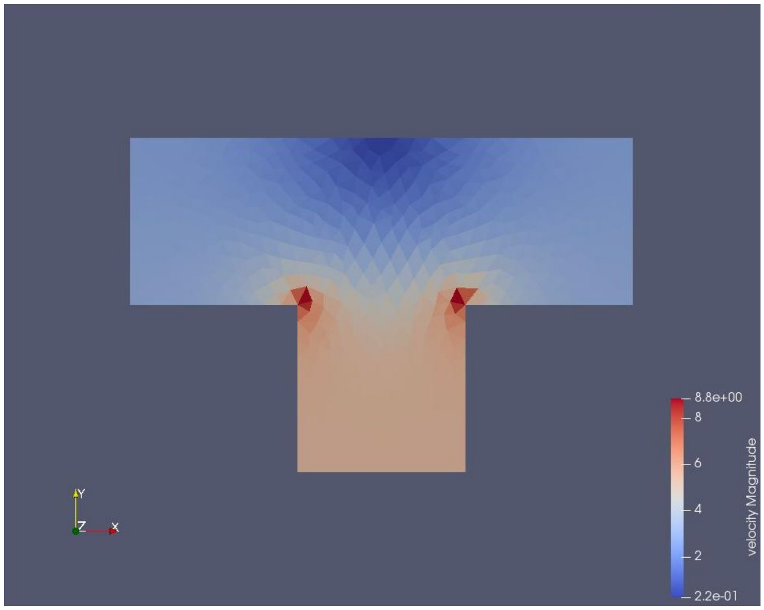
Pri grafičkom ispisu rješenja u VTK formatu formiramo potprostore za brzinu i tlak kako bismo mogli svaku komponentu rješenja zasebno ispisati.

4 Prikaz numeričkih rezultata

Slijedi prikaz rezultata simulacija provedenih na prostoru P_0 konačnih elemenata za tlak p i RT_0 za fluks (brzinu) u VTK formatu za Paraview.



Slika 1: Tlak



Slika 2: Brzina

Literatura

[1] Mladen Jurak: PDELab: mješoviti konačni elementi
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nrpdj/html/MixedFEM.html

[2] Mladen Jurak: Mješovita metoda konačnih elemenata
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nrpdj/ppm2_mjesoviteMeth.pdf