$$\Rightarrow \begin{cases} \beta+2 \geq 0 \\ -\beta+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta \geq -2 \\ \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta \in [-2,1]$$

11. Martie 2019

Curs 4 - Metoda Simplex

$\inf c^T x$

(1) $\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$

rang $A = m$

cond. de optim:

$A = (B \quad R)$ $\quad x_B = (B^{-1} b,\ 0)$ → (vector de 0)

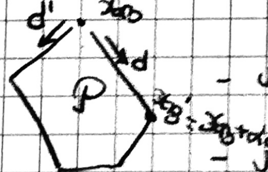
x_B - sol. opt. pt (1) $\Leftrightarrow c_j - c_B^T B^{-1} A^j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{R}$

$\mathcal{B} = \{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid A^i$ face parte din bază $\}$

Mt. indicilor bazici. $\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$

Obs: $c_i - c_B^T B^{-1} A^i = 0$ $\quad i \in \mathcal{B}$

c_i $\quad i \in \{1, \dots, n\}$ s.n. costuri reduse



- sol admis. de bază adiacentă vf. coresp. lui x_B
- sol. coresp. unei baze B' care are în comun cu B $m-1$ coloane

Vrem să înlocuim col. i a lui B cu col j, $j \in \mathcal{R}$ și să obținem B'.

Cum alegem $i \in \mathcal{B}$ și $j \in \mathcal{R}$?

- căutăm $x_{B'} = ((B')^{-1} b,\ 0)$ de forma $x_{B'} = x_B + \alpha d$, unde $\alpha \geq 0$, d - direcția de translație pe o muchie a lui P a.î. $x_{B'} \in P$

Obs: $A = (\underset{\downarrow \atop B^{-1}b}{B} \quad \underset{\downarrow \atop 0}{R})$

$x_B = (B^{-1} b, 0)$

$\overline{x_B} = B^{-1} b - B^{-1} R$

$$(B \; R) \begin{pmatrix} \overline{x_B} \\ \overline{x_R} \end{pmatrix} = b$$

$$\Rightarrow \overline{x_B} = B^{-1} b - x_j B^{-1} A_j$$

$$d^j = \begin{pmatrix} -B^{-1} A^j \\ e^j \end{pmatrix} \qquad d^j \in \mathbb{R}^n \quad e^j \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$e^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pe poz j

$$x^* = x + \alpha d^j$$

- noua sol. x^* tb. să fie sol. admis:

$$A x^* = b, \; x^* \geq 0$$

<u>Obs</u>: $A d^j = (B \; R) \begin{pmatrix} -B^{-1} A^j \\ e^j \end{pmatrix} = -B B^{-1} A^j + R \cdot e^j = -A^j + A^j = 0$

$$A x^* = A(x + \alpha d^j) = \underbrace{Ax}_{=b} + \alpha \underbrace{A d^j}_{=0} = b$$

$x^* = \underbrace{x}_{\geq 0} + \alpha d^j \geq 0$ - pt. $\alpha > 0$ mic când x - sol nedegenerată ; luăm $\alpha = 0$ când x este degenerat

- vrem ca $c^T x^* < c^T x \iff c^T(x + \alpha d^j) < c^T x$

$c^T x + \alpha c^T d^j < c^T x \iff$

$\alpha c^T d^j < 0$

dc. x e nedeg. $-$ $\alpha > 0 \iff c^T d^j < 0$

Calculăm $c^T d^j = (c_B^T \; c_R^T) \begin{pmatrix} -B^{-1} A^j \\ e^j \end{pmatrix} = -c_B^T B^{-1} A_j +$

$+ c_R^T e_j = \underbrace{c_j - c_B^T B^{-1} A_j}_{r_j} < 0$

<u>Teoremă</u>:

Fie B o bază primal admisibilă ($B^{-1} b \geq 0$) pt. prob. 1.

și x - sol admis de baza coresp. bazei B

$\rightarrow$ dacă $r_j < 0$ pt. $j \in R$, atunci $x^* + \alpha d^j$ este o sol. admis. pt. care val. fcției ob. este $< c^T x$

<u>Obs</u>: $c^T x^* = c^T (x + \alpha d^j) = c^T x + \underbrace{\alpha}_{\alpha > 0} \underbrace{c^T d^j}_{< 0} < c^T x$

→ dacă $d^j \geq 0 \Rightarrow x^* = x + \alpha d^j \in \mathcal{P} \quad \forall \alpha \geq 0$

$$c^T x^* = c^T(x + \alpha d^j) = c^T x + \alpha \underbrace{c^T d^j}_{r_j < 0} \xrightarrow{\alpha \to \infty} -\infty$$

Teoremă 2 (optim infinit)

Fie B o bază primal admis. pt. prob. 1

→ Dacă $\exists\ j \in R$ a.î. $r_j < 0$ și $d^j \geq 0$ atunci prob. 1 admite optim infinit.

→ Dacă $\exists\ k \in R$ a.î. $r_k < 0$ alegem $j \in R$ a.î.

$$r_j = \min_{k \in R} \{ r_k \mid r_k \leq 0 \}$$

α - pasul cu care ne deplasăm în dir d^j

Determinarea lui α: testul rației minime

$\exists\ j \in R$ a.î. $r_j < 0$ și $d^j \not\geq 0$

$$x^* = x + \alpha d^j \geq 0$$

$$\alpha = \min_{k \in B} \left\{ -\frac{x_k}{d_k^j} \;\middle|\; d_k^j < 0 \right\} = -\frac{x_i}{d_i^j};\ d_i^j < 0$$

Obs: Dacă x e nedegenerată: i este unic, $i \in B$

Cu acest α se poate dem că x^* este sol. admis de bază coresp. bazei $\tilde{B}$, unde $\tilde{B} = B \cup \{j\} \setminus \{i\}$

Teorema 3 (schimbarea bazei)

Fie B o bază primal admis pt prob. 1 și x sol. coresp. bazei B.

Pp. $\exists\ j \in R$ a.î. $r_j < 0$ și $d^j \not\geq 0$

Fie $\alpha = \min_{k \in B} \left\{ -\frac{x_k}{d_k^j} \;\middle|\; d_k^j < 0 \right\} = -\frac{x_i}{d_i^j}$, $i \in B$

Atunci $x^* = x + \alpha d^j$ este sol. admis. de bază pt. prob 1 și $c^T x^* < c^T x$.

Criteriul de ieșire din bază:

- alegem $j \in R$ a.î. $r_j = \min \{ r_k : r_k < 0 \}$

→ Criteriul de intrare în bază:

alegem $i \in B$ a.î. $\frac{x_i}{d_i^j} = \min \left\{ -\frac{x_k}{d_k^j} : d_k^j < 0 \right\}$

Algoritmul simplex primal:

<u>Pas 1</u>: B $B^{-1}b \geq 0$; det. $x = (B^{-1}b, 0)$, B, R

$r_j = c_j - c_B B^{-1} A^j$, $j \in R$

<u>Pas 2</u>: (Test optim)

Dc. $r_j \geq 0$ $\forall j \in R \Rightarrow x$ este sol. opt. pt. j cu r_j ~~< 0~~ STOP

det. $d^j = \begin{pmatrix} -B^{-1}A^j \\ e_j \end{pmatrix} \in R^n$

<u>Pas 3</u>: (Test de optim infinit)

Dc. $\exists j \in R$ a.î. $r_j < 0$ și $d^j \geq 0 \Rightarrow$ pr are optim infinit STOP.

<u>Pas 4</u>: (schimbarea bazei)

alegem $j \in R$ a.î. $r_j = \min \{ r_k : r_k < 0 \}$

alegem $i \in B$ a.î. $\frac{-x_i}{d_i^j} = \min \left\{ -\frac{x_k}{d_k^j} : d_k^j < 0 \right\}$

$B' = B \cup \{j\} \setminus \{i\}$, $R' = R \cup \{i\} \setminus \{j\}$

det. $x = ((B')^{-1} b ; 0)$; r_j

GO TO PAS 2

<u>Exemplu</u>:

$$\begin{cases} \min -x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \leq 1 \\ 2x_2 \leq 1 \\ 2x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Aducem problema la forma standard:

$$\text{Min } -x_1 - x_2 - x_3$$
$$2x_1 + x_4 = 1$$
$$2x_2 + x_5 = 1$$
$$2x_3 + x_6 = 1$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ coloanele din A cu ind. din B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (-1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$B = \{4, 5, 6\} \qquad R = \{1, 2, 3\}$$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_B^T = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$r_1 = c_1 - (0, 0, 0) I_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 = -1$$

$$r_2 = c_2 - (0, 0, 0) I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 = -1$$

$$r_3 = c_3 - (0, 0, 0) I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = c_3 = -1$$

$r_1 = r_2 = r_3 < 0 \Rightarrow x$ nu e sol. optimă

$$d^1 = \begin{pmatrix} -B^{-1} A^1 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq 0$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq 0 \qquad d^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \not\geq 0$$

$r_j = 0, \; j = \overline{4,5,6}$

$r_j = c_j - c_B^T B^{-1} A^j$

$j = \overline{1,3}$

$\Rightarrow$ pr. nu are optim infinit

Schimbăm baza

$r_1 = r_2 = r_3 \Rightarrow$ alegem $j = 1 \Rightarrow$ intră în bază col A^1

$$\alpha = \min \left\{ -\frac{x_i}{d_i^1} \;\middle|\; d_i^1 < 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ -\frac{1}{2} \;\middle|\; d_4^1 = -2 \right\} = \frac{x_4}{d_4^1}$$

$$B' = \{A^1, A^5, A^6\} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R' = \{A^2, A^3, A^4\}$

$B' = \{1, 5, 6\}$, $R' = \{2, 3, 4\}$

$$x^* = x + \alpha d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lema subst $(B')^{-1} b$

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = (B')^{-1} b$$