Gabriela Beganu
coordonator

Luiza Bădin
Mihaela Covrig

Liana Manu
Aida Toma

TEORIA PROBABILITĂȚILOR și STATISTICĂ MATEMATICĂ

Culegere de probleme

METEOR PRESS

București, 2006

Introducere

Obiectivul pe care şi-l propune această culegere de probleme ale calculului probabilităţilor şi statisticii matematice este de a face remarcată multitudinea aplicaţiilor acestei materii alături de noţiunile tradiţionale şi indispensabile cu caracter teoretic.

Culegerea are ambiţia de a prezenta studenţilor noştri subiecte de examen care să conducă la o bună pregătire profesională la o temeinică însuşire a cursului, ceea ce înseamnă: capacitate de modelare probabilistică, intuirea celor mai potrivite metode de analiză cantitativă a modelelor şi uşurinţă în utilizarea instrumentelor matematicii aplicate.

Pentru ca aceste trei solicitări să fie atinse este necesar a se folosi culegerea pentru pregătire pe parcursul desfăşurării cursului, constituind un sprijin acordat studenţilor în vederea momentului (inevitabil) al sintezelor finale.

Culegerea este structurată în 8 capitole la care şi-au adus contribuţia după cum urmează:

- asist. drd. Aida Toma – capitolele 1, 2
- conf. dr. Gabriela Beganu, asist. Mihaela Covrig – capitolul 3
- lector dr. Liana Manu – capitolele 4, 5
- conf. dr. Gabriela Beganu, lector drd. Luiza Bădin – capitolele 6, 7
- lector drd. Luiza Bădin – capitolul 8

Orice observaţii şi sugestii sunt binevenite.

Baftă la examene!

Autorii

1

CÂMP DE EVENIMENTE. CÂMP DE PROBABILITATE

1.1. Probleme rezolvate. Evenimente

1. Fie A_1 evenimentul ca un produs ales la întâmplare dintr-un lot să aibă defectul D_1 şi A_2 evenimentul ca un produs ales la întâmplare din lot să aibă defectul D_2. Să se scrie evenimentele:

B_1 – un produs luat la întâmplare să fie respins la control;

B_2 – un produs să fie acceptat la control;

B_3 – un produs are defectul D_1, dar nu are defectul D_2;

B_4 – un produs are ambele defecte.

Rezolvare

Evenimentele date se scriu astfel:

$B_1 = A_1 \cup A_2$

$B_2 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$

$B_3 = A_1 \cap \overline{A_2}$

$B_4 = A_1 \cap A_2$.

2. Un lot de piese se supune controlului de calitate. Se aleg la întâmplare trei piese. Fie A_i, $i = \overline{1,3}$, evenimentul ca piesa i să fie bună. Să se exprime evenimentele:

a) cel puţin o piesă controlată este bună;

b) toate piesele controlate sunt bune;

c) cel puţin o piesă controlată este defectă;

d) toate piesele controlate sunt defecte;

e) o singură piesă este bună;

f) două piese dintre cele controlate sunt bune.

Rezolvare

Evenimentele se exprimă astfel:

a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

c) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$;

d) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$;

e) $(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$;

f) $(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$.

3. Studenţii unui an de studii sunt împărţiţi în trei grupe: 1, 2, 3. Se ia la întâmplare câte un student din fiecare grupă. Fie B_i evenimentul ca din grupa i să fie luat un băiat şi F_i evenimentul ca din grupa i să fie luată o fată. Scrieţi evenimentul ca grupul de trei studenţi să fie format dintr-un băiat şi două fete.

Rezolvare

Evenimentul cerut se scrie: $(B_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap B_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap B_3)$.

4. Într-o urnă se află bile albe şi negre într-o proporţie oarecare. Se efectuează la întâmplare cinci extrageri astfel încât o bilă extrasă se reintroduce în urnă înaintea următoarei extrageri. Fie A_i evenimentul din câmpul de evenimente ataşat experienţei ce constă în obţinerea unei bile albe la extragerea i, $1 \le i \le 5$. Să se exprime următoarele evenimente:

a) A – obţinerea unei bile albe;
b) B – obţinerea unei bile negre;
c) C – obţinerea a cel mult 2 bile albe;
d) D – obţinerea a cel puţin 3 bile albe.

Rezolvare

Evenimentele A, B, C, D se exprimă astfel:

a) $A = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5)$;

b) $B = (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5)$;

c) $C = (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup A \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5)$.

d) $D = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup B \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$.

5. Se supun controlului n piese extrase din producţia unei maşini. Se notează cu A_i, $1 \le i \le n$, evenimentul ca cea de-a i piesă extrasă să fie defectă. Să se exprime următoarele evenimente cu ajutorul evenimentelor A_i:

a) A – cel puţin o piesă extrasă este defectă;
b) B – toate piesele extrase sunt bune;
c) C – numai o piesă este defectă;
d) D – numai două piese sunt defecte.

Rezolvare

Evenimentele se scriu astfel:

a) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

b) $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$;

c) $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \left[A_i \cap \left(\bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A_j} \right) \right]$;

d) $D = \bigcup\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_i \cap \overline{A_{i+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}} \cap A_j \cap \overline{A_{j+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_n})$.

6. Din şirul primelor 1000 de numere naturale se alege la întâmplare un număr. Fie A evenimentul ca numărul ales să fie divizibil cu 2, B evenimentul ca numărul ales să fie divizibil cu 3, C evenimentul ca numărul ales să se termine cu cifra zero. Ce reprezintă evenimentele:

a) $C \cap (A \cup B)$;

b) $(A \cap B) \cup C$;

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Rezolvare

a) Numărul ales trebuie să se termine cu zero şi să se dividă cu 2, sau cu 3, sau cu 6.

b) Numărul ales trebuie să se dividă cu 6; sau să se termine cu zero; sau să se dividă cu 6 şi să se termine cu zero.

c) Numărul ales trebuie să se dividă cu 6; sau să se termine cu zero; sau să se dividă cu 6 şi să se termine cu zero.

7. Doi elevi joacă şah. Fie A evenimentul ca primul elev să câştige partida şi B evenimentul ca al doilea elev să câştige partida. Partida s-a terminat remiză.

a) S-a realizat unul din evenimentele A şi B?

b) Să se scrie evenimentul realizat prin intermediul evenimentelor A şi B.

Rezolvare

a) Nu.

b) Evenimentul realizat se scrie $\overline{A} \cap \overline{B}$.

8. O ţintă este formată din 10 cercuri concentrice de raze r_k, $k = \overline{1,10}$, $r_k < r_{k+1}$. Fie A_k evenimentul ca ţinta să fie atinsă la o tragere în interiorul cercului de rază r_k. Să se explice ce înseamnă evenimentele: $A = \bigcup\limits_{k=1}^{6} A_k$, $B = \bigcap\limits_{k=5}^{10} A_k$, $C = \bigcup\limits_{k=5}^{8} A_k$, $D = \bigcap\limits_{k=5}^{8} A_k$, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{10} A_k$, $F = \bigcap\limits_{k=1}^{10} A_k$.

Rezolvare

A este evenimentul ca ţinta să fie atinsă în interiorul cercului de rază r_6.

B este evenimentul ca ţinta să fie atinsă în interiorul cercului de rază r_5.

C este evenimentul ca ţinta să fie atinsă în interiorul cercului de rază r_8.

D este evenimentul ca ţinta să fie atinsă în interiorul cercului de rază r_5.

E este evenimentul ca ţinta să fie atinsă în interiorul cercului de rază r_{10}.

F este evenimentul ca ţinta să fie atinsă în interiorul cercului de rază r_1.

9. Se aruncă o monedă. Să se scrie câmpul de evenimente atașat acestei experiențe.

Rezolvare

Notăm cu A evenimentul care exprimă faptul că după aruncarea monedei apare fața și B evenimentul ca după aruncarea monedei să apară stema. Atunci câmpul de evenimente asociat este (Ω, K), unde $K = \{\varnothing, A, B, \Omega\}$, iar Ω este evenimentul sigur, care se mai poate scrie $\Omega = A \cup B$. În total sunt $2^2 = 4$ evenimente în acest câmp.

10. Să se scrie câmpul de evenimente atașat experienței de aruncare a unui zar.

Rezolvare

Câmpul de evenimente este (Ω, K), unde Ω este evenimentul sigur, $\Omega = \{i, j, k, l, m, n\}$, $K = \{\varnothing; \{k\}; \{i, j\}; \{i, j, k\}; \{i, j, k, l\}; \{i, j, k, l, m\}; \Omega\}$ iar i, j, k, l, m, n iau independent toate valorile de la 1 la 6 astfel încât în cadrul unei grupe toți indicii să fie diferiți, iar două grupe cu același număr de indici să difere prin cel puțin un indice. Am notat cu $\{k\}$ apariția feței cu numărul k, cu $\{i, j\}$ evenimentul care arată că a apărut fața cu i puncte sau fața cu j puncte etc.

În total sunt $1 + \sum_{s=1}^{6} C_6^s = 2^6 = 64$ evenimente.

11. Se consideră un lot de 5 produse dintre care 4 sunt corespunzătoare, notate cu numerele 1, 2, 3, 4 și unul necorespunzător, notat cu numărul 5. Se extrage un produs din acest lot.

a) Să se scrie evenimentele elementare asociate experienței.

b) Să se scrie câmpul de evenimente corespunzător.

c) Câte evenimente sunt în câmp?

Rezolvare

Fie A_i evenimentul apariției produsului i, $i = 1, ..., 5$.

a) Evenimentele elementare sunt A_1, A_2, A_3, A_4 și A_5.

b) Câmpul de evenimente corespunzător este (Ω, K), unde Ω este evenimentul sigur, $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ și $K = \{\varnothing, \{A_i\}, \{A_i, A_j\}, \{A_i, A_j, A_k\}, \{A_i, A_j, A_k, A_l\}, \Omega\}$, $i, j, k, l = 1, ..., 5$ și $i \neq j \neq k \neq l$.

c) Numărul evenimentelor acestui câmp finit este:

$$1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1+1)^5 = 2^5 = 32.$$

12. Se consideră trei urne în care se află 2, 3 și respectiv 4 bile numerotate. Se extrage din fiecare urnă câte o bilă obținându-se un triplet de bile numerotate. Care este câmpul de evenimente corespunzător acestei experiențe.

Rezolvare

Fie $\{A_{ijk}\}$ evenimentul ce constă în obținerea tripletului format cu bila cu numărul i, $1 \leq i \leq 2$, bila cu numărul j, $1 \leq j \leq 3$ și bila cu numărul k, $1 \leq k \leq 4$. Spațiul evenimentelor elementare corespunzător experienței este:

$$\Omega = \{A_{111}, A_{112}, A_{113}, A_{114}, A_{121}, A_{122}, A_{123}, A_{124}, A_{131}, A_{132}, A_{133}, A_{134}, A_{211}, A_{212}, A_{213}, A_{214}, A_{221}, A_{222}, A_{223}, A_{224}, A_{231}, A_{232}, A_{233}, A_{234}\},$$

iar câmpul de evenimente este (Ω, K) unde $K = \mathrm{P}(\Omega)$. Acest câmp conține $2 \times 3 \times 4 = 24$ evenimente elementare, iar numărul total de evenimente din (Ω, K) este 2^{24}.

13. Un muncitor deserveşte trei strunguri. Dacă notăm cu A_i, $1 \le i \le 3$ evenimentul ca în decurs de o oră strungul i să solicite intervenţia muncitorului, să se exprime evenimentul ca un singur strung să solicite intervenţia muncitorului.
Să se precizeze cum sunt evenimentele A_i din punctul de vedere al compatibilităţii.

Rezolvare

Evenimentul A scrie

$A = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cap (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cap (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$.

Evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt compatibile două câte două deoarece se pot realiza simultan.

14. O urnă conţine două bile albe şi trei bile negre. Se extrag la întâmplare două bile. Considerând evenimentele A_1 – obţinerea a două bile albe, A_2 – obţinerea a cel puţin unei bile negre, A_3 – obţinerea unei singure bile negre, A_4 – obţinerea unei singure bile albe, A_5 – obţinerea a două bile roşii, precizaţi pentru fiecare eveniment dacă este aleator, sigur sau imposibil.

Rezolvare

A_1, A_2, A_3, A_4 sunt evenimente aleatoare, deoarece după efectuarea experienţei oricare din ele se poate realiza sau nu.

Evenimentul A_5 este evenimentul imposibil deoarece oricare ar fi rezultatul experienţei A_5 nu se realizează.

15. Se consideră evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 din problema precedentă. Să se precizeze relaţiile care există între aceste evenimente.

Rezolvare

Perechile de evenimente (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_3, A_4) sunt compatibile deoarece se pot realiza simultan.

Perechile de evenimente (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4) sunt incompatibile deoarece ele nu se pot realiza simultan.

Evenimentele A_1 şi A_2 sunt contrare căci obţinerea a două bile albe atrage imposibilitatea obţinerii a cel puţin unei bile negre.

$A_3 = A_4$ deoarece obţinerea unei singure bile negre implică obţinerea unei singure bile albe şi reciproc.

16. Din mulţimea polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi întregi din intervalul $[-2000, 2000]$ se scrie la întâmplare un polinom $P(x)$. Considerăm evenimentele:

A_1 – polinomul $P(x)$ se divide prin $x - 20$;

A_2 – derivata $P'(x)$ se divide prin $x - 20$;

A_3 – derivata a doua $P''(x)$ se divide prin $x - 20$;

B – polinomul $P(x)$ admit pe 20 ca rădăcină cel puţin triplă;

C – polinomul $P(x)$ admite pe 20 exact ca rădăcină dublă.

Să se exprime evenimentele B şi C prin intermediul evenimentelor A_i, $1 \le i \le 3$.

Rezolvare

Evenimentele B şi C se scriu astfel:

$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$C = (A_1 \cap A_2) \cap \overline{A_3}$

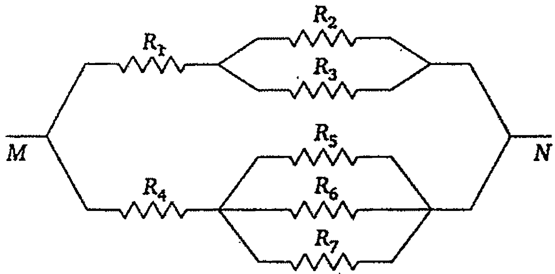
17. Rezistențele R_i montate în schema din figura de mai jos au fost extrase fiecare la întâmplare din câte un lot de rezistențe L_i, $i = \overline{1,7}$. Fiecare lot conține rezistențe bune și rezistențe defecte. Considerăm evenimentele:

A – curentul electric trece de la punctul M la punctul N;

B_i – rezistența R_i extrasă din lotul L_i este bună, $i = \overline{1,7}$.

a) Să se arate că $B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subset A$ și $B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7) \subset A$.

b) Să se exprime evenimentele A și $\overline{A}$ prin intermediul evenimentelor B_i.



Rezolvare

a) Curentul electric trece de la punctul M la punctul N atunci când rezistența R_1 și cel puțin una dintre rezistențele R_2 și R_3 sunt bune, deci $B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subset A$. La fel, dacă rezistența R_4 este bună și cel puțin una dintre rezistențele R_5, R_6 și R_7 sunt bune atunci $B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7) \subset A$.

b) Evenimentele A și $\overline{A}$ se exprimă prin intermediul evenimentelor B_i, astfel:

$A = [B_1 \cap (B_2 \cup B_3)] \cup [B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7)]$ și

$\overline{A} = [\overline{B}_1 \cup (\overline{B}_2 \cap \overline{B}_3)] \cap [\overline{B}_4 \cup (\overline{B}_5 \cap \overline{B}_6 \cap \overline{B}_7]$.

18. Fie $\Omega = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1 \text{ și } 0 \le y \le 1\}$ și

$A_1 = \left\{(x,y);\ 0 \le x \le 1 \text{ și } 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$

$A_2 = \left\{(x,y);\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ și } 0 \le y \le 1\right\}$

$A_3 = \{(x,y);\ 0 \le x \le y \le 1\}$

$A_4 = \left\{(x,y);\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ și } 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$.

a) Precizați ce relații există între evenimentele de mai sus.

b) Scrieți evenimentele $\overline{A}_1$ și $A_1 \setminus A_4$.

Rezolvare

a) Se arată ușor că: $A_4 \subset A_1$, $A_4 \subset A_2$, $A_1 \cap A_2 = A_4$, $A_4 \cup A_3 = A_2 \cup A_3$.

b) Evenimentele cerute se scriu $\overline{A}_1 = \left\{(x,y);\ 0 \le x \le 1 \text{ și } \frac{1}{2} < y \le 1\right\}$

$A_1 \setminus A_4 = \left\{(x,y);\ \frac{1}{2} < x \le 1 \text{ și } 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$.

19. Să se demonstreze următoarele relații:

a) $[(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})] \cup [(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] = \Omega$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

c) $A \setminus \{A \setminus [B \setminus (B \setminus C)]\} = A \cap B \cap C$;

d) $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap D)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{C} \cup \overline{D})$;

e) $[A \setminus (A \cap B)] \cup B = A \cup B$.

Rezolvare

a) Se aplică proprietatea de distributivitate și se obține:

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \varnothing = A$

$(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A} \cup (B \cap \overline{B}) = \overline{A} \cup \varnothing = \overline{A}$,

deci $A \cup \overline{A} = \Omega$.

b) Se folosește definiția diferenței și relațiile lui De Morgan.

$A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

c) Observăm că:

$B \setminus C = B \cap \overline{C}$

$B \setminus (B \setminus C) = B \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = B \cap (\overline{B} \cup C) = (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup (B \cap C) = B \cap C$.

$A \setminus [B \setminus (B \setminus C)] = A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$

și deci,

$A \setminus \{A \setminus [B \setminus (B \setminus C)]\} = A \setminus [A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})] = A \cap \left[\overline{A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})}\right] =$

$= A \cap [\overline{A} \cup (B \cap C)] = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B \cap C$.

d) Se folosesc relațiile lui De Morgan

$\overline{(A \cap B) \cup (C \cap D)} = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{C \cap D}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{C} \cup \overline{D})$.

e) $[A \setminus (A \cap B)] \cup B = [A \cap (\overline{A \cap B})] \cup B = [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup B =$

$= [(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})] \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) =$

$= (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$.

1.2. Probabilitate aditivă și σ – aditivă

(1) Arătați că numărul total de moduri în care putem extrage n bile dintr-un total de M bile distincte (numerotate de la 1 la M) este M^n dacă extragerile se fac cu revenire și $M(M-1) \dots (M-n+1)$ dacă extragerile se fac fără revenire.

Rezolvare

Un rezultat al experimentului poate fi reprezentat printr-un n-ulplu $(z_1, .., z_n)$ unde z_j este numărul bilei obținute la extragerea j. În cazul extragerilor cu revenire, sunt M numere care pot apare ca primă componentă, M numere care pot apare ca a doua componentă, ..., M numere care pot apărea ca ultimă componentă. În total sunt M^n astfel de n-upluri. În cazul extragerilor fără revenire, vom avea M variante pentru prima componentă, $M-1$ pentru a doua componentă, ..., $M-n+1$ pentru a n-a componentă și în total $M(M-1) \dots (M-n+1)$ modalități de extragere a n bile din cele M existente în urnă.

(2) O urnă conține M mingii numerotate de la 1 la M unde primele K mingii sunt defecte, iar restul de $M-K$ sunt bune. Se extrag la întâmplare n mingii din urnă. Definim A_k evenimentul ca din n mingii extrase exact k să aibă defecte.

a) Să se determine $P(A_k)$ în cazul extragerilor cu revenire.

b) Să se determine $P(A_k)$ în cazul extragerilor fără revenire.

Rezolvare

a) Fie

$$\Omega = \{(z_1, \dots, z_n);\ z_j \text{ este numărul mingei de la extragerea } j\}$$

spațiul evenimentelor elementare.

A_k este acel eveniment din Ω pentru care exact k din numerele z_j sunt de la 1 la K inclusiv. În total sunt C_n^k moduri în care putem alege k astfel de numere din cele n extrase. Pentru fiecare astfel de alegere, avem $K^k(M-K)^{n-k}$ variante.

Deci, numărul cazurilor favorabile realizății lui A_k este $C_n^k\ K^k(M-K)^{n-k}$. Numărul cazurilor egal posibile este M^n. Deci

$$P(A_k) = \frac{C_n^k K^k (M-K)^{n-k}}{M^n}.$$

b) În cazul extragerilor fără revenire, numărul cazurilor egal posibile este $M(M-1) \dots (M-n+1)$ conform problemei precedente. Pentru fiecare din cele C_n^k moduri de alegere a k numere din mulțimea $\{1, \dots, K\}$ în cele n extrase, avem $K(K-1) \dots (K-k+1)(M-K)(M-K-1) \dots (M-K-n-k+1)$ variante.

Atunci,

$$P(A_k) = \frac{C_n^k K(K-1)\dots(K-k+1)(M-K)(M-K-1)\dots(M-K-n+k+1)}{M(M-1)\dots(M-n+1)} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{(K-k)!} \cdot \frac{(M-K)!}{(M-K-n+k)!} \cdot \frac{(M-n)!}{M!} = \frac{C_K^k \cdot C_{M-K}^{n-k}}{C_M^n}.$$

3. Care este probabilitatea ca din 13 cărți oarecare 6 să fie de pică?

Rezolvare

Folosim problema precedentă cu $M = 52$, $n = 13$, $k = 6$ și $K = 13$. Notând cu A evenimentul ca din 13 cărți oarecare 6 să fie de pică, avem :

$$P(A) = \frac{C_{13}^{6} \cdot C_{39}^{7}}{C_{52}^{13}}.$$

4. S-a amestecat un pachet de 36 de cărți de joc numerotate 1, 2, ..., 36. Care este probabilitatea ca deasupra să fie cartea 1?

Rezolvare

Cele 36 de cărți pot fi aranjate în 36! moduri. Avem deci 36! cazuri egal posibile. Caz favorabil este orice aranjare în care deasupra pachetului se află cartea cu numărul 1 și în continuare celelalte 35 de cărți într-o ordine oarecare. Reiese că numărul cazurilor favorabile este 35! și deci probabilitatea căutată este

$$P = \frac{35!}{36!} = \frac{1}{36}.$$

5. Într-un grup de 25 de persoane, care este probabilitatea ca toate să aibă zile de naștere diferite? (presupunem că un an are 365 de zile).

Rezolvare

Folosim definiția calsică a probabilității. Numărul cazurilor egal posibile coincide cu numărul tuturor funcțiilor ce se pot defini pe o mulțime cu 25 elemente cu valori într-o mulțime cu 365 elemente, adică 365^{25}. Numărul cazurilor favorabile coincide cu numărul tuturor funcțiilor injective ce se pot defini pe o mulțime cu 25 de elemente cu valori într-o mulțime cu 365 de elemente, adică C_{365}^{25}. Prin urmare, probabilitatea căutată este

$$P = \frac{C_{365}^{25}}{365^{25}}.$$

6. Numerele 1, 2, 3, ..., n se așază la întâmplare.

a) Care este probabilitatea ca numerele 1 și 2 să fie așezate în ordine crescătoare și consecutive?

b) Care este probabilitatea ca numerele $k, k+1, k+2$ s fie așezate în ordine crescătoare și consecutive? ($k \in \{1, 2, ..., n\}$, $k \geq 1$, $k + 2 \leq n$).

Rezolvare

a) Fie A evenimentul ca într-o aranjare a numerelor 1, ..., n numerele 1 și 2 să apară în ordine crescătoare și consecutive. Pentru a determina numărul cazurilor favorabile, observăm că, lăsând la o parte numerele 1 și 2, restul numerelor se pot aranja în $(n-2)!$ moduri. Pentru fiecare astfel de mod de aranjare, numerele 1 și 2 ordonate crescător și consecutive pot apărea în $n-1$ moduri. Deci,

$$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

b) Fie B evenimentul ca într-o aranjare a numerelor 1, ..., n numerele k, $k + 1$, $k + 2$ să fie așezate în ordine crescătoare și consecutive. Atunci, raționând ca mai sus, obținem:

$$P(B) = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

7. Determinați probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr natural, n cu k cifre ($k \geq 3$), cubul său să se termine cu 11.

Rezolvare

Vom arăta că numai numerele naturale care au ultimele două cifre 7 și 1 au proprietatea din enunț.

Să presupunem, de exemplu, că n este un număr natural cu 4 cifre. Atunci, n se poate scrie sub forma

$$n = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d,$$

iar

$$n^3 = (1000\,a + 100\,b + 10\,c + d)(1000\,a + 100\,b + 10\,c + d)(1000a + 100b + 10c + d).$$

Ultima cifră a lui n^3 este dată de d^3 și pentru a fi 1 trebuie ca d să fie 1.

Atunci, penultima cifră a lui n^3 este dată de numărul $3 \cdot 10 \cdot c \cdot d$ și pentru a fi 1, având în vedere că $d = 1$, singura posibilitatea este ca c să fie 7.

La fel pentru un număr natural cu număr oarecare de cifre.

Deci, singurele numere naturale pentru care cubul lor se termină cu 11 sunt numerele pentru care ultimele două cifre sunt 7 și 1 (în această ordine).

Fie A evenimentul ca un număr natural cu k cifre ($k \geq 3$) să aibă ultimele două cifre 7 și 1.

Numărul tuturor numerelor cu k cifre este $9 \cdot 10^{k-1}$ având în vedere că prima cifră poate fi 1, 2, 3, ..., 8 sau 9, iar următoarele $k - 1$ cifre pot avea oricare valori 0, 1, 2, ..., 9.

Numărul tuturor numerelor cu k cifre care se termină cu 71 este $9 \cdot 10^{k-3}$, deoarece prima cifră nu poate fi 0, ultimele două cifre sunt fixate, 7 și 1, iar restul de $k - 3$ cifre pot lua orice valori 0, 1, 2, ..., 9.

Atunci,

$$P(A) = \frac{9 \cdot 10^{k-3}}{9 \cdot 10^{k-1}} = \frac{1}{100}$$

și observăm că această probabilitate nu depinde de k.

8. (Problema acului lui Buffon) Pe un plan sunt trasate drepte paralele, astfel ca distanța între oricare două drepte consecutive să fie $2a$. Pe acest plan se aruncă la întâmplare un ac de lungime $2l < 2a$. Care este probabilitatea ca acul să întretaie una dintre drepte?

Rezolvare

Poziția acului față de dreptele paralele este determinată de distanța d a mijocului său la cea mai apropiată dreaptă și de unghiul α pe care îl face direcția acului cu direcția dreptelor.

Se observă că d ia o valoare în intervalul $[0, a]$, iar α în $[0, \pi]$. Poziția acului, fiind determinată de cele două numere, poate fi reprezentată printr-un punct în plan. Mulțimea pozițiilor posibile ale acului este dată de mulțimea punctelor domeniului D. Din figura 1 rezultă că acul intersectează una dintre dreptele paralele, dacă $MP_1 \le MP_2$, adică $0 \le d \le l \sin \alpha$. În figura 3 este trasat graficul funcției $d = l \sin \alpha$, iar D' este domeniul în interiorul căruia $d \le l \sin \alpha$, deci D' reprezintă mulțimea cazurilor favorabile.

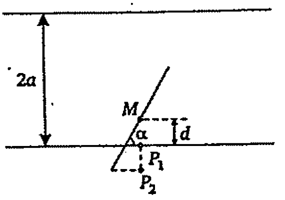


fig. 1

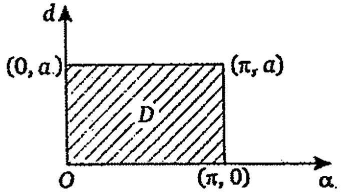


fig. 2

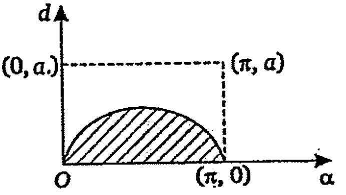


fig. 3

Probabilitatea căutată este

$$p = \frac{\text{aria}\, D'}{\text{aria}\, D} = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\pi} l \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2l}{\pi a}.$$

9. Să se determine probabilitatea ca suma a două numere luate la întâmplare din intervalul $[0, 1]$ să nu depășească pe 1, iar produsul lor să nu depășească pe $\frac{2}{9}$.

Rezolvare

Fie x și y două numere cu proprietățile din enunț. Mulțimea cazurilor posibile este dată de mulțimea tuturor punctelor de coordonate (x, y) astfel ca $0 \le x \le 1$ și $0 \le y \le 1$, adică mulțimea tuturor punctelor din plan cuprinse în pătratul de latură 1 de mai jos.

Mulțimea cazurilor favorabile este dată de mulțimea tuturor punctelor de coordonate (x, y) astfel încât $x + y \le 1$, $xy \le \frac{2}{9}$, $0 \le x \le 1$ și $0 \le y \le 1$, adică domeniul din plan mărginit de segmentele OA, AB, CD, OD și de curba $xy = \frac{2}{9}$.

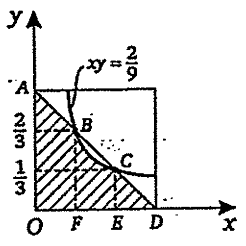


fig. 4

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{2}{9} \end{cases}$$

se obține respectiv abscisele punctelor B și C, $x_B = \frac{1}{3}$ și $x_C = \frac{2}{3}$.

Aria haşurată se obţine scăzând din aria triunghiului OAD, aria cuprinsă între latura AD şi hiperbola echilaterală de ecuaţie $xy = \frac{2}{9}$. Notăm aria cuprinsă între latura AD şi hiperbola echilaterală cu S_1.

Fie

$$S_2 = S_{BCEF} - S_1,$$

unde S_{BCEF} este aria trapezului $BCEF$.

Dar $S_2 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}\, dx = \frac{2}{9} \ln x \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9} \ln 2.$

Deci $S_1 = S_{BCEF} - S_2 = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2.$

Atunci, aria haşurată este

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2 \cong 0{,}487.$$

10. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag simultan n bile. Fie $x_1 < \ldots < x_m < \ldots < x_n$ numerele înscrise pe bilele extrase aranjate în ordine crescătoare. Să se găsească probabilitatea ca $x_m = M$. Pentru ce valori ale lui M, $P(x_m = M) \neq 0$?

Rezolvare

Sunt C_N^n cazuri posibile; numărul cazurilor favorabile $C_{M-1}^{m-1} C_{N-M}^{n-m}$ îl găsim în felul următor: sunt C_{M-1}^{m-1} modalităţi de extragere a celor $m - 1$ bile cu numere mai mici decât M (se extrag $m - 1$ bile din $M - 1$ bile, numerotate cu 1, 2, ..., $M - 1$), apoi o singură modalitate de extragere a bilei numerotate cu M şi C_{N-M}^{n-m} modalităţi de extragere a $n - m$ bile cu numere mai mari decât M(se extrag $n - m$ bile dintre $N - M$ bile, numerotate cu $M + 1, M + 2, .., N$), deci în total $C_{N-1}^{m-1} \cdot 1 \cdot C_{N-M}^{n-m}$ cazuri favorabile. Deci

$$P(x_m = M) = \frac{C_{M-1}^{m-1} \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$P(x_m = M) \neq 0$, pentru $m \leq M \leq N - n + m$.

11. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag simultan n bile. Se cere probabilitatea ca:

a) cel mai mic număr de pe bilele extrase să fie egal cu M;

b) cel mai mare număr de pe bilele extrase să fie egal cu M.

Rezolvare

a) Se aplică problema precedentă pentru $m = 1$ şi deci

$$P = \frac{C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}.$$

b) Se aplică problema precedentă pentru $m = n$, deci

$$P = \frac{C_{M-1}^{n-1}}{C_N^n}.$$

12. În condițiile problemei 10 să se găsească probabilitatea ca:

a) $x_m \geq M_1$.

b) $x_m \leq M_2$.

c) $M_1 < x_m \leq M_2$.

Rezolvare

a) Observăm că

$$P(x_m \geq M_1) = P(x_m = M_1) + P(x_m = M_1 + 1) + \ldots + P(x_m = N).$$

Dar $P(x_m = k) \neq 0$ dacă $m \leq k \leq N - n + m$,

deci $$P(x_m \geq M_1) = \sum_{k=\alpha}^{N-n+m} \frac{C_{k-1}^{m-1} \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},$$

unde $\alpha = \max(m, M_1)$.

b) Avem

$$P(x_m \leq M_2) = P(x_m = 1) + P(x_m = 2) + \ldots + P(x_m = M_2) = \sum_{k=1}^{\beta} \frac{C_{k-1}^{m-1} \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}$$

unde $\beta = \min(N - n + m, M_2)$.

c) Avem

$$P(M_1 < x_m \leq M_2) = P(x_m \leq M_2) - P(x_m \leq M_1).$$

13. În condițiile problemei 10., să se găsească probabilitatea ca:

a) $x_m < M_1$.

b) $x_m > M_2$.

Rezolvare

a) Calculăm probabilitatea cerută cu ajutorul probabilității evenimentului contrar, după care aplicăm problema precedentă:

$$P(x_m < M_1) = 1 - P(x_m \geq M_1) = 1 - \sum_{k=\alpha}^{N-n+m} \frac{C_{k-1}^{m-1} \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},$$

unde $\alpha = \max(m, M_1)$.

b) Analog, folosind problema precedentă,

$$P(x_m > M_2) = 1 - P(x_m \leq M_2) = 1 - \sum_{k=1}^{\beta} \frac{C_{k-1}^{m-1} \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},$$

unde $\beta = \min(N - n + m, M_2)$.

14. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag simultan n bile. Se cere probabilitatea ca cel mai mic număr înscris pe bilele extrase să fie:

a) cel puțin egal cu M_1;

b) cel mult egal cu M_2;

c) mai mare decât M_1 și cel mult egal cu M_2.

Rezolvare

Se obține ca un caz particular al problemei **12.** pentru $m = 1$.

15. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag simultan n bile. Se cere probabilitatea ca cel mai mare număr înscris pe bilele extrase să fie

a) cel puţin egal cu M_1;

b) cel mult egal cu M_2;

c) mai mare decât M_1 şi cel mult egal cu M_2.

Rezolvare

Se obţine ca un caz particular al problemei **12.** pentru $m = n$.

16. În n urne se introduc câte N bile numerotate de la 1 la N. Se extrage apoi câte o bilă din fiecare urnă. Să se găsească probabilitatea ca cel mai mare număr înscris pe bilele extrase să fie:

a) cel mult egal cu M;

b) să depăşească pe M;

c) egal cu M.

Rezolvare

a) Pentru extragerea dintr-o singură urnă sunt M cazuri favorabile (bilele $1, 2, ..., M$) şi N cazuri posibile, deci probabilitatea cerută este $\frac{M}{N}$.

Dacă se extrage acum câte o bilă din fiecare din cele n urne, extragerile fiind independente, probabilitatea căutată este produsul probabilităţilor corespunzătoare extragerilor din fiecare urnă, adică

$$P = \frac{M^n}{N^n}.$$

b) Probabilitatea cerută este:

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{M^n}{N^n}.$$

c) Fie p_k probabilitatea ca cel mai mare număr extras să fie egal cu k. Atunci, folosind rezultatul de la punctul a) avem:

$$P = p_1 + p_2 + ... + p_M = \frac{M^n}{N^n};$$

iar $$p_1 + p_2 + ... + p_{M-1} = \frac{(M-1)^n}{N^n}$$

de unde prin scădere se obţine:

$$p_M = \frac{M^n}{N^n} - \frac{(M-1)^n}{N^n}.$$

17. În n urne se introduc câte N bile numerotate de la 1 la N. Se extrage apoi câte o bilă din fiecare urnă. Să se găsească probabilitatea ca cel mai mic număr înscris pe bilele extrase să fie:

a) cel puțin egal cu M;

b) egal cu M;

c) cel mult egal cu M.

Rezolvare

a) Cazurile favorabile pentru extragerea dintr-o singură urnă sunt bilele numerotate cu $M, M + 1, ..., N$, deci în total avem $N - M + 1$ cazuri favorabile. Atunci probabilitatea cerută, corespunzătoare extragerilor din n urne, este:

$$P = \frac{(N-M+1)^n}{N^n}.$$

b) Fie p_k probabilitatea ca cel mai mic număr extras să fie egal cu k. Atunci, ținând seama de punctul a), avem:

$$P = p_M + p_{M+1} + ... + p_N = \frac{(N-M+1)^n}{N^n},$$

iar $$p_{M+1} + p_{M+2} + ... + p_N = \frac{(N-M)^n}{N^n},$$

de unde, prin scădere, se obține:

$$p_M = \frac{(N-M+1)^n}{N^n} - \frac{(N-M)^n}{N^n}.$$

c) Probabilitatea cerută este:

$$p_1 + p_2 + ... + p_M,$$

unde fiecare p_i se calculează ca la punctul b).

18. Defectele care apar în timpul prelucrării unei piese metalice la strung se pot produce din două cauze: centrarea imperfectă a cuțitului și calitatea necorespunzătoare a lui. Probabilitatea de a apare un defect din cauza imperfecțiunii centrării cuțitului este 0,02, iar probabilitatea apariției unui defect provenit din calitatea necorespunzătoare a cuțitului este 0,1. Să se determine probabilitatea de a respinge o piesă.

Rezolvare

Fie A evenimentul ca o piesă să aibă un defect cauzat de necentrarea cuțitului și B evenimentul ca o piesă să aibă un defect cauzat de calitatea necorespunzătoare a cuțitului. Atunci probabilitatea căutată este

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}02 + 0{,}1 - 0{,}002 = 0{,}118$$

întrucât evenimentele A și B sunt independente și

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}002.$$

19. Se aruncă două zaruri şi fie (x, y) perechea de puncte apărute pe feţele lor. Să se scrie următoarele evenimente:

A – suma punctelor să fie pară;

B – să apară faţa 1 pe cel puţin un zar;

$A \cap B; A \cup B; A \cap \overline{B}$.

Să se calculeze probabilităţile acestor evenimente.

Rezolvare

Vom avea:

$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$

$A \cap B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1)\}$

$A \cap \overline{B} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$.

Se obţin deci:

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{11}{36}; P(A \cap B) = \frac{5}{36};$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3};$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{13}{36}.$$

Probabilitatea $P(A \cap \overline{B})$ putea fi calculată şi direct, folosind definiţia clasică a probabilităţii.

20. În urma unei anchete efectuate în rândul studenţilor unui an s-a constatat că probabilitatea ca unui student să-i placă disciplina A este 0,8, respectiv disciplina B este 0,7, iar probabilitatea ca un student oarecare să îndrăgească ambele discipline este 0,6. Care este probabilitatea ca un student oarecare:

– să îndrăgească cel puţin una dintre cele două discipline;
– să nu îi placă nici una;
– să îi placă disciplina A şi nu B.

Rezolvare

Se cunosc:

$$P(A) = 0{,}8; P(B) = 0{,}7; P(A \cap B) = 0{,}6.$$

Avem atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}1$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}2.$$

21. Trei secţii ale unei firme realizează profit, independent una de alta, cu probabilităţile 0,7; 0,6; 0,8 respectiv. Care este probabilitatea ca:

a) cel puţin una dintre secţii să realizeze profit;

b) toate secţiile să realizeze profit;

c) numai o singură secţie să realizeze profit?

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca secţia i să realizeze profit, $i = 1, 2, 3$. Aceste evenimente sunt compatibile două câte două şi independente. Atunci:

a) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) +$
$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_3) -$
$- P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}976.$

b) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}336.$

c) $P[(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)] =$
$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = 0{,}188.$

22. De câte ori trebuie aruncat un zar pentru ca faţa cu 4 puncte să apară cel puţin o dată cu o probabilitate mai mare decât 0,6?

Rezolvare

Probabiliatea ca faţa 4 să apară cel puţin o dată se va calcula mai simplu cu ajutorul probabilităţii evenimentului contrar. Deci faţa cu 4 puncte nu apare cu probabilitatea $\frac{5}{6}$ la o aruncare şi cu probabilitatea $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ în n aruncări. Atunci

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}6$$

de unde se determină n.

23. Se efectuează o anchetă în rândul studenţilor unui an privind frecvenţa la două cursuri A şi B. Fiecare student aparţine unei dintre categoriile:

$$e_1 = A \cap B;\ e_2 = A \cap \overline{B};\ e_3 = \overline{A} \cap B;\ e_4 = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ştiind că $P(e_1) = 0{,}6$, $P(e_2) = 0{,}2$, $P(e_3) = 0{,}15$, $P(e_4) = 0{,}05$, să se afle $P(A)$, $P(B)$ şi $P(A \cup B)$.

Rezolvare

Datorită egalităţilor

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$
$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}),$$

obţinem $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = P(e_1 \cup e_2) = P(e_1) + P(e_2) = 0{,}8$

întrucât evenimentele e_1 şi e_2 sunt incompatibile, iar

$$P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(e_1 \cup e_3) = P(e_1) + P(e_3) = 0{,}75$$

întrucât evenimentele e_1 şi e_3 sunt incompatibile.

Apoi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(e_1) = 0{,}8 + 0{,}75 - 0{,}6 = 0{,}95.$

24. Un aparat se compune din trei dispozitive care se pot defecta independent unul de altul. Un singur defect este suficient pentru ca aparatul să nu funcționeze. Probabilitatea de funcționare fără defect a primului dispozitiv este 0,9, a celui de-al doilea este 0,7 și a celui de-al treilea 0,6. Cu ce probabilitate aparatul funcționează?

Rezolvare

A_i este evenimentul ca dispozitivul i să funcționeze, $i = 1, 2, 3$. Atunci, probabilitatea ca aparatul să funcționeze este:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}378.$$

25. Patru degustători (să zicem I, II, III, și IV) trebuie să clasifice trei tipuri diferite de bere(să zicem A, B și C) într-un test, legați la ochi. Fiecare degustător notează fiecare tip de bere cu 1 (pentru berea care îi place cel mai mult) 2 și 3 și apoi se sumează pentru fiecare tip de bere punctele acordate pentru a obține punctajul fiecărui tip.

a) Care este probabilitatea ca berea A să primească un punctaj total de 4?

b) Care este probabilitatea ca cel puțin un tip de bere să primească un punctaj total de 4?

Rezolvare

a) Singura posibilitate ca berea A să primească un punctaj total de 4 este ca fiecare din cei patru degustători să acorde acestei beri punctajul 1. Atunci, probabilitatea căutată este:

$$P = P((\text{I acodră berii } A \text{ punctaj } 1) \cap (\text{II acordă berii } A \text{ punctaj } 1) \cap$$
$$\cap (\text{III acordă berii } A \text{ punctaj } 1) \cap (\text{IV acordă berii } A \text{ punctaj } 1)) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81},$$

deoarece evenimentele care apar sunt independente.

b) Notăm A – evenimentul ca berea A să primească un punctaj total de 4.
B – evenimentul ca berea B să primească un punctaj total de 4.
C – evenimentul ca berea C să primească un punctaj total de 4.

Atunci, probabilitatea cerută este:

$$P = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{81}$$

ținând seama de punctul a) și de faptul că evenimentele A, B, C sunt incompatibile două câte două.

26. O piesă este standard dacă îndeplinește condițiile C_1, C_2 și C_3. Dintr-un lot de piese, 92% îndeplinesc condiția C_1, 85% condiția C_2 și 89% condiția C_3. Să se calculeze probabilitatea minimă ca o piesă la întâmplare să fie standard.

Rezolvare

Fie A_1, A_2, A_3 evenimentele ca o piesă să îndeplinească condiția C_1, C_2, C_3, respectiv. Întrucât nu se poate stabili dacă evenimentele sunt independente sau nu, se aplică inegalitatea lui Boole:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2 = 0{,}66.$$

27. Pe un șantier lucrează trei echipe. Prima echipă depășește norma cu probabilitatea 0,8 a doua cu probabilitatea 0,9, iar a treia cu probabilitatea 0,6. Să de determine probabilitatea ca toate cele trei echipe să depășească norma, necunoscând dacă rezultatele obținute de una dintre ele influențează sau nu pe celelalte.

Rezolvare

Se aplică inegalitatea lui Boole și se obține:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2 = 0{,}3.$$

28. Se aruncă la întâmplare patru zaruri. Să se determine:

a) Probabilitatea ca o anumită față să apară cel puțin o dată.

b) Probabilitatea de a obține o anumită față o singură dată.

Rezolvare

a) Fie A evenimentul ca fața i să apară cel puțin o dată. Atunci probabilitatea evenimentului $\bar{A}$ este:

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

și $$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

b) Fie A_{ji} evenimentul ca la aruncarea j ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$) să apară fața i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) și B evenimentul ca din cele patru aruncări cu zarul, fața i să apară numai o dată. Atunci:

$$B = (A_{1i} \cap \bar{A}_{2i} \cap \bar{A}_{3i} \cap \bar{A}_{4i}) \cup (\bar{A}_{1i} \cap A_{2i} \cap \bar{A}_{3i} \cap \bar{A}_{4i}) \cup (\bar{A}_{1i} \cap \bar{A}_{2i} \cap A_{3i} \cap \bar{A}_{4i}) \cup$$
$$\cup (\bar{A}_{1i} \cap \bar{A}_{2i} \cap \bar{A}_{3i} \cap A_{4i})$$

și $$P(B) = 4 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

29. Se aruncă două zaruri de zece ori.

a) Să se calculeze probabilitatea ca dubla 6 să apară cel puțin o dată.

b) Să se calculeze probabilitatea ca dubla 6 să apară cel puțin de două ori.

Rezolvare

a) Fie A evenimentul ca dubla 6 să apară cel puțin o dată și $\bar{A}_{i,66}$ evenimentul ca la aruncarea i să nu apară dubla 6. Atunci

$$B = \bar{A}_{1,66} \cap \bar{A}_{2,66} \cap \ldots \cap \bar{A}_{10,66}$$

este evenimentul contrar lui A.

Avem:

$$P(B) = \left(\frac{35}{36}\right)^{10} \text{ și } P(A) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10}$$

b) Fie C evenimentul ca dubla 6 să apară cel puţin de două ori. Atunci evenimentul contrar lui C este

$$\overline{C} = B \cup D$$

unde D este evenimentul ca dubla 6 să apară o singură dată.

Atunci

$$D = (A_{1,66} \cap \overline{A}_{2,66} \cap \ldots \cap \overline{A}_{10,66}) \cup \ldots \cup (\overline{A}_{1,66} \cap \overline{A}_{2,66} \cap \ldots \cap A_{10,66}).$$

Deoarece evenimentele B şi D sunt incompatibile, obţinem:

$$P(\overline{C}) = P(B) + P(D) = \left(\frac{35}{36}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{9}.$$

Deci $P(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{35^9}{36^{10}}$.

30. Într-o cameră întunecoasă se găsesc 5 perechi de pantofi. Se aleg la întâmplare cinci pantofi.

a) Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi aleşi să fie cel puţin o pereche, în ipoteza că cele cinci perechi de pantofi sunt toate de acelaşi fel?

b) Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi aleşi să fie cel puţin o pereche, în ipoteza că perechile sunt de mărimi diferite?

Rezolvare

a) Fie A evenimentul ca din cei cinci pantofi aleşi să se poată forma cel puţin o pereche. Atunci $\overline{A}$ este evenimentul ca din cei cinci pantofi aleşi să nu se poată forma nici o pereche, şi deci,

$$P(\overline{A}) = \frac{2}{C_{10}^5}$$

deoarece avem două posibilităţi ca din cinci pantofi să nu putem forma nici o pereche, iar numărul cazurilor favorabile este C_{10}^5. Deci

$$P(A) = 1 - \frac{2}{C_{10}^5}.$$

b) Fie B evenimentul de a forma cel puţin o pereche în ipoteza că cele cinci perechi sunt de mărimi diferite. Atunci

$$P(\overline{B}) = \frac{1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5}{C_{10}^5} = \frac{2^5}{C_{10}^5}$$

şi deci $P(B) = 1 - \frac{2^5}{C_{10}^5}$.

31. Să se arate că dacă $A \cap B \cap C \subset D$, atunci
$$P(A) + P(C) + P(B) - P(D) \leq 2.$$

Rezolvare

Conform ipotezei, $P(D) \geq P(A \cap B \cap C)$. Dacă vom demonstra inegalitatea
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) \leq 2, \qquad (1)$$
atunci ţinând cont de inegalitatea de mai sus, problema va fi rezolvată.

Ţinând cont de regula de adunare a probabilităţilor evenimentelor incompatibile, obţinem:
$$P(A) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$
$$P(B) = P(A \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$$
$$P(C) = P(A \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \qquad (2)$$
şi
$$P(A \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) +$$
$$+ P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1.$$

Rezultă că
$$P(A \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) =$$
$$= 1 - [P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})] \qquad (3)$$

Înlocuind (2) în (1) şi folosind (3), după reduceri, obţinem:
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) = 2 - [2P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(A \cap B \cap \bar{C})].$$

De aici rezultă că
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) \leq 2$$
şi deci
$$P(A) + P(C) + P(B) - P(D) \leq 2.$$

32. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate. Ştiind că $A \Delta B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ (diferenţa simetrică) să se demonstreze că:
$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B), \forall A, B \in K, A \cap B \neq \varnothing.$$

Rezolvare

Fie $A, B \in K$ astfel încât $A \cap B \neq \varnothing$. Avem:
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}),$$
iar evenimentele $A \cap \bar{B}$ şi $B \cap \bar{A}$ sunt incompatibile deoarece
$$(A \cap \bar{B}) \cap (B \cap \bar{A}) = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B}) = \varnothing,$$
deci $\quad P(A \Delta B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A).$

Cum $A \cap B \neq \varnothing$ avem
$$P(A \Delta B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

33. Într-un anumit joc fiecărui participant îi sunt permise trei încercări pentru a înscrie o lovitură. În aceste trei încercări el este obligat să alterneze mâna folosită; are astfel două strategii posibile: mâna dreaptă, stângă, dreaptă sau mâna stângă, dreaptă, stângă. Probabilitatea de a înscrie cu mâna dreaptă este 0,8, în timp ce cu mâna stângă este doar 0,5. Ținând cont că participantul va câștiga dacă va marca cel puțin două lovituri la rând, care strategie oferă șanse mai mari de câștig? Răspundeți la aceeași întrebare, dacă 0,8 este înlocuită cu p_1, iar 0,5 cu p_2. Depinde răspunsul de p_1 și p_2?

Rezolvare

Problema ne cere să comparăm probbailitatea P_1 ca jucătorul să câștige alternând mâna dreaptă, stângă, dreaptă cu probabilitatea P_2 ca jucătorul să câștige alternând mâna stângă, dreapta, stânga.

Fie A evenimentul ca jucătorul să câștige alternând mâinile dreaptă, stângă, dreaptă și B evenimentul ca jucătorul să câștige alternând mâinile stânga, dreapta, stânga.

Atunci, $P_1 = P(A)$ și $P_2 = P(B)$.

Mai notăm

A' – evenimentul ca jucătorul să marcheze primele două lovituri, prima cu mâna dreaptă, pe a doua cu mâna stângă și pe a treia să nu o marcheze;

A'' – evenimentul ca jucătorul să marcheze ultimele două lovituri, penultima cu mâna stângă, ultima cu mâna dreaptă și pe prima să nu o marcheze;

A''' – evenimentul ca jucătorul să marcheze toate cele trei lovituri, prima cu mâna dreaptă, pe a doua cu mâna stângă și pe ultima cu mâna dreaptă;

A_1 – evenimentul ca jucătorul să marcheze prima lovitură

A_2 – evenimentul ca jucătorul să marcheze a doua lovitură

A_3 – evenimentul ca jucătorul să marcheze a treia lovitură

Atunci

$$A = A' \cap A'' \cap A'''$$

$$A' = A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$$

$$A'' = \bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$A''' = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

și
$$P(A) = P(A' \cup A'' \cup A''') = P(A') + P(A'') + P(A''') =$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= P(A_1)P(A_2)[1 - P(A_3)] + [1 - P(A_1)]P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}32 = 0{,}48$$

întrucât evenimentele A', A'', A''' sunt incompatibile două câte două, iar evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente.

Deci $P_1 = 0{,}48$.

Pentru calculul lui P_2 procedăm analog.

Fie

B' – evenimentul ca jucătorul să marcheze primele două lovituri, prima cu mâna stângă, a doua cu mâna dreaptă și să nu marcheze ultima lovitură cu mâna stângă.

B'' – evenimentul ca jucătorul să marcheze ultimele două lovituri, penultima cu mâna dreaptă, ultima cu mâna stângă și să nu marcheze prima lovitură cu mâna stângă.

B''' – evenimentul ca jucătorul să marcheze toate cele trei lovituri, prima cu mâna stânga, a doua cu mâna dreaptă şi ultima cu mâna stângă.

B_1 – evenimentul ca jucătorul să marcheze prima lovitură (în alternanţa stânga, dreapta, stânga)

B_2 – evenimentul ca jucătorul să marcheze a doua lovitură (în alternanţa stânga, dreapta, stânga)

B_3 – evenimentul ca jucătorul să marcheze a treia lovitură (în alternanţa stânga, dreapta, stânga)

Atunci:

$$B = B' \cup B'' \cup B'''); \; B' = B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3; \; B'' = \bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3; \; B''' = B_1 \cap B_2 \cap B_3.$$

şi
$$P(B) = P(B' \cup B'' \cup B''') = P(B') + P(B'') + P(B''') =$$
$$P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) + P(\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) =$$
$$= P(B_1)P(B_2)[1 - P(B_3)] + [1 - P(B_1)]P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(B_3) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,6$$

Deci $P_2 = 0,6$ şi concluzia este că cea de-a doua strategie oferă şanse mai mari de câştig.

Dacă înlocuim 0,8 cu p_1 şi 0,5 cu p_2, atunci

$$P_1 = p_1 \cdot p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1)\, p_2 p_1 + p_1^2 p_2 =$$
$$= p_1 p_2 - p_1^2 p_2 + p_1 p_2 - p_1^2 p_2 + p_1^2 p_2 = 2p_1 p_2 - p_1^2 p_2 = p_1 p_2 (2 - p_1)$$

şi
$$P_2 = p_2 p_1 (1 - p_2) + (1 - p_2) p_1 p_2 + p_2 p_1 p_2 = p_2 p_1 - p_2^2 p_1 + p_1 p_2 - p_1 p_2^2 + p_1 p_2^2 =$$
$$= 2p_1 p_2 - p_1 p_2^2 = p_1 p_2 (2 - p_2).$$

Observăm că răspunsul depinde de p_1 şi p_2. Dacă $p_1 > p_2$, atunci $P_2 > P_1$ şi deci a doua strategie aferă mai multe şanse de câştig, dacă $p_1 < p_2$, atunci $P_1 > P_2$ şi prima strategie oferă mai multe şanse de câştig, iar dacă $p_1 = p_2$, atunci $P_1 = P_2$ şi cele două strategii oferă aceleaşi şanse de câştig.

34. Se consideră un experiment care poate avea N rezultate astfel încât rezultatul ω_{j+1} este de două ori mai probabil decât rezultatul ω_j, $j = 1,\dots, N-1$. Pentru fiecare eveniment A se defineşte $P(A) = \sum p_j$, unde suma se face după toate evenimentele elementare ω_j care îl implică pe A, iar $p_j = P(\{\omega_j\})$. Dat fiind $A_k = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$, să se determine $P(A_k)$.

Rezolvare

Deoarece

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{j=1}^{N} \{\omega_j\}\right) = \sum_{j=1}^{N} P(\{\omega_j\}),$$

obţinem $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1.$

Conform ipotezei, $p_{j+1} = 2p_j$ pentru $j = 1, \dots, N-1$ şi, prin urmare:

$$1 = \sum_{j=1}^{N} p_j = \sum_{j=1}^{N} 2^{j-1} p_1 = p_1(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{N-1}) = p_1(2^N - 1).$$

Deci

$$p_1 = \frac{1}{2^N - 1} \text{ şi } p_j = 2^{j-1} p_1 = \frac{2^{j-1}}{2^N - 1},$$

ceea ce implică

$$P(A_k) = \sum_{j=1}^{k} p_j = \frac{1}{2^N - 1} \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} = \frac{2^k - 1}{2^N - 1}.$$

35. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n evenimente compatibile.

a) Să se determine probabilitatea ca un singur eveniment din cele n să se realizeze.

b) Să se determine probabilitatea ca exact r evenimente din cele n să se realizeze.

Rezolvare

a) Determinăm p_i' probabilitatea ca doar evenimentul A_i să se realizeze. Aceasta înseamnă că se realizeză evenimentul A_i şi nu se realizează evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$. Aşadar

$$p_i' = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{i-1} \cap A_i \cap \overline{A}_{i+1} \cap \ldots \cap \overline{A}_n) = P\left(A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A}_j\right)\right).$$

Dar

$$A_i = A_i \cap \Omega = A_i \cap \left(\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A}_j\right) \cup \left(\overline{\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A}_j}\right)\right) = \left(A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A}_j\right)\right) \cup \left(A_i \cap \left(\overline{\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A}_j}\right)\right) =$$

$$= \left(A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overline{A}_j\right)\right) \cup \left(A_i \cap \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j\right)\right).$$

Notăm $p_i = P(A_i)$ şi obţinem:

$$p_i = P(A_i) = p_i' + P\left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (A_i \cap A_j)\right) = p_i' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P(A_i \cap A_j) - \sum_{\substack{j<k \\ j \neq i \\ i \neq k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-1} \\ j_k \neq i}} P(A_i \cap A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_{n-1}}) =$$

$$= p_i' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ij} - \sum_{\substack{j<k \\ j,k \neq i}} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-2} p_{12\ldots n}.$$

De aici deducem:

$$p_i' = p_i - \sum_{i \neq j} p_{ij} + \sum_{\substack{j,k \neq i \\ j<k}} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci probabilitatea ca un singur eveniment dintre evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ să se realizeze este:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' = \sum_{i=1}^{n} p_i - 2\sum_{i<j} p_{ij} + 3\sum_{i<j<k} p_{ijk} + ... + (-1)^{n-1} p_{12...n}.$$

b) Notăm $p'_{i_1...i_r}$ probabilitatea de a se realiza doar evenimentele $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r}$. Atunci

$$p'_{i_1...i_r} = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_r} \cap \overline{A}_{i_{r+1}} \cap ... \cap \overline{A}_{i_n}) = P\left(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r} \cap \left(\bigcap_{j=r+1}^{n} \overline{A}_{i_j}\right)\right).$$

Notăm $p_{i_1...i_r} = P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r})$. Atunci

$$p_{i_1...i_r} = P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r} \cap \Omega) =$$

$$= P\left(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r} \cap \left(\bigcap_{j=r+1}^{n} \overline{A}_{i_j}\right)\right) + P\left(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_r} \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^{n} A_{i_j}\right)\right) =$$

$$= p'_{i_1...i_r} + \sum_{k \neq i_j} p_{i_1...i_r k} - \sum_{k,l \neq i_j} p_{i_1...i_r kl} + ... (-1)^{n-r-1} p_{1...n}.$$

Deci

$$p'_{i_1...i_r} = p_{i_1...i_r} - \sum_{k \neq i_j} p_{i_1...i_r k} + \sum_{k,l \neq i_j} p_{i_1...i_r kl} - ... (-1)^{n-r} p_{1...n}.$$

Probabilitatea de a se realiza doar r evenimente din cele n este:

$$\sum_{i_1<i_2<...<i_r} p'_{i_1...i_r} = \sum_{i_1<...<i_r} p_{i_1...i_r} - C_{r+1}^{r} \sum_{i_1<...<i_r} p_{i_1 i_2 ... i_{r+1}} +$$

$$+ C_{r+2}^{r} \sum_{i_1<...<i_{r+2}} p_{i_1 i_2 ... i_{r+2}} - ... (-1)^{n-r} C_n^r p_{12...n}.$$

Dacă notăm $q_k = \sum_{i_1<...<i_k} p_{i_1...i_k}$, atunci probabilitatea căutată este:

$$q_r - C_{r+1}^{r} q_{r+1} + C_{r+2}^{r} q_{r+2} + ... + (-1)^{n-r} C_n^r q_n.$$

36. n aparate au duratele de funcționare $t_1, t_2, ..., t_n$ ore respectiv. Să se determine:
a) probabilitatea ca după o oră cel puțin un aparat să funcționeze;
b) probabilitatea ca după o oră exact un aparat să funcționeze.

Rezolvare

a) Să notăm cu A_k, $1 \le k \le n$, evenimentul ca aparatul cu durata de funcționare t_k să funcționeze după o oră și cu $p_k = P(A_k)$, $1 \le k \le n$.

Atunci evenimentul ca după o oră cel puțin un aparat să funcționeze este $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ și

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^n P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i<j}^{n} p_i p_j + \sum_{i<j<k}^{n} p_i p_j p_k - ... + (-1)^{n-1} p_1 p_2 ... p_n.$$

Dacă notăm

$$q_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,,\ q_2 = \sum_{i<j}^{n} p_i p_j\,,\ q_3 = \sum_{i<j<k}^{n} p_i p_j p_k\,, \ldots, q_n = p_1 p_2 \cdots p_n,$$

atunci $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = q_1 - q_2 + q_3 - \ldots + (-1)^{n-1} q_n.$$

b) Se folosește punctul b) al problemei precedente.

37. O urnă conține n bile numerotate 1, 2, ..., n. Se extrag la întâmplare una câte una toate aceste bile. Spunem că la extragerea k s-a produs o concordanță dacă în urma acestei extrageri se obține bila cu numărul k. Care este probabilitatea obținerii a cel puțin unei concordanțe?

Rezolvare

Fie A_i evenimentul de a obține concordanță la extragerea i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Din cele $n!$ moduri în care ar putea apare cele n bile, $(n-1)!$ sunt favorabile realizării evenimentului A_i.

Deci $P(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Notăm cu A evenimentul apariției a cel puțin unei concordanțe. Atunci

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

și conform formulei lui Poincaré,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j\\ i<j}} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k\\ i<j<k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$
$$+ (-)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Se observă că

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},\ 1 \le i \le j \le n$$

și $$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Revenind la formula lui Poincaré, prima sumă are n termeni, fiecare egal cu $\dfrac{(n-1)!}{n!}$, a doua sumă are C_n^2 termeni, fiecare egal cu $\dfrac{(n-2)!}{n!}$, și așa mai departe ; cea de-a k sumă are C_n^k termeni fiecare egal cu $\dfrac{(n-k)!}{n!}$.

Deci $$P(A) = C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!}.$$

Dar $C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$

şi, prin urmare,

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

38. Două persoane aruncă succesiv o monedă ale cărei feţe le numim a şi b. Câştigă jocul acea persoană care obţine prima la aruncarea sa faţa a. Să se calculeze probabilitatea de câştig a fiecărui jucător.

Rezolvare

Vom presupune că pentru fiecare jucător probabilitatea de a obţine faţa a dintr-o aruncare este $\frac{1}{2}$.

Este clar că primului jucător îi revin aruncările de ordin impar. Deci problema se mai poate formula astfel:

Se aruncă moneda până la apariţia feţei a. Care este probabilitatea ca numărul aruncărilor să fie impar?

Fie A_k evenimentul ca la a $2k+1$-a aruncare să apară faţa a, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ şi A evenimentul ca numărul aruncărilor să fie impar. Atunci:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}.$$

1.3. Probabilitate condiționată

1. Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca pe zarul al doilea să apară fața cu 3 puncte știind că suma punctelor obținute pe fețele celor două zaruri este mai mare decât 8?

Rezolvare

Fie A evenimentul ca pe al doilea zar să se obțină 3 puncte și B evenimentul ca suma punctelor obținute pe cele două zaruri să fie mai mare ca 8, adică:

$$A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Atunci obținem:

$$A \cap B = \{(6, 3)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{10}{36}$$

și $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

Deci $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{10}$.

2. Arătați că $P(\varnothing / B) = 0$.

Rezolvare

Conform definiției,

$$P(\varnothing / B) = \frac{P(\varnothing \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\varnothing)}{P(B)} = 0.$$

3. Arătați că $P(\overline{A} / B) = 1 - P(A / B)$.

Rezolvare

Observăm că $B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ și, deoarece evenimentele $\overline{A} \cap B$ și $A \cap B$ sunt incompatibile, avem:

$$P(B) = P((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B).$$

Prin urmare,

$$1 - P(A / B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = P(\overline{A} / B).$$

4. Arătați că dacă $A_1 \subset A_2$, atunci $P(A_1 / B) \le P(A_2 / B)$.

Rezolvare

Este clar că dacă $A_1 \subset A_2$, atunci $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B$ și deci

$$P(A_1 \cap B) \le P(A_2 \cap B).$$

În consecință,

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \le \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_2 / B).$$

5. Se dau $P(A) = 0{,}5$ și $P(A \cup B) = 0{,}6$. Găsiți $P(B)$ dacă:

a) A și B sunt incompatibile;

b) A și B sunt independente;

c) $P(A / B) = 0{,}4$.

Rezolvare

a) Dacă A și B sunt incompatibile, atunci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

și deci $\quad P(B) = 0{,}1.$

b) Dacă A și B sunt independente, atunci

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Dar $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Deci $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$

De aici rezultă că:

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = 0{,}2$$

c) Avem

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

și $\quad P(A \cap B) = -P(A \cup B) + P(A) + P(B).$

Deducem că

$$P(B)[1 - P(A / B)] = P(A \cup B) - P(A)$$

și deci $\quad P(B) = \dfrac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A/B)} = \dfrac{1}{6}.$

6. Să se arate că

$$P(B / A) \ge 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}, P(A) > 0.$$

Rezolvare

Se știe că

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1,$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A),$$
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}).$$

Atunci,

$$P(A) + 1 - P(\overline{B}) - P(A) \cdot P(B / A) \leq 1$$

sau $$P(A) \cdot P(B / A) \geq P(A) - P(\overline{B}).$$

Dacă împărţim cu $P(A)$, obţinem

$$P(B / A) \geq 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

7. Arătaţi că

$$P(A_1 / B) = P(A_1 \cap A_2 / B) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 / B).$$

Rezolvare

Avem

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

şi $$A_1 \cap B = (A_1 \cap B) \cap \Omega = (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cup \overline{A}_2) =$$

$$= ((A_1 \cap B) \cap A_2) \cup ((A_1 \cap B) \cap \overline{A}_2).$$

Deoarece evenimentele $(A_1 \cap B) \cap A_2$ şi $(A_1 \cap B) \cap \overline{A}_2$ sunt incompatibile, obţinem:

$$P(A_1 / B) = \frac{P((A_1 \cap B) \cap A_2) + P((A_1 \cap B) \cap \overline{A}_2)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap B) + P((A_1 \cap \overline{A}_2) \cap B)}{P(B)} = P(A_1 \cap A_2 / B) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 / B).$$

8. Arătaţi că

$$P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_2 / B) - P(A_1 \cap A_2 / B).$$

Rezolvare

Mai întâi obsevăm că:

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B).$$

Apoi

$$P(A_1 \cup A_2 / B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} =$$

$$= P(A_1 / B) + P(A_2 / B) - P(A_1 \cap A_2 / B)$$

ceea ce trebuia arătat.

9. Fie (Ω, k, P) un câmp de probabilitate şi $A, B, C \in K$ cu $P(A \cup B) \neq 1$. Să se demonstreze că:

$$P(C / \overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}.$$

Rezolvare

Avem:

$$P(C / \overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{P(C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}))}{P(\overline{A} \cap \overline{B})}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B).$$

Să observăm că:

$$C = (C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})) \cup (A \cap C) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)),$$

iar evenimentele $C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}), A \cap C, (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ sunt incompatibile două câte două. Atunci:

$$P(C) = P(C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C),$$

deci $\quad P(C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})) = P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$

Prin urmare,

$$P(C / \overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

10. Fie $B_1, \ldots, B_n$ evenimente incompatibile două câte două şi $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Presupunând că $P(B_j) > 0$ şi că $P(A / B_j) = p$ pentru $j = 1, \ldots, n$, arătaţi că $P(A / B) = p$.

Rezolvare

Mai întâi observăm că

$$A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap B_j)$$

şi că evenimentele $A \cap B_j, j = 1, \ldots, n$, sunt incompatibile două câte două. Atunci:

$$P(A / B) = P\left(A / \bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \frac{P\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)\right)}{P\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A \cap B_j)}{P\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)} \sum_{j=1}^{n} \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)} P(B_j) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)} \sum_{j=1}^{n} P(A / B_j) P(B_j) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)} \, p \sum_{j=1}^{n} P(B_j) = p, \quad \text{ceea ce trebuia demonstrat.}$$

11. Într-o anumită localitate s-a observat că timp de o lună în medie 6 zile sunt cu cerul acoperit. Se cere probabilitatea ca în primele două zile ale unei luni cerul să fie senin. (Se consideră luna de 30 de zile).

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca în ziua i cerul să fie senin, $i = 1, 2$. Atunci

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} = 0{,}634$$

12. O urnă conţine trei bile albe şi cinci negre. Se extrag două bile (fără întoarcere) una după alta. Să se scrie mulţimea evenimentelor asociate acestei experienţe şi probabilităţile corespunzătoare.

Rezolvare

Notăm A cu evenimentul de a extrage o bilă albă şi cu N de a extrage o bilă neagră. Atunci

$$\Omega = \{e_1 = (A, A), e_2 = (A, N), e_3 = (N, A), e_4 = (N, N)\}.$$

Fie A_i şi N_i evenimentele ca la extragerea i să se obţină o bilă albă, respectiv neagră, $i = 1, 2$. Atunci

$$P(e_1) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = 0,107$$

$$P(e_2) = P(A_1) \cdot P(N_2/A_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} = 0,267$$

$$P(e_3) = P(N_1) \cdot P(A_2/N_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} = 0,267$$

$$P(e_4) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = 0,357.$$

13. O urnă conţine zece bile printre care trei sunt negre şi şapte albe. Într-o probă, este selectată la întâmplare o bilă, se observă culoarea şi apoi se reintroduce în urnă împreună cu alte două bile de aceeaşi culoare. Care este probabilitatea ca o bilă neagră să fie selectată în fiecare din primele trei probe.

Rezolvare

Fie B_i evenimentul ca o bilă neagră să fie selectată la proba i, $i = 1, 2, 3$. Atunci

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1)\, P(B_3/B_1 \cap B_2) =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{14} = \frac{35}{560} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

14. Să se calculeze probabilitatea $P(A \cap B \cap C / D)$ în funcție de $P(B/A \cap D)$ și $P(C / A \cap B \cap D)$.

Rezolvare

Avem prin definiție

$$P(A \cap B \cap C / D) = \frac{P(A \cap B \cap C \cap D)}{P(D)}.$$

Dar $\quad P(D \cap A \cap B \cap C) = P(D) \cdot P(A/D) \cdot P(B/A \cap D) P(C/A \cap B \cap D)$

și deci $\quad P(A \cap B \cap C / D) = P(A/D) \cdot P(B/A \cap D) P(C/A \cap B \cap D)$.

15. Un lot de 100 de tricotaje este supus controlului de calitate. Condiția ca acest lot să fie respins este găsirea a cel puțin unui tricotaj defect în 5 verificări consecutive. Care este probabilitatea ca lotul să fie respins, dacă el conține 5% tricotaje defecte?

Rezolvare

Fie A_i – evenimentul ca cea de-a i verificare să găsească un tricotaj bun și fie A evenimentul ca lotul să fie respins. Se determină mai ușor probabilitatea evenimentului contrar celui cerut, și anume

$$P(\bar{A}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot$$
$$\cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$
$$= \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0,77.$$

Atunci $\quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,23$.

16. Într-o urnă sunt 24 de bile albe și 9 bile negre. Se extrag pe rând trei bile fără a pune bila extrasă înapoi în urnă. Care este probabilitatea ca bilele să fie extrase în ordinea alb, alb, negru? Dar alb, negru, alb? Dar negru, alb, alb? Dar probabilitatea ca două din cele trei bile extrase să fie albe?

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca la extragerea i să se obțină o bilă albă, $i \in \{1, 2, 3\}$. Probabilitățile cerute sunt următoarele:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(\bar{A}_3/A_1 \cap A_2) = \frac{24}{33} \cdot \frac{23}{32} \cdot \frac{9}{31} = 0,151$$

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{24}{33} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0,151$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2/\bar{A}_1) \cdot P(A_3/\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{9}{33} \cdot \frac{24}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0,151.$$

Dacă notăm cu A evenimentul ca două din cele trei bile extrase să fie albe, atunci:

$$A = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

și $\quad P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$

$$= 3 \cdot \frac{9 \cdot 23 \cdot 24}{33 \cdot 32 \cdot 31} = 0,455.$$

17. Arătaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate şi justificaţi în fiecare caz:

a) Dacă $P(A/B) > P(A)$ atunci $P(B/A) > P(B)$.

b) Dacă $P(A) > P(B)$, atunci $P(A/C) > P(B/C)$.

Rezolvare

a) Afirmaţia este adevărată. Într-adevăr, aplicând formula lui Bayes, obţinem:

$$P(B/A) - P(B) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} - P(B) = \frac{(P(A/B) - P(A))P(B)}{P(A)} > 0.$$

b) Afirmaţi nu este totdeauna adevărată. În cazul în care $A \cap C = \varnothing$ şi $B \cap C \neq \varnothing$, inegalitatea $P(A/C) > P(B/C)$ nu are loc.

18. Care din următoarele afirmaţii este adevărată? Justificaţi.

a) Dacă $P(A) = a$ şi $P(B) = b$, atunci

$$P(A/B) \geq \frac{a+b-1}{b}.$$

b) Dacă $P(B/\bar{A}) = P(B/A)$, atunci A şi B sunt independente.

c) Dacă $P(A/B) \geq P(A)$, atunci $P(B/A) \geq P(B)$.

Rezolvare

a) Avem

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

şi apoi aplicăm inegalitatea lui Boole. Prin urmare:

$$P(A/B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$$

adică $\quad P(A/B) \geq \dfrac{a+b-1}{b}$.

b) Conform formulei probabilităţii totale

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = P(B/A)[P(A) + 1 - P(A)] =$$

$$= P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

şi deci $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ceea ce înseamnă că evenimentele A şi B sunt independente.

c) Aplicând formula lui Bayes obţinem

$$P(B / A) - P(B) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} - P(B) = \frac{(P(A/B) - P(A))P(B)}{P(A)} \geq 0.$$

În concluzie, afirmaţiile de la punctele a), b), c) sunt adevărate.

19. Într-o fabrică lucrează trei maşini care realizează respectiv 30%, 25% şi 45% din producţie. Din producţia primei maşini 1% sunt piese defecte, din producţia celei de-a doua maşini 2% sunt piese defecte, iar din producţia celei de-a treia maşini sunt 4% defecte. Se extrage la întâmplare o piesă. Care este probabilitatea ca piesa extrasă să fie defectă?

Rezolvare

Notăm cu A_i evenimentul ca o piesă să fie produsă de maşina i, $i = 1, 2, 3$ şi cu X evenimentul ca o piesă să fie defectă. Atunci A_1, A_2, A_3 determină un sistem complet de evenimente. Avem: $P(A_1) = 0,30$; $P(A_2) = 0,25$; $P(A_3) = 0,45$ şi $P(X/A_1) = 0,01$; $P(X/A_2) = 0,02$; $P(X/A_3) = 0,04$.

Deci conform formulei probabilităţii totale, obţinem

$$P(X) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\cdot P(X/A_i) = 0,30\cdot 0,01 + 0,25\cdot 0,02 + 0,45\cdot 0,04 = 0,026.$$

20. Să se determine $P(A)$ şi $P(B)$ ştiind că $P(A/B) = 0,7$, $P(A/\overline{B}) = 0,3$ şi $P(B/A) = 0,6$.

Rezolvare

Folosim formula lui Bayes şi formula probabilităţii totale:

$$P(B/A) = \frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(B)\cdot P(A/B)+P(\overline{B})\cdot P(A/\overline{B})}.$$

Atunci $P(B)\,[P(A/B)\cdot P(B/A) - P(B/A)\cdot P(A/\overline{B})] + P(B/A)\cdot P(A/\overline{B}) = P(B)\cdot P(A/B)$.

Rezultă că:

$$P(B) = \frac{P(B/A)\cdot P(A/\overline{B})}{P(A/B)+P(B/A)\cdot P(A/\overline{B})-P(A/B)\cdot P(B/A)} =$$

$$= \frac{0,6\cdot 0,3}{0,7+0,6\cdot 0,3-0,7\cdot 0,6} = 0,3.$$

Cu formula probabilităţilor totale, obţinem:

$$P(A) = P(B)\cdot P(A/B) + P(\overline{B})\cdot P(A/\overline{B}) = 0,3\cdot 0,7 + 0,7\cdot 0,3 = 0,42.$$

21. O urnă conţine 10 bile albe şi negre într-o proporţie necunoscută. Se extrag 4 bile, punând de fiecare dată bila înapoi. Toate cele 4 bile extrase au fost albe. Care este probabilitatea ca urna să nu conţină decât bile albe?

Rezolvare

Înainte de extragerea oricărei bile este posibilă orice compoziţie a urnei. Fie A_i, $0 \le i \le 10$, evenimentul ca urna să conţină i bile albe şi $10 - i$ bile negre. Deci

$$P(A_i) = \frac{1}{11},\ i = 0, \ldots, 10.$$

Fie X evenimentul de a extrage 4 bile albe. Trebuie să determinăm $P(A_{10}/X)$.

Dar $\quad P(X/A_0) = P(X/A_1) = P(X/A_2) = P(X/A_3) = 0$

$$P(X/A_i) = \left(\frac{i}{10}\right)^4,\ i = 4, \ldots, 9$$

şi $\quad P(X/A_{10}) = 1$

Aplicând formula lui Bayes şi formula probabilităţii totale, obţinem:

$$P(A_{10}/X) = \frac{P(A_{10})\cdot P(X/A_{10})}{\sum\limits_{i=0}^{10} P(A_i)\cdot P(X/A_i)} = \frac{\frac{1}{11}\cdot 1}{\frac{1}{11}\left[\left(\frac{4}{10}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^4 + 1\right]} =$$

$$= \frac{10^4}{4^4 + 5^4 + \ldots + 10^4} = \frac{2000}{5047} \approx 0{,}3962.$$

22. Se dau 6 urne cu următoarele structuri:

- 2 urne au câte 2 bile albe şi 4 negre;
- 3 urne au câte 2 bile albe şi 8 negre;
- o urnă are 6 bile albe şi 2 negre.

Se extrage la întâmplare din una dintre urne o bilă.

a) Se cere probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

b) Ştiind că bila extrasă este albă, se cere probabilitatea ca ea să provină din una dintre cele 3 urne care au aceleaşi structuri.

Rezolvare

Fie A_i evenimentul de a extrage o bilă din una dintre urnele cu structuri diferite, $i = 1, 2, 3$, şi X evenimentul de a extrage o bilă albă. Atunci se obţin:

$$P(A_1) = \frac{2}{6},\ P(A_2) = \frac{3}{6},\ P(A_3) = \frac{1}{6}.$$

$$P(X/A_1) = \frac{2}{6},\ P(X/A_2) = \frac{2}{10},\ P(X/A_3) = \frac{6}{8}.$$

a) Aplicând formula probabilităţii totale, obţinem:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\cdot P(X/A_i) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{8} = \frac{121}{360} \approx 0{,}336.$$

b) Aplicând formula lui Bayes, obţinem:

$$P(A_2/X) = \frac{P(A_2)\cdot P(X/A_2)}{P(X)} = \frac{36}{121} \approx 0{,}297.$$

23. La un centru de calcul sunt 3 birouri de perforat cartele cu, respectiv, 2, 3, şi 5 perforatoare. Birourile comit erori în proporţie de 5%, 10% şi, respectiv 12%. Se verifică la întâmplare un set de cartele.

a) Se cere probabilitatea ca setul să aibă erori.

b) Ştiind că setul extras are erori, se cere probabilitatea ca el să provină de la al treilea birou.

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca un set luat la întâmplare să fie perforat la biroul i, $i = 1, 2, 3$, şi X evenimentul de a extrage un set cu erori. Atunci se obţin:

$$P(A_1) = \frac{2}{10},\ P(A_2) = \frac{3}{10},\ P(A_3) = \frac{5}{10},\ P(X/A_1) = \frac{5}{100},$$

$$P(X/A_2) = \frac{10}{100},\ P(X/A_3) = \frac{12}{100}.$$

a) Aplicând formula probabilității totale, obținem:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(X / A_i) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{100} + \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{100} + \frac{5}{10} \cdot \frac{12}{100} = 0{,}1.$$

b) Aplicând formula lui Bayes, obținem:

$$P(A_3 / X) = \frac{P(A_3) \cdot P(X / A_3)}{P(X)} = 0{,}6.$$

24. Trei mașini A, B, C produc același produs. Mașina A produce 35% din întreaga producție, B produce 45%, iar C restul de producție. Procentele de piese rebut corespunzătoare fiecărei mașini sunt 2%, 3%, respectiv 1%. Se alege la întâmplare un produs din depozit. Care este probabilitatea ca:

a) produsul să fie defect;

b) produsul defect să fie fabricat de mașina B.

Rezolvare

Fie A, B, C evenimentele ca un produs luat la întâmplare să fie fabricat de mașina corespunzătoare și X evenimentul ca un produs să fie defect.

Evenimentele A, B, C formează un sistem complet. Se știe că:

$P(A) = 0{,}35$; $P(B) = 0{,}45$; $P(C) = 0{,}20$

$P(X / A) = 0{,}02$; $P(X / B) = 0{,}03$; $P(X / C) = 0{,}01$.

Atunci, aplicând formula probabilității totale, respectiv formula lui Bayes, obținem:

a) $P(X) = P(A) \cdot P(X / A) + P(B) \cdot P(X / B) + P(C) \cdot P(X / C) = 0{,}0225$

b) $P(B / X) = \dfrac{P(B) \cdot P(X / B)}{P(X)} = \dfrac{3}{5}$.

25. O urnă U_1 conține 60% bile albe, iar alta U_2 are 70% bile albe. În urna U_1 sunt de trei ori mai multe bile decât în U_2. Conținutul celor două urne se pune într-o altă urnă din care se extrage o bilă ce se dovedește a fi albă. Care este probabilitatea ca ea să provină din U_1?

Rezolvare

Fie A_1 și A_2 evenimentele ca să se extragă o bilă din urna U_1, respectiv U_2 și fie X evenimentul ca o bilă extrasă să fie albă. Evenimentele X / A_1 și X / A_2 vor reprezenta să se extragă o bilă albă, știind că extragerea se face din urna U_1, respectiv din U_2. Atunci

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \qquad P(X / A_1) = \frac{60}{100}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(X / A_2) = \frac{70}{100}.$$

Se determină cu ajutorul formulei lui Bayes:

$$P(A_1 / X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X / A_1)}{P(A_1) \cdot P(X / A_1) + P(A_2) \cdot P(X / A_2)} = \frac{18}{25}.$$

26. Doi țintași trag asupra ueni ținte câte o săgeată, idependent unul de altul. Probabilitatea ca primul să nimerească ținta este 0,8, iar pentru al doilea este 0,6. După tragere, în țintă se găsește o săgeată. Care este probabilitatea ca ea să fie a primului țintaș?

Rezolvare

Fie ω_1 și ω_2 evenimentele ca primul, respectiv al doilea arcaș, să nimerească ținta. Atunci:

$$P(\omega_1) = 0{,}8;\ P(\omega_2) = 0{,}6.$$

La efectuarea experienței au loc următoarele evenimente posibile:

A_1 – să nimerească numai primul;

A_2 – să nimerească numai al doilea;

A_3 – să nimerească amândoi;

A_4 – să nu nimerească nici unul.

Vom avea:

$$P(A_1) = P(\omega_1 \cap \bar{\omega}_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32;$$

$$P(A_2) = P(\bar{\omega}_1 \cap \omega_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12;$$

$$P(A_3) = P(\omega_1 \cap \omega_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48;$$

$$P(A_4) = P(\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

Evenimentele A_i, $i = 1, ..., 4$, satisfac condițiile unui sistem complet de evenimente.

Fie X evenimentul ca în țintă să fie o săgeată. Atunci:

$$P(X / A_1) = 1; \qquad P(X / A_2) = 1;$$

$$P(X / A_3) = 0; \qquad P(X / A_4 0 = 0.$$

Aplicând formula probabilității totale și formula lui Bayes, obținem:

$$P(A_1 / X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X / A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i) \cdot P(X / A_i)} = \frac{8}{11}.$$

27. Un student trimite unui prieten o scrisoare. Există o șansă de 10% ca scrisoarea să fie pierdută în drum spre oficiul poștal. Știind că scrisoarea ajunge la oficiul poșatl, probabilitatea că va fi distrusă de mașina de ștampilat este 0,20. De asemenea, cunoscând că a trecut de mașina de ștampilat, există o probabilitate de 10% ca poștașul să o ducă la o adresă greșită. Dacă prietenul nu primște scrisoarea, care este probabilitatea ca mașina de ștampilat să o fi distrus?

Rezolvare

Fie A evenimentul ca scrisoarea să fie pierdută în drum spre oficiul poștal, B evenimentul ca scrisoarea să fie distrusă de ștampilă, C evenimentul ca scrisoarea să ajungă la o adresă greșită și D evenimentul ca prietenul să primească scrisoarea. Avem:

$$P(A) = 0{,}10;\ P(\bar{A}) = 0{,}90;\ P(B / \bar{A}) = 0{,}20;\ P(\bar{B} / \bar{A}) = 0{,}80;$$

$$P(C / \bar{B}) = 0{,}10 \text{ și } P(D / \bar{B}) = 0{,}90.$$

Atunci:

$$P(B / \bar{D}) = \frac{0,20 \cdot 0,90}{0,10 + 0,90 \cdot 0,20 + 0,90 \cdot 0,80 \cdot 0,10} =$$

$$= \frac{0,18}{0,10 + 0,18 + 0,072} = \frac{0,18}{0,352} = 0,511.$$

28. Se consideră două urne U_1 și U_2, fiecare având a bile albe și b bile negre. Se extrage o bilă din urna U_1 și se pune în U_2. Care este probabilitatea de a extrage o bilă neagră din U_2?

Rezolvare

Fie evenimentele:

A_1 – se extrage o bilă albă din U_1;

A_2 – se extrage o bilă neagră din U_1;

X – se extrage o bilă neagră din U_2.

Evenimentul X se poate scrie ca:

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X),$$

unde A_1 și A_2 formează un sistem complet de evenimente. Atunci se poate aplica formula probabilității totale:

$$P(X) = P(A_1) \cdot P(X / A_1) + P(A_2) \cdot P(X / A_2),$$

având: $P(A_1) = \frac{a}{a+b}, P(A_2) = \frac{b}{a+b},$

$$P(X / A_1) = \frac{b}{a+b+1}, P(X / A_2) = \frac{b+1}{a+b+1}.$$

Înlocuind, obținem:

$$P(X) = \frac{b}{a+b}.$$

29. Se consideră 5 urne, numerotate de la 1 la 5. Fiecare urnă conține 10 bile. Urna i conține i bile albe și $10 - i$ bile negre. Se ia la întâmplare o urnă și din urnă se extrage la întâmplare o bilă.

a) Care este probabilitatea de a selecta o bilă albă?

b) Dacă s-a selectat o bilă și ea este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din urna 5?

Rezolvare

a) Fie A evenimentul de a selecta o bilă albă și B_i evenimentul ca urna i să fie selectată, $i = 1, 2, ..., 5$.

Avem $P(B_i) = \frac{1}{5}$

și $\quad P(A / B_i) = \frac{i}{10}, i = 1, ..., 5.$

Pentru calculul lui $P(A)$, utilizăm formula probabilității totale; întrucât B_i, $i = 1, ..., 5$ formează un sistem complet de evenimente

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A/B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

b) Trebuie să găsim de fapt $P(B_5 / A)$. Folosind formula lui Bayes, avem:

$$P(B_5 / A) = \frac{P(A/B_5)P(B_5)}{\sum_{i=1}^{5} P(A/B_i)P(B_i)} = \frac{1}{3}.$$

Similar,

$$P(B_k / A) = \frac{k}{15}, \ k = 1, ..., 5.$$

În plus, observăm că

$$\sum_{k=1}^{5} P(B_k / A) = 1.$$

30. Un student dă un test la care întrebările au mai multe variante de răspuns. La o întrebare dată, studentul poate cunoaşte răspunsul, caz în care răspunde corect, sau nu cunoaşte răspunsul, caz în care speră să-l ghicească. Presupunând că o întrebare are cinci variante de răspuns şi presupunând că studentul a dat răspunsul corect, care este probabilitatea ca el să-l fi cunoscut?

Rezolvare

Fie p probabilitatea ca studentul să cunoască răspunsul şi $1 - p$ probabilitatea ca studentul să fi ghicit răspunsul. Să presupunem că probabilitatea de a da răspunsul corect prin ghicire este $\frac{1}{5}$ (deşi această presupunere poate fi nerealistă în cazul în care studentul ştie că anumite răsunsuri sunt greşite, probabilitatea fiind atunci mai mare decât $\frac{1}{5}$).

Fie A evenimentul ca studentul să dea răspunsul corect şi B evenimentul ca studentul să cunoască răspunsul corect. Ne interesează $P(B / A)$. Aplicând formula lui Bayes şi formula probabilităţii totale, obţinem:

$$P(B / A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{p}{p + (1-p) \cdot \frac{1}{5}} \geq p.$$

Observăm deci că probabilitatea ca studentul să fi cunoscut răspunsul corect în condiţiile în care a dat răspunsul corect este mai mare sau cel mult egală cu probabilitatea ca studentul să fi cunoscut răspunsul.

1.4. Scheme clasice de probabilitate

1. Într-un mecanism intră două roţi dinţate identice. Condiţiile tehnice sunt îndeplinite dacă ambele roţi sunt corect dimensionate. Un muncitor are la dispoziţie 35 de roţi, printre care sunt amestecate 5 roţi supradimensionate. El alege la întâmplare două roţi.

a) Care este probabilitatea ca mecanismul format să funcţioneze?

b) Dar la a doua alegere?

Rezolvare

a) Folosind schema urnei cu bila nerevenită, obţinem probabilitatea:

$$\frac{C_{30}^{2} \cdot C_{5}^{0}}{C_{35}^{2}} = 0{,}7310$$

b) Fie A evenimentul ca la a doua alegere mecanismul să funcţioneze. Notăm cu A_1 evenimentul ca la prima alegere mecanismul să funcţioneze, cu A_2 evenimentul ca prima dată să fie alese o roată corespunzătoare şi o roată supradimensionată, cu A_3 evenimentul ca prima dată să fie alese două roţi supradimensionate. Deoarece A_1, A_2, A_3 formează un sistem complet de evenimente, conform formulei probabilităţii totale, avem:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(A/A_i) = \frac{C_{30}^{2}}{C_{35}^{2}} \cdot \frac{C_{28}^{2}}{C_{33}^{2}} + \frac{C_{30}^{0} \cdot C_{5}^{2}}{C_{35}^{2}} \cdot \frac{C_{30}^{2}}{C_{33}^{2}} + \frac{C_{30}^{1} \cdot C_{5}^{1}}{C_{35}^{2}} \cdot \frac{C_{29}^{2}}{C_{33}^{2}} = 0{,}7172.$$

2. O pungă loto conţine 13 bilete necâştigătoare şi 2 câştigătoare. Câte bile trebuie extrase din pungă pentru ca probabilitatea de a obţine cel puţin un bilet câştigător să fie $\frac{6}{7}$?

Rezolvare

Se aplică schema cu bila nerevenită şi se calculează mai simplu probabilitatea evenimentului contrar $\overline{A}$, care reprezintă evenimentul de a nu obţine nici un bilet câştigător. Deci

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{13}^{n}}{C_{15}^{n}} = 1 - \frac{6}{7}.$$

Se obţine $n = 9$.

3. Într-un lot de 200 de piese, 10 sunt defecte, iar în alt lot de 150 de piese 7 sunt defecte. Se iau la întâmplare 20 de piese din unul din aceste loturi. Care este probabilitatea ca între piesele alese să fie 18 bune şi două defecte ?

Rezolvare

Fie A evenimentul ca piesele să fie luate din primul lot şi B evenimentul ca din cele 20 de piese alese, 18 să fie bune şi două defecte.

Folosind formula probabilităţii totale,

$$P(B) = P(A)\,P(B / A) + P(\overline{A})\,P(B / \overline{A}),$$

$P(B / A)$ este probabiliatea ca luând 20 de piese din primul lot, 18 să fie bune şi două defecte şi, conform schemei cu bilă nerevenită,

$$P(B / A) = \frac{C_{190}^{18} \cdot C_{10}^{2}}{C_{200}^{20}} = 0{,}19754.$$

În mod analog,

$$P(B / \overline{A}) = \frac{C_{143}^{18} \cdot C_{7}^{2}}{C_{150}^{20}} = 0{,}18491$$

şi $$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{190}^{18} \cdot C_{10}^{20}}{C_{200}^{20}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_{143}^{18} \cdot C_{7}^{2}}{C_{150}^{20}} = 0{,}19123.$$

4. Din 20 de firme, 15 şi-au plătit impozitele la stat pe anul în curs. Sunt alese la întâmplare 10 firme şi se cere probabilitatea ca

a) dintre acestea, 6 să-şi fi plătit impozitele;

b) cel mult patru firme nu şi-au plătit impozitele;

c) toate cele 10 firme analizate şi-au plătit impozitele.

Rezolvare

a) Se aplică schema cu bila nerevenită. Atunci probabilitatea cerută este:

$$\frac{C_{15}^{6} \cdot C_{5}^{4}}{C_{20}^{10}} = 0{,}13544.$$

b) Se află probabilitatea evenimentului contrar – $\overline{A}$ – cel puţin 7 firme şi-au plătit impozitele:

$$P(\overline{A}) = \sum_{k=7}^{10} \frac{C_{15}^{k} \cdot C_{5}^{10-k}}{C_{20}^{10}} = 0{,}84829.$$

Deci $$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \sum_{k=7}^{10} \frac{C_{15}^{k} \cdot C_{5}^{10-k}}{C_{20}^{10}} = 0{,}1517.$$

c) Folosind din nou schema cu bila nerevenită, probabilitatea căutată este

$$\frac{C_{15}^{10}}{C_{20}^{10}} = 0{,}0162.$$

5. Domnul X, un foarte cunoscut fermier şi, totodată, un mai puţin cunoscut hoţ de vite, are 20 de vite pentru vânzare. Dintre acestea, 16 vite sunt ale lui şi, în consecinţă, poartă semnul lui. Celelalte vite poartă alte mărci. Domnul X ştie că inspectorul de mărci de la târg verifică 20% din vitele aparţinând unui transport. El are două camioane, unul care poate transporta toate cele 20 de vite o dată şi altul mai mic cu care se pot transporta pe rând câte 10 vite. Domnul X ştie că are 4 strategii diferite în încercarea de a vinde şi vitele furate fără a fi prins. Prima este să trimită toate cele 20 de vite o dată; celelalte sunt să trimită câte 10 vite în două ocazii diferite, punând toate 4 vitele furate într-un transport, sau trei cu una sau două vite furate în fiecare transport. Care este probabilitatea de a fi prins în cazul fiecărei strategii?

Rezolvare

Considerăm mai întâi cazul în care toate vitele sunt transportate o dată. Atunci numărul vitelor controlate de inspector va fi 4. Probabilitatea ca domnul X să fie prins în acest caz este probabilitatea ca din cele 4 vite controlate cel puţin una să fie furată. Se aplică schema bilei nerevenite şi se obţine:

$$P_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_{16}^3}{C_{20}^4} + \frac{C_4^2 \cdot C_{16}^2}{C_{20}^4} + \frac{C_4^3 \cdot C_{16}^1}{C_{20}^4} + \frac{C_4^4 \cdot C_{16}^0}{C_{20}^4}.$$

Dacă vitele sunt transporate în două drumuri şi în unul dintre camioane se află toate cele 4 vite furate, atunci probabilitatea ca domnul X să fie prins (conform schemei urnei cu bilă nerevenită), ţinând cont că numărul vitelor controlate este acum 2, este

$$P_2 = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} + \frac{C_4^2 \cdot C_6^0}{C_{10}^2}.$$

Dacă trei vite furate se află într-un transport şi o vită furată se află în celălalt transport, atunci probabilitatea căutată este:

$$P_3 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

unde A este evenimentul ca la primul transport inspectorul să găsească cel puţin o vită furată, iar B evenimentul ca la al doilea transport inspectorul să găsească cel puţin o vită furată. Atunci:

$$P_3 = \frac{C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^2 \cdot C_7^0}{C_{10}^2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_7^0}{C_{10}^2}.$$

Dacă două vite furate se află într-un transport, iar celelalte două vite furate se află în celălalt transport, atunci probabilitatea căutată este:

$$P_4 = \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} + \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} - \left(\frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2}\right) - \left(\frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2}\right)^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_8^1 + C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} - \left(\frac{C_2^1 \cdot C_8^1 + C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2}\right)^2.$$

6. O urnă conține x bile albe și y bile negre. Se extrag simultan 2 bile.

a) Care este probabilitatea ca cele două bile să fie de aceeași culoare?

b) Care este relația dintre x și y dacă această probabilitate este $\frac{1}{2}$?

Rezolvare

a) Fie A evenimentul ca cele două bile să fie albe și B evenimentul ca ele să fie negre. Se cere deci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pentru că A și B sunt incompatibile.

Determinarea probabilităților celor două evenimente se va face cu schema bilei nerevenite, deci

$$P(A) = \frac{C_x^2}{C_{x+y}^2},\ P(B) = \frac{C_y^2}{C_{x+y}^2}.$$

Obținem $P(A \cup B) = \dfrac{x(x-1)+y(y-1)}{(x+y)(x+y-1)}$.

b) Valoarea determinată la punctul a) se egalează cu $\frac{1}{2}$ și avem relația:

$$(x-y)^2 = x + y.$$

7. O urnă conține M bile, dintre care K sunt negre și $M-K$ albe. Se extrag la întâmplare n bile. Găsiți probabilitatea ca bila j extrasă să fie neagră știind că din cele n bile extrase, k au fost negre. Studiați problema în cazul extragerilor revenite și în cazul extragerilor nerevenite.

Rezolvare

Mai întâi studiem cazul extragerilor cu revenire.

Fie A_k evenimentul ca eșantionul de n bile să conțină k bile negre și B_j evenimentul ca bila j extrasă să fie neagră. Avem:

$$P(A_k) = \frac{C_n^k \cdot K^k (M-K)^{n-k}}{M^n},$$

$$P(A_k / B_j) = \frac{C_{n-1}^{k-1} \cdot K^{k-1} (M-K)^{n-k}}{M^{n-1}},$$

$$P(B_j) = \frac{K}{M}.$$

Prin urmare,

$$P(B_j / A_k) = \frac{P(A_k / B_j) \cdot P(B_j)}{P(A_k)} = \frac{k}{n}.$$

În cazul extragerilor nerevenite, cu notațiile anterioare, avem:

$$P(A_k) = \frac{C_K^k \cdot C_{M-K}^{n-k}}{C_M^n}$$

și $$P(A_k / B_j) = \frac{C_{K-1}^{k-1} \cdot C_{M-K}^{n-k}}{C_{M-1}^{n-1}}.$$

Fie C_i evenimentul de a se fi extras i bile negre în primele $j-1$ extrageri. Evenimentele C_i formează un sistem complet de evenimente, deci putem aplica formula probabilității totale și avem:

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(B_j / C_i) \cdot P(C_i) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{K-i}{M-j+1} \cdot \frac{C_K^i \cdot C_{M-K}^{j-1-i}}{C_M^{j-1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{K-i}{M-j+1} \cdot \frac{K!}{i!(K-i)!} \cdot \frac{(M-K)!}{(j-1-i)!(M-K-j+i+1)!} \cdot \frac{(j-1)!(M-j+1)!}{M!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{C_M^K} \cdot C_{j-1}^{i-1} \cdot C_{M-j}^{K-i-1} = \frac{1}{C_M^K} \cdot \sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^{i} \cdot C_{M-j}^{K-i-1} = \frac{C_{M-1}^{K-1}}{C_M^K} = \frac{K}{M}.$$

Deci $\quad P(B_j / A_k) = \dfrac{P(A_k / B_j) \cdot P(B_j)}{P(A_k)} = \dfrac{C_{K-1}^{k-1} \cdot C_{M-K}^{n-k}}{C_{M-1}^{n-1}} \cdot \dfrac{K}{M} \cdot \dfrac{C_M^n}{C_K^k \cdot C_{M-K}^{n-k}} = \dfrac{k}{n}.$

Observăm că răspunsul este același în ambele situații.

8 Consumul energiei electrice în timpul unei zile nu întrece normele stabilite cu probabilitatea 0,8. Se cere probabilitatea ca timp de o săptămână consumul energiei electrice să nu depășească normele stabilite în 5 zile.

Rezolvare

Se aplică schema lui Bernoulli deoarece probabilitatea de a nu depăși normele stabilite este constantă ori de câte ori se efectuează această experiență. Probabilitatea căutată este:

$$p = C_7^5 \, (0{,}8)^5 (0{,}2)^2.$$

9 Probabilitatea ca o zi din luna martie să fie ploioasă este 0,8. care este probabilitatea ca în prima decadă a acestei luni să fie 4 zile ploioase? Dar cel mult patru zile ploioase? Dar probabilitatea ca toate zilele să fie însorite?

Rezolvare

Se aplică schema lui Bernoulli și se obțin respectiv probabilitățile:

$$p_1 = C_{10}^4 \, (0{,}8)^4 (0{,}2)^6 = 0{,}0055$$

$$p_2 = (0{,}2)^{10} + C_{10}^1 \, (0{,}8)^1 (0{,}2)^9 + C_{10}^2 \, (0{,}8)^2 (0{,}2)^8 + C_{10}^3 \, (0{,}8)^3 (0{,}2)^7 + $$
$$+ C_{10}^4 \, (0{,}8)^4 (0{,}2)^6 = 0{,}0063$$

și $\quad p_3 = (0{,}2)^{10} = 0{,}0000001024.$

10 Doi adversari cu șanse egale joacă șah. Pentru unul dintre ei ce este mai probabil să câștige:

a) două partide din patru sau șase partide din opt?

b) cel puțin două partide din patru sau cel puțin șase partide din opt?

Rezolvare

a) Fie p_1 probabilitatea ca unul dintre jucători să câștige două partide din patru și p_2 probabilitatea ca unul dintre jucători să câștige șase partide din opt.

Considerăm că la o partidă fiecare dintre cei doi jucători are probabilitatea de câştig $\frac{1}{2}$.

Atunci, conform schemei lui Bernoulli,

$$p_1 = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,375;\ p_2 = C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,1937$$

şi se obţine $p_1 > p_2$.

b) Fie p_1 probabilitatea ca unul dintre jucători să câştige cel puţin două partide din patru şi p_2 probabilitatea ca unul dintre jucători să câştige cel puţin şase partide din opt. Aplicăm din nou schema lui Bernoulli şi obţinem:

$$p_1 = C_4^2\cdot\frac{1}{2^4}+C_4^3\cdot\frac{1}{2^4}+C_4^4\cdot\frac{1}{2^4} = 0,6875$$

şi $$p_2 = C_8^6\cdot\frac{1}{2^8}+C_8^7\cdot\frac{1}{2^8}+C_8^8\cdot\frac{1}{2^8} = 0,1445.$$

Din nou, $p_1 > p_2$.

11 Un muncitor deserveşte simultan 10 maşini de acelaşi tip. Probabilitatea ca o maşină să necesite o intervenţie într-un interval de timp t este $p = \frac{1}{3}$. Să se determine prababilitatea ca:

a) şase dintre cele 10 maşini să necesite intervenţia muncitorului în intervalul de timp t;

b) cel mult patru dintre cele 10 maşini să necesite câte o intervenţie în intervalul t.

Rezolvare

Fie A evenimentul ca o maşină să necesite o intervenţie. Atunci

$$p = P(A) = \frac{1}{3} \text{ şi } q = P(\bar{A}) = \frac{2}{3}.$$

Aplicăm schema lui Bernoulli.

a) Probabilitatea căutată este:

$$p_1 = C_{10}^6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0,056.$$

b) Notăm cu X numărul de maşini care se pot defecta. Atunci probabilitatea cerută este:

$$p_2 = P(X \le 4) = P((X=0)\cup(X=1)\cup(X=2)\cup(X=3)\cup(X=4)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} = 0,78687.$$

12 Împărţim primele douăsprezece numere naturale în trei grupe a câte patru numere şi înregistrăm fiecare grupă pe câte un bilet. Dintr-o urnă care conţine douăsprezece bile numerotate de la 1 la 12 se extrage pe rând câte o bilă. Se cer:

a) probabilitatea ca din şase extrageri patru numere să fie conţinute pe un acelaşi bilet, presupunând că bilele extrase nu sunt reintroduse în urnă;

b) probabilitatea de a obţine cele patru numere ale unui bilet din şase extrageri, presupunând că după fiecare extragere bila este reintrodusă în urnă.

Rezolvare

Numerotăm biletele cu numerele 1, 2, 3. Fie A_i evenimentul ca dintre cele şase numere extrase, patru să fie pe biletul cu numărul i, $i = \overline{1,3}$. Evenimentele A_i sunt incompatibile deoarece pe fiecare bilet sunt numere diferite. În problemă se cere probabilitatea

$$P = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

şi, deoarece

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$$

(numerele se scriu la întâmplare pe bilete), rămâne să calculăm $P(A_1)$.

a) Aplicăm schema bilei nerevenite:

$$P(A_1) = \frac{C_4^4 \cdot C_{12-4}^{6-4}}{C_{12}^6} = \frac{C_8^2}{C_{12}^6} = 0{,}0303,$$

deci $$P = 3 \cdot \frac{C_8^2}{C_{12}^6} = 0{,}0909.$$

b) Aplicăm schema lui Bernoulli şi obţinem:

$$P(A_1) = C_6^4 \left(\frac{4}{12}\right)^4 \left(\frac{8}{12}\right)^2 = 0{,}0823,$$

deci $$P = 3 \cdot C_6^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}2469.$$

13 Un număr de n trăgători trag în acelaşi timp într-o ţintă mobilă. Probabilitatea de a nimeri şi a doborî ţinta este aceeaşi pentru toţi trăgătorii şi este egală cu $\frac{1}{k}$, unde k aparţine mulţimii numerelor naturale. Să se calculeze probabilitatea ca ţinta să fie doborâtă.

Rezolvare

Se calculează probabilitatea evenimentului contrar, adică a evenimentului ca ţinta să nu fie doborâtă de nici un trăgător.

Se aplică schema lui Bernoulli cu

$$p = \frac{1}{k} \text{ şi } q = \frac{k-1}{k},$$

deci probabilitatea ca ţinta să nu fie doborâtă este:

$$Q = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = 1 - C_n^1 \frac{1}{k} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{k^n},$$

iar probabilitatea cerută este:

$$P = 1 - Q = C_n^1 \frac{1}{k} - C_n^2 \frac{1}{k^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{k^n}.$$

14. Un aparat este format din 10 subansamble. Probabilitatea ca un subansamblu să funcționeze fără defectare pe durata t este pentru fiecare subansamblu egală cu p, iar ieșirile lor din funcțiune sunt independente. Să se afle probabilitatea ca pe durata t să se defecteze:

a) cel puțin un subansamblu;

b) exact unul;

c) exact două;

d) cel puțin două.

Rezolvare

a) Probabilitatea căutată este:

$$p_1 = 1 - q^{10},$$

unde $q = 1 - p$.

b) În acest caz, probabilitatea cerută este:

$$p_2 = C_{10}^1 pq^9 = 10pq^9,$$

conform schemei lui Bernoulli.

c) Folosind din nou schema lui Bernoulli, obținem probabilitatea

$$p_3 = C_{10}^2 p^2q^8 = 45p^2q^8.$$

d) Probabilitatea ca pe durata t să se defecteze cel puțin două subansamble este:

$$p_4 = 1 - (1 - p_1) - p_2 = 1 - q^{10} - 10pq^9 = 1 - q^9(q - 10p),$$

prin folosirea probabilității evenimentului contrar.

15. O grupă de 43 de studenți audiază un curs de 3 semestre. La examen, se pune câte o întrebare din materia fiecărui semestru. Se știe că doi studenți cunosc în întregime materia predată, 10 studenți cunosc 90% din materia fiecărui semestru, 14 studenți câte 70%, opt studenți câte 60%, opt studenți câte 50%, iar un student nu cunoște nimic din întreaga materie. La examen, un student al acestei grupe răspunde bine la două întrebări și fals la a treia. Care este probabilitatea ca el să fie unul dintre studenții care cunosc întreaga materie, 90%, 70%, 60%, 50%, 0% din materia predată?

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca un student al grupei să facă parte din categoria i, $i = 1, \dots, 6$ (100%, 90%, 70%, 60%, 50%, 0%). Deci:

$$P(A_1) = \frac{2}{43}, \quad P(A_2) = \frac{10}{43}, \quad P(A_3) = \frac{14}{43},$$

$$P(A_4) = \frac{8}{43}, \quad P(A_5) = \frac{8}{43}, \quad P(A_6) = \frac{1}{43}.$$

Evenimentele A_i, $i = \overline{1,6}$, determină un sistem complet de evenimente.

Fie X evenimentul ca un student să răspundă bine la două întrebări și fals la a treia. Atunci:

$$P(X/A_1) = 0;\ P(X/A_2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1;\ P(X/A_3) = C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3;$$

$$P(X/A_4) = C_3^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4;\ P(X/A_5) = C_3^2 \cdot 0{,}5^3;\ P(X/A_6) = 0.$$

Se aplică pentru determinarea lui $P(X)$ formula probabilităților totale:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) \cdot P(X/A_i),$$

și apoi probabilitățile cerute se află cu formula lui Bayes:

$$P(A_j/X) = \frac{P(A_j) \cdot P(X/A_j)}{P(X)},\ j = 1, \ldots, 6.$$

16. Un aparat conține m elemente, iar al doilea conține n elemente. Fiecare dintre aparate funcționează pe durata t. În acest timp, fiecare dintre elementele primului aparat iese din funcțiune în mod independent cu probabilitatea p, iar al doilea aparat cu probabilitatea q. Să se determine probabilitatea ca la primul aparat să iasă din funcțiune mai multe piese decât la al doilea aparat.

Rezolvare

Fie A evenimentul care constă în faptul că la primul aparat ies mai multe elemente din funcțiune decât la al doilea.

Fie B_i evenimentul ca la primul aparat să iasă din funcțiune i elemente, $i = 1, 2, \ldots, m$. Avem:

$$P(B_i) = C_m^i p(1-p)^{m-i}$$

$$P(A/B_i) = \sum_{j=0}^{i-1} C_n^j q^j (1-q)^{n-j}\ (i \le n+1)$$

$P(A/B_i) = 1$, dacă $i \ge n+1$.

Dacă $m \le n+1$, atunci, folosind formula probabilității totale, obținem:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} \sum_{j=0}^{i-1} C_n^j q^j (1-q)^{n-j}.$$

Dacă $m > n+1$, atunci

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m+1} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} \sum_{j=0}^{i-1} C_n^j q^j (1-q)^{n-j} + \sum_{i=n+2}^{m} C_m^i p^i (1-p)^{m-i}.$$

17 Un fumător cumpără două cutii de chibrituri, fiecare conținând n bețe. Apoi, de fiecare dată când are nevoie de chibrit, scoate la întâmplare o cutie din care consumă un băț. Care este probabilitatea ca, în momentul în care constată că o cutie este goală, celalată să mai conțină k bețe? Pe baza rezultatului obținut, să se arate că:

$$C_{2n}^{n}+2C_{2n-1}^{n}+2^{2}C_{2n-2}^{n}+\ldots+2^{n}C_{n}^{n}=2^{2n}$$

Rezolvare

Constatarea că o cutie este goală se face în momentul în care ea este scoasă din buzunar a $(n + 1)$-a oară. Dacă în acest moment cea de-a doua cutie mai are k bețe, înseamnă că ea a fost scoasă de $n - k$ ori. Prin urmare, cutiile au fost scoase din buzunar de $2n - k + 1$ ori.

Observăm că problema se poate enunța și în felul următor: O urnă conține o bilă neagră și una albă. Se extrage din urnă o bilă, punându-se bila înapoi în urnă și se repetă experiența până când una dintre bile apare a $(n + 1)$-a oară. Care este probabilitatea ca, la sfârșit, cealaltă să fi ieșit de $n - k$ ori?

Fie evenimentele:

A: în $2n - k$ extrageri, bila albă apare de n ori, iar bila neagră de $n - k$ ori;

B: în $2n - k$ extrageri, bila neagră apare de n ori, iar bila neagră de $n - k$ ori;

C: în a $(2n - k + 1)$-a extragere apare bila albă;

D: în momentul în care una dintre bile a ieșit a $(n + 1)$-a oară, cealaltă a ieșit de $n - k$ ori.

Atunci:

$$D = (A \cap C) \cup (B \cap \bar{C})$$

și
$$P(D) = P(A \cap C) + P(B \cap \bar{C}) = P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(\bar{C}) =$$
$$= \frac{1}{2}P(A) + \frac{1}{2}P(B) = P(A),$$

pentru că, din motive de simetrie, $P(A) = P(B)$.

Pentru calculul lui $P(A)$ aplicăm schema lui Bernoulli:

$$P(A) = C_{2n-k}^{n}p^{n}q^{n-k} = C_{2n-k}^{n}\frac{1}{2^{2n-k}}.$$

Deci
$$P(D) = \frac{C_{2n-k}^{n}}{2^{2n-k}}.$$

Considerăm acum evenimentele A_k: „când se consideră că una dintre cutii este goală, cealaltă cutie mai conține k bețe", $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. $A_0, A_1, \ldots, A_n$ formează un sistem complet de evenimente și deci suma probabilităților lor este egală cu unitatea.

Așadar,

$$C_{2n}^{n}\cdot\frac{1}{2^{2n}}+C_{2n-1}^{n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\ldots+C_{n}^{n}\cdot\frac{1}{2^{n}}=1,$$

adică
$$C_{2n}^{n}+2C_{2n-1}^{n}+\ldots+2^{n}C_{n}^{n}=2^{2n}.$$

18. Pentru trei livezi de meri se cunosc probabilitățile de a obține fructe corespunzătoare normelor, de respectiv 0,9; 0,8 și 0,85. Luând la întâmplare câte un măr din producția fiecărei livezi, se cere probabilitatea de a obține:

a) două mere conform normelor, iar unul nu;

b) cel mult un măr necorespunzător.

Rezolvare

Se aplică schema lui Poissson cu

$$p_1 = 0{,}9;\ p_2 = 0{,}8;\ p_3 = 0{,}85;$$
$$q_1 = 0{,}1;\ q_2 = 0{,}2;\ q_3 = 0{,}15.$$

a) Notăm cu A_1 evenimentul ca dintre cele trei mere extrase, două să fie corespunzătoare și unul nu. Pentru determinarea probabilității lui A_1, se folosește polinomul:

$$Q(t) = (p_1t + q_1)(p_2t + q_2)(p_3t + q_3).$$

Atunci $P(A_1)$ este coeficientul lui t^2, adică

$$P(A_1) = p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1 =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 + 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}1 = 0{,}261.$$

b) Se notează cu A_0 evenimentul ca între cele 3 mere extrase să nu existe mere necorespunzătoare.

$P(A_0)$ va fi coeficientul lui t^3 din $Q(t)$, deci

$$P(A_0) = p_1p_2p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}612.$$

Atunci, dacă B este evenimentul ca cel mult un măr să fie necorespunzător, vom avea:

$$P(B) = P(A_0 \cup A_1) = P(A_0) + P(A_1) = 0{,}993.$$

19. Un vânzător are o duzină de motoare electrice, din care două sunt defecte. Un client dorește să cumpere duzina de motoare. Vânzătorul poate împacheta motoarele fie toate 12 într-o cutie, fie câte 6 în două cutii; el știe că clientul va verifica două dintre cele 12 motoare, dacă sunt toate într-o cutie, sau câte un motor, dacă motoarele sunt împachetate câte șase în câte o cutie. Vânzătorul are trei strategii în încercarea de a vinde motoarele stricate:

i) să le pună pe toate într-o cutie;

ii) să pună câte un motor stricat în câte o cutie;

iii) să pună ambele motoare stricate într-o cutie, iar în cealaltă să nu fie nici un motor stricat.

Care este probabilitatea ca clientul să nu descopere vreun motor stricat în fiecare dintre cele trei cazuri?

Rezolvare

Fie

A – evenimentul ca clientul să nu descopere nici un motor stricat când vânzătorul a folosit prima strategie;

B – evenimentul ca clientul să nu descopere nici un motor stricat când vânzătorul a folosit a doua strategie;

C – evenimentul ca clientul să nu descopere nici un motor stricat când vânzătorul a folosit a treia strategie.

Conform definiției clasice a probabilității,

$$P(A) = \frac{10}{12}.$$

Pentru calculul lui $P(B)$, folosim schema lui Poisson cu două urne și $p_1 = \frac{5}{6}$, $q_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{5}{6}$, $q_2 = \frac{1}{6}$. Atunci $P(B)$ este coeficientul lui t^2 din polinomul

$$Q(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2) = \left(\frac{5}{6}t + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}t + \frac{1}{6}\right),$$

adică $\quad P(B) = \frac{25}{36}$.

Pentru a calcula $P(C)$ folosim tot schema lui Poisson în cazul a două urne, cu $p_1 = \frac{4}{6}$, $q_1 = \frac{2}{6}$, $p_2 = 1$ și $q_2 = 0$. $P(C)$ este atunci coeficientul lui t^2 din polinomul

$$Q(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2) = \left(\frac{4}{6}t + \frac{2}{6}\right)t.$$

Deci $\quad P(C) = \frac{4}{6}$.

Observăm că dintre $P(A)$, $P(B)$ și $P(C)$ cea mai mare probabilitate este $P(A)$, deci cea mai bună strategie pentru vânzător este prima.

20. Trei trăgători trag câte un foc asupra unei ținte. Probabilitatea de succes pentru fiecare trăgător este respectiv 0,2; 0,5; 0,9. Care este probabilitatea ca ea să fi fost atinsă de primul trăgător? Dar de al doilea? Dar de al treilea?

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca trăgătorul i să nimerească ținta, $i = 1, 2, 3$, și A evenimentul ca un singur trăgător să nimerească ținta.

Mai întâi, se cere $P(A_1 / A)$. Avem:

$$P(A_1 / A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)}{P(A)} = \frac{P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3)}{P(A)}.$$

Pe de altă parte, folosind schema lui Poisson, $P(A)$ este coeficientul lui t din polinomul

$$(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)(p_3 t + q_3),$$

unde $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,5$; $p_3 = 0,9$ și $q_1 = 0,8$; $q_2 = 0,5$ și $q_3 = 0,1$.

Așadar

$$P(A) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3$$

și

$$P(A_1 / A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{p_1 q_2 q_3}{p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3} = 0,0243.$$

Probabilitățile ca al doilea, respectiv al treilea trăgător să fi nimerit ținta sunt:

$$P(A_2 / A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{p_2 q_1 q_3}{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2} = 0,0975$$

și

$$P(A_3 / A) = \frac{P(A_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{p_3 q_1 q_2}{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2} = 0,1756.$$

bug $\frac{36}{41} = 0,8$

21. O asociaţie agricolă primeşte în cursul unei săptămâni 160 de camioane cu grâu provenit de la trei depozite A, B, C. Probabilitatea ca grâul să provină de la depozitul A este 0,5, de la depozitul B este 0,3 şi de la depozitul C este 0,2. Care este probabilitatea ca din cele 160 de camioane, 90 să fie de la depozitul A, 20 de la depozitul B şi restul de la depozitul C?

Rezolvare

Se aplică schema multinomială cu

$$p_1 = 0{,}5;\ p_2 = 0{,}3;\ p_3 = 0{,}2.$$

Atunci probabilitatea căutată este:

$$\frac{160!}{90!\cdot 20!\, 50!}\cdot 0{,}5^{90}\cdot 0{,}3^{20}\cdot 0{,}2^{50} = 1{,}3600\times 10^{-9}.$$

22. La un magazin se vând cinci sortimente de produse: $s_1, s_2, ..., s_5$. În perioada precedentă, din volumul total al vânzărilor, cele cinci sortimente au avut următoarele ponderi: 20%, 10%, 30%, 15% şi respectiv 25%. Se consideră 50 de cumpărători dintre clienţii magazinului şi se anticipează solicitările acestora. Care este probabilitatea ca:

a) zece să cumpere sortimentul s_1, zece sortimentul s_2, cinci sortimentul s_3, cincisprezece sortimentul s_4 şi restul sortimentul s_5;

b) zece să cumpere sortimentul s_1 sau s_2, iar restul celelalte sortimente.

Rezolvare

Fie A_i evenimentul ca un client să cumpere sortimentul s_i, $i = \overline{1,5}$ şi $p_i = P(A_i)$, $i = \overline{1,5}$.

Avem

$$p_1 = 0{,}2,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}3,\ p_4 = 0{,}15,\ p_5 = 0{,}25.$$

Deoarece p_i, $i = \overline{1,5}$ se pot considera independente de numărul cumpărătorilor, se poate folosi schema multinominală cu cinci stări.

a) Fie X evenimentul a cărui probabilitate se cere. Aplicând schema mulinominală, obţinem:

$$P(X) = \frac{50!}{10!\cdot 10!\cdot 5!\cdot 15!\cdot 10!}\, 0{,}2^{10}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 0{,}3^{5}\cdot 0{,}15^{15} : 0{,}25^{10}.$$

b) Fie Y evenimentul a cărei probabilitate se cere. $P(Y)$ se calculează cu schema multinominală de paramentri $n = 50$, $m = 5$, $x_1, x_2 \in \{0, ..., 10\}$ astfel încât $x_1 + x_2 = 10$ şi $x_3, x_4, x_5 \in \{0, ..., 40\}$ astfel încât $x_3 + x_4 + x_5 = 30$. Obţinem

$$P(Y) = \sum_{0\le x_1\le 10}\ \sum_{\substack{0\le x_3, x_4, x_5\le 40\\ x_3+x_4+x_5=40}} \frac{50!}{x_1!(10-x_1)!x_3!x_4!(40-x_3-x_4)!}.$$

23. La un strung automat se prelucrează piese cilindrice. Probabilitatea ca diametrul unei piese prelucrate să fie strict mai mic, strict mai mare sau egal cu diametrul standard este respectiv de 0,02; 0,03; 0,95. Din producţia strungului se aleg la întâmplare 50 de piese. Să se afle probabilitatea ca:

a) trei piese să aibă diametrul strict mai mic şi două piese să aibă diametrul strict mai mare decât standard;

b) cel puţin 45 de piese să aibă diametrul standard.

Rezolvare

a) Fie X evenimentul a cărui probabilitate se cere. Atunci are loc

$$P(X) = \frac{50!}{3! \cdot 2! \cdot 45!} \, 0{,}02^3 \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}95^{45}.$$

b) Fie Y evenimentul a cărui probabilitate se cere. Atunci

$$P(Y) = \sum_{x_3=45}^{50} \sum_{0 \le x_1 \le 50-x_3} \frac{50!}{x_1! \cdot x_3!(50-x_1-x_3)!} \cdot 0{,}95^{x_3} \cdot 0{,}02^{x_1} \cdot 0{,}03^{50-x_1-x_3}.$$

1.5. Probleme propuse

1. Demonstraţi următoarele egalităţi între evenimente:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \varnothing$;

b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

c) $A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$;

d) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$;

e) $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = [A \setminus (B \cup C)] \cup [(A \cap D) \setminus B]$;

f) $A \cup C = A \cup [B \setminus (A \cup B)] \cup [(C \setminus A) \cap C]$.

2. Să se găsească în funcţie de evenimentele A şi B evenimentul C din relaţia

$\overline{(C \cup A)} \cup \overline{(C \cup \bar{A})} = B$.

3. Să se arate că dacă evenimentele A şi C sunt incompatibile, atunci:

$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B$.

4. Fie (Ω, K) un câmp de evenimente şi $\Delta_1 = \{A_i, i \in I\}$, $\Delta_2 = \{B_j, j \in J\}$ două sisteme complete de evenimente. Să se arate că familia

$\Delta_1 \circ \Delta_2 = \{A_i \cap B_j, i \in I, j \in J\}$

este un sistem complet de evenimente. Dacă $A_i \in K$ şi $\Delta_i = \{A_i, \bar{A}_i\}$, să se calculeze $\Delta_1 \circ \Delta_2$, $\Delta_1 \circ \Delta_2 \circ \Delta_3$.

5. O urnă conţine o bilă neagră şi una aurie. O a doua urnă conţine o bilă albă şi una aurie. Se aleg la întâmplare două bile, câte una din fiecare urnă.

a) Să se scrie câmpul de evenimente ataşat experienţei.

b) Care este probabilitatea ca ambele bile extrase să fie de aceeaşi culoare?

c) Care este probabilitatea ca una din bile să fie verde?

6. O urnă conţine trei bile roşii, două albe şi una albastră. O a doua urnă conţine o bilă roşie, două albe şi trei albastre.

a) Din fiecare urnă este aleasă la întâmplare câte o bilă.

i) Găsiţi probabilitatea ca ambele bile să fie de aceeaşi culoare.

ii) Probabilitatea ca ambele bile să fie roşii este mai mare ca probabilitatea ca ambele bile să fie albe?

b) Bilele din cele două urne sunt amestecate împreună într-o singură urnă şi apoi sunt extrase trei bile. Găsiţi probabilitatea ca toate cele trei culori să fie reprezentate, când:

i) extragerile au loc cu revenire;

ii) extagerile au loc fără revenire.

7. Dacă A şi B sunt evenimente incompatibile, $P(A) = 0{,}3$ şi $P(A \cup B) = 0{,}8$, cât este $P(B)$?

8. O urnă conține cinci bile numerotate de la 1 la 5 din care primele trei sunt negre Iș ultimele două sunt aurii. Se extrag la întâmplare două bile din urnă astfel încât o dată o bilă extrasă ea se reintroduce în urnă înaintea următoarei extrageri. Fie B_1 evenimentul prin care prima bilă extrasă este neagră și B_2 evenimentul prin care a doua bilă extrasă este tot neagră.

a) Găsiți $P(B_1)$, $P(B_2)$ și $P(B_1 \cap B_2)$.

b) Rezolvați punctul **a)** în cazul în care extragerile se fac fără întoarcere.

9. O mașină cu șase bujii are două dintre ele defecte. Dacă sunt alese la întâmplare două bujii, care este probabilitatea de a le alege chiar pe cele defecte?

10. Într-o linie de asamblare, o treime din articolele produse sunt defecte. Dacă sunt alese și testate la întâmplare trei articole, care este probabilitatea

a) ca exact unul din articolele alese să fie defect?

b) ca cel puțin unul dintre articole să fie defect?

11. La o firmă lucrează trei echipe. Probabilitățile ca fiecare echipă să-și onoreze contractele sunt respectiv 0,7, 0,8 și 0,6. Se cere probabilitatea ca:

a) o echipă și numai una să-și onoreze contractele;

b) toate cele trei echipe să-și onoreze contractele.

12. Dacă $P(A) = \frac{1}{3}$ și $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$, sunt A și B evenimente incompatibile?

13. Studiați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și justificați în fiecare caz:

a) Dacă $P(A) = P(B) = p$, atunci $P(A \cap B) \leq p^2$.

b) Dacă $P(A) = P(\bar{B})$, atunci $\bar{A} = B$.

c) Dcă $P(A) = 0$, atunci $P(A \cap B) = 0$.

d) Dacă $P(\bar{A}) = \alpha$, și $P(\bar{B}) = \beta$, atunci $P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$.

14. Doi studenți care se prezintă la un examen au probabilitățile de promovare 0,5 respectiv 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) ambii studenți să promoveze examenul;

b) un singur student să promoveze;

c) cel puțin un student să promoveze;

d) nici un student să nu promoveze?

15. Comparați probabilitatea de a obține un total de nouă cu aceea de a obține un total de zece când sunt aruncate simultan trei zaruri identice. (Problema ducelui de Toscana).

16. Comparați probabilitatea ca aruncând de 4 ori un zar să iasă cel puțin o dată cifra 6, cu probabilitatea ca aruncând de 24 de ori o perche de zaruri identice, să apară cel puțin o dată dubla 6 – 6. (Problema Cavalerului de Méré).

17. Comparați probabilitatea ca aruncând simultan șase zaruri să pice cel puțin un șase, cu probabilitatea de a pica cel puțin doi de șase atunci când se aruncă simultan cu douăsprezece zaruri. (Problema lui Pepys către Newton).

18. Patru vânători trag simultan câte un foc într-o țintă. Știind că în condițiile în care are loc tragerea, fiecare vânător atinge ținta de două ori din cinci focuri, care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin un vânător?

19. Într-un tren cu cinci vagoane se urcă, la întâmplare, zece călători. Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce patru călători?

20. Un jucător de bridge știe că jucătorii din echipa adversă au împreună exact cinci inimi roșii. Fiecare dintre cei doi adversari are în mână treisprezece cărți. Care este probabilitatea ca inimile roșii să fie împărțite trei la unul și celelalte două la celălalt jucător?

21. Studiați care din următoarele afirmații sunt adevărate și justificați în fiecare caz.

a) Dacă $P(A / B) \geq P(A)$, atunci $P(B / A) \geq P(B)$.

b) Dacă $P(B / \bar{A}) = P(B / A)$, atunci A și B sunt independente.

c) Dacă $a = P(A)$ și $b = P(B)$, atunci $P(A / B) \geq \frac{a+b-1}{b}$.

22. Fie o urnă care conține zece bile dintre care cinci sunt negre. Se alege un număr întreg n la întâmplare din setul 1, 2, 3, 4, 5, 6 și apoi se alege un lot de bile de dimensiuni n fără a le introduce înapoi în urnă. Găsiți probabilitatea ca toate bilele din lot să fie negre.

23. Un zar este aruncat de câte ori este nevoie până apare fața cu numărul șase. Știind că șase nu apare la prima aruncare, care este probabilitatea să fie necesare mai mult de patru aruncări?

24. Zarul A are patru fețe roșii și două albastre. Se joacă următorul joc: mai întâi este aruncată o dată o monedă; dacă pică cap jocul continuă prin aruncarea repetată a zarului A; dacă pică pajură se aruncă numai cu zarul B.

a) Arătați că probabilitatea de a ieși roșu la orice aruncare este $\frac{1}{2}$.

b) Care este probabilitatea să iasă roșu și la a treia aruncare știind că la primele două aruncări a apărut roșu.

c) Dacă apare roșu la primele n aruncări, care este probabilitatea ca zarul A să fie folosit?

25. Urna A conține două bile albe și două bile roșii. Urna B conține trei bile albe și două bile negre. O bilă se transferă de la A la B; se extrage o bilă din B și se dovedește a fi albă. Care este probabilitatea ca bila transferată să fie albă?

26. Constituţia a două urne este:

fig. 5

Se selectează o urnă printr-un proces care atribuie probabilitatea p selecţiei urnei I şi probabilitatea $(1 - p)$ selecţiei urnei II. Probabilitatea de a extrage o bilă dintr-o urnă este aceeaşi pentru fiecare bilă din urnă. Ce valoare a lui p face probabilitatea de a obţine o bilă neagră la fel cu aceea dacă o singură extracţie a fost făcută dintr-o urnă cu şapte bile negre şi opt bile albe (toate bilele au aceeaşi probabilitate de a fi extrase).

27. Trei zaruri se aruncă simultan. Ştiind că oricare două feţe apărute sunt diferite să se determine:

a) probabilitatea ca suma feţelor să fie şapte;
b) probabilitatea ca una dintre feţe să fie unu.

28. 5% dintre oameni au tensiunea ridicată. Dintre oamenii cu tensiunea ridicată, 75% beau alcool, în timp ce numai 50% dintre oamenii fără tensiune înaltă beau alcool. Ce procent din băutori au o presiune înaltă a sângelui?

29. O firmă se aprovizionează de la patru furnizori. Din datele statistice privind furnizorii, firma estimează că probabilităţile cu care furnizorii pot onora contracetele sunt $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}8$ şi $p_4 = 0{,}9$. Să se determine probabilitatea ca:

a) toţi furnizorii să-şi onoreze contractele;
b) nici un furnizor să nu-şi onoreze contractele;
c) cel puţin un furnizor să-şi onoreze contractul.

30. În medie din cinci vizitatori ai unui magazin doi cumpără şi restul nu. Aflaţi care este probabilitatea ca din zece persoane care intră în magazin:

a) trei persoane să cumpere;
b) toate persoanele să cumpere;
c) cel puţin şase persoane să cumpere;
d) cel mult trei persoane să nu cumpere?

31. La deschiderea bursei se pun în vânzare 100 de acţiuni cu aceeaşi valoare nominală, dintre care 30 sunt ale firmei A, iar restul ale firmei B. Să presupunem că până la închiderea bursei s-au vândut 10 acţiuni. Să se afle probabilitatea ca:

a) trei acţiuni vândute să fie de la firma A;
b) patru acţiuni vândute să fie de la firma B;
c) toate acţiunile vândute să fie de la firma A.

2
VARIABILE ALEATOARE

2.1. Probleme rezolvate. Variabile aleatoare discrete

1. Se aruncă o monedă de patru ori. Să se scrie repartiția v.a. X care ia ca valori numărul de apariții ale stemei.

Rezolvare

Valorile pe care le poate lua v.a. X sunt 0, 1, 2, 3, 4. Pentru calculul probabilităților, aplicăm schema lui Bernoulli și obținem:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0,4},$$

unde $p = q = \frac{1}{2}$.

Așadar

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 & C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{pmatrix}.$$

2. La un antrenament, un jucător de baschet nimerește la coș cu probabilitatea 0,6. Să se scrie repartiția v.a. X care ia ca valori numărul de nimeriri la coș când jucătorul aruncă mingea de zece ori.

Rezolvare

V.a. X poate lua valorile 0, 1, ..., 10. Pentru calculul probabilităților cu care sunt luate aceste valori folosim schema lui Bernoulli. Deci

$$P(X = k) = C_{10}^k (0,6)^k (0,4)^{10-k}, k = \overline{0,10}.$$

Atunci

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 9 & 10 \\ (0,4)^{10} & C_{10}^1(0,6)(0,4)^9 & & C_{10}^9(0,6)^9(0,4) & (0,6)^{10} \end{pmatrix}.$$

V.a. X are o repartiție binomială.

3. Se experimentează trei prototipuri de aparate. Probabilitățile ca prototipurile să corespundă sunt respectiv $p_1 = 0,9$; $p_2 = 0,8$; $p_3 = 0,85$. Să se scrie repartiția v. a. X care ia valori numărul de prototipuri care corespund.

Rezolvare

V.a. X poate lua valorile 0, 1, 2, 3. Pentru calculul probabilităților corespunzătoare folosim schema lui Poisson. Calculăm coeficienții lui t^0, t^1, t^2, t^3 din polinomul

$$P(t) = (0,9t + 0,1)(0,8t + 0,2)(0,85t + 0,15).$$

Deci repartiția v.a. X este:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,003 & 0,56 & 0,329 & 0,612 \end{pmatrix}.$$

4. Se aruncă un zar și se notează cu X numărul de aruncări efectuate până la prima apariție a feței cu un punct. Să se scrie repartiția v.a. X.

Rezolvare

Se obține:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6^2} & \frac{5^2}{6^3} & & \frac{5^{n-1}}{6^n} & \dots \end{pmatrix},$$

deci X urmează o repartiție geometrică de parametru $\frac{1}{6}$.

5. Se efectuează controlul de calitate al unui lot de produse astfel: se extrage la întâmplare, pe rând, câte un produs și se cercetează dacă este sau nu corespunzător. Numărul maxim de produse cercetate este patru, iar dacă produsul de la extracția k, $k = \overline{1,3}$ nu corespunde, atunci lotul se respinge și nu se mai continuă extracțiile. Să se scrie repartiția v.a. X, care reprezintă numărul de produse cercetate știind că probabilitatea ca un produs luat la întâmplare din lot să fie corespunzător este 0,8.

Rezolvare

V.a. X poate lua valorile 1, 2, 3 și 4, iar

$$P(X = 1) = q,\ P(X = 2) = pq,\ P(X = 3) = p^2q,\ P(X = 4) = p^3,$$

unde $p = 0,8$, iar $q = 1 - p = 0,2$.

Obținem următoarea repartiție:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,16 & 0,128 & 0,512 \end{pmatrix}.$$

Dacă $X = k$, $k = \overline{1,3}$, lotul se respinge, dacă $X = 4$ lotul se respinge, sau nu, după cum al patrulea produs cercetat este corespunzător sau nu.

6. Dintr-o urnă care conţine acelaşi număr de bile albe şi bile negre se extrag trei bile, punând de fiecare dată bila înapoi. Să se determine repartiţia v.a. X care reprezintă numărul de bile albe care pot să apară.

Rezolvare

Notăm cu A evenimentul ca la o extragere să apară o bilă albă şi cu N evenimentul contrar lui A – la o extragere apare o bilă neagră.

Observăm că $P(A) = P(N) = \frac{1}{2}$.

Evenimentele asociate experienţei	Probabilitatea	Numărul de bile albe obţinut
AAA	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	3
AAN	$\frac{1}{8}$	2
ANA	$\frac{1}{8}$	2
NAA	$\frac{1}{8}$	2
ANN	$\frac{1}{8}$	1
NAN	$\frac{1}{8}$	1
NNA	$\frac{1}{8}$	1
NNN	$\frac{1}{8}$	0

Atunci v.a. X are repartiţia:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

7. În trei cutii numerotate de la 1 la 3 se introduc la întâmplare 10 bile. Să se scrie repartiţia v.a. X care ia ca valori numărul de bile din prima cutie.

Rezolvare

V.a. X poate lua valorile 0, 1, ..., 10 şi folosind definiţia clasică probabilităţii se obţine:

$$P(X=k)=\frac{C_{10}^{k}2^{10-k}}{3^{10}},\ k=\overline{0,10}\cdot$$

deoarece numărul cazurilor egal posibile este dat de numărul funcţiilor definite pe mulţimea $\{1, ..., 10\}$ cu valori $\{1, 2, 3\}$, iar numărul cazurilor favorabile este dat de produsul dintre numărul de moduri în care se pot alege k bile din 10 şi numărul funcţiilor de la mulţimea $\{1, ..., 10-k\}$ la mulţimea $\{1, 2\}$.

Prin urmare, repartiția v. a. X este dată de:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{2^{10}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{1}2^{9}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{2}2^{8}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{3}2^{7}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{4}2^{6}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{5}2^{5}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{6}2^{4}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{7}2^{3}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{8}2^{2}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{9}2^{1}}{3^{10}} & \frac{C_{10}^{10}2^{0}}{3^{10}} \end{pmatrix}.$$

8. Fie v. a. discretă

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p^2 & \frac{7p}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Să se determine p astfel ca tabelul să reprezinte repartiția variabilei X și să se calculeze $P(X \le 3)$.

Rezolvare

Din condițiile $p \ge 0$ și $p^2 + \frac{7p}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, obținem $p = \frac{1}{4}$.

Apoi $P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

sau $\quad P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{5}{6}$.

9. Două v. a. independente au repartițiile:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix};\ Y:\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie:

a) repartiția sumei $X + Y$;

b) repartiția produsului $X \cdot Y$.

Rezolvare

a) Valorile pe care le ia v. a. $X + Y$ sunt: 3, 6, 8, 4, 7, 9, 6, 9, 11.

Ținând cont că v. a. X și Y sunt independente, probabilitățile de obținere a fiecărei valori sunt:

$$P(X+Y=3) = P[(X=2)\cap(Y=1)] = P(X=2)\cdot P(Y=1) = 0,2\cdot 0,6 = 0,12$$
$$P(X+Y=6) = P[((X=2)\cap(Y=4))\cup((X=5)\cap(Y=1))] =$$
$$= P(X=2)\cdot P(Y=4) + P(X=5)\cdot P(Y=1) = 0,2\cdot 0,2 + 0,5\cdot 0,6 = 0,34$$
$$P(X+Y=8) = P[(X=2)\cap(Y=6)] = P(X=2)\cdot P(Y=6) = 0,04$$
$$P(X+Y=4) = P[(X=3)\cap(Y=1)] = P(X=3)\cdot P(Y=1) = 0,18$$
$$P(X+Y=7) = P[(X=3)\cap(Y=4)] = P(X=3)\cdot P(Y=4) = 0,06$$
$$P(X+Y=9) = P[((X=3)\cap(Y=6))\cup((X=5)\cap(Y=4))] =$$
$$= P(X=3)\cdot P(Y=6) + P(X=5)\cdot P(Y=4) = 0,16.$$
$$P(X+Y=11) = P[(X=5)\cap(Y=6)] = P(X=5)\cdot P(Y=6) = 0,10.$$

Repartiția v. a. $X + Y$ este

$$X+Y:\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 0,12 & 0,18 & 0,34 & 0,06 & 0,04 & 0,16 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

b) Valorile pe care le ia v. a. $X \cdot Y$ sunt 2, 8, 12, 3, 12, 18, 5, 20, 30.

$P(XY = 2) = P[(X = 2) \cap (Y = 1)] = 0{,}12$

$P(XY = 8) = P[(X = 2) \cap (Y = 4)] = 0{,}04$

$P(XY = 12) = P[((X = 2) \cap (Y = 6)) \cup ((X = 3) \cap (Y = 4))] = 0{,}10$

$P(XY = 3) = P[(X = 3) \cap (Y = 1)] = 0{,}18$

$P(XY = 18) = P[(X = 3) \cap (Y = 6)] = 0{,}06$

$P(XY = 5) = P[(X = 5) \cap (Y = 1)] = 0{,}30$

$P(XY = 20) = P[(X = 5) \cap (Y = 4)] = 0{,}10$

$P(XY = 30) = P[(X = 5) \cap (Y = 6)] = 0{,}10$

Repartiția v. a. XY este:

$$XY : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 12 & 18 & 20 & 30 \\ 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}30 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}06 & 0{,}10 & 0{,}10 \end{pmatrix}.$$

10. Se dau v. a. X și Y independente, având repartițiile:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{6}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}; \; Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartițiile variabilelor $T = X + Y$ și $Z = X \cdot Y$.

Rezolvare

Repartiția v. a. $T = X + Y$ este:

$$T : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{8}{243} & \frac{60}{243} & \frac{94}{243} & \frac{61}{243} & \frac{18}{243} & \frac{2}{243} \end{pmatrix}.$$

Repartiția v. a. $Z = X \cdot Y$ este

$$Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ \frac{72}{243} & \frac{12}{243} & \frac{78}{243} & \frac{25}{243} & \frac{36}{243} & \frac{18}{243} & \frac{2}{243} \end{pmatrix}.$$

Probabilitățile se determină ca la problema precedentă, de exemplu:

$$P(T = 3) = P[((X = 1) \cap (Y = 2)) \cup ((X = 2) \cap (Y = 1)) \cup ((X = 3) \cap (Y = 0))] =$$
$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 1) + P(X = 3) \cdot P(Y = 0) =$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{27} + \frac{6}{9} \cdot \frac{12}{27} + \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{27} = \frac{94}{243}.$$

$$P(Z = 2) = P[((X = 2) \cap (Y = 1)) \cup ((X = 1) \cap (Y = 2))] =$$
$$= P(X = 2) \cdot P(Y = 1) + P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{12}{27} + \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{27} = \frac{78}{243}.$$

11. Fie X şi Y două v. a. independente având repartiţiile:

$$X:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix};\ Y:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4\end{pmatrix}.$$

Să se determine repartiţiile variabilelor $Z = X + Y$ şi $T = X \cdot Y$.

Rezolvare

Se procedează ca la problemele precedente şi se obţine:

$$Z:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0,03 & 0,11 & 0,17 & 0,31 & 0,18 & 0,2\end{pmatrix}$$

şi

$$T:\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0,12 & 0,06 & 0,09 & 0,28 & 0,15 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}.$$

12. V. a. X are repartiţia

$$X:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}.$$

Să se scrie repartiţiile variabilelor $2X + 3$, X^2, X^3, $X + X^2$ şi să se calculeze $P\left(X > -\frac{1}{3}\right)$; $P\left(X < \frac{1}{4} \middle| X \geq -\frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare

În urma calculelor se obţin respectiv repartiţiile

$$2X + 3:\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix},$$

$$X^2:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix},$$

$$X^3 = X:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix};$$

$$X + X^2:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5\end{pmatrix}$$

şi

$$P\left(X > -\frac{1}{3}\right) = P((X = 0) \cup (X = 1)) = 0,7;$$

$$P\left(X < \frac{1}{4} \middle| X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right)}{P\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}.$$

13. Fie X şi Y două v. a. independente având repartiţiile:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p \cdot q^k, k \in \mathbf{N}, p, q > 0, p + q = 1.$$

Să se calculeze:

a) $P(X + Y = 0)$; $P(X + Y = n)$;

b) $P(X = k / X + Y = n)$, $k < n$.

Rezolvare

a) Avem

$$P(X + Y = n) = \sum_{j=0}^{n} P((X = j) \cap (Y = n - j)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} P(X = j) \cdot P(Y = n - j) = \sum_{j=0}^{n} p q^j p q^{n-j} = (n + 1)p^2 q^n.$$

b) Cu definiţia probabilităţii condiţionate se obţine

$$P(X = k / X + Y = n) = \frac{P((X = k) \cap (Y = n - k))}{P(X + Y = n)} =$$

$$= \frac{P(X = k) \cdot P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{pq^k pq^{n-k}}{(n+1)p^2 q^n} = \frac{1}{n+1}.$$

14. V. a. X are densitatea

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}, \text{ unde } 0 < p \leq 1.$$

Demonstraţi că

$$P(X \geq i + j / X \geq i) = P(X \geq j),\ i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Rezolvare

Folosind definiţia probabilităţii condiţionate

$$P(X \geq i + j / X \geq i) = \frac{P(X \geq i + j)}{P(X \geq i)} = \frac{\sum_{x=i+j}^{\infty} p(1-p)^x}{\sum_{x=i}^{\infty} p(1-p)^x} = \frac{(1-p)^{i+j}}{(1-p)^i} = (1-p)^j$$

şi cum $P(X \geq j) = \sum_{x=j}^{\infty} p(1-p)^x = (1-p)^j$,

egalitatea este stabilită.

15. Se consideră densitatea

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Arătaţi atunci că:

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} < \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ dacă } k < \lambda$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} > \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ dacă } k > \lambda$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ dacă } k = \lambda \text{ şi } \lambda \in \mathbf{N}.$$

Rezolvare

Raportul

$$\frac{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}} = \frac{k}{\lambda}$$

este supraunitar dacă $\lambda < k$, subunitar dacă $\lambda > k$ şi egal cu 1 dacă $\lambda = k$.

16. Fie X o v. a. pentru care se ştie că

$P(X = j) = c \cdot j,\ j = 1, 2, \dots, n,\ c \in \mathbf{R}_+$.

a) Să se determine constanta c astfel încât probabilitatea dată să definească o repartiţie.

b) Să se calculeze $P(X = 1 / (X = 1) \cup (X = n))$.

Rezolvare

a) Din condiţia

$$\sum_{j=1}^{n} P(X = j) = c\sum_{j=1}^{n} j = c\frac{n(n+1)}{2} = 1$$

obţinem $c = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

b) Conform definiţiei probabilităţii condiţionate,

$$P(X = 1 / (X = 1) \cup (X = n)) = \frac{P[(X=1)\cap((X=1)\cup(X=n))]}{P((X=1)\cup(X=n))} =$$

$$= \frac{P[(X=1)\cup((X=1)\cap(X=n))]}{P((X=1)\cup(X=n))} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=n)} = \frac{1}{1+n}$$

deoarece evenimentele $(X = 1)$ şi $(X = n)$ sunt incompatibile.

17. Dintr-o urnă în care sunt zece bile albe şi cinci negre se fac şase extrageri punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă.

a) Să se determine funcţia de repartiţie a variabilei care dă numărul de bile albe extrase.

b) Aceeaşi problemă dacă bila extrasă nu se întoarce în urnă.

Rezolvare

a) Probabilităţile variabilei X ce reprezintă numărul de bile albe extrase se pot determina cu ajutorul schemei binomiale (bilei revenite), deci

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 6 \\ \frac{1}{3^6} & C_6^1\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 & C_6^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 & & \left(\frac{2}{3}\right)^6 \end{pmatrix}.$$

Prin definiţie

$$F(x)=P(X<x)=\sum_{k<x}P(X=k).$$

Atunci

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{1}{3^6} & 0<x\le 1 \\ \frac{1}{3^6}\sum\limits_{k=0}^{1}C_6^k2^k & 1<x\le 2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1}{3^6}\sum\limits_{k=0}^{5}C_6^k2^k & 5<x\le 6 \\ 1 & x>6 \end{cases}$$

b) Se foloseşte schema hipergeometrică, deci:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 6 \\ \frac{C_{10}^1}{C_{15}^6} & \frac{C_{10}^2C_5^4}{C_{15}^6} & & \frac{C_5^0}{C_{15}^6} \end{pmatrix}$$

şi

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \frac{C_{10}^1}{C_{15}^6} & 1<x\le 2 \\ \frac{1}{C_{15}^6}\sum\limits_{k=1}^{2}C_{10}^kC_5^{6-k} & 2<x\le 3 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1}{C_{15}^6}\sum\limits_{k=1}^{2}C_{10}^kC_5^{6-k} & 5<x\le 6 \\ 1 & x>6 \end{cases}$$

18 Se consideră numărul complex $a + ib$ unde a și b sunt determinate prin aruncarea unui zar. Se cere probabilitatea ca numărul complex astfel obținut să se găsească pe cercul

a) $x^2 + y^2 = 17$

b) $x^2 + y^2 = 7$

Rezolvare

Asociem v. a. independente X_1 și X_2 celor două experiențe de determinare a numerelor a și b.

Numărul complex $z = a + ib$ se găsește pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 = r^2$ dacă $|z^2| = r^2$, deci când $a^2 + b^2 = r^2$.

Fiecare din v. a. X_1, X_2 are repartiția următoare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

a) $P(X_1^2 + X_2^2 = 17) = \sum_k P(X_1^2 = k)P(X_2^2 = 17 - k)$.

Suma se face după toți acei k pentru care k și $17 - k$ aparțin mulțimii $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$. Deci

$$P(X_1^2 + X_2^2 = 17) = P(X_1^2 = 1)P(X_2^2 = 16) + P(X_1^2 = 16)P(X_2^2 = 1) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

b) $P(X_1^2 + X_2^2 = 7) = \sum_k P(X_1^2 = k)P(X_2^2 = 7 - k) = 0$

întrucât în acest caz nu există nici un număr k astfel încât $k, 7 - k \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

19 Se consideră ecuația $ax + by + c = 0$ unde coeficienții a, b, c se determină prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca dreapta astfel obținută să treacă prin punctul de coordonate $(1, -1)$?

Rezolvare

Experienței de aruncare a unui zar îi atașăm v.a. care ia ca valori numărul de puncte apărut, având repartiția

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Coeficienții ecuației sunt v.a. independente care au aceleași repartiții ca și X. Vom nota aceste variabile, X_1, X_2, X_3.

Dreapta trece prin punctul $(1, -1)$ dacă $X_1 - X_2 + X_3 = 0$. Prin urmare

$$P(X_1 - X_2 + X_3 = 0) = P(X_1 + X_3 = X_2) = \sum_{k=1}^{6} P[(X_1 + X_3 = k) \cap (X_2 = k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{6} P(X_1 + X_3 = k)P(X_2 = k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} P(X_1 + X_3 = k) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{36} = \frac{5}{72}.$$

20. Fiecare coeficient al ecuației $a\cos x - b = 0$ se determină prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația dată să fie compatibilă?

Rezolvare

Cei doi coeficienți ai ecuației sunt v.a. independente, fie ele X_1, X_2, cu valori strict pozitive, având aceeași repartiție.

Pentru ca ecuația dată să fie compatibilă, ar trebui ca $\frac{b}{a} \le 1$, deoarece $\frac{b}{a} > 0$ și $\cos x$ ia valori în intervalul $[-1, 1]$. Deci

$$P\left(\frac{X_2}{X_1} \le 1\right) = P(X_2 \le X_1) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)\cdot P(X_2 \le k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} P(X_2 \le k) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

21. Fie v.a. independente

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix},\ Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine $M(X)$, $M(Y)$.
b) Să se afle v.a. $Z = X \cdot Y$ și să se calculeze $M(Z)$.
c) Ce relație există între valorile medii ale v.a. X, Y și Z?

Rezolvare

a) V.a. sunt discrete, deci:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0{,}2,\ M(Y) = \sum_{j=1}^{4} y_j q_j = 1{,}6.$$

b) Se obține repartiția lui Z folosind independența v.a. X și Y:

$$Z: \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}12 & 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}44 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

și $\quad M(Z) = 0{,}32.$

c) Se verifică galitatea

$$M(Z) = M(X)\cdot M(Y),$$

care are loc datorită independenței.

22. O persoană scrie n scrisori la n corespondenți. Amestecă scrisorile și le introduce la întâmplare în n plicuri pe care erau scrise adresele dinainte. Se cere valoarea medie a numărului de concordanțe (un destinatar să primească scrisoarea adresată lui).

Rezolvare

Fie X v.a. care reprezintă numărul de concordanțe. Considerăm v.a. X_k care ia valoarea 1 sau 0, după cum pentru plicul k s-a obținut o concordanță sau nu. Atunci:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

și deci $\quad M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$

Fiecare variabilă X_k, $k = \overline{1,n}$ are aceeași repartiție. Avem

$$P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

și $$P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = 1 - \frac{1}{n}$$

pentru toți $k = \overline{1,n}$. Deci

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, k = \overline{1,n}.$$

Atunci $M(X_k) = \frac{1}{n}$ și $M(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

23. Se consideră v.a.:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Să se afle constantele a și b astfel încât variabila $Y = aX + 3b$ să aibă media 0 și dispersia 1.

Rezolvare

Folosind proprietățile mediei și pe cele ale dispersiei, obținem:

$$M(Y) = aM(X) + 3b = 0$$
$$D(Y) = a^2D(X) = 1$$
$$M(X) = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$
$$M(X^2) = \frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{12} = \frac{13}{3}$$
$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{13}{3} - \frac{121}{36} = \frac{35}{36}$$

Deci: $$\begin{cases} \frac{11}{6}a + 3b = 0 \\ \frac{35}{36}a^2 = 1 \end{cases}$$

Din a doua ecuație se obține $a = \pm\frac{6}{\sqrt{35}}$.

Pentru $a = \frac{6}{\sqrt{35}}$, găsim $b = -\frac{11}{18}a = -\frac{11}{3\sqrt{35}}$.

Pentru $a = -\frac{6}{\sqrt{35}}$, obținem $b = \frac{11}{3\sqrt{35}}$.

24. Fie X o v.a. discretă astfel încât $P(X=x) = \frac{(1-p)^x}{-x\ln p}$, $x = 1, 2, \ldots$ şi $P(X=0)=0$, unde $0 < p < 1$. Să se determine $M(X)$ şi $D(X)$.

Rezolvare

Pentru calculul mediei folosim definiţia. Avem:

$$M(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} -x\frac{(1-p)^x}{x\ln p} = -\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(1-p)^x}{\ln p} = -\frac{1}{\ln p}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x =$$

$$= -\frac{1}{\ln p}\left[\frac{1}{1-(1-p)}-1\right] = -\frac{1}{\ln p}\cdot\frac{1-p}{p} = \frac{1-p}{-p\ln p}.$$

Pentru calculul dispersiei folosim formula

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2.$$

Deoarece

$$M(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} -x^2\frac{(1-p)^x}{x\ln p} = -\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x(1-p)^x}{\ln p} =$$

$$= -\frac{1}{\ln p}\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^x = -\frac{1}{\ln p}\cdot\frac{1-p}{p^2} = -\frac{1-p}{p^2\ln p},$$

obţinem că

$$D(X) = -\frac{1-p}{p^2\ln p} - \frac{(1-p)^2}{p^2\ln^2 p} = \frac{(1-p)(1-p+\ln p)}{-p^2\ln^2 p}.$$

25. Într-o urnă sunt α bile albe şi β bile negre. Se extrag pe rând n bile astfel încât, o dată extrasă o bilă, ea nu se reintroduce în urnă înaintea următoarei extrageri. Fie X numărul de bile albe extrase. Să se determine $M(X)$ şi $D(X)$.

Rezolvare

Se ştie de la schema bilei nerevenite că

$$P(X=k) = \frac{C_\alpha^k C_\beta^{n-k}}{C_{\alpha+\beta}^n}.$$

Vom introduce v.a. X_j, $1 \le j \le n$ definite astfel:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă cea de-a } j \text{ bilă extrasă este albă} \\ 0, & \text{dacă cea de-a } j \text{ bilă extrasă este neagră} \end{cases}$$

Rezultă uşor că:

$$M(X_j) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ D(X_j) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2},\ 1 \le j \le n.$$

Pentru $j \ne k$ considerăm v. a. produs X_jX_k.

Atunci

$$X_jX_k = \begin{cases} 1, & \text{dacă la extracţia } j \text{ şi la extracţia } k \text{ au apărut bile albe} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Deoarece

$$P(X_jX_k = 1) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}$$

şi $$P(X_jX_k = 0) = 1 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}, j \neq k$$

urmează că

$$M(X_jX_k) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}, j \neq k$$

V. a. X_j, $1 \leq j \leq n$ sunt dependente şi

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Avem

$$M(X) = \sum_{j=1}^{n} M(X_j) = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}.$$

În plus

$$\operatorname{cov}(X_j, X_k) = M(X_jX_k) - M(X_j)M(X_k) =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{-\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta-1)}.$$

Aşadar

$$D(X) = D\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} D(X_j) + 2\sum_{\substack{j<k \\ j,k=1}}^{n} \operatorname{cov}(X_j, X_k) =$$

$$= \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} - 2C_n^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta-1)} =$$

$$= \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\left[1 - \frac{n-1}{\alpha+\beta-1}\right] = \frac{n\alpha\beta(\alpha+\beta-n)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta-1)}.$$

26 Se fac trageri asupra unui obiect până când acesta este doborât. Pentru doborârea lui este suficientă o singură tragere reuşită. La fiecare tragere în parte, probabilitatea de succes este $\frac{1}{3}$. Se cer valoarea medie şi dispersia numărului de trageri.

Rezolvare

Fie X numărul de trageri necesare. Aceasta înseamnă că primele $X-1$ trageri sunt nereuşite, iar tragerea X este reuşită.

Se observă că $P(X = 1) = \frac{1}{3}$. Evenimentul $(X = 2)$ se poate scrie ca intersecţia a două evenimente independente: „prima tragere este ratată" şi „a doua tragere este reuşită".

Rezultă că

$$P(X=k)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\qquad\frac{2}{3}\;\;\frac{1}{3}=\frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

Tabloul repartiției variabilei X este:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \dots \end{pmatrix}.$$

În consecință,

$$M(X)=1\quad\frac{1}{3}+2\cdot\frac{2}{3^2}+\dots+k\cdot\frac{2^{k-1}}{3^k}+\dots=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\dots\right).$$

Pentru a obține suma seriei de mai sus, vom calcula mai întâi suma seriei mai generale:

$$1+2x+3x^2+\dots+kx^{k-1}+\dots\ (0<x<1)$$

care este derivata funcției

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+\dots+x^k+\dots$$

Se obține

$$1+2x+3x^2+\dots+kx^{k-1}+\dots=\frac{1}{(1-x)^2}\ (*).$$

Luând acum $x=\frac{2}{3}$ obținem

$$1+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\dots=9$$

și deci $\quad M(X)=3.$

Pentru calculul dispersiei lui X vom folosi formula

$$D(X)=M(X^2)-M(X)^2.$$

Observăm că repartiția variabilei X^2 este

$$X^2:\begin{pmatrix} 1 & 2^2 & 3^3 & & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & & \dots \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$M(X^2)=\frac{1}{3}\left(1^2+2^2\cdot\frac{2}{3}+3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots\right).$$

Pentru calculul lui $M(X^2)$ vom scrie egalitatea (*) sub forma

$$x+2x^2+3x^3+\dots+kx^k+\dots=\frac{x}{(1-x)^2},\ 0<x<1$$

iar prin derivare vom obține

$$1^2+2^2\cdot x+3^2\cdot x^2+\dots+k^2x^{k-1}+\dots=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Această egalitate scrisă pentru $x = \frac{2}{3}$ conduce la

$$M(X^2) = 15$$

şi în final la

$$D(X) = 15 - 9 = 6.$$

27. Să se arate că dacă v. a. pozitivă X are valoarea medie m şi

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} n P(n \le X < n + 1),$$

atunci $p \le m \le 1 + p$.

Rezolvare

Întrucât o anumită valoare a lui X se găseşte cu certitudine într-unul din intervalele $[n, n + 1)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ putem scrie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n \le X < n + 1) = 1$$

Construim acum v. a. discrete Y şi Z astfel:

$$Y = n \text{ dacă } n \le X < n + 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$Z = n + 1 \text{ dacă } n \le X < n + 1 \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se observă că

$$Y \le X < Z$$

de unde obţinem

$$M(Y) \le M(X) \le M(Z) \ (*)$$

Valorile medii ale v.a. Y şi Z sunt:

$$M(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(Y = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n \le X < n + 1) = p$$

$$M(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P(Z = n + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P(n \le X < n + 1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nP(n \le X < n + 1) + \sum_{n=0}^{\infty} P(n \le X < n + 1) = p + 1.$$

Revenind la relaţia (*) obţinem

$$p \le m \le 1 + p.$$

28. V. a. pozitive X_n, $n \ge 1$ au aceeaşi valoare medie m. Fie $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, iar X o v. a. care ia valori întregi şi pozitive, astfel încât dacă

$$Y_k = \begin{cases} 1 \text{ dacă } X = k \\ 0 \text{ dacă } X \ne k \end{cases}, k = 1, 2, 3, \ldots$$

atunci v.a. X_k şi $Z_k = Y_1 + \ldots + Y_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ sunt independente. Să se arate că:

$$M(S_X) = mM(X).$$

În particular, dacă v. a. X_n, $n \geq 1$ sunt pozitive, independente şi au aceeaşi lege de probabilitate, iar

$$N = N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$$
$$N = 0 \text{ dacă } S_1 = X_1 > t$$

atunci v.a. $X = N + 1$ verifică ipotezele făcute mai sus asupra variabilei X şi deci verifică concluzia problemei.

Rezolvare

Din definiţia valorii medii a unei v. a. discrete rezultă că

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$$
$$M(Y_k) = P(X = k) + 0\,P(X \neq k) = P(X = k).$$

În consecinţă

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kM(Y_k).$$

Să mai observăm că

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k = 1$$

deoarece în funcţie de valoarea pe care o ia X una dintre variabilele Y_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) este egală cu 1, toate celelalte luând valoarea zero. De aici reiese că v. a. X_k şi $Y_k + Y_{k+1} + \ldots = 1 - Z_k$ sunt independente, oricare ar fi $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Pe de altă parte, întrucât egalităţile $(X = k)$ şi $(Y_k = 1)$ ($k = 1, 2, \ldots$) sunt echivalente, rezultă că

$$S_X = S_1Y_1 + S_2Y_2 + S_3Y_3 + \ldots$$

şi putem deci scrie

$$\begin{aligned}M(S_X) &= M(S_1Y_1) + M(S_2Y_2) + M(S_3Y_3) + \ldots = M(X_1Y_1) + M[(X_1+X_2)Y_2] + \\ &+ M[(X_1 + X_2 + +X_3)Y_3] + \ldots = M[X_1(Y_1 + Y_2 + +Y_3 + \ldots)] + \\ &+ M[X_2(Y_2 + Y_3 + \ldots)] + M[X_3(Y_3 + \ldots)] + \ldots = mM(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots) + \\ &+ mM(Y_2 + Y_3 + \ldots) + mM(Y_3 + \ldots)] = \\ &= m(M(Y_1) + 2M(Y_2) + 3M(Y_3) + \ldots) = mM(X).\end{aligned}$$

În cazul particular considerat este clar că v. a. X_n ($n \geq 1$) având aceeaşi lege de probabilitate au şi aceeaşi valoare medie. Pe de altă parte v. a. X_k şi Z_k ($k = 2, 3, \ldots$) sunt independente deoarece aceasta din urmă se exprimă numai cu ajutorul v. a. $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$.

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } S_{k-1} > t \\ 0 & \text{dacă } S_{k-1} \leq t \end{cases} \quad k = 2, 3, \ldots$$

Observaţie. Pe parcursul demonstraţiei am folosit următoarea proprietate

$$M(X_1 + X_2 + \ldots) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots$$

în care apare o mulţime numărabilă de v. a., proprietate care este valabilă în condiţii destul de generale precum şi în cazul de faţă.

29. Se consideră evenimentele independente $A_1, A_2, ..., A_n$ care au probabilităţile de realizare cunoscute $P(A_i) = p_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Se cer valoarea media şi dispersia numărului de evenimente care se realizează.

Rezolvare

Metoda 1.

Fie X numărul evenimentelor care se realizează. Conform schemei lui Poisson, $P(X = k)$ $(k = 0, 1, ..., n)$ este coeficientul lui x^k din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2) ... (p_nx + q_n)$$

unde $q_i = 1 - p_i$, $1 \le i \le n$. Dacă

$$Q(x) = P_0 + P_1 x + P_2x^2 + ... + P_nx^n$$

atunci repartiţia lu X este dată de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n \\ P_0 & P_1 & P_2 & & P_n \end{pmatrix}$$

şi valoarea sa medie este

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} kP_k .$$

Derivând $Q(x)$ obţinem:

$$Q'(x) = P_1 + 2xP_2 + ... + nx^{n-1}P_n$$

şi $$Q'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP_k = M(X).$$

Derivând $Q(x)$ în prima formă, obţinem:

$$Q'(x) = p_1\prod_{i\neq 1}(p_ix+q_i) + p_2\prod_{i\neq 2}(p_ix+q_i) + ... + p_n\prod_{i\neq n}(p_ix+q_i)$$

şi $$Q'(1) = p_1 + p_2 + ... + p_n.$$

Egalând cele două valori obţinute pentru $Q'(1)$, obţinem

$$M(X) = p_1 + p_2 + ... + p_n.$$

Pentru calculul dispersiei folosim formula

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2$$

şi deci trebuie să determinăm $M(X^2)$. Avem:

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2P_k .$$

Din derivarea egalităţii

$$xQ'(x) = P_1x + 2P_2x^2 + ... + nP_nx^n$$

rezultă $$Q'(x) + xQ''(x) = P_1 + 2^2P_2x + ... + n^2P_nx^{n-1}$$

şi $$Q'(1) + Q''(1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P_k = M(X^2).$$

Derivând $Q'(X)$ şi apoi luând $x = 1$, găsim că

$$Q''(1) = p_1\sum_{i\neq 1} p_i + p_2\sum_{i\neq 2} p_i + ... + p_n\sum_{i\neq n} p_i$$

$$Q''(1) = p_1(M(X) - p_1) + p_2(M(X) - p_2) + ... + p_n(M(X) - p_n)$$

$$Q''(1) = M(X)(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) =$$
$$= M(X)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2).$$

Înlocuind $M(X^2)$ în respectiva dispersie, obţinem

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = p_1 + p_2 + \dots + p_n - p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2 =$$
$$= p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n.$$

Metoda 2

Introducem v.a. X_k, $k = 1, 2, \dots, n$.

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{dacă } A_k \text{ se realizează} \\ 0, & \text{dacă } A_k \text{ nu se realizează} \end{cases}.$$

Numărul evenimentelor care se realizează este în acest caz

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

şi deci $\quad M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$.

Repartiţia v.a. X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) fiind

$$X_k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(A_k) & 1 - P(A_k) \end{pmatrix},$$

avem: $\quad M(X_k) = P(A_k) = p_k$

şi deci $\quad M(X) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

V.a. X_k sunt independente deoarece evenimentele A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sunt independente. Această observaţie ne permite să scriem

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Deoarece pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$

$$D(X_k) = M(X_k^2) - M(X_k)^2 = p_k - p_k^2 = p_kq_k$$

deducem că

$$D(X) = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n.$$

30 Să se calculeze momentul iniţial de ordinul k al v. a. X care reprezintă numărul de puncte obţinute la aruncarea unui zar.

Repartiţia v.a. X este

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Rezolvare

Avem:

$$m_k = M_k(X) = \frac{1}{6}(1^k + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k).$$

În particular, pentru $k = 1$ se obţine $M_1(X) = M(X) = \frac{7}{2}$.

31\. a) Fie X și Y două v. a. independente astfel ca

$$M(X) = M(Y) = 0$$
$$M(X^3) = 0$$
$$M(X^4) = 3[M(X^2)]^2$$
$$M(Y^4) = 3[M(Y^2)]^2.$$

Notăm

$$Z = X + Y.$$

Să se arate că $M(Z^4) = 3[M(Z^2)]^2$.

b) Presupunem că Y are repartiția

$$Y : \begin{pmatrix} -q & p \\ p & q \end{pmatrix}, 0 < p < 1,\ p + q = 1.$$

Să se determine p și q astfel încât Y să satisfacă condițiile punctului a).

Rezolvare

a) Din ipoteză

$$M(X^4) = 3[M(X^2)]^2$$
$$M(Y^4) = 3[M(Y^2)]^2,$$

iar X și Y sunt independente. Dacă $Z = X + Y$, avem:

$$M(Z^2) = M(X^2) + M(Y^2) + 2M(X)M(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$
$$M(Z^4) = M(X^4) + M(Y^4) + 4M(X^3)M(Y) + 4M(X)M(Y^3) + 6M(X^2)M(Y^2) =$$
$$= 3\sigma_1^4 + 3\sigma_2^4 + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 = 3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 = 3[M(Z^2)]^2$$

unde $\sigma_1^2 = M(X^2)$ și $\sigma_2^2 = M(Y^2)$.

b) Avem:

$$M(Y) = 0$$
$$M(Y^2) = pq^2 + qp^2 = pq$$
$$M(Y^3) = -pq^3 + qp^3 = pq(p^2 - q^2)$$
$$M(Y^4) = pq^4 + qp^4 = pq(p^3 + q^3).$$

Deoarece $M(Y^4) = 3[M(Y^2)]^2$, obținem

$$pq(p^3 + q^3) = 3p^2q^2.$$

Ținând seama de relația $p + q = 1$, obținem

$$\begin{cases} p^3 + q^3 = 3pq \\ p + q = 1 \end{cases}.$$

Notăm $pq = s$. Relația

$$(p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q)$$

devine $\quad 1 = 6s,$

iar p și q sunt rădăcinile ecuației

$$t^2 - t + \frac{1}{6} = 0,$$

mai precis

$$p = \frac{3+\sqrt{3}}{6}; \qquad q = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

32. V. a X poate lua orice valori întregi $n \geq 0$, cu probabilitățile

$$p_n = P(X = n) = \frac{k}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Să se calculeze p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, știind că $M(X) = m$.

b) Să se studieze existența momentelor $M(X^r)$, $r = 2, 3, \ldots$

Rezolvare

a) Observăm că

$$\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{2}{\alpha+n+1} + \frac{1}{\alpha+n+2}\right)$$

și din condiția

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \frac{k}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{2}{\alpha+n+1} + \frac{1}{\alpha+n+2}\right) = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\right) = 1$$

se obține

$$k = 2\alpha(\alpha + 1).$$

Pe de altă parte,

$$M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} =$$

$$= 2\alpha(\alpha+1)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} - \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\right] =$$

$$= 2\alpha(\alpha+1)\left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{2\alpha(\alpha+1)}\right] = \frac{\alpha^2}{\alpha+2}.$$

Impunem acum condiția

$$M(X) = \frac{\alpha^2}{\alpha+2} = m$$

și determinăm astfel constanta α care va fi înlocuită în

$$p_n = P(X = n) = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru a obține probabilitățile p_n.

b) Conform definiției,

$$M(X^r) = \sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}.$$

Pentru $r \geq 2$, seria este divergentă, deci nu există $M_r(X)$ pentru $r \geq 2$.

33. Se consideră v.a.

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $M(X)$, $M(3X-2)$, $M_2(X)$, momentele centrate de ordinele 1, 2, 3, funcția generatoare de momente și funcția caracteristică.

Rezolvare

Se obțin:

$$M(X) = 0{,}9;\ M(3X-2) = 0{,}7;\ M_2(X) = 2{,}1$$
$$\mu_1 = 0;\ \mu_2 = D(X) = 1{,}29;\ \mu_3 = -0{,}912$$
$$g(t) = 0{,}2e^{-t} + 0{,}1 + 0{,}3e^{t} + 0{,}4e^{2t}$$

și $$\varphi(t) = 0{,}2e^{-it} + 0{,}1 + 0{,}3e^{it} + 0{,}4e^{2it}.$$

34. V.a. X ia valori numere naturale cu probabilitățile

$$P(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}},\ k \in \mathbf{N},\ a > 0.$$

Să se determine funcția caracteristică a lui X și cu ajutorul ei să se afle media și dispersia.

Rezolvare

Conform definiției,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot P(X=k) = \frac{1}{1+a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{it}\frac{a}{1+a}\right)^k = \frac{1}{1+a}\cdot\frac{1}{1-e^{it}\dfrac{a}{1+a}} = \frac{1}{a+1-ae^{it}}.$$

Se știe că

$$M_k(X) = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0).$$

Atunci obținem:

$$\varphi'(0) = ai \text{ și } \varphi''(0) = (a + 2a^2)i^2$$

deci $$M(X) = a,\ M_2(X) = a + 2a^2$$

și $$D(X) = a(a + 1).$$

35. Se aruncă două zaruri. Să se scrie funcția caracteristică a v.a. X care dă numărul total de puncte obținut pe cele două zaruri.

Rezolvare

Fie X_1 și X_2 v.a. care reprezintă numărul de puncte obținute pe fiecare zar. Atunci

$$X = X_1 + X_2,$$

unde X_1 și X_2 sunt independente. Deci

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t).$$

Cum X_1 şi X_2 au aceeaşi repartiţie dată de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

avem $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} e^{itk}$

şi deci $\varphi_X(t) = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{6} e^{itk}\right)^2.$

36. Fie X o v.a. pentru care se ştie că

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1}, k \in \mathbb{N}, p, q > 0, p + q = 1.$$

Să se determine funcţia caracteristică şi cu ajutorul acesteia să se calculeze valoarea medie şi dispersia lui X.

Rezolvare

Conform definiţiei funcţiei caracteristice, avem:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot pq^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (qe^{it})^k = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = \frac{ipqe^{it}}{(1-qe^{it})^2}$$

şi $$\varphi''(t) = \frac{i^2pqe^{it}(1+qe^{it})}{(1-qe^{it})^3}.$$

Deci

$$M(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \frac{q}{p}$$

$$M_2(X) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = \frac{q(1+q)}{p^2}$$

şi $$D(X) = M_2(X) - M^2(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Observăm că am folosit formula

$$M_k(X) = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0).$$

37. Dacă variabilele $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt independente şi au repartiţiile

$$X_k : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2^k} & \frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, k = 1, 2, ..., n,$$

să se determine funcţia caracteristică a v.a. $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Rezolvare

Conform definiţiei, avem:

$$\varphi_{X_k}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{it}{2^k}} + e^{\frac{it}{2^k}}\right) = \cos\frac{t}{2^k}, k = 1, 2, ..., n,$$

şi $$\varphi_X(t) = \cos\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2^2}\cdot...\cdot\cos\frac{t}{2^n} = \frac{\sin t}{2^n \sin\frac{t}{2^n}}.$$

38. O v.a. are funcţia caracteristică

$$\varphi(t) = \frac{1}{8}(1 + e^{it})^3.$$

Să se determine $M(X)$, $D(X)$ şi funcţia de repartiţie.

Rezolvare

Avem:

$$M(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0),$$

unde $$\varphi'(t) = \frac{3}{8} i\, e^{it}(1 + e^{it})^2 \text{ şi } \varphi'(0) = \frac{3}{2}i.$$

Rezultă că $M(X) = \frac{3}{2}$.

Avem

$$M(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0),$$

unde $$\varphi''(t) = \frac{3}{8}i^2 e^{it}(1 + e^{it})^2 + \frac{6}{8}i^2 e^{2it}(1 + e^{it})$$

şi $$\varphi''(0) = \frac{3}{8}i^2\cdot 4 + \frac{6}{8}i^2\cdot 2 = 3i^2.$$

Rezultă deci că

$$M(X^2) = 3 \text{ şi } D(X) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Observăm că funcţia caracteristică se scrie

$$\varphi(t) = \frac{1}{8}(1 + 3e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it}),$$

de unde deducem că v.a. X are repartiţia:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

şi deci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 < x \le 2. \\ \frac{7}{8}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

39. Se dau funcţiile caracteristice

a) $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$;

b) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{it}}{2}\right)^{-1}$

Să se scrie funcţiile de repartiţie corespunzătoare.

Rezolvare

a) Se observă că $\varphi(t)$ se poate scrie

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}(1 + e^{it})^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{4}e^{2it},$$

de unde rezultă că v.a. a cărei funcţie caracteristică este $\varphi(t)$ are repartiţia

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Funcţia de repartiţie a v.a. X este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

b) Dacă se dezvoltă în serie funcţia caracteristică, se obţine:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{it}}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}e^{it}+\frac{1}{2^3}e^{2it}+\dots.$$

V.a. corespunzătoare lui $\varphi(t)$ este:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \dots \end{pmatrix}.$$

Funcţia de repartiţie a v.a. X este

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \le 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^{k+1}}, & n-2 < x \le n-1,\ n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

40. Să se determine funcţiile de repartiţie corespunzătoare următoarelor funcţii caracteristice:

a) $\cos t$;

b) $\cos^2 t$.

Rezolvare

a) Se ştie că:

$$\cos t = \frac{e^{-it}+e^{it}}{2}$$

şi atunci funcţia caracteristică se poate scrie sub forma:

$$\varphi(t) = \cos t = \frac{1}{2}e^{it\cdot(-1)} + \frac{1}{2}e^{it\cdot 1}.$$

Ţinând seama de definiţia funcţiei caracteristice a unei v.a. discrete, lui $\varphi(t)$ îi corespunde v.a. X cu repartiţia:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Deci

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \le 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

b) Deoarece

$$\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2,$$

vom avea

$$\varphi(t) = \cos^2 t = \frac{1}{4}e^{it(-2)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it\cdot 2},$$

funcție caracteristică ce corespunde v.a. X cu repartiția

$$X: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{4}, & -2 < x \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

41. Să se determine densitatea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Rezolvare

Funcția caracteristică $\varphi(t)$ se mai poate scrie sub forma

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ikt}.$$

Aplicăm teorema de inversiune sub forma:

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-itk}}{it}\varphi(t)\, dt, x > 0,$$

și obținem

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itk} - e^{it(k-x)}}{it}\, dt =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{\pi t}\, dt - \int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{t}\, dt\right).$$

Deoarece $x > 0$, rezultă că

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{\pi t}\, dt = \frac{1}{2}$$

și de aici urmează că

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2} - e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt - e^{-\lambda}\sum_{k=[x]+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt.$$

Cum avem egalitățile

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t(h-x)}{\pi t}\,dt = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{dacă } h < x \\ 0, & \text{dacă } h = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } h > x \end{cases}$$

și
$$1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!},$$

obținem

$$F(x) - F(0) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Se vede că se obține funcția de repartiție a unei variabile Poisson și deci funcția caracteristică dată corespunde v.a. X cu

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

2.2. Variabile aleatoare continue

1. Să se determine k astfel încât funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & -k < x < k \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

să fie densitatea de probabilitate a unei v. a.

Rezolvare

Condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ revine la

$$\int_{-k}^{k} kx^2\, dx = 1 \Leftrightarrow k\frac{x^3}{3}\Big|_{-k}^{k} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k^4}{3} = 1.$$

Prin urmare $k^4 = \frac{3}{2}$ şi deci $k = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}}$.

Soluţia negativă a ecuaţiei nu este acceptată deoarece într-un asemenea caz nu ar fi îndeplinită condiţia

$$f(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $k = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}}$ este îndeplinită şi condiţia de mai sus şi deci f este densitate de probabilitate.

2. Arătaţi că următoarele funcţii sunt densităţi de probabilitate:

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = (\theta + 1)f_1(x) - \theta f_2(x),\ 0 < \theta < 1.$$

Rezolvare

Observăm că $f_1(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbf{R}$ şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

La fel $f_2(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbf{R}$ şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\, dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x}\, dx = -e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

În consecinţă,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = (\theta + 1)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx - \theta\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\, dx = (\theta + 1) - \theta = 1.$$

Deoarece

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)e^{-x} - 2\theta e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

vom avea $f(x) \ge 0$ pentru $x > 0$ dacă şi numai dacă

$$(\theta + 1)e^{-x} - 2\theta e^{-2x} \ge 0 \Leftrightarrow (\theta + 1)e^{-x} \ge 2\theta e^{-2x} \Leftrightarrow e^{x} \ge \frac{2\theta}{\theta+1}.$$

Deoarece $0 < \theta < 1$, raportul $\frac{2\theta}{\theta+1}$ este subunitar şi cum $x > 0$, rezultă că inegalitaea $e^x \ge \frac{2\theta}{\theta+1}$ este adevărată. Deci $f(x) \ge 0\ \forall\, x \ge 0$.

În concluzie, cele trei funcţii sunt densităţi de probabilitate.

3. Fie X o v. a. a cărei densitate este

$$f(x) = \begin{cases} c\ln\left(\frac{a}{x}\right), & 0 < x < a,\ a > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine constanta c astfel încât f să fie densitate de probabilitate.

Rezolvare

Se impun condiţiile $f(x) \ge 0\ \forall\, x \in \mathbf{R}$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^a \ln\left(\frac{a}{x}\right)dx = ca\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = ca(-te^{-t} - e^{-t})\Big|_0^{\infty} = ac.$$

Deci $c = \frac{1}{a}$ (s-a substituit $\ln\left(\frac{a}{x}\right) = t$). Deoarece $a > 0$, pentru $c = \frac{1}{a}$ este îndeplinită şi condiţia $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

4. Să se determine constanta c din intervalul $(0, 1)$ astfel încât funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c, 1+c] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie densitate de probabilitate.

Rezolvare

Din condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

obţinem

$$\int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{1-c}^{1+c} = \ln\frac{1+c}{1-c} = 1$$

ceea ce revine la

$$\frac{1+c}{1-c} = e$$

şi în concluzie

$$c = \frac{e-1}{e+1}.$$

5. V.a. X are o repartiţie a cărei densitate este dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le 0 \\ 2e^{-2x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$$

Care este probabilitatea ca X să nu fie mai mic ca 2?

Rezolvare

Avem:

$$P(X \ge 2) = \int_2^\infty f(x)\,dx = 2\int_2^\infty e^{-2x}\,dx = e^{-4}.$$

6. V. a X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = |x|\, e^{-x^2}, x \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze $P(0 < X < 4)$.

Rezolvare

Avem

$$P(0 < X < 4) = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 |x|\, e^{-x^2}\,dx = \int_0^4 x e^{-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{-16} e^t\,dt = -\frac{1}{2}[e^{-16}-1] = \frac{1-e^{-16}}{2}$$

cu substituţia $-x^2 = t$.

7. Se presupune că timpul de aşteptare în minute la o staţie de autobuz are funcţia de repartiţie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{x}{4}, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Se cer:

a) densitatea de probabilitate corespunzătore;

b) probabilitatea ca un călător să aştepte:

- mai mult de trei minute;
- între un minut şi trei minute;
- mai mult de trei minute, ştiind că a aşteptat mai mult de un minut;
- mai puţin de trei minute, ştiind că a aşteptat mai mult de un minut.

Rezolvare

a) Densitatea de probabilitate corespunzătoare este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{4}, & 2 \le x \le 4 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

b) Probabilităţile cerute se calculează astfel:

$$P(X > 3) = \int_3^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_3^4 dx = \frac{1}{4}.$$

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_2^3 dx = \frac{1}{4}.$$

$$P(X > 3 / X > 1) = \frac{P((X>3)\cap(X>1))}{P(X>1)} = \frac{P(X>3)}{P(X>1)} = \frac{1}{2}.$$

şi $$P(X < 3 / X > 1) = \frac{P(1<X<3)}{P(X>1)} = \frac{1}{2},$$

deoarece $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = \frac{1}{2}$.

8. Viaţa medie a unui anumit tip de piesă aparţinând unui aparat de radio, în ore, are următoarea densitate de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & \text{dacă } x > 100 \\ 0, & \text{dacă } x \le 100 \end{cases}$$

Să se calculeze:

a) probabiltatea ca o piesă să nu fie înlocuită în primele 150 de ore de funcţionare;

b) probabilitatea ca din trei piese de acel tip ale unui aparat de radio să nu se înlocuiască nici una în primele 150 de ore de funcţionare.

c) ştiind că o piesă funcţionează mai mult de 200 de ore, să se determine probabilitatea ca ea să nu funcţioneze mai mult de 300 de ore.

Rezolvare

a) Probabilitatea ca piesa să funcţioneze mai mult de 150 de ore este:

$$P(X > 150) = \int_{150}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{150}^{\infty} \frac{100}{x^2}\,dx = -\frac{100}{x}\Big|_{150}^{\infty} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}.$$

b) Fie A, B, C evenimentele ca cele trei piese să funcţioneze mai mult de 150 de ore. Probabilităţile lor sunt:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{3}.$$

Evenimentele A, B, C fiind idependente, probabilitatea realizării lor simultane va fi:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{8}{27}.$$

c) Fie A evenimentul ca o piesă să funcţioneze mai mult de 200 de ore şi B evenimentul ca ea să funcţioneze mai puţin de 300 de ore. Vom avea:

$$P(A / B) = P((X > 200) / (X < 300)) = \frac{P(200 < X < 300)}{P(X < 300)} =$$

bug!!

$$= \frac{\int_{200}^{300} \frac{100}{x^2}\, dx}{\int_{100}^{300} \frac{100}{x^2}\, dx} = \frac{-\frac{100}{x}\Big|_{200}^{300}}{-\frac{100}{x}\Big|_{100}^{300}} = \frac{-\frac{100}{300} + \frac{100}{200}}{-\frac{100}{300} + \frac{100}{100}} = \frac{1}{4}.$$

$P(X<300 / X>200)$

9. Să se arate că funcţia

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{b}}, & x > 0,\ b > 0 \end{cases}$$

este o funcţie de repartiţie.

Rezolvare

Funcţia $F(x)$ este continuă, deci, în particular, ea este continuă la stânga.

Dacă $x \le 0$, $F(x)$ este constantă, iar dacă $x > 0$, $F(x)$ este monoton crescătoare. Deci $F(x)$ este monoton nedescrescătoare.

În plus,

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

şi

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Deci $F(x)$ este o funcţie de repartiţie.

10. Funcţia de repartiţie a unei v.a. X este

$$F(x) = \begin{cases} a, & x \le 0 \\ bx^2, & 0 < x \le 1. \\ c, & x > 1 \end{cases}$$

Să se determine constantele a, b, c densitatea de probabilitate şi probabilitatea ca X să ia valori în $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare

Din condiţia $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, obţinem $a = 0$.

Din condiţia $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, obţinem $c = 1$.

Deoarece F este funcţia de probabilitate a unei v.a. continue, ea trebuie să fie continuă. Din această condiţie, obţinem $b = 1$. Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Atunci densitatea de repartiţie corespunzătoatre este

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Avem

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{3}{16}$$

sau $$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}.$$

11. V.a. X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

a) Să se scrie funcţia de repartiţie.
b) Să se calculeze $P(-1 < X < 1)$.

Rezolvare

a) Funcţia de repartiţie corespunzătoare este

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} t \,\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

b) Avem

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

12. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x}), & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \text{ unde } \alpha > 0.$$

a) Determinați k astfel ca f să fie densitatea de probabilitate a unei v.a. X.

b) Determinați funcția de repartiție corespunzătoare.

c) Determinați $P(X \ge 1)$.

Rezolvare

a) Trebuie ca $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} ke^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})\,dx = -\frac{ke^{-\alpha x}}{\alpha}\Big|_0^{\infty} + \frac{ke^{-2\alpha x}}{2\alpha}\Big|_0^{\infty} = \frac{k}{\alpha} - \frac{k}{2\alpha} = \frac{k}{2\alpha}.$$

Deducem că $k = 2\alpha$.

Pentru k găsit, condiția $f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este satisfăcută.

b) Pentru $x \le 0$, $F(x) = P(X < x) = 0$.

Pentru $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x 2\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})\,dx = -\frac{2\alpha e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big|_0^{\infty} + \frac{2\alpha e^{-2\alpha x}}{2\alpha}\Big|_0^{\infty} = 2-1 = 1.$$

Deci $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

c) Utilizăm probabilitatea evenimentului contrar și obținem:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X<1) = 1 - F(1) = 0.$$

13. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine constanta k astfel încât $f(x)$ să fie o densitate de probabilitate.

b) Să se afle funcția de repartiție corespunzătoare și apoi probabilitățile $P(X \ge 0)$, $P(X < 1 / X \ge 0)$.

Rezolvare

Din condiția $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem $k \ge 0$.

Din condița $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ obținem

$$k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}}.$$

Dar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\,\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$

Rezultă că $k = \frac{2}{\pi}$ (s-a făcut substituția $e^x = t$).

Așadar

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbf{R}.$$

b) Fie $x \in \mathbf{R}$. Atunci:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{e^x}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^{e^x} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^x).$$

Atunci

$$P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

și $$P(X < 1 / X \geq 0) = \frac{P((X<1)\cap(X\geq 0))}{P(X\geq 0)} = \frac{P(0 \leq X < 1)}{P(X \geq 0)} = \frac{F(1)-F(0)}{1-F(0)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} e - 1.$$

14. Se consideră v. a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

a) Să se determine constanta α.

b) Să se afle funcția de repartiție.

c) Să se calculeze $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right)$.

Rezolvare

a) Din condiția $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, obținem

$$\int_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-kx}\,dx = \alpha\frac{1}{k^3}\int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,dy = \alpha\frac{1}{k^3}\Gamma(3) = \frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

adică $\alpha = \frac{k^3}{2}$.

Pentru această valoare a lui α, este îndeplinită și condiția $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) În urma calculelor se obține

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2}e^{-kx}, & 0 < x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c) Avem $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e}$.

15. Arătați că $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x(2\alpha + x)}{\alpha(\alpha + x)^2}, & 0 < x \le \alpha, \\ \dfrac{\alpha^2(\alpha + 2x)}{x^2(\alpha + x)^2}, & x > \alpha \end{cases}$$

unde $\alpha > 0$, este densitatea de probabilitate a unei v.a.. Să se găsească mediana v.a..

Rezolvare

Pentru ca f să fie densitate de probabilitate, trebuie îndeplinite condițiile:

$f(x) \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$

și $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Prima condiție este evident satisfăcută.

Apoi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} \frac{x(2\alpha + x)}{\alpha(\alpha + x)^2}\,dx + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\alpha^2(\alpha + 2x)}{x^2(\alpha + x)^2}\,dx = I_1 + I_2,$

unde $$I_1 = \int_0^{\alpha} \frac{x(2\alpha + x)}{\alpha(\alpha + x)^2}\,dx = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{(t - \alpha)(\alpha + t)}{\alpha t^2}\,dt = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{t^2 - \alpha^2}{\alpha t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha} t \Big|_{\alpha}^{2\alpha} + \alpha \frac{1}{t}\Big|_{\alpha}^{2\alpha} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

și $$I_2 = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\alpha^2(\alpha + 2x)}{x^2(\alpha + x)^2}\,dx = \int_{2\alpha^2}^{\infty} \frac{\alpha^2}{t^2}\,dt = -\frac{\alpha^2}{t}\Big|_{2\alpha^2}^{\infty} = \frac{1}{2},$$

efectuând schimbările de variabilă $\alpha + x = t$ la prima integrală și $x(\alpha + x) = t$ la a doua integrală.

Deci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

și, în consecință, f este denitate de probabilitate.

Vom determina acum funcția de repartiție a v.a. care are densitatea de probabilitate f.

Dacă $x \le 0$, atunci

$$F(x) = P(X < x) = 0$$

Dacă $0 < x \le \alpha$, atunci

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t(2\alpha + t)}{\alpha(\alpha + t)^2}\,dt = \int_{\alpha}^{\alpha + x} \frac{(u - \alpha)(u + \alpha)}{\alpha u^2}\,du =$$

$$= \int_{\alpha}^{\alpha + x} \frac{u^2 - \alpha^2}{\alpha u^2}\,du = \frac{1}{\alpha} u \Big|_{\alpha}^{\alpha + x} + \frac{\alpha}{u}\Big|_{\alpha}^{\alpha + x} = \frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\alpha + x} = \frac{x^2}{\alpha(\alpha + x)},$$

cu schimbarea de variabilă $\alpha + t = u$.

Dacă $x > \alpha$, atunci

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_{\alpha}^{x} \frac{\alpha^2(\alpha+2t)}{t^2(\alpha+t)^2}\,dt = \frac{1}{2} + \int_{2\alpha^2}^{x(\alpha+x)} \frac{\alpha^2}{u^2}\,du = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{u}\Bigg|_{2\alpha^2}^{x(\alpha+x)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \alpha^2\left[\frac{1}{x(\alpha+x)} - \frac{1}{2\alpha^2}\right] = 1 - \frac{\alpha^2}{x(\alpha+x)}$$

cu schimbarea de variabilă $t(\alpha + t) = u$.

Prin urmare,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{\alpha(\alpha+x)}, & 0 < x \le \alpha \\ 1 - \dfrac{\alpha^2}{x(\alpha+x)}, & x > \alpha \end{cases}.$$

Pentru calculul medianei pe care o vom nota cu m_e, impunem condiţia:

$$F(m_e) = \frac{1}{2}.$$

În urma calculului se obţine $m_e = \alpha$.

16. V.a. X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ sau } x > \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Să se găsească mediana variabilei X.

Rezolvare

Mediana este numărul m_e care satisface egalitatea:

$$F(m_e) = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că

$$\frac{1}{2} = \int_0^{m_e} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{m_e} = \sin m_e$$

şi deci $\quad m_e = \dfrac{\pi}{6}.$

17. V.a. X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1,\ x \ge 1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

a) Să se afle funcția de repartiție corespunzătoare.

b) Să se determine densitățile de probabilitate ale v.a. $Y = e^X$, $Z = 2X^2 + 1$.

Rezolvare

a) Funcția de repartiție corespunzătoare lui f este:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 < x \le 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

b) Determină mai întâi funcția de repartție G a v.a. Y. Deoarece $Y > 0$, pentru orice $x \le 0$, avem

$$G(x) = P(Y < x) = 0.$$

Dacă $x > 0$, atunci

$$G(x) = P(Y < x) = P(e^X < x) = P(X < \ln x) = F(\ln x).$$

Așadar,

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right] \\ \frac{1+\ln x}{2}, & x \in \left(\frac{1}{e}, e\right] \\ 1, & x \in (e, \infty) \end{cases}$$

Densitatea de probabilitate corespunzătoare este

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(\frac{1}{e}, e\right) \\ \frac{1}{2x}, & x \in \left(\frac{1}{e}, e\right) \end{cases}.$$

Fie $H(x)$ funcția de repartiție a v.a. Z. Pentru $x \in (1, 3)$, avem $\sqrt{\frac{x-1}{2}} \in (0, 1)$, deci

$$H(x) = P(Z < x) = P(2X^2 + 1 < x) = P\left(X^2 < \frac{x-1}{2}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}} < X < \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) =$$

$$= F\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

Densitatea de probabilitate corespunzătoare este

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1, 3) \\ \frac{1}{2\sqrt{2(x-1)}}, & x \in (1, 3) \end{cases}.$$

18. V.a. X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin (-2, 2) \\ \dfrac{1}{4}, & \text{dacă } x \in (-2, 2) \end{cases}.$$

a) Să se determine funcția de repartiție $F(x)$.

b) Să se determine densitățile de probabilitate ale v.a. $Y = e^X$, $Z = 2X^2 + 1$.

Rezolvare

a) Funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{4}, & \text{dacă } -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}.$$

b) Fie G funcția de repartiție a v.a. Y. Atunci pentru $\frac{1}{e^2} < x < e^2$, avem:

$$G(x) = P(Y < x) = P(e^X < x) = P(X < \ln x) = F(\ln x) = \frac{2+\ln x}{4}.$$

Deci

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{e^2}\right] \\ \dfrac{2+\ln x}{4}, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{1}{e^2}, e^2\right) \\ 1, & \text{dacă } x \in \left(e^2, \infty\right) \end{cases}.$$

Densitatea de probabilitate corespunzătoare este:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin \left(\dfrac{1}{e^2}, e^2\right) \\ \dfrac{1}{4x}, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{1}{e^2}, e^2\right) \end{cases}.$$

Dacă H este funcția de repartiție a v.a. Z, atunci pentru $x \in (1, 9)$, avem:

$$H(x) = P(Z < x) = P(2X^2 + 1 < x) = P\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}} < X < \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) =$$

$$= F\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

Densitatea de probabilitate corespunzătoare este

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin (1, 9) \\ \dfrac{1}{4\sqrt{2(x-1)}}, & \text{dacă } x \in (1, 9) \end{cases}.$$

19. Pe axa Oy se ia punctul $A(0, 1)$ și prin acest punct se duce o dreaptă care face cu Oy unghiul α și intersectează Ox în punctul $P(\lambda, 0)$. Să se determine funcția de repartiție și densitatea de probabilitate a v.a. λ știind că α ia valori la întâmplare după legea de probabilitate dată de funcția de repartiție:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le -\frac{\pi}{4} \\ \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{2}, & \text{dacă } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}. \\ 1, & \text{dacă } x \ge \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

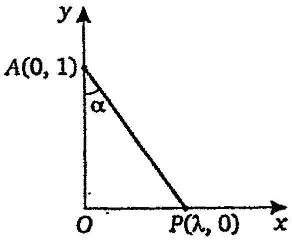


fig. 1

Rezolvare

Observăm că $\lambda = \text{tg}\,\alpha$.

Fie G funcția de repartiție a v.a. λ.

Atunci pentru $x \in (-1, 1)$.

$$G(x) = P(\lambda < x) = P(\text{tg}\,\alpha < x) = P(\alpha < \text{arctg}\,x) = F(\text{arctg}\,x) = \frac{2}{\pi}\text{arctg}\,x + \frac{1}{2}$$

și

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le -1 \\ \frac{2}{\pi}\text{arctg}\,x + \frac{1}{2}, & \text{dacă } -1 < x < 1. \\ 1, & \text{dacă } x \ge 1 \end{cases}$$

Densitatea de probabilitate corespunzătoare este

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin (-1, 1) \\ \frac{2}{\pi(1 + x^2)}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

20. V.a. X are funcția de repartiție F. Să se determine funcția de repartiție a v.a. $-X$. Dacă F este derivabilă, să se determine densitatea de probabilitate a lui $-X$ în funcție de $f = F'$.

Rezolvare

Fie G funcția de repartiție a variabilei $-X$ și $x \in \mathbf{R}$. Avem:

$$G(x) = P(-X < x) = P(X > -x) = 1 - P(X \le -x) = 1 - F(-x + 0).$$

Dacă F este derivabilă pe $\mathbf{R}$, atunci F este continuă pe $\mathbf{R}$ și deci densitatea de probabilitate g corespunzătoare funcției de repartiție G este dată de:

$$g(x) = G'(x) = f(-x), x \in \mathbf{R}.$$

21. Se consideră v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ şi $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$ definită prin $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

Demonstraţi că dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt independente, atunci

$$F_{Y_n}(y) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y).$$

Rezolvare

Avem

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P(X_1 < y, X_2 < y, ..., X_n < y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < y) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y).$$

Observăm în plus că dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ au aceeaşi funcţie de repartiţie $F_X(y)$, atunci

$$F_{Y_n}(y) = (F_X(y))^n.$$

22. Fie $X_1, ..., X_n$ v.a. independente şi $Y_1 = \min(X_1, ..., X_n)$ definită prin $Y_1(\omega) = \min(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

Arătaţi că

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_{X_i}(y)\right].$$

Rezolvare

Deoarece $X_1, ..., X_n$ sunt independente, avem

$$F_{Y_1}(y) = P(Y_1 < y) = 1 - P(Y_1 \geq y) = 1 - P(X_1 \geq y, X_2 \geq y, ..., X_n \geq y) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P(X_i < y)] = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_{X_i}(y)\right].$$

23. Presupunem că durata de funcţionare a unui bec este o v.a. cu densitatea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Dacă zece astfel de becuri sunt instalate simultan, care este repatiţia becului care se stinge primul?

Rezolvare

Fie X_i v.a. ce reprezintă durata de viaţă a becului i, $i = \overline{1,10}$.

Atunci $Y_1 = \min(X_1, ..., X_{10})$ este v.a. ce reprezintă durata de viaţă a becului care se stinge primul. Presupunem că X_i sunt independente. Avem:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

și $$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{100}x} & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Conform problemei precedente, avem:

$$f_{Y_1}(y) = 10[1 - F_X(y)]^9 \cdot f_X(y) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{y}{10}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}.$$

24. Să se demonstreze că orice combinație liniară convexă de funcții de repartiție este, de asemenea, o funcție de repatiție și că orice combinație liniară convexă de densități de probabilitate este o densitate de probabilitate.

Rezolvare

Fie F, F_2, ..., F_n funcții de repartiție și $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$, $c_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., n$, astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 1.$$

Atunci funcția

$$F = c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_nF_n$$

verifică proprietățile ce caracterizează o funcție de repartiție, mai precis

1) $0 \leq F(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbf{R}$,
2) F este monoton crescătoare,
3) F este continuă la stânga,
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$,

având în vedere că $F_1, F_2, ..., F_n$ verifică aceste condiții.

Analog, dacă $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt densități de probabilitate, deci sunt verificate condițiile:

1) $f_k \geq 0$,

2) f_k integrabilă pe $\mathbf{R}$ și $\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx = 1$, $k = 1, 2, ..., n$,

atunci și funcția

$$f = c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_nf_n$$

verifică aceste condiții: $f \geq 0$, f integrabilă pe $\mathbf{R}$ și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

deci f este o densitate de probabilitate.

25. Fie X o v.a. cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}.$$

Există $M(X)$?

Rezolvare

Conform definiției, media $M(X)$, dacă există, este dată de:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Deoarece

$$\lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty,$$

integrala prin care definim media nu este convergentă, deci media nu există.

26. Să se demonstreze că dacă v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt independente, identic repartizate și pozitive, atunci:

$$M\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Rezolvare

Fie v.a.

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}, Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2 + ... + X_n}, ..., Y_n = \frac{X_n}{X_1 + X_2 + ... + X_n}.$$

Observăm că numitorii nu pot fi nuli deoarece prin ipoteză $X_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Deoarece X_i sunt identic repartizate, și Y_i vor fi identic repartizate, și, deci

$$M(Y_1) = M(Y_2) = ... = M(Y_n).$$

Acum, deoarece

$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = 1,$$

avem

$$M(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n) = M(1) = 1$$

și $$M(Y_1) + M(Y_2) + ... + M(Y_n) = nM(Y_1) = 1.$$

Deci

$$M(Y_1) = \frac{1}{n},$$

adică $$M\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

27. Se consideră $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiă prin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ şi } x \ge 3 \\ \dfrac{\theta}{2}, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1-\theta}{2}, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

unde θ este o constantă fixată astfel încât $0 \le \theta \le 1$.

Determinaţi funcţia de repartiţie, media şi momentul de ordinul doi pentru v.a. X cu densitatea de probabilitate f.

Rezolvare

Pentru $x \le 0$, $F(x) = P(X < x) = 0$.

Dacă $0 < x < 1$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \frac{\theta}{2} dt = \frac{\theta t}{2}\Big|_0^x = \frac{\theta x}{2}.$$

Dacă $1 \le x \le 2$, atunci:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\theta}{2} dt + \int_1^x \frac{1}{2} dt = \frac{\theta t}{2}\Big|_0^1 + \frac{t}{2}\Big|_1^x = \frac{\theta}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\theta - 1}{2} + \frac{x}{2}.$$

Dacă $2 < x < 3$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\theta}{2} dt + \int_1^2 \frac{1}{2} dt + \int_2^x \frac{1-\theta}{2} dt = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} + \frac{(1-\theta)t}{2}\Big|_2^x =$$

$$= \frac{\theta + 1}{2} - \frac{2(1-\theta)}{2} + \frac{(1-\theta)x}{2} = \frac{3\theta - 1}{2} + \frac{(1-\theta)x}{2}.$$

Dacă $x \ge 3$, atunci $F(x) = 1$.

Aşadar, funcţia de repartiţie a v.a. X este:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{\theta x}{2}, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{\theta - 1}{2} + \dfrac{x}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3\theta - 1}{2} + \dfrac{(1-\theta)x}{2}, & 2 < x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}.$$

Conform definiţiei,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\theta x}{2} dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^3 \frac{(1-\theta)x}{2} dx = \frac{\theta}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 +$$

$$+ \frac{(1-\theta)x^2}{4}\Big|_2^3 = \frac{\theta}{4} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}(1-\theta) - (1-\theta) = \frac{8 - 4\theta}{4} = 2 - \theta.$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\theta x^2}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_2^3 \frac{(1-\theta)x^2}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\theta x^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 + \frac{(1-\theta)x^3}{6}\Big|_2^3 = \frac{\theta}{6} + \frac{7}{6} + \frac{19(1-\theta)}{6} = \frac{26-18\theta}{6}.$$

28. Se consideră $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\left[1 - \left|\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right|\right], & \alpha - \beta < x < \alpha + \beta \\ 0, & \text{altfel} \end{cases},$$

unde $-\infty < \alpha < \infty$ și $\beta > 0$.

a) Determinați funcția de repartiție corespunzătoare.

b) Determinați media.

Rezolvare

a) În urma calculelor, se obține:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha - \beta \\ \dfrac{(x-\alpha+\beta)^2}{2\beta^2}, & \alpha - \beta < x < \alpha \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{(2\beta+\alpha-x)(x-\alpha)}{2\beta^2}, & \alpha < x < \alpha + \beta \\ 1, & x \ge \alpha + \beta \end{cases}$$

b) Observăm că:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\left[1 - \dfrac{\alpha - x}{\beta}\right], & x \in (\alpha - \beta, \alpha) \\ \dfrac{1}{\beta}\left[1 - \dfrac{x-\alpha}{\beta}\right], & x \in (\alpha, \alpha + \beta). \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Prin urmare,

$$M(X) = \int_{\alpha-\beta}^{\alpha}\left[\frac{x}{\beta} - \frac{x(\alpha - x)}{\beta^2}\right]dx + \int_{\alpha}^{\alpha+\beta}\left[\frac{x}{\beta} - \frac{x(x-\alpha)}{\beta^2}\right]dx =$$

$$= \frac{x^2}{2\beta}\Big|_{\alpha-\beta}^{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha-\beta}^{\alpha} + \frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{\alpha-\beta}^{\alpha} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha}^{\alpha+\beta} - \frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{\alpha}^{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha}^{\alpha+\beta} =$$

$$= \frac{\alpha^2 - (\alpha-\beta)^2}{2\beta} - \frac{\alpha}{2\beta^2}\left[\alpha^2 - (\alpha-\beta)^2\right] + \frac{1}{3\beta^2}\left[\alpha^3 - (\alpha-\beta)^3\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\beta}\left[(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2\right] - \frac{1}{3\beta^2}\left[(\alpha+\beta)^3 - \alpha^3\right] + \frac{\alpha}{2\beta^2}\left[(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\beta}(\alpha + \beta - \alpha + \beta)(\alpha + \beta + \alpha - \beta) + \frac{\alpha}{2\beta^2}\left[(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 - 2\alpha^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3\beta^2}\left[2\alpha^3 - (\alpha-\beta)^3 - (\alpha+\beta)^3\right] =$$

$$= 2\alpha + \alpha + \frac{1}{3\beta^2}(3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3 + \beta^3) = 3\alpha - 2\alpha = \alpha.$$

Deci $M(X) = \alpha$.

29. Fie X o v.a. continuă cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} |1-x|, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Să se determine $M(X)$ și $D(X)$.

Rezolvare

Avem:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) = \int_0^2 x|1-x|dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_1^2 x(x-1)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 1.$$

Conform definiției,

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2|1-x|dx = \int_0^1 x^2(1-x)\,dx + \int_1^2 x^2(x-1)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Deci $D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

30. V.a X are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n!}x^n e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ unde } n \in \mathbf{N}.$$

Să se calculeze $M(X)$ și $D(X)$.

Rezolvare

Avem

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{n!}x^n e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1.$$

Dispersia $D(X)$ o calculăm conform formulei

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2.$$

Conform definiției,

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+2} e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\Gamma(n+3) = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2).$$

Deci $D(X) = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1.$

31. Fie X o v.a. având densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}$$

unde $-\infty < x < \infty$ și $\beta > 0$.

Să se calculeze media și dispersia variabilei aleatoare X.

Rezolvare

Densitatea de probabilitate a v.a. X se mai poate scrie sub forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{\frac{x-\alpha}{\beta}} & x \le \alpha \\ \frac{1}{2\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}} & x > \alpha \end{cases}$$

Conform definiției,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x}{2\beta} e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\,dx + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x}{2\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} x e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\,dx + \frac{1}{2\beta}\int_{\alpha}^{\infty} x e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\,dx.$$

Facem substituțiile $\frac{x-\alpha}{\beta} = t$ și $\frac{-x+\alpha}{\beta} = t$ în prima, respectiv a doua integrală și obținem:

$$M(X) = \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha+\beta t)e^t\,dt + \frac{1}{2\beta}\int_{0}^{-\infty} -\beta(\alpha-\beta t)e^t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha+\beta t)e^t\,dt + \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha-\beta t)e^t\,dt = \frac{1}{2\beta}\cdot 2\beta\alpha\int_{-\infty}^{0} e^t\,dt = \alpha e^t\Big|_{-\infty}^{0} = \alpha.$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x^2}{2\beta} e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\,dx + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^2}{2\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} x^2 e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\,dx + \frac{1}{2\beta}\int_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\,dx.$$

Facem aceleaşi substituţii ca mai înainte şi obţinem:

$$M(X^2) = \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha+\beta t)^2 e^t\, dt + \frac{1}{2\beta}\int_{0}^{-\infty} -\beta(\alpha-\beta t)^2 e^t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha+\beta t)^2 e^t\, dx + \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha-\beta t)^2 e^t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (2\alpha^2+2\beta^2 t^2) e^t\, dt =$$

$$= \alpha^2 e^t\Big|_{-\infty}^{0} + \beta^2\int_{-\infty}^{0} t^2 e^t\, dt = \alpha^2 + \beta^2\int_{0}^{\infty} u^2 e^{-u}\, du = \alpha^2 + \beta^2\Gamma(3) =$$

$$= \alpha^2 + \beta^2\cdot 2 = \alpha^2 + 2\beta^2.$$

Deci $D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 = 2\beta^2$.

32. Se consideră funcţia

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta x + \frac{1}{2}, & \text{dacă } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

a) Pentru ce valori ale lui θ, $f(\cdot\,,\theta)$ este densitatea de probabilitate a unei v.a.?
b) Determinaţi media şi mediana v.a. X cu densitatea de probabilitate $f(\cdot\,,\theta)$.
c) Pentru ce valori ale lui θ, dispersia lui X este maximă?

Rezolvare

a) Să vedem pentru ce valori ale lui θ este îndeplinită condiţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)\, dx = 1.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)\, dx = \int_{-1}^{1}\left(\theta x + \frac{1}{2}\right) dx = \left(\theta\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Deci această condiţie este îndeplinită pentru orice $\theta \in \mathbf{R}$.

Observăm că dacă $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, condiţia $f(x,\theta) \geq 0$ este îndeplinită, oricare ar fi $\theta \in \mathbf{R}$.

Dacă $-1 < x < 1$, atunci $-\theta < \theta x < \theta$ când $\theta > 0$ şi deci $\frac{1}{2} - \theta < \frac{1}{2} + \theta x < \frac{1}{2} + \theta$. Deci, pentru ca $f(x,\theta) \geq 0$ în acest caz, ar trebui ca $\frac{1}{2} - \theta \geq 0$, adică $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Dacă $\theta < 0$, atunci $-\theta > \theta x > \theta$ şi $\frac{1}{2} - \theta > \frac{1}{2} + \theta x > \theta + \frac{1}{2}$.

Trebuie ca $\theta + \frac{1}{2} \geq 0$, adică $\theta \geq -\frac{1}{2}$. deci $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Pentru $\theta = 0$, $f(x,\theta) \geq 0$ şi, în concluzie, $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) Conform definiției,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,\theta)\,dx = \int_{-1}^{1} x\left(\theta x+\frac{1}{2}\right)dx = \left(\theta\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\theta}{3}+\frac{1}{4}+\frac{\theta}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2\theta}{3},\ \theta\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \text{ fixat.}$$

Vom determina acum funcția de repartiție a v.a. X.

Pentru $x \le -1$,

$$F(x) = P(X < x) = P(\varnothing) = 0.$$

Pentru $-1 < x \le 1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t,\theta)\,dt = \int_{-1}^{x} f(t,\theta)\,dt = \int_{-1}^{x}\left(\theta t+\frac{1}{2}\right)dt =$$

$$= \left(\theta\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\right)\Big|_{-1}^{x} = \theta\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}.$$

Pentru $x > 1$, $F(x) = 1$.

$$\text{Deci } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x\le -1 \\ \theta\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}, & \text{dacă } -1<x\le 1. \\ 1, & \text{dacă } x>1 \end{cases}$$

Mediana pe care o vom nota cu m_e este soluția ecuației $F(m_e) = \frac{1}{2}$. Atunci:

$$\theta\frac{m_e^2}{2}+\frac{m_e}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

și deci $\theta m_e^2 + me - \theta = 0.$

Dacă $\theta \ne 0$, atunci

$$m_{e\,1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\theta^2}}{2\theta}.$$

Dacă $\theta = 0$, atunci $m_e = 0$.

Dacă $\theta \ne 0$, trebuie să alegem acea valoare m_e astfel ca $-1 < m_e \le 1$. Un calcul simplu ne arată că, dacă $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, atunci mediana este $m_e = \frac{-1+\sqrt{1+4\theta^2}}{2\theta} \in (-1, 1]$, iar dacă $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, atunci mediana este $m_e = \frac{-1-\sqrt{1+4\theta^2}}{2\theta} \in (-1, 1]$.

c) Mai întâi calculăm:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,\theta)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\left(\theta x+\frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{\theta x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\theta}{4}+\frac{1}{6}-\frac{\theta}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Atunci

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{4\theta^2}{9} = \frac{3 - 4\theta^2}{9}.$$

Vom determina valoarea lui θ din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru care se obține valoarea maximă a dispersiei

$$D(X) = -\frac{4}{9}\theta^2 + \frac{3}{9}.$$

Fiind un trinom de gradul doi, valoarea maximă a lui $D(X)$ se obține pentru $\theta = 0$ și această valoare maximă este

$$D(X)_{max} = \frac{1}{3}.$$

33. Fie X o v.a. cu media μ și dispersia σ^2. Arătați că $M[(X-b)^2]$ ca funcție de b este minimizată când $b = \mu$ și valoarea minimă a lui $M[(X-b)^2]$ este σ^2.

Rezolvare

Avem

$$M[(X-b)^2] = M[(X-\mu+\mu-b)^2] = M[(X-\mu)^2 + 2(\mu-b)(X-\mu) + (\mu-b)^2] =$$
$$= M[(X-\mu)^2] + 2(\mu-b)M(X-\mu) + (\mu-b)^2 = M[(X-\mu)^2] + (\mu-b)^2.$$

Acum este clar că minimul lui $M[(X-b)^2]$ nu depinde de b.
În plus, $M[(X-\mu)^2] = \sigma^2$ prin definiție și deci valoarea minimă a lui $M[(X-b)^2]$ este σ^2.

34. V.a. X are densitatea de probabilitate $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Să se determine valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare $Y = |X|$.

Rezolvare

V.a. Y se poate scrie

$$Y = \begin{cases} -X, & \text{dacă } X < 0 \\ X, & \text{dacă } X \geq 0 \end{cases}.$$

Atunci

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x[f(x) + f(-x)]\,dx$$

și $$D(Y) = M(Y^2) - M(Y)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - M(Y)^2 = D(X) + M(X)^2 - M(Y)^2.$$

35. Pe axa Oy a unui sistem de axe xOy se ia punctul $A(0, 1)$. O dreaptă care trece prin A face cu Oy unghiul α şi taie Ox în punctul $P(\lambda, 0)$. Se cere valoarea medie a lui λ ştiind că α are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{3}{\pi}, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}.$$

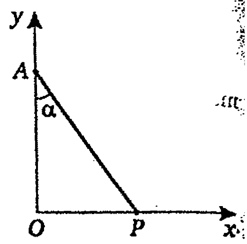


fig. 2

Rezolvare

Deoarece $\lambda = \operatorname{tg} \alpha$, putem scrie

$$M(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\pi} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{3}{\pi} \ln \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} \ln 2.$$

36. Dacă o v.a. X are densitate de probabilitate şi valoare medie, atunci

$$\lim_{x \to \infty} x(1 - F(x)) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} xF(x) = 0,$$

unde F este funcţia de repartiţie corespunzătoare.

Rezolvare

Fie f densitatea de probabilitate a v.a. X. Conform ipotezei, integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} u f(u) \, du$$

este convergentă şi deci

$$\lim_{x \to \infty} \int_x^{\infty} u f(u) \, du = 0$$

şi

$$\lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} u f(u) \, du = 0.$$

Pentru $x > 0$, avem:

$$0 \le x(1 - F(x)) = x \int_x^{\infty} f(u) \, du \le \int_x^{\infty} u f(u) \, du,$$

deci $\lim_{x \to \infty} x(1 - F(x)) = 0.$

Analog, dacă $x < 0$, avem

$$0 \ge x F(x) = x \int_{-\infty}^{x} f(u) \, du \ge \int_{-\infty}^{x} u f(u) \, du$$

deci $\lim_{x \to -\infty} x F(x) = 0.$

37. Dacă o v.a. X are densitatea de probabilitate f şi valoarea mediei m, atunci

$$m = \int_0^{\infty}(1-F(t))\,dt - \int_{-\infty}^{0}F(t)\,dt,$$

unde F este funcţia de repartiţie corespunzătoare.

Rezolvare

Este suficient să demonstrăm egalităţile

$$\int_0^{\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{\infty}(1-F(t))\,dt$$

şi $$\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0}F(t)\,dt.$$

Pentru aceasta, vom integra prin părţi

$$\int_0^{x} t f(t)\,dt$$

şi obţinem

$$\int_0^{x} t f(t)\,dt = xF(x) - \int_0^{x}F(t)\,dt.$$

Dacă facem $x \to -\infty$ în această egalitate, ţinând cont de problema precedentă, găsim că

$$\int_0^{-\infty} t f(t)\,dt = -\int_0^{-\infty}F(t)\,dt.$$

Se mai observă că

$$\int_0^{x} t f(t)\,dt = -x(1-F(x)) + \int_0^{x}(1-F(t))\,dt$$

şi dacă facem $x \to \infty$, conform problemei precedente, avem

$$\int_0^{\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{\infty}(1-F(t))\,dt.$$

Adunând termen cu termen cele două egalităţi găsite, avem:

$$m = \int_0^{\infty}(1-F(t))\,dt - \int_{-\infty}^{0}F(t)\,dt.$$

38. Se consideră v.a. independente X şi Y având $M(X) = -1$, $M(Y) = 1$, $D(X) = D(Y) = \sigma^2$. Să se calculeze dispersia variabilei XY.

Rezolvare

Avem

$$D(XY) = M_2(XY) - M^2(XY) = M(X^2Y^2) - M^2(X)\cdot M^2(Y) =$$
$$= M(X^2)\cdot M(Y^2) - M^2(X)\cdot M^2(Y)$$
$$M_2(X) = M(X^2) = D(X) + M^2(X) = \sigma^2 + 1.$$
$$M_2(Y) = M(Y^2) = D(Y) + M^2(Y) = \sigma^2 + 1$$

şi deci $$D(XY) = (\sigma^2 + 1)^2 - 1 = \sigma^2(\sigma^2 + 2).$$

39. Fie X și Y v.a. care au momente de ordinul 2 finite. Demonstrați că
$$(M(XY))^2 \le M(X^2) \cdot M(Y^2).$$

Rezolvare

Fie $t \in \mathbf{R}$ și $h(t) = M[(tX - Y)^2]$.

Atunci
$$0 \le h(t) = M[(tX - Y)^2] = M(X^2)t^2 - 2M(XY)t + M(Y^2).$$

Dacă $h(t) > 0$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$, atunci rădăcinile lui $h(t)$ nu sunt reale, adică
$$4(M(XY))^2 - 4\,M(X^2) \cdot M(Y^2) < 0,$$
adică
$$(M(XY))^2 < M(X^2) \cdot M(Y^2).$$

Dacă $t \in \mathbf{R}$ astfel ca $h(t) = 0$, atunci inegalitatea devine egalitate.

În concluzie,
$$(M(XY))^2 \le M(X^2) \cdot M(Y^2).$$

40. Să se arate că dacă x_i, $i = \overline{1, n}$, y_j, $j = \overline{1, m}$, sunt numere reale oarecare, iar $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ și $q_j \ge 0$, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, atunci are loc inegalitatea
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i q_j\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j^2 q_j\right).$$

Rezolvare

Se formează v. a. discrete
$$X: \begin{pmatrix} x_1 & & x_n \\ p_1 & & p_n \end{pmatrix} \text{ și } Y: \begin{pmatrix} y_1 & & y_m \\ q_1 & & q_m \end{pmatrix}$$
și se aplică inegalitatea din problema precedentă.

Deoarece $M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i q_j$,
$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$
iar
$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 q_j$$
obținem inegalitatea cerută.

41. Densitatea de probabilitate a v. a. X este

$$f(x) = \begin{cases} k\left(1+\frac{a}{2}x\right)^{\left(\frac{4}{a^2}-1\right)} e^{-\frac{2x}{a}}, & \text{dacă } -\frac{2}{a} \le x < \infty, \text{ unde } a > 0. \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine constanta k şi primele două momente centrate ale lui X.

Rezolvare

Pentru a determina constanta k impunem condiţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

ceea ce revine la

$$k\int_{-\frac{2}{a}}^{\infty}\left(1+\frac{a}{2}x\right)^{\frac{4}{a^2}-1} e^{-\frac{2}{a}x}\,dx = 1.$$

Pentru calculul integralei efectuăm schimbarea de variabilă $x = -\frac{2}{a} + t$. Obţinem

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{a}{2}t\right)^{\frac{4}{a^2}-1} e^{\frac{4}{a^2}} e^{-\frac{2}{a}t}\,dt = \frac{e^{b^2}}{b^{b^2-1}}\int_0^{\infty} t^{b^2-1} e^{-bt}dt = \frac{e^{b^2}}{b^{b^2-1}}\frac{\Gamma(b^2)}{b^{b^2}},$$

unde $b = \frac{2}{a}$.

Prin urmare,

$$k = \frac{b^{2b^2-1}}{e^{b^2}\Gamma(b^2)}.$$

Vom afla acum momentele centrate

$$\mu_j = M[(X - M(X))^j],\ j = 1, 2.$$

Avem

$$M_1(X) = \frac{b^{2b^2-1}}{e^{b^2}\Gamma(b^2)}\int_{-b}^{\infty} x\left(1+\frac{x}{b}\right)^{b^2-1} e^{-bx}\,dx.$$

Efectuăm substituţia $1 + \frac{x}{b} = t$ sau $x = b(t-1)$ şi obţinem:

$$M_1(X) = \frac{b^{2b^2-1}}{e^{b^2}\Gamma(b^2)}\int_0^{\infty} b^2(t-1)t^{b^2-1}e^{-b^2(t-1)}\,dt = \frac{b^{2b^2+1}}{\Gamma(b^2)}\int_0^{\infty}(t^{b^2} - t^{b^2-1})e^{-b^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{b^{2b^2+1}}{\Gamma(b^2)}\left[\frac{\Gamma(b^2+1)}{b^{2b^2+2}} - \frac{\Gamma(b^2)}{b^{2b^2}}\right] = 0.$$

De aici rezultă faptul că:

$$\mu_j = M_j(X),\ j = 1, 2$$

Deci

$$\mu_2 = M(X^2) = \frac{b^{2b^2-1}}{e^{b^2}\Gamma(b^2)}\int_{-b}^{\infty} x^2\left(1+\frac{x}{b}\right)^{b^2-1} e^{-bx}\, dx.$$

Cu schimbarea de variabilă indicată anterior, rezultă:

$$\mu_2 = \frac{b^{2b^2-1}}{e^{b^2}\Gamma(b^2)}\int_0^{\infty} b^3(t-1)^2 t^{b^2-1} e^{-b^2(t-1)}\, dt = \frac{b^{2b^2+2}}{\Gamma(b^2)}\left[\frac{\Gamma(b^2+2)}{b^{2b^2+4}} - 2\frac{\Gamma(b^2+1)}{b^{2b^2+2}} + \frac{\Gamma(b^2)}{b^{2b^2}}\right] =$$

$$= \frac{b^{2b^2+2}}{\Gamma(b^2)}\left[\frac{(b^2+1)b^2\Gamma(b^2) - 2b^2b^2\Gamma(b^2) + b^4\Gamma(b^2)}{b^{2b^2+4}}\right] = \frac{b^{2b^2+2}}{\Gamma(b^2)}\cdot\frac{b^2\Gamma(b^2)}{b^{2b^2+4}} = 1.$$

Deci $\mu_1 = 0$ şi $\mu_2 = 1$.

42. Fie v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}},\ x \geq 0,\ a > 0.$$

Să se determine $M(X)$, $D(X)$ şi momentul centrat de ordinul 3 al variabilei X.

Rezolvare

Calculul momentelor acestei repartiţii se face cu ajutorul integralelor de forma

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt,\ n \in \mathbf{N}.$$

Cu subsituţia $t^2 = y$, se obţine:

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y}\, dy.$$

Pentru $n = 2k$, avem

$$I_{2k} = \frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}.$$

Pentru $n = 2k+1$

$$I_{2k+1} = \frac{1}{2}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

Avem

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx.$$

Cu substituţia $\frac{x}{a\sqrt{2}} = t$, obţinem

$$M(X) = 2\sqrt{2}a\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt = 2a\sqrt{2}\, I_2 = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}a = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Apoi

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 4a^2 I_3 - \frac{\pi}{2}a^2 = a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\mu_3 = M[(X-M(X))^3] = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 =$$

$$= 4a^3\sqrt{2}\,I_4 - 3a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,4a^2 I_3 + 2a^3\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a^3(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

43. Fie X o v.a. a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x) = \begin{cases} c\left(1-\dfrac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p} & \text{dacă } 0<p<1 \text{ și } -\alpha \le x \le \alpha \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Să se arate că dacă r este număr par, atunci

$$\mu_{r+1} = \frac{r\alpha^2}{r+2-2p}\mu_{r-1}.$$

Rezolvare

Momentele de ordin impar sunt nule deoarece se integrează o funcție impară între limitele $-\alpha$ și α.

$$M_{2r+1}(X) = c\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{2r+1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p} dx = 0.$$

Deducem că momentele centrate sunt aceleași cu momentele obișnuite.
Așadar

$$\mu_{r+1} = c\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{r+1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p} dx = -c\cdot\frac{\alpha^2}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^r}{1-p}d\left[\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p+1}\right].$$

Folosind formula de integrare prin părți, obținem:

$$\mu_{r+1} = -c\frac{\alpha^2}{2(-p+1)}x^r\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p+1}\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} + \frac{r\alpha^2}{2-2p}c\int_{-\alpha}^{\alpha}x^{r-1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p+1}dx.$$

Întrucât $0 < p < 1$, termenul integrat se anulează și mai departe putem scrie:

$$\mu_{r+1} = \frac{r\alpha^2}{2-2p}c\int_{-\alpha}^{\alpha}x^{r-1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p}dx - \frac{r}{2-2p}c\int_{-\alpha}^{\alpha}x^{r+1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-p}dx,$$

adică $\quad \mu_{r+1} = \dfrac{r\alpha^2}{2-2p}\mu_{r-1} - \dfrac{r}{2-2p}\mu_{r+1},$

de unde rezultă egalitatea cerută.

44. Fie X o v.a. pozitivă cu media m şi momentul de ordinul doi $M(X^2)$. Să se arate că dacă $\lambda \in (0, 1)$, atunci:

$$P(X > \lambda m) > (1-\lambda)^2 \frac{m^2}{M(X^2)}.$$

Rezolvare

Aplicăm inegalitatea lui Schwartz integralei $\int_{\lambda m}^{\infty} x\, dF(x)$.

Avem $\left(\int_{\lambda m}^{\infty} x\, dF(x)\right)^2 \le \left(\int_{\lambda m}^{\infty} dF(x)\right)\left(\int_{\lambda m}^{\infty} x^2\, dF(x)\right)$ (1)

Observăm că

$$\int_{\lambda m}^{\infty} x^2\, dF(x) < \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x) = M(X^2)$$

$$\int_{\lambda m}^{\infty} dF(x) = P(X > \lambda m)$$

şi $$\int_{\lambda m}^{\infty} x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) - \int_{-\infty}^{\lambda m} x\, dF(x) = m - \int_{-\infty}^{\lambda m} x\, dF(x).$$

Însă, prin ipoteză, X este o variabilă pozitivă şi deci

$$\int_{-\infty}^{\lambda m} x\, dF(x) = \int_{0}^{\lambda m} x\, dF(x) \le \lambda m \int_{0}^{\lambda m} dF(x) \le \lambda m.$$

Din (1) rezultă că:

$$(m - \lambda m)^2 < M(X^2)\, P(X > \lambda m)$$

sau $$P(X > \lambda m) > (1-\lambda)^2 \frac{m^2}{M(X^2)}.$$

45. Să se arate că dacă X este o v.a. cu media m şi abaterea medie pătartică σ, atunci pentru orice două numere pozitive t_1 şi t_2 are loc inegalitatea

$$P(m - t_1\sigma < X < m + t_2\sigma) \ge 1 - \frac{1 + \left[\frac{(t_2 - t_1)}{2}\right]^2}{\left[\frac{(t_1 + t_2)}{2}\right]^2}.$$

Rezolvare

Avem $P(m - t_1\sigma < X < m + t_2\sigma) = P\left(\left|X - m - \frac{t_2 - t_1}{2}\sigma\right| < \frac{t_2 + t_1}{2}\sigma\right) =$

$$= P\left[\left(X - m - \frac{t_2 - t_1}{2}\sigma\right)^2 < \left(\frac{t_2 + t_1}{2}\right)^2 \sigma^2\right] = P\left[U < \left(\frac{t_2 + t_1}{2}\right)^2 \sigma^2\right],$$

unde $$U = \left(X - m - \frac{t_2 - t_1}{2}\sigma\right)^2.$$

De asemenea, avem:

$$M(U) = M\left[(X-m)^2 + \left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)^2 \sigma^2 - (X-m)(t_2-t_1)\sigma\right] =$$

$$= \sigma^2 + \left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)^2 \sigma^2 = \sigma^2\left[1+\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)^2\right].$$

Folosim faptul că dacă U este o v.a. astfel încât $P(U < 0) = 0$ și dacă $M(U) = m$, atunci

$$P(U < mT) \geq 1 - \frac{1}{T} \text{ pentru orice } T > 1.$$

Ținând cont de cele de mai sus, obținem:

$$P\left[U < \left(\frac{t_2+t_1}{2}\right)^2 \sigma^2\right] = P\left[U < M(U)\frac{\left[\frac{(t_2+t_1)}{2}\right]^2}{1+\left[\frac{(t_2-t_1)}{2}\right]^2}\right] \geq 1 - \frac{1+\left[\frac{(t_2-t_1)}{2}\right]^2}{\left[\frac{(t_2+t_1)}{2}\right]^2}.$$

46. Fie X o v.a. astfel încât $M(X) = 3$ și $M(X^2) = 13$. Determinați o margine inferioară pentru $P(-2 < X < 8)$.

Vom aplica inegalitatea lui Cebîșev.

Pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dar $D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 13 - 9 = 4.$

Deci $P(-\varepsilon + M(X) < X < \varepsilon + M(X)) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

pentru toți $\varepsilon > 0$ revine la

$$P(-\varepsilon + 3 < X < \varepsilon + 3) \geq 1 - \frac{4}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0.$$

Luăm $\varepsilon = 5$ și obținem:

$$P(-2 < X < 8) \geq \frac{21}{25},$$

deci o margine inferioară pentru probabilitatea dată este $\dfrac{21}{25}$.

47. Există v.a. X pentru care $D(X) = \sigma^2$ și $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,6$?

Rezolvare

Pentru v.a. X are loc inegalitatea lui Cebîșev:

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0.$$

Fie $\varepsilon = 2\sigma$. Atunci:

$$P(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2}.$$

Deci $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq \frac{3}{4}$.

Deoarece 0,6 nu este mai mare sau egal cu $\frac{3}{4}$, deducem că nu există variabile aleatoare cu proprietatea din enunț.

48. Inegalitatea lui Cebîșev aplicată v.a. X cu $M(X) = 4$ ne dă $P(|X-4| < 2) \geq 0,54$. Să se determine dispersia v.a. X.

Rezolvare

Din $\frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 0,46$ se obține $D(X) = 4 \cdot 0,46 = 1,84$.

49. V.a. X are valoarea medie $m = 30$ și abaterea medie pătratică $\sigma = 4$. Să se arate că:

$$P(16 < X < 44) \geq \frac{45}{49}.$$

Rezolvare

Adunăm -30 în cei trei membri ai dublei inegalități $16 < X < 44$, rezultă că aceasta se mai poate scrie $|X - 30| < 14$. Conform inegalității lui Cebîșev, avem:

$$P(|X - 30| < 14) \geq 1 - \frac{4^2}{14^2} = \frac{45}{49}.$$

50. Se consideră v.a. X a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, & 0 \leq x < \infty,\ a > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Să se determine funcția caracteristică.

Rezolvare

Conform definiției:

$$\varphi(t) = M(e^{itx}) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{itx - \frac{x}{a}}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x\left(-it + \frac{1}{a}\right)}\,dx = \frac{1}{ait - 1}.$$

51. Fie X o v.a. continuă cu densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 4 \\ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{|x|}{4}\right), & |x| \le 4 \end{cases}.$$

Să se determine funcția caracteristică a lui X.

Rezolvare

Conform definiției,

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\left(1 - \frac{|x|}{4}\right) e^{itx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(1 + \frac{x}{4}\right) e^{itx}\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{4}\left(1 - \frac{x}{4}\right) e^{itx}\,dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $x = -y$ și obținem:

$$\int_{-4}^{0}\left(1 + \frac{x}{4}\right) e^{itx}\,dx = \int_{0}^{4}\left(1 - \frac{y}{4}\right) e^{-ity}\,dy.$$

Deci $$\varphi(t) = \int_{0}^{4}\left(1 - \frac{y}{4}\right) e^{-ity}\,dy + \frac{1}{4}\int_{0}^{4}\left(1 - \frac{x}{4}\right) e^{itx}\,dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{4}\left(1 - \frac{x}{4}\right)\left(e^{-itx} + e^{itx}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{4}\left(1 - \frac{x}{4}\right)\cos tx\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4}\cos tx\,dx - \frac{1}{8}\int_{0}^{4} x\cos tx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2t}\sin 4t - \frac{1}{8}\left(\frac{4\sin 4t}{t} + \frac{\cos 4t - 1}{t^2}\right) = \frac{1 - \cos 4t}{8t^2} = \frac{\sin^2 2t}{4t^2}.$$

Observăm că am folosit egalitatea:

$$\frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2} = \cos x.$$

52. Să se determine funcția caracteristică a v.a. X care are densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right), & |x| \le 2 \end{cases}.$$

Rezolvare

Conform definiției funcției caracteristice, avem:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right) e^{itx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{itx}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{itx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-itx}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{itx}\,dx =$$

$$= \int_{0}^{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\cos tx\,dx = \left.\frac{\sin tx}{t}\right|_{0}^{2} - \left.\frac{1}{2}x\frac{\sin tx}{t}\right|_{0}^{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{\sin tx}{t}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2t^2}(1 - \cos 2t) = \frac{1 - 1 + 2\sin^2 t}{2t^2} = \frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

53. Să se afle funcția caracteristică a v.a. X caracterizată prin densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x-1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \le x < 3 \\ 0, & x \ge 3 \end{cases}.$$

Rezolvare

Conform definiției,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \int_1^2 (x-1)e^{itx}\,dx + \int_2^3 (3-x)e^{itx}\,dx =$$

$$= \frac{x-1}{it}e^{itx}\Big|_1^2 + \frac{1}{t^2}e^{itx}\Big|_1^2 + \frac{3-x}{it}e^{itx}\Big|_2^3 - \frac{1}{t^2}e^{itx}\Big|_2^3 = \frac{1}{t^2}(2e^{2it} - e^{it} - e^{3it}) =$$

$$= \frac{e^{2it}}{t^2}\left[2-(e^{-it}+e^{it})\right] = \frac{2e^{2it}}{t^2}(1-\cos t) = \frac{4e^{2it}}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}.$$

54. Să se determine funcția caracteristică a v.a. X caracterizată prin densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha-\beta \\ \frac{1}{\beta^2}(x-\alpha+\beta), & \alpha-\beta < x < \alpha \\ -\frac{1}{\beta^2}(x-\alpha-\beta), & \alpha \le x < \alpha+\beta \\ 0, & x \ge \alpha+\beta \end{cases}.$$

Rezolvare

Conform definiției funcției caracteristice, avem:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \int_{\alpha-\beta}^{\beta} e^{itx}\frac{x-\alpha+\beta}{\beta^2}\,dx - \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} e^{itx}\frac{x-\alpha-\beta}{\beta^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^2 it}xe^{itx}\Big|_{\alpha-\beta}^{\alpha} + \frac{1}{\beta^2t^2}e^{itx}\Big|_{\alpha-\beta}^{\alpha} + \frac{\beta-\alpha}{\beta^2 it}e^{itx}\Big|_{\alpha-\beta}^{\alpha} - \frac{1}{\beta^2 it}xe^{itx}\Big|_{\alpha}^{\alpha+\beta} -$$

$$- \frac{1}{\beta^2t^2}e^{itx}\Big|_{\alpha}^{\alpha+\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\beta^2 it}e^{itx}\Big|_{\alpha}^{\alpha+\beta} = \frac{e^{it\alpha}}{b^2t^2}\left[2-(e^{it\beta}+e^{-it\beta})\right].$$

55. Se consideră un şir de v.a. independente $X_1, X_2, ..., X_n, ...,$ având toate aceeaşi lege de probabilitate. Fie m valoarea medie comună, $\varphi(t)$ funcţia lor caracteristică. Se consideră

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Să se scrie funcţia caracteristică a v.a. $\frac{S_n}{n} - m$. Să se arate că, atunci când $n \to \infty$, această funcţie caracteristică tinde către 1.

Rezolvare

Funcţia caracteristică a v.a X este:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

Se poate dezvolta e^{itx} şi se poate scrie:

$$\varphi(t) = 1 + itm + o(t),$$

unde $m = M(X)$.

Fie $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. având aceeaşi lege de probabilitate ca X. Luăm:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

S_n are ca funcţie caracteristică pe $[\varphi(t)]^n$. Variabila aleatoare $\frac{S_n}{n} - m$ are funcţia caracteristică

$$e^{-itm}\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

Deoarece

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{itm}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,$$

se poate trece la limită când $n \to \infty$. Avem

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \to e^{itm}$$

şi funcţia caracteristică a v.a. $\frac{S_n}{n} - m$ tinde către 1.

2.3. Probleme propuse

1. Consideră experimentul aruncării a două zaruri. Fie $\Omega = \{(i,j), i = 1, ..., 6$ şi $j = 1, ...6\}$.

a) Arătaţi că $X(\omega) = i + j$, dacă $\omega = (i,j)$ defineşte o v.a..

b) Arătaţi că $y(\omega) = |i - j|$ dacă $\omega = (i,j)$ defineşte o v.a..

2. Într-un lot de 50 de produse, opt sunt necorespunzătoare. La un control de calitate se extrag la întâmplare cinci produse. Să se determine repartiţia v.a. X ce reprezintă numărul produselor necorespunzătoare din cele cinci produse cercetate.

3. Se testează 3 tipuri de produse alimentare. Probabilităţile ca produsele să fie în garanţie sunt respectiv $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$. Să se determine repartiţia v.a.ale cărei valori sunt numărul de produse care trec testul.

4. La un antrenament de baschet, un jucător nimereşte la coş cu probabilitatea 0,8. Să se scrie repartiţia v.a. care ia ca valori numărul de nimeriri la coş când jucătorul aruncă de 10 ori cu mingea.

5. Determinaţi parametrul a astfel încât funcţia $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare. Determinaţi funcţia de repartiţie corespunzătoare.

6. V.a. continuă X are funcţia de repartiţie

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^k}{\alpha}}, & x \geq 0,\ k \in \mathbf{N},\ \alpha > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Să se afle densitatea de repartiţia a lui X şi $P(2 \leq X \leq 3)$.

7. Fie X v.a. ce reprezintă durata unei convorbiri telefonice. Am putea modela acest experiment, presupunând că funcţia de repartiţie a lui X este:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Presupunând că conversaţiile telefonice sunt măsurate în minute, determinaţi $P(5 < X \leq 10)$ pentru $\lambda = \dfrac{1}{5}$.

8. Să se determine funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare definite prin densităţile:

a) $f_0(x) = \begin{cases} \alpha x^2(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases};$

b) $f_1(x) = \begin{cases} \alpha x^2(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$

9. Se consideră $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1] \\ k x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

a) Să se determine k astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei v.a. X.
b) Să se determine funcţia de repartiţie corespunzătoare lui X.

10. Fie X o variabilă aleatoare având funcţia de repartiţie

$$F_X(x) = pH(x) + (1-p)G(x),$$

unde $$H(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

şi $$G(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}x, & 0 < x \le 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

a) Desenaţi $F_X(x)$ pentru $p = \dfrac{1}{2}$.

b) Calculaţi $P\left(X \le \dfrac{1}{2} \,\middle|\, X \le 1\right)$.

11. Să se verifice dacă următoarele v.a. sunt corect definite şi să se calculeze mediile lor:

$$X : \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}; \quad Y : \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*; \quad Z : \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{1}{n(n+1)} \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*;$$

$$U : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & & n \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & & \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

12. Fie X o v.a. cu repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{6}{8} & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinaţi $P\left(|X - M(x)| \ge 2\sqrt{D(x)}\right)$.

13. Se consideră v.a. X cu repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \dfrac{6}{36} & \dfrac{10}{36} & \dfrac{8}{36} & \dfrac{6}{36} & \dfrac{4}{36} & \dfrac{2}{36} \end{pmatrix}.$$

Să se determine $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$ şi $P(2 < X \le 5)$.

14. Se consideră o urnă care conține cinci bile albe și cinci bile negre. Se extrag la întâmplare patru bile și fie X v.a. care reprezintă numărul de bile albe extrase. Să se scrie repartiția lui X și să se calculeze $M(X)$, $D(X)$ în următoarele cazuri:

a) extragerea are loc cu revenire;

b) extragerea are lor fără revenire.

15. Fie v.a. X cu repartiția:

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{7a}{6} & \frac{2-a}{6} & 8a^2 & \frac{5a}{3} \end{pmatrix}.$$

a) Determinați parametrul a astfel încât X să fie corect definită.

b) Calculați media și dispersia lui X.

c) Scrieți funcția de repartiție.

d) Calculați $P(|X - M(X)| < 1)$.

e) Fie $Y = bX + c$. Determinați constantele b și c astfel încât $M(Y) = 15$ și $D(Y) = 684$.

16. Se aruncă o monedă până ce apare capul. Fie X v.a. ce reprezintă numărul de aruncări.

a) Determinați densitatea de probabilitate a lui X.

b) Determinați media și dispersia lui X.

17. Se aruncă o monedă de patru ori. Fie X v.a. care arată de câte ori capul este urmat imediat de pajură. Determinați repartiția, media și dispersia lui X.

18. Funcția de repartiție a v.a. X este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a^2}{x^3}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad a > 0.$$

Calculați $M(X)$ și $D(X)$.

19. Fie X variabila aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Calculați mediana.

20. Fie X o v.a. continuă care are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} k(x+1), & x \in [0, 3] \\ 0, & x \notin [0, 3] \end{cases}.$$

a) Să se determine k astfel ca f să fie densitatea de probabilitate a v.a. X.

b) Să se afle mediana lui X.

21. Fie $f(x, \theta) = \theta f(x, 1) + (1-\theta) f(x, 0)$, unde θ este o constantă fixată, astfel încât $0 \le \theta \le 1$. Preupunem că $f(\cdot\,, 0)$ şi $f(\cdot\,, 1)$ sunt amândouă densităţi de probabilitate.

a) Arătaţi că $f(\cdot\,, \theta)$ este de asemenea densitate de probabilitate.

b) Determinaţi media şi dispersia lui $f(\cdot\,, \theta)$ în funcţie de media şi dispersia lui $f(\cdot\,, 0)$ şi respectiv $f(\cdot\,, 1)$.

22. Arătaţi că dacă X este o v.a. cu $M(X) = \mu$ satisfăcând condiţia $P(X \le 0) = 0$, atunci $P(X > 2\mu) \le \frac{1}{2}$.

23. Se consideră v.a. discretă X cu repartiţia

$$X: \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x(1-e^{-\lambda})}{x!} \end{pmatrix}, x = 1, 2, 3, \ldots$$

Să se determine $M(X)$.

24. Se consideră v.a. X a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x, n) = \begin{cases} \dfrac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{[n-2]}{2}\right)}(1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Determinaţi $M(X)$ şi $D(X)$.

25. Se consideră v.a. discretă X cu repartiţia

$$X: \begin{pmatrix} x \\ C_n^x \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \dfrac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \end{pmatrix}, x = 0, 1, \ldots, n,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\Gamma(m)$ este funcţia gama $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}\,dx$, pentru $m > 0$. Să se determine $M(X)$ şi $D(X)$.

26. Se consideră v.a. discretă X cu repartiţia

$$X: \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{q^x}{-x \ln p} \end{pmatrix}, x = 1, 2, \ldots$$

unde $0 < p < 1$ şi $q = 1 - p$. Determinaţi $M(X)$ şi $D(X)$.

27. Se consideră densitatea de probabilitate a v.a. X

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{\beta^2}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

unde $\beta>0$. Arătați că $M(X)$ și $D(X)$ există și apoi determinați valorile lor.

28. Se consideră densitatea de probabilitate a v.a. X

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{4}{\beta^3\sqrt{\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{\beta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}, \text{ unde } \beta>0.$$

Determinați $M(X)$ și $D(X)$.

29. Într-o urnă se află bile numerotate de la 1 la 6. Se extrag la întâmplare patru bile cu revenire și fie X_i v.a. care reprezintă numărul obținut la extragerea i, $i=\overline{1,4}$.

a) Să se calculeze $M(X_i)$, $D(X_i)$, $i=\overline{1,4}$.

b) Să se calculeze $P(X_1+X_2+X_3+X_4=5)$ și $P(X_1+X_3=2X_4)$.

30. V.a. continuă X are funcția de repartiție

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & x\in(0,1]\\ 1, & x>1\end{cases}.$$

Să se calculeze funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $X+1$, X^2, e^X.

31. Fie variabilele aleatoare X și Y cu repartițiile:

$$X:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 11a^2 & \frac{4a+3}{16} & \frac{1}{16}\end{pmatrix};\ Y:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Să se scrie repartiția v.a. $Z=5X+2Y-1$. Să se calculeze apoi mediile și dispersiile v.a. X, Y și Z.

32. Se consideră v.a. independente X și Y având repartițiile:

$$X:\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{pmatrix};\ Y:\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Să se determine repartițiile v.a. $X+Y$, $X-Y$, XY și $\frac{X}{Y}$ și să se afle $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $D(2X-4Y)$, $D(8XY)$.

33. Presupunem că funcţia de repartiţie $F(x)$ a unei v.a. se scrie ca o funcţie de $\frac{x-\alpha}{\beta}$, unde α şi $\beta > 0$ sunt constante.

a) Demonstraţi că dacă α creşte cu $\Delta\alpha$, atunci la fel creşte şi media lui X.

b) Demonstraţi că dacă β se multiplică cu k ($k > 0$), atunci la fel se modifică şi abaterea medie pătratică.

34. Dacă X este o v.a. pentru care $P(X \le 0) = 0$ şi $M(X) = \mu < \infty$, demonstraţi că

$$P(X \le \mu t) \ge 1 - \frac{1}{t} \text{ pentru orice } t \ge 1.$$

35. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Determinaţi a astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei v.a. X şi repartiţia v.a. $Y = X^2$.

36. V.a X are repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}10 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $P(|X - M(X)| < 2)$, precum şi o margine inferioară a ei.

37. V.a. X are $M(X) = 2$ şi momentul iniţial de ordinul doi, $M_2(X) = \frac{14}{3}$. Să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea $P(1 < X < 3)$.

38. Se aruncă o monedă de 100 de ori. Să se arate că cu o probabilitate mai mare decât 0,7 numărul de apariţii ale stemei este cupins între 40 şi 60.

39. Se aruncă un zar de 110 ori. Să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea $P(10 < X < 25)$, unde X reprezintă numărul de apariţii ale feţei cu şase puncte.

40. Limita superioară a probabilităţii ca abaterile în modul ale valorilor v.a. X faţă de medie să fie mai mare decât 1 este 0,98. Să se afle $D(X)$.

41. Fie v.a. X cu densitatea de probabilitate $f(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbf{R}$. Să se determine $P(|X| < n)$, $n > 0$, precum şi o margine inferioară a ei.

42. Fie X o v.a. cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, m \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că $P(0 < X < 2(m+1)) > \dfrac{m}{m+1}$.

43. Să se calculeze funcția caracteristică a v.a. X care are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 3 \\ \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{|x|}{3}\right), & |x| \leq 3 \end{cases}.$$

3

VARIABILE ALEATOARE n-DIMENSIONALE

3.1. Probleme rezolvate

1. Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete cu repartiţiile date de

$$X:\begin{pmatrix} 2{,}5 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \text{ şi } Y:\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0, 1).$$

a) Aflaţi p_1 şi p_2 ştiind că $P(X = 2{,}5 \text{ şi } Y = -1) = 0{,}2$ şi $M(X \mid Y = -1) = 3$.

b) Considerând valorile lui p_1 şi p_2 aflate anterior, calculaţi coeficientul de corelaţie al lui X şi Y.

Rezolvare

a) repartiţia comună a variabilelor X şi Y este dată de:

X \ Y	$Y = -4$	$Y = -1$	
$X = 2{,}5$	$P(X = 2{,}5$ şi $Y = -4) = 0{,}2$	$P(X = 2{,}5$ şi $Y = -1) = 0{,}2$	$P(X = 2{,}5) = 0{,}4$
$X = 4$	$P(X = 4, Y = -4) = p_1 - 0{,}2$	$P(X = 4$ şi $Y = -1) = 0{,}8 - p_1$	$P(X = 4) = 0{,}6$
	$P(Y = -4) = p_1$	$P(Y = -1) = p_2$	1 \ 1

cu $p_1, p_2 \in (0, 1)$ şi $p_1 + p_2 = 1$

Probabilităţile cu $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ se găsesc din definiţiile probabilităţilor marginale:

$$p_{i*} = \sum_j p_{ij}\,, \; p_{*j} = \sum_i p_{ij}\,.$$

Astfel, din condiţia

$$P(X = 2{,}5) = P(X = 2{,}5, Y = -4) + P(X = 2{,}5, Y = -1)$$

se află

$$P(X = 2{,}5, Y = -4) = P(X = 2{,}5) - P(X = 2{,}5, Y = -1) = 0{,}2.$$

Variabila aleatoare condiţionată are repartiţia:

$$X / Y = -1 : \begin{pmatrix} 2{,}5 & 4 \\ P(X = 2{,}5 \mid Y = -1) & P(X = 4 \mid Y = -1) \end{pmatrix}$$

$$P(X=2{,}5 \mid Y=-1)=\frac{P(X=2{,}5,\, Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{0{,}2}{p_2}$$

$$P(X=4 \mid Y=-1)=\frac{P(X=4),\, Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{0{,}8-p_1}{p_2}=\frac{p_2-0{,}2}{p_2}$$

$$\Rightarrow X/Y=-1:\begin{pmatrix} 2{,}5 & 4 \\ \dfrac{0{,}2}{p_2} & \dfrac{p_2-0{,}2}{p_2} \end{pmatrix}$$

$$M(X \mid Y=-1)=2{,}5\cdot\frac{0{,}2}{p_2}+4\cdot\frac{p_2-0{,}2}{p_2}=\frac{4p_2-0{,}3}{p_2}.$$

Din ipoteză $M(X \mid Y=-1)=3$, deci $p_2=0{,}3$ și $p_1=0{,}7$.

b) Din distribuțiile v. a. X și Y găsim:

$M(X)=3{,}4,\ D(X)=12{,}1$

$M(Y)=-3{,}1;\ D(Y)=1{,}89,$

iar din distribuția vectorului (X, Y) avem

$$M(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}=-10{,}9.$$

Atunci

$$\rho(X,Y)=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{4}{3\sqrt{14}}.$$

2. Fie X și Y două v. a. discrete cu repartițiile date de

$$X:\begin{pmatrix} -1{,}5 & -1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \text{ și } Y:\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \text{ cu } p_1, p_2 \in (0, 1).$$

a) Aflați p_1 și p_2 astfel încât $P(X=-1{,}5 \text{ și } Y=2)=0{,}45$ și $M(Y \mid X=-1)=3$.

b) Considerând valorile lui p_1 și p_2 aflate anterior, calculați coeficientul de corelație al lui X și Y.

Rezolvare

Raționamentul este analog problemei precedente și obținem:

a) $p_1=0{,}6$ și $p_2=0{,}4$; $Y:\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

b) $\rho_{X,Y}=\dfrac{1}{2\sqrt{14}}\cong 0{,}1336.$

3. Fie variabilele aleatoare discrete

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ și } Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Se ştie $P(X=0, Y=0)=\lambda$ şi $P(X=1, Y=1)=\frac{1}{3}$.

a) Să se determine repartiţia comună a vectorului aleator (X, Y) în funcţie de $\lambda \in \mathbf{R}$.
b) Calculaţi coeficientul de corelaţie $\rho(X, Y)$.
c) Precizaţi dacă există valori ale lui λ pentru care v. a X şi Y să fie independente.

Rezolvare

a) Construim tabelul

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	λ	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}-\lambda$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}-\lambda$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+\lambda$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

Stim că

$$P(Y=0)=P(X=0, Y=0)+P(X=1, Y=0),$$

de unde se deduce

$$P(X=1, Y=0)=\frac{1}{6}-\lambda.$$

Restul probabilităţilor p_{ij} se găsesc asemănător din definiţiile probabilităţilor marginale. Asupra lui λ impunem condiţiile:

$$\begin{cases} 0<\lambda<1 \\ 0<\frac{1}{6}-\lambda<1 \\ 0<\frac{1}{6}+\lambda<1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \left(0, \frac{1}{6}\right).$$

b) $M(X)=\frac{2}{3}; M(X^2)=\frac{2}{3}; D(X)=\frac{2}{9};$

$M(Y)=\frac{7}{6}; M(Y^2)=\frac{11}{6}; D(Y)=\frac{17}{36};$

$M(X \cdot Y)=\frac{2}{3}+2\lambda$

$$\rho_{X,Y}=\frac{M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{-2+36\lambda}{\sqrt{34}} \in (-1, 1) \text{ pentru } \lambda \in \left(0, \frac{1}{6}\right).$$

c) V. a. X şi Y sunt independente $\Leftrightarrow P(X=x_i, Y=y_j)=P(x=x_i)\cdot P(Y=y_j)$, pentru orice valori x_i ale lui X şi y_j ale lui Y.

În cazul nostru, X şi Y sunt independente dacă

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} - \lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - \lambda = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} + \lambda = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$

Deci, pentru $\lambda = \frac{1}{18}$, variabilele X şi Y sunt independente.

Altfel, se găseşte valoarea lui λ pentru care coeficientul de corelaţie $\rho_{X,Y}$ este nul şi apoi se verifică dacă

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(x = x_i) \cdot P(Y = y_j),$$

pentru orice valoare x_i a lui X şi y_j a lui Y.

În caz că se verifică toate, atunci X şi Y sunt independente pentru valoarea găsită a lui λ.

4. Vectorul aleator (X, Y) are repartiţia dată de

$$P(X = m, Y = n) = C_m^n \frac{1}{2^m} \cdot \frac{m}{15},$$

unde $m = 1, 2, ..., 5$ şi $n = 0, 1, ..., m$.

Calculaţi $M(Y \mid X = m)$.

Rezolvare

Mai întâi găsim repartiţia v. a. discrete X ce ia valori numere naturale m cuprinse între 1 şi 5.

$$P(X = m) = \sum_{n=0}^{m} P(X = m, Y = n) = \sum_{n=0}^{m} C_m^n \frac{1}{2^m} \cdot \frac{m}{15} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{m}{15} \sum_{n=0}^{m} C_m^n =$$

$$= \frac{1}{2^m} \cdot \frac{m}{15} \cdot 2^m = \frac{m}{15}, m = 1, 2, ..., 5.$$

V.a. X are repartiţia dată de:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{3}{15} & \frac{4}{15} & \frac{5}{15} \end{pmatrix}.$$

Să calculăm acum repartiţia v. a. Y condiţionată de $X = m$.

$$P(Y = n \mid X = m) = \frac{P(X = m, Y = n)}{P(X = m)} = \frac{C_m^n \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{m}{15}}{\frac{m}{15}} = C_m^n \cdot \frac{1}{2^m}, n = 0, 1, ..., m.$$

Atunci

$$M(Y\,|\,X=m) = \sum_{n=0}^{m} n\cdot P(Y=n\,|\,X=m) = \sum_{n=0}^{m} n\cdot\frac{1}{2^m}\cdot C_m^n = \frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{m} n\cdot\frac{m!}{n!(m-n)!} =$$

$$= \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m} n\cdot\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m}\frac{m(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = \frac{m}{2^m}\sum_{n=1}^{m} C_{m-1}^{n-1} = \frac{m}{2^m}\cdot 2^{m-1} = \frac{m}{2}.$$

5. Se consideră vectorul aleator bidimensional discret (X, Y) a cărui repartiție este dată de

$$P(X=x, Y=y) = \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\cdot p_1^x\cdot p_2^y\,(1-p_1-p_2)^{n-x-y}$$

unde $x, y = 0, 1, \ldots, n$, $x+y \le n$, $n\in \mathbf{N}$, $p_1, p_2 \in (0,1)$.

a) Să se determine funcția caracteristică a vectorului (X, Y).

b) Repartiția v. a. X.

c) Repartiția v. a. Y condiționată de evenimentul $X = x$.

d) Să se calculeze următoarele momente m_{10}, m_{20}, m_{01}, m_{02}, m_{11}, $D(X)$, $D(Y)$ precum și coeficientul de corelație între X și Y.

Rezolvare

a) Funcția caracteristică a vectorului aleator (X, Y) este

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = M\left(e^{i(t_1X+t_2Y)}\right) = \sum_{x=0}^{n} e^{it_1x}\left(\sum_{y=0}^{n-x} e^{it_2y}\cdot P(X=x, Y=y)\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{it_1x}\left(\sum_{y=0}^{n-x} e^{it_2y}\cdot\frac{n!}{x!\cdot y!\cdot(n-x-y)!}\cdot p_1^x\cdot p_2^y\cdot(1-p_1-p_2)^{n-x-y}\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{it_1x}\left(\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot p_1^x\cdot\sum_{y=0}^{n-x}\frac{(n-x)!}{y!\cdot(n-x-y)!}\cdot\left(p_2e^{it_2}\right)^y(1-p_1-p_2)^{(n-x)-y}\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{it_1x}\left(C_n^x\cdot p_1^x\cdot\sum_{y=0}^{n-x} C_{n-x}^y\left(p_2e^{it_2}\right)^y(1-p_1-p_2)^{(n-x)-y}\right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{it_1x}\left(C_n^x\cdot p_1^x\left(p_2e^{it_2}+1-p_1-p_2\right)^{n-x}\right) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p_1^x e^{it_1x}(p_2e^{it_2}+1-p_1-p_2)^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x\left(p_1^x e^{it_1}\right)^x(p_2e^{it_2}+1-p_1-p_2)^{n-x} = \left(p_1e^{it_1}+p_2e^{it_2}+1-p_1-p_2\right)^n$$

b) V.a. X ia valori numerele naturale x de la 0 la n.
Repartiția lui X este dată de

$$P(X=x)=\sum_{y=0}^{n-x}\frac{n!}{x!\cdot y!\cdot(n-x-y)!}\cdot p_1^x\cdot p_2^y\cdot(1-p_1-p_2)^{n-x-y}=$$

$$=\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot p_1^x\sum_{y=0}^{n-x}\frac{(n-x)!}{y!\cdot(n-x-y)!}\cdot p_2^y\cdot(1-p_1-p_2)^{(n-x)-y}=$$

$$=\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot p_1^x\cdot(p_2+1-p_1-p_2)^{n-x}=C_n^x\cdot p_1^x\cdot(1-p_1)^{n-x}, x=0,1,...,$$

Deci X este repartizată $Bi(n, p_1)$.
c) V. a. $Y \mid X=x$ ia valorile y cu $y=0, 1, ..., n-x$ și $x=0, 1, ..., n$.
Ne reamintim că în ipoteză am avut $0\le x+y\le n$ cu $x, y=0, 1, ..., n$.

$$P(Y=y \mid X=x)=\frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}=$$

$$=\frac{(n-x)!}{y!\cdot(n-x-y)!}\quad\frac{p_2^y}{(1-p_1)^y}\cdot\frac{(1-p_1-p_2)^{n-x-y}}{(1-p_1)^{n-x-y}}=$$

$$=C_{n-x}^y\cdot\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y\cdot\left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x-y} \text{ cu } y=0,1,...,n-x \text{ și } x=0,1,...,n.$$

Observăm că $Y \mid X=x \sim Bi\left(n-x; \frac{p_2}{1-p_1}\right)$.

d) Folosim rezultatul teoretic

$$m_{r,s}=\frac{1}{i^{r+s}}\frac{\partial^{r+s}\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1^r\,\partial t_2^s}\bigg|_{t_1=0,\,t_2=0}$$

Atunci

$$\frac{\partial\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\bigg|_{t_1=0,t_2=0}=n\cdot p_1\cdot i$$

$\Rightarrow m_{10}=M(X)=np_1$.
Asemănător se obține din

$$\frac{\partial^2\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1^2}\bigg|_{t_1=0,t_2=0}=-n\cdot p_1-n(n-1)\,p_1^2$$

$$m_{20}=M(X_2)=np_1+n(n-1)\,p_1^2$$

deci $\quad D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=np_1(1-p_1)$.

Găsim că

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=0,t_2=0} = -(n-1)p_1p_2$$

de unde

$$m_{1,1} = M(X \cdot Y) = n(n-1)p_1p_2.$$

În mod analog se calculează

$$m_{0,1} = M(Y) = np_2, D(Y) = np_2(1-p_2).$$

Înlocuind se găsește că

$$\rho(X,Y) = \frac{M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}} = \frac{n(n-1)p_1p_2 - np_1np_2}{\sqrt{np_1(1-p_1)np_2(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.$$

Comentariu. *Exemplu concret*

Fie experimentul aleator ce constă din aruncarea de n ori a unui zar netrucat.

X este variabila aleatoare care arată numărul aparițiilor feței cu 1 punct în cele n aruncări, iar Y este variabila aleatoare care arată numărul aparițiilor feței cu 6 puncte în timpul experimentului.

$p_1 = \frac{1}{6}$ este probabilitatea feței cu 1 punct într-o aruncare oarecare;

$p_2 = \frac{1}{6}$ este probabilitatea feței cu 6 puncte într-o aruncare oarecare;

$1 - p_1 - p_2 = \frac{4}{6}$ reprezintă probabilitatea apariției oricărei alte fețe în afara celor cu 1 punct și 6 puncte, adică probabilitatea apariției feței cu 2 puncte sau cu 3 puncte sau cu 4 puncte sau cu 5 puncte.

6. O cutie conține două monede. Una dintre monede este trucată, cealaltă este echilibrată, astfel că pentru cea trucată, la orice aruncare, capul apare cu probabilitatea $\frac{2}{3}$. Cele două monede sunt asemănătoare din punct de vedere extern. Se alege o monedă din cutie și se aruncă de n ori. Notăm cu X_i variabila aleatoare ce ia valoarea 1 la cea de a i aruncare dacă apare capul și valoarea 0 la cea de a i aruncare dacă apare pajura, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fie $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Care este repartiția variabilei aleatoare X_1?

b) Care este repartiția vectorului aleator (X_1, X_2)? Dar distribuția marginală a lui X_2? Sunt variabilele aleatoare X_1 și X_2 independente?

c) Ce repartiție are variabila aleatoare Z? Care este media acesteia?

d) În primele două aruncări se obține cap. Care este probabilitatea ca moneda folosită să fie cea echilibrată?

Rezolvare

a) Se notează cu E evenimentul ca moneda aleasă la întâmplare din cutie să fie echilibrată și cu T evenimentul ca moneda aleasă la întâmplare din cutie să fie trucată, având

$P(E) = P(T) = \frac{1}{2}$.

Atunci, din formula probabilității totale, avem:

$$P(X_1 = 1) = P(E) \cdot P(X_1 = 1|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 1|T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$$

și $\quad P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 1) = \frac{5}{12}$,

deci $\quad X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$.

b) Se aplică formula probabilității totale și se ține seama de faptul că aruncările monedei sunt independente.

Astfel,

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(E) \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 1|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 1|T) =$$
$$= P(E) \cdot P(X_1 = 1|E) \cdot P(X_2 = 1|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 1|T) \cdot P(X_2 = 1|T) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{72}.$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(E) \cdot P(X_1 = 0, X_2 = 0|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 0, X_2 = 0|T) =$$
$$= P(E) \cdot P(X_1 = 0|E) \cdot P(X_2 = 0|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 0|T) \cdot P(X_2 = 0|T) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{72}.$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(E) \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 0|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 0|T) =$$
$$= P(E) \cdot P(X_1 = 1|E) \cdot P(X_2 = 0|E) + P(T) \cdot P(X_1 = 1|T) \cdot P(X_2 = 0|T) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{72}.$$

În mod analog obținem $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{17}{72}$.

X_2 \ X_1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{13}{72}$	$\frac{17}{72}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{17}{72}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{7}{12}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	1 \ 1

Se observă că X_1 și X_2 au aceeași distribuție, dar nu sunt independente pentru că, de exmplu

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{13}{72} \neq \left(\frac{5}{2}\right)^2 = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0).$$

c) V.a. $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ reprezintă numărul aparițiilor rezultatului „cap" în cele n aruncări independente.

Dacă moneda aleasă din cutie este cea echilibrată și probabilitatea obținerii rezultatului „cap" într-o aruncare oarecare este $\frac{1}{2}$, atunci variabila aleatoare Z este repartizată $Bi\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

$$P(Z = k \mid E) = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \cdot \frac{1}{2^n}, k = 0, 1, ..., n.$$

$$M(Z \mid E) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(Z = k \mid E) = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Dacă moneda aleasă din cutie este cea trucată și probabilitatea obținerii rezultatului „cap" într-o aruncare oarecare este $\frac{2}{3}$, atunci variabila aleatoare Z este repartizată $Bi\left(n, \frac{2}{3}\right)$.

$$P(Z = k \mid T) = C_n^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = C_n^k \cdot \frac{2^k}{3^n}, k = 0, 1, .., n.$$

$$M(Z \mid T) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(Z = k \mid T) = n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n}{3}.$$

Pentru a găsi repartiția lui Z, aplicăm din nou formula probabilității totale:

$$P(Z = k) = P(E) \cdot P(Z = k \mid E) + P(T) \cdot P(Z = k \mid T) = \frac{1}{2}\left(C_n^k \cdot \frac{1}{2^n} + C_n^k \cdot \frac{2^k}{3^n}\right),$$

$k = 0, 1, ..., n$

și obținem

$$M(Z) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(Z = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot [P(E) \cdot P(Z = k \mid E) + P(T) \cdot P(Z = k \mid T)] =$$

$$= P(E) \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(Z = k \mid E) + P(T) \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(Z = k \mid T) =$$

$$= P(E) \cdot M(Z \mid E) + P(T) \cdot M(Z \mid T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{7n}{12}.$$

d) Din teorema lui Bayes avem:

$$P(E \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{P(E) \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid E)}{P(X_1 = 1, X_2 = 1)} = \frac{9}{25}.$$

7. Fie vectorul aleator (X, Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x+y+1), & \text{dacă } x \in [0, 1] \text{ și } y \in [0, 2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

a) Să se detrmine constanta k.
b) Să se determine densitățile marginale.
c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.
d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului $(X,$
e) Să se determine densitățile variabilelor aleatoare condiționate $X \mid Y = y$ și $Y \mid X =$

Rezolvare

a) Impunem funcției $f_{(X,Y)}$ condițiile:
i) $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$, $(\forall)$ $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;
ii) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$

Din condiția (i) obținem $k \geq 0$.

Din condiția (ii) avem $\int_0^1 \left(\int_0^2 k(x+y+1)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = 1$, obținem $5k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$.

b) Densitatea de probabilitate marginală a lui X este dată de

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{5}(x+y+1)\mathrm{d}y, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x+4), & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Densitatea de probabilitate marginală a lui Y este dată de

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{5}(x+y+1)\mathrm{d}x, & \text{dacă } y \in [0, 2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}(2y+3), & \text{dacă } y \in [0, 2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

c) X și Y sunt dependente deoarece $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ când $x \in [0, 1]$ și $y \in [0,$
d) Funcția de repartiție a vectorului aleator (X, Y) este

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Dacă $x \in (0, 1]$, $y \in (0, 2]$, atunci

$$F(x,y) = \int_0^x \left[\int_0^y \frac{1}{5}(u+v+1)\mathrm{d}v \right]\mathrm{d}u = \frac{xy}{10}(x+y+2).$$

Dacă $x \in (1, \infty), y \in (0, 2]$, atunci

$$F(x, y) = \int_0^1\left[\int_0^y \frac{1}{5}(u+v+1)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u + \int_1^x\left[\int_0^y 0\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u = \frac{y}{10}(y+3).$$

Dacă $x \in (0, 1], y \in (2, \infty)$, avem

$$F(x, y) = \int_0^x\left[\int_0^2 \frac{1}{5}(u+v+1)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u = \frac{x}{5}(x+4),$$

iar pentru $x \in (1, \infty), y \in (2, \infty)$, rămâne

$$F(x, y) = \int_0^1\left[\int_0^2 \frac{1}{5}(u+v+1)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u = 1.$$

Deducem astfel că funcția de repartiție este

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ sau } y \le 0 \\ \frac{xy}{10}(x+y=2), & x \in (0,1],\ y \in (0,2] \\ \frac{y}{10}(y+3), & x \in (1,\infty),\ y \in (0,2] \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0,1],\ y \in (2,\infty) \\ 1, & x \in (1,\infty),\ y \in (2,\infty) \end{cases}.$$

Funcția de repartiție marginală a lui X este $F_X(x) = \lim\limits_{y \to \infty} F(x,y)$ sau $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$.

Din oricare exprimare găsim

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Asemănător, funcția de repartiție marginală a lui Y este:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y}{10}(y+3), & y \in (0,2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}.$$

e) $$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2(x+y+1)}{2y+3}, & \text{dacă } x \in [0,1] \text{ și } y \in [0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{x+y+1}{2x+4}, & \text{dacă } x \in [0,1] \text{ și } y \in [0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

8. Densitatea de probabilitate a v.a. bidimensionale (X, Y) este

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2y^3} e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine distribuția marginală a v. a. Y.
b) Să se găsească distribuția v. a. $X|Y = y$.
c) Să se afle linia de regresie a lui X în raport cu Y.
d) Să se calculeze $M(X)$, $D(X)$ și $M(X^k)$, $k \in \mathbf{N}$.

Rezolvare

a) Densitatea de probabilitate marginală a lui Y este

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

care, pentru $y \in (0, 1)$ și făcând substituția $t = \dfrac{x}{y}$, devine

$$f_2(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) Avem

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2y^3} e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

c) Se calculează

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/y)\,dx = 3y \text{ pentru } y \in (0, 1).$$

Rezultă că linia de regresie a lui X în raport cu Y este curba de ecuație

$$x = \begin{cases} 3y, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

d) Se determină mai întâi densitatea de probabilitate marginală a lui X ca fiind

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

după care găsim

$$M(X) = 3/2, M_2(X) = 4, M_k(X) = \left(\frac{k+2}{2}\right) \cdot \Gamma(k+1), k \in \mathbf{N}.$$

9. Repartiția comună a v. a. X și Y este dată de densitatea de probabilitate

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{pentru } 0 \le x \le 1 \text{ și } x^2 \le y \le x \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se calculeze c.
b) Să se găsească densitățile marginale.
c) Să se determine liniile de regresie.

Rezolvare

a) Notăm $D = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\} = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid y \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1\}$.

Din condițiile $f(x,y) \ge 0$ și $\iint_{\mathrm{R}^2} f(x,y)\,dxdy = 1$, găsim $c = 6$.

b) Densitatea marginală a v. a. X este

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = f_X(x) = \begin{cases} \int_{x^2}^{x} 6\,dy, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Densitatea marginală a v. a. Y este

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = f_Y(y) = \begin{cases} \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx, & \text{dacă } y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6\left(\sqrt{y} - y\right), & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

c) Repartiția condiționată a lui Y de $X = x$ este dată de

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x - x^2}, & \text{dacă } x \in (0,1) \text{ și } x^2 \le y \le x \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Atunci

$$M(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\,dy = \int_{x^2}^{x} \frac{y}{x - x^2}\,dy = \frac{x + x^2}{2},$$

de unde linia de regresie a lui Y în raport cu X este curba $y = \dfrac{x + x^2}{2}$, $x \in (0, 1)$ și $y = 0$ pentru $x \notin (0, 1)$.

Repartiția condiționată a lui X de $Y = y$ este dată de

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y} - y}, & \text{dacă } y \in (0,1) \text{ și } y \le x \le \sqrt{y} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Găsim că

$$M(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y)\mathrm{d}x = \int_{y}^{\sqrt{y}} x \frac{1}{\sqrt{y}-y}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{y}+y}{2}, y \in (0,1)$$

deci linia de regăsire a lui X în raport cu Y este

$$x = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}+y}{2}, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

10. Presupunem că X este v. a. ce reprezintă durata de timp (exprimată în minute) a unei întâlniri între o persoană şi un reprezentant al unei societăţi de asigurări de viaţă, iar Y este v. a. ce reprezintă durata de timp (exprimată în minute) în care agentul societăţii de asigurări redactează contractul de îndată ce clientul s-a hotărât. Cineva aranjează o întâlnire cu un agent de asigurări în vederea cumpărării unei poliţe de asigurare de viaţă. dacă densitatea de repartiţie comună a lui X şi Y este dată de

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{300}\cdot e^{-\frac{x}{30}}\cdot e^{-\frac{y}{10}}, & \text{dacă } x \geq 0 \text{ şi } y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

găsiţi probabilitatea ca întreaga tranzacţie să dureze mai mult de jumătate de oră.

Rezolvare

$$P(X+Y \geq 30) = 1 - P(X+Y < 30) = 1 - \iint_D f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y < 30\}$.

Astfel,

$$P(X+Y \geq 30) = 1 - \int_0^{30}\left(\int_0^{30-x} \frac{1}{300}\cdot e^{-\frac{x}{30}}\cdot e^{-\frac{y}{10}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 1 + \frac{1}{30}\cdot\int_0^{30}\left(\frac{1}{e^3}\cdot e^{\frac{2x}{30}} - e^{-\frac{x}{30}}\right)\mathrm{d}x = \frac{3e^2-1}{2e^3} \cong 0{,}5269.$$

11. Un aparat electronic alcătuit din două componente electronice independente poate fi folosit atâta timp cât oricare una dintre componentele sale încă funcţionează. Aparatul are un termen de garanţie de la producător ce garantează înlocuirea dacă aparatul devine de nefolosit într-un an de la dat achiziţionării. Fie X variabila aleatoare asociată duratei de funcţionare (în ani) a primei componente, iar Y variabila aleatoare asociată duratei de funcţionare (în ani) a celei de a doua componente. Presupunem că repartiţia comună a lui X şi Y este dată de densitatea:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{(x+y)}{2}}, & \text{dacă } x \geq 0 \text{ şi } y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Ați cumpărat unul dintre aceste aparate electrice, adică l-ați ales la întâmplare din magazinul producătorului. Calculați probabilitatea ca garanția să expire înainte ca aparatul dumneavoastră să devină de nefolosit (adică probabilitatea ca aparatul să nu se defecteze pe durata primului an de funcționare).

Rezolvare

$$P(\text{garanția expiră}) = P(\text{aparatul funcționeză mai mult de un an}) =$$
$$= 1 - P(\text{aparatul funcționează mai puțin de un an})$$

Avem:

$$P(X > 1 \cup Y > 1) = 1 - P(0 \leq X \leq 1 \cap 0 \leq Y \leq 1) =$$
$$= 1 - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x+y}{2}} \, dy \right) dx = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1 \right) \cdot \int_0^1 e^{-\frac{x}{2}} \, dx = \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} \cong 0{,}8451.$$

12. Fie (X, Y) o v.a. bidimensională cu distribuția

$$P(X = m, Y = n) = p_{mn} = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{e^{-1}}{n!}, \; m, n \in \mathbf{N}.$$

a) Arătați că X și Y sunt v.a. independente.

b) Calculați $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$ și $D(Y)$.

Rezolvare

a) Se calculează probabilitățile marginale

$$P(X = m) = p_{m*} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n!} = \frac{1}{2^{m+1}}$$

$$P(Y = n) = p_{*n} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{mn} = \frac{e^{-1}}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{e^{-1}}{n!}$$

Deoarece $p_{mn} = p_{m*} \cdot p_{*n}$, $\forall\, m, n \in \mathbf{N}$, rezultă că X și Y sunt independente.

b) Avem:

$$M(X) = \sum_m \sum_n m\, p_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} m\, p_{m*} = \frac{1}{2^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} = 1.$$

$$M(Y) = \sum_m \sum_n n\, p_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_{*n} = e^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 1,$$

iar $\quad D(X) = \sqrt{2}$ și $D(Y) = 1$.

13. Se consideră un vector aleator bidimensional (X, Y) cu densitatea de probabilitate $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Să se afle densitățile de probabilitate ale v.a.

$$U = \min(X, Y),\ V = \max(X, Y).$$

Rezolvare

Avem

$$P(U \geq u) = P(X \geq u, Y \geq u) = \int_u^{\infty}\int_u^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy,$$

de unde funcția de repartiție a lui U este

$$G(u) = P(U < u) = 1 - \int_u^{\infty}\int_u^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy,$$

care se derivează în raport cu u și se obține densitatea de probabilitate a lui U:

$$g(u) = \int_u^{\infty} f(u, y)\,dy + \int_u^{\infty} f(x, u)\,dx.$$

În mod asemănător, avem funcția de repartiție a v.a. V dată de

$$H(v) = P(V < v) = P(X < v, Y < v) = \int_{-\infty}^{v}\int_{-\infty}^{v} f(x, y)\,dx\,dy,$$

de unde $h(v) = \int_{-\infty}^{v} f(v, y)\,dy + \int_{-\infty}^{v} f(x, v)\,dx.$

14. Fie X și Y două v.a. independente uniform distribuite în intervalul $[-1, 1]$. Determinați densitatea de probabilitate a v.a.

$$Z = X + Y.$$

Rezolvare

Se știe că

$$f_1(x) = f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Atunci

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_2(z - x)\,dx.$$

Dacă $z < -2$, atunci $z - x < -2 - x \leq -1$, deci $f_2(z - x) = 0$.

Dacă $z > 2$, atunci $z - x > 2 - x > 1$, deci $f_2(z - x) = 0$.

Prin urmare, $g(z) = 0$ pentru $z \notin [-2, 2]$.

Dacă $-2 \leq z \leq 2$, funcția $f_2(z - x) \neq 0$ numai pentru acele valori ale lui x pentru care $-1 \leq z - x \leq 1$, adică pentru $z - 1 \leq x \leq z + 1$.

Dacă $-2 \leq z \leq 0$, avem $z + 1 \leq 1$ și $z - 1 \leq -3$, deci

$$g(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{z+1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{2 + z}{4},$$

iar dacă $0 \leq z \leq 2$, avem $z - 1 \geq -1$ și $z + 1 \leq 3$, deci

$$g(z) = \frac{1}{2}\int_{z-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{2 - z}{4}.$$

Rezultă $g(z) = \begin{cases} \frac{2-|z|}{4}, & z \in [-2, 2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

15. X este o v.a. uniform distribuită în intervalul $[0, 2\pi]$. Calculați matricea de covarianță și covarianța v.a.

$Y = \cos X$, $Z = \sin X$.

Rezolvare

Densitatea de probabilitate a lui X este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Atunci $M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0$

$$M(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0.$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$D(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 x f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = M[(Y - M(Y))(Z - M(Z))] = M(YZ) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \sin x f(x)\, dx = 0.$$

Deci matricea de covarianță a v.a. bidimensionale (Y, Z) este:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

16. Fie X și Y două v. a. independente având densitățile de probabilitate $f_1(x)$ și $f_2(y)$, respectiv.

a) Să se afle densitățile de probabilitate ale v. a.

$Z = X \cdot Y$, $T = X / Y$.

b) Determinați densitatea de probabilitate a v. a. T dacă

$$f_1(x) = f_2(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^4}, \; x, y \in \mathbf{R}.$$

Rezolvare

a) Funcția de repartiție a lui Z este

$$G(z) = P(Z < z) = \iint_{xy<z} f_1(x) f_2(y) dxdy = \int_0^{\infty} f_2(y)\left[\int_{-\infty}^{z/y} f_1(x)dx\right]dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} f_2(y)\left[\int_{z/y}^{\infty} f_1(x)dx\right]dy = \int_0^{\infty} F_1(z/y) \cdot f_2(y)dy + \int_{-\infty}^{0} [1 - F_1(z/y)] f_2(y)dy.$$

Atunci

$$g(z)=\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{d}z}=\int_0^{\infty}\frac{1}{y}f_1\left(\frac{z}{y}\right)f_2(y)\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{y}f_1\left(\frac{z}{y}\right)f_2(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}f_1\left(\frac{z}{y}\right)f_2(y)\mathrm{d}y.$$

Asemănător, funcţia de repartiţie a lui T este:

$$H(t)=P(T<t)=\iint_{\frac{x}{y}<t}f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}f_2(y)\left[\int_{-\infty}^{yt}f_1(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\ +$$

$$+\int_{-\infty}^{0}f_2(y)\left[\int_{yt}^{\infty}f_1(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}F_1(yt)f_2(y)\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}[1-F_1(yt)]f_2(y).$$

De aici rezultă

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_1(yt)f_2(y)\,\mathrm{d}y.$$

b) Se înlocuiesc $f_1(x)$ şi $f_2(y)$ şi se obţine

$$h(t)=\frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|y|\,\mathrm{d}y}{(1+y^4t^4)(1+y^4)}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{y\mathrm{d}y}{(1+y^4t^4)(1+y^4)}.$$

Cu schimbarea de variabilă $u=t^2$ avem:

$$h(t)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4u^2)(1+u^2)}=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1-t^4}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\frac{t^4}{1-t^4}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+t^4u^2}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1-t^4}\operatorname{arctg}u\Big|_0^{\infty}-\frac{t^2}{1-t^4}\operatorname{arctg}t^2u\Big|_0^{\infty}\right]=\frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

17. Fie X şi Y două v. a. independente repartizate $N(0,\sigma)$. Arătaţi că v. a. $U=X+Y$ şi $V=X-Y$ sunt independente şi determinaţi densităţile lor de probabilitate.

Rezolvare

Avem

$$f_1(x)=f_2(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x,y\in\mathbf{R}.$$

Se face schimbarea de variabile

$$T:\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$$

din care transformarea inversă este:

$$T^{-1}:\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\[2mm] y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$$

cu jacobianul $J=-\frac{1}{2}$.

Atunci

$$g(u, v) = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{u+v}{2}\right) f_2\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{4\sigma^2}\right)$$

din care densitățile v. a. U, respectiv V, sunt

$$g_1(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4\sigma^2}\right)$$

$$g_2(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{4\sigma^2}\right).$$

Rezultă că U și V sunt independente și au repartiția $N(0, \sigma\sqrt{2})$.

18. Fie (X, Y) o v. a. bidimensională normală și fie ρ coefiecientul lor de corelație. Arătați că v. a.

$$U = \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} - \rho\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}},\ V = \sqrt{1-\rho^2}\ \frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

sunt v. a. normale independente.

Rezolvare

Notăm: $M(X) = m_1$, $M(Y) = m_2$, $D(X) = \sigma_1^2$, $D(Y) = \sigma_2^2$.

Probabilitatea elementară a v. a. (X, Y) este

$$f(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]dxdy,$$

Se face schimabarea de variabilă conform definiției v. a. U și V și se obține probabilitatea elementară a vectorului (U, V)

$$g(u, v)dudv = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2(1-\rho^2)}\right)dudv$$

din care densitățile marginale ale lui U și V sunt

$$g_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

$$g_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{v^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

Rezultă că U și V au repartiție $N(0, \sqrt{1-\rho^2})$ și sunt independente!

19. V. a. X are funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

a) Să se determine mediana lui X și densitatea de probabilitatea a lui X.

b) Ce se poate spune despre $M(X)$?

c) Fie (Y, Z) o v. a. bidimensională cu funcția de repartiție

$$F(y, z) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{1+y}-\dfrac{1}{1+z}+\dfrac{1}{1+y+z}, & y \geq 0, z \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se afle densitatea de probabilitate a v. a. (Y, Z).

d) Să se arate că repartițiile marginale ale v. a. Y și Z sunt identice cu repartiția lui X.

e) Să se găsească densitățile condiționate.

Rezolvare

a) Cum $F(x)$ este continuă și strict crescătoare pe **R**, mediana va fi soluția ecuației

$$F(x) = \frac{1}{2}, x \geq 0$$

adică $x_{me} = 1$.

Densitatea de probabilitate a lui X este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

b) Deoarece

$M(X) = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\,dx$ este divergentă, media nu există.

c) Avem

$$f(y, z) = \frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial y \partial z} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+y+z)^3}, & y \geq 0, z \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

d) Funcțiile de repartiție marginale sunt

$$F_1(y) = F(y, \infty) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{1+y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$F_2(z) = F(\infty, z) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{1+z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

e) Se obțin densitățile condiționate

$$f(y/z) = \begin{cases} \dfrac{f(y,z)}{f_2(z)}, & f_2(z) \geq 0 \\ 0, & f_2(z) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2(1+z)^2}{(1+y+z)^3}, & y \geq 0,\ z \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f(z/y) = \begin{cases} \dfrac{2(1+y)^2}{(1+y+z)^3}, & y \geq 0,\ z \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

20. Fie X și Y două v. a. $N(m, \sigma)$ independente.

a) Să se determine $\rho(U, V)$ unde

$U = \alpha X + \beta Y,\ V = \alpha X - \beta Y,\ \alpha, \beta > 0.$

b) Să se demonstreze că

$$M[\max(X, Y)] = m + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

Rezolvare

a) V. a. X și Y fiind independente avem

$M(U) = (\alpha + \beta)m,\ M(V) = (\alpha - \beta)m,\ D(U) = D(V) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$

iar $M(UV) = M(\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2) = \alpha^2 M(X^2) - \beta^2 M(Y^2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\sigma^2 + m^2).$

Atunci

$$\sigma(U, V) = \frac{M(UV) - M(U)M(V)}{\sqrt{D(U)D(V)}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

b) Funcția de repartiție a v. a. $\max(X, Y)$ este

$G(x) = P[\max(X, Y) < x] = P(X < x, Y < x) =$

$$= P(X < x) \cdot P(Y < x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \right)^2,$$

deci densitatea ei de probabilitate va fi

$$g(x) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Atunci

$$M[\max(X, Y)] = \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \right] dx.$$

Se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x - m = \rho\cos\theta \\ t - m = \rho\sin\theta \end{cases},$$

care transformă domeniul $\mathbf{R} \times (-\infty, x)$ în $\rho > 0,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{4}.$

Se obține

$$M[\max(X, Y)] = \frac{1}{\pi\sigma^2}\left(\sigma^3\sqrt{\pi} + m\pi\sigma^2\right) = m + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

21. Se consideră v.a. $Z = \max(|X|, |Y|)$, unde X și Y sunt v.a. independente repartizate $N(0, \sigma)$. Să se calculeze $M(Z)$ și $D(Z)$.

Rezolvare

Funcția de repartiție a v.a. Z este

$$G(z) = P[\max(|X|, |Y| < z] = P(|X| < z, |Y| < z), z > 0$$
$$G(z) = 0, z \le 0.$$

Dacă $F(x)$ este funcția de repartiție a lui X (respectiv Y), atunci

$$G(z) = P(|X| < z) \cdot P(|Y| < z) = [P(-z < X < z)]^2 =$$
$$= [F(z) - F(-z)]^2 = [2F(z) - 1]^2, z > 0,$$

iar densitatea de probabilitate a lui Z va fi

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} [2F(z) - 1], & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}.$$

Atunci

$$M(z) = \frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \left[2\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - 1\right] dz =$$

$$= \frac{4}{\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{z} z e^{-\frac{z^2+t^2}{2\sigma^2}} dt\, dz - \frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

În același mod se calculează

$$M(Z^2) = \sigma^2\left(1 + \frac{2}{\pi}\right),$$

deci $$D(Z) = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

22. Fie Δ triunghiul determinat de punctele $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și (X, Y) o v.a. bidimensională cu densitatea de probabilitate

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{xy}}, & (x, y) \in \Delta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine constanta k.

b) Să se afle densitățile marginale și condiționate.

Rezolvare

a) Funcția f este densitate de probabilitate dacă

$$f(x, y) \ge 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

A doua condiţie ne dă

$$1 = k\iint_\Delta \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = k\int_0^1\left(\int_0^y \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\right)dy = 2k,$$

deci $\quad k = \frac{1}{2}$.

b) Avem

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{xy}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},\ 0 < x < 1,$$

deci densitatea marginală a lui X este

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Analog avem

$$f_2(y) = \begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

iar densităţile de probabilitate condiţionate devin

$$f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}(1-\sqrt{x})}, & (x, y)\in\Delta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

$$f(x/y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}, & (x, y)\in\Delta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

23. Fie $X \sim N(n, \sigma)$. Dacă v.a. condiţionată $Y / X = x \sim N(x, \sigma)$, să se determine distribuţia v.a. bidimensionale (X, Y).

Rezolvare

Se ştie că

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$f(y/x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{\sigma^2}\right],$$

atunci $\quad f(x,y) = f_1(x)\cdot f(y/x) = \dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left[(x-m)^2+(y-x)^2\right]\right).$

Puterea se poate exprima

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-m)^2+(y-x)^2\right] = -\left[\frac{(x-m)^2}{\sigma^2} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-m)(y-m)}{\sigma^2\sqrt{2}} + \frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

deci (X, Y) are o repartiţie normală bidimensională cu

$$M(X) = M(Y) = m,$$
$$D(X) = \sigma^2, D(Y) = 2\sigma^2,$$

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

24. Se consideră X şi Y două v.a. independente repartizate $\gamma(a, p)$, respectiv $\gamma(b, p)$, $a, b, p > 0$.

a) Să se determine distribuţiile v.a.

$$U = X + Y, Z = \frac{X}{Y}, T = \frac{X}{X+Y}.$$

b) Să se arate că U şi T sunt independente.

Rezolvare

a) Notând f_X şi f_Y densităţile de probabilitate ale v.a. X şi Y, densitatea lui U este

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(u-x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{p^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-px} \cdot \frac{p^b}{\Gamma(b)} (u-x)^{b-1} e^{-p(u-x)}\,dx =$$

$$= \frac{p^{a+b} \cdot e^{-pu}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} u^{b-1} \int_0^{\infty} x^{a-1} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{b-1} dx = \frac{p^{a+b} e^{-pu}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} u^{a+b-1} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt =$$

$$= \frac{p^{a+b}}{\Gamma(a+b)} u^{a+b-1} e^{-pu}, u > 0,$$

deci $U \sim \gamma(a + b, p)$.

Determinăm mai întâi funcţia de repartiţie a lui Z

$$F_Z(z) = P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \iint_D f_X(x) \cdot f_Y(y)\,dx\,dy,$$

unde $D : x > 0, y > 0, \frac{x}{y} < z$. Se face substituţia

$$u = x, v = \frac{x}{y},$$

care are jacobianul $-\frac{u}{v^2}$. Atunci

$$F_Z(z) = \int_0^z \left[\int_0^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{u}{v^2} du\right] dv,$$

din care deducem densitatea de probabilitate a lui Z

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y\left(\frac{u}{z}\right) \cdot \frac{u}{z^2} du = \frac{p^{a+b}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-pu} \left(\frac{u}{z}\right)^{b-1} e^{-\frac{bu}{x}} \cdot \frac{u}{z^2} du =$$

$$= \frac{1}{\beta(a, b)} \cdot z^{a-1} \cdot (1+z)^{-(a+b)}, z > 0.$$

Rezultă că v.a. $Z \sim \beta(a, b)$.

V.a. T se poate scrie

$$T = \frac{X}{X+Y} = \frac{Z}{Z+1} = g(Z), Z = \frac{T}{1-T} = g^{-1}(T),$$

deci între T și Z există o corespondență bijectivă. Atunci

$$f_T(t) = f_Z(g^{-1}(t)) \cdot \left|(g^{-1}(t))'\right| = \frac{1}{\beta(a, b)} \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^{a-1} \left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^{-(a+b)} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} =$$

$$= \frac{1}{\beta(a, b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}, t \in (0, 1),$$

deci $T \sim \beta(a, b)$.

b) V.a. bidimensională (X, Y) are probabilitatea elementară

$$f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy, x > 0, y > 0,$$

în care se face schimbarea de variabile

$$u = x + y, t = \frac{x}{x+y}$$

și obținem probabilitatea elementară a lui (U, T)

$$g(u, t)\, du\, dt = f_U(u)\, du \cdot f_T(t)\, dt, u > 0, 0 < t < 1,$$

deci v.a. U și T sunt independente.

25. Se consideră v.a. bidimensională $(X, Y0$ având densitatea de probabilitate

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[1 + xy(x^2 - y^2)\right], & |x| \le 1, |y| \le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

a) Să se determine distribuțiile marginale și distribuția v.a. $Z = X + Y$

b) Să se calculeze coeficienții de corelație $\rho(X, Y)$ și $\rho(X^2, Y^2)$.

c) Să se determine liniile de regresie.

Rezolvare

a) Se găsesc densitățile marginale

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}; f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| \le 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases},$$

adică X și Y sunt repartizate uniform în $[-1, 1]$.

Pentru a afla densitatea de probabilitate a lui Z, facem în $f(x, y)$ schimbarea de variabile

$$z = x + y, t = x - y,$$

cu jacobianul $-\frac{1}{2}$ și domeniul Δ: $-2 \le z + t \le 2, -2 \le z - t \le 2$.

Densitatea de probabilitate a vectorului (Z, T) va fi

$$g(z, t) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left[1+\frac{zt(z^2-t^2)}{4}\right], & (z, t) \in \Delta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

din care densitatea de probabilitate a lui Z este

$$g_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, t)\,\mathrm{d}t.$$

Dacă $-2 \le z \le 0$, atunci

$$g_1(z) = \frac{1}{8}\int_{-z-2}^{z+2}\left[1+\frac{1}{4}zt(z^2-t^2)\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(2+z),$$

iar dacă $0 \le z \le 2$, atunci

$$g_1(z) = \frac{1}{8}\int_{z-2}^{2-z}\left[1+\frac{1}{4}zt(z^2-t^2)\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(2-z).$$

Rezultă că

$$g_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|z|), & |z| \le 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) Se obţin valorile

$$M(X) = M(Y) = 0, M(X^2) = M(Y^2) = \frac{1}{3}, M(XY) = 0,$$

$$M(X^4) = M(Y^4) = \frac{1}{5}, M(X^2Y^2) = \frac{1}{9},$$

din care $\rho(X, Y) = \dfrac{M(XY) - M(X)\cdot M(Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} = 0$

$$\rho(X^2, Y^2) = \frac{M(X^2Y^2) - M(X^2)\cdot M(Y^2)}{\sqrt{D(X^2)\cdot D(Y^2)}} = 0$$

c) Pentru $f_1(x) > 0$, adică $x \in [-1, 1]$, putem scrie

$$M(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x, y)}{f_1(x)}\mathrm{d}y = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{5},$$

deci linia de regresie a lui Y în raport cu X este curba de ecuaţie

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{5}, -1 \le x \le 1$$

Asemănător, linia de regresie a lui X în raport cu Y este curba

$$x = -\frac{y^3}{3} + \frac{y}{5}, -1 \le y \le 1.$$

26. Fie D tetraedrul că vârfurile $(0, 0, 0)$; $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ şi (X_1, X_2, X_3) o v.a. tridimensională cu densitatea dde probabilitate

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 6, & (x_1, x_2, x_3) \in D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se afle distribuţiile v.a. (X_1, X_2) şi X_2 / X_1.

Rezolvare

Domeniul D se poate reprezenta prin:

$$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 - x_1,\ 0 \le x_3 \le 1 - x_1 - x_2$$

şi fie Δ domeniul bidimensional $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1 - x_1$.

Densitatea de probabilitate a v.a. (X_1, X_2) este

$$f(x_1, x_2, \cdot) = \int_R f(x_1, x_2, x_3)\,dx_3$$

şi, cum $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ pentru $(x_1, x_2) \notin \Delta$, avem

$$f(x_1, x_2, \cdot) = \int_0^{1-x_1-x_2} 6\,dx_3 = 6(1 - x_1 - x_2).$$

Rezultă că

$$f(x_1, x_2, \cdot) = \begin{cases} 6(1 - x_1 - x_2), & 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 - x_2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Densitatea de probabilitate a lui X_1 va fi

$$f(x_1, \cdot, \cdot) = \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_2\,dx_3,$$

adică $$f(x_1, \cdot, \cdot) = \begin{cases} 3(1 - x_1)^2, & 0 \le x_1 \le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Rezultă

$$f(x_2 / x_1) = \begin{cases} \dfrac{f(x_1, x_2)}{f(x_1, \cdot, \cdot)}, & f(x_1, \cdot, \cdot) > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(1 - x_1 - x_2)}{(1 - x_1)^2}, & 0 < x_1 < 1,\ 0 \le x_2 \le 1 - x_1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

27. Fie X_1, X_2, X_3 v.a. independente repartizate exponențial de parametru 1 și fie v.a. $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2 + X_3$, $Y_3 = X_3$.

a) Să se determine distribuția v.a. (Y_1, Y_2, Y_3) și matricea sa de covarianță.

b) Să se afle distribuțiile marginale.

Rezolvare

Probabilitatea elementară a v.a. (X_1, X_2, X_3) este

$$f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = e^{-x_1-x_2-x_3}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Se face schimbarea de variabile

$$y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3$$

cu jacobianul 1. Se obține probabilitatea elementară a v.a. (Y_1, Y_2, Y_3)

$$q(y_1, y_2, y_3)\,dy_1\,dy_2\,dy_3 = e^{-y_1-y_3}\,dy_1\,dy_2\,dy_3,\ \text{pentru } 0 \leq y_3 \leq y_2, y_1 \geq y_2 - y_3.$$

Se știe că o v.a. X repartizată exponențial de parametru 1 are $M(X) = 1$, $M(X^2) = 2$, $D(X) = 1$. Ținând seama că X_1, X_2, X_3 sunt independente, găsim

$$M(Y_1) = M(X_1) + M(X_2) = 2, M(Y_2) = M(X_2) + M(X_3) = 2, M(Y_3) = M(X_3) = 1;$$

$$D(Y_1) = D(X_1) + D(X_2) = 2, D(Y_2) = 2, D(Y_3) = 1.$$

$$\mathrm{cov}\,(Y_1, Y_2) = M[(X_1 + X_2 - 2)(X_2 + X_3 - 2)] = M(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_2^2 - 2X_1 - 4X_2 - 2X_3 + 4) = M(X_1)\cdot M(X_2) + M(X_1)\cdot M(X_3) + M(X_2)\cdot M(X_3) + M(X_2^2) - 2M(X_1) - 4M(X_2) - 2M(X_3) + 4 = 1.$$

$$\mathrm{cov}(Y_1, Y_3) = 0,\ \mathrm{cov}(Y_2, Y_3) = 1,$$

deci matricea de covarianță a lui (Y_1, Y_2, Y_3) este

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Densitatea marginală a lui Y_1 este

$$g(y_1, \cdot, \cdot) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(y_1, y_2, y_3)\,dy_2 dy_3 = \int_0^\infty \left(\int_{y_3}^{y_1+y_3} e^{-y_1-y_3} dy_2\right) dy_3 = \begin{cases} y_1 e^{-y_1}, & y_1 \geq 0 \\ 0, & y_1 < 0 \end{cases}.$$

Pentru Y_2 se găsește aceeași densitate marginală, integrându-se pe domeniul: $0 \leq y_3 \leq y_2$, $y_1 \geq y_2 - y_3$, iar pentru v.a. Y_3 densitatea marginală este cea exponențială de parametru 1 obținută din integrarea funcției $g(x_1, x_2, x_3)$ pe domeniul: $y_2 \geq y_3, y_1 \geq y_2 - y_3$.

28. Fie (X, Y, Z) o v.a. tridimensională astfel încât:

i) X este repartizată uniform pe $[0, 1]$;

ii) $Y / X = x$ are densitatea de probabilitate

$$h_x(y) = \begin{cases} (y - x)e^{-(y-x)}, & 0 \leq x \leq 1,\ y > x \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

iii) $Z / X = x, Y = y$ are densitatea de probabilitate

$$h_{xy}(z) = \begin{cases} (y-x)e^{-z(y-x)}, & 0 \le x \le 1,\ y > x,\ z > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine densitatea de probabilitate a v.a. (X, Y, Z).

b) Să se afle distribuţia v.a. Y şi linia de regresie a lui Y în raport cu X.

c) Să se determine distribuţia v.a. Z şi momentele ei.

d) Notând cu

$$U = Y - X,\ V = Z(Y - X)$$

să se găsească distribuţia v.a. (X, U, V).

Rezolvare

a) Densităţile de probabilitate condiţionate sunt

$$h_x(y) = \begin{cases} \dfrac{f(x, y, \cdot)}{f_1(x)}, & f_1(x) > 0 \\ 0, & f_1(x) = 0 \end{cases},\quad h_{xy}(z) = \begin{cases} \dfrac{f(x, y, z)}{f(x, y, \cdot)}, & f(x, y, \cdot) > 0 \\ 0, & f(x, y, \cdot) = 0 \end{cases},$$

atunci densitatea de probabilitate a v.a. (X, Y, Z) este

$$f(x, y, z) = f_1(x) \cdot h_x(y) \cdot h_{xy}(z) = \begin{cases} (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)}, & 0 \le x \le 1,\ y > x,\ z > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) Densitatea de probabilitate a lui Y se află din

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \cdot)\, dx,$$

unde $f(x, y, \cdot) = f_1(x) \cdot h_x(y) = \begin{cases} (y-x)e^{-(y-x)}, & 0 \le x \le 1,\ y > x \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

Dacă $0 \le y \le 1$, avem

$$f_2(y) = \int_0^y (y-x)e^{-(y-x)}\, dx = 1 - (y+1)e^{-y},$$

iar dacă $y > 1$, atunci

$$f_2(y) = \int_0^1 (y-x)e^{-(y-x)}\, dx = (ey - y - 1)e^{-y}.$$

Rezultă că

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - (y+1)e^{-y}, & 0 \le y \le 1 \\ (ey - y - 1)e^{-y}, & y > 1 \end{cases}.$$

Determinăm acum

$$M(Y / X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y h_x(y)\, dy = \int_x^{\infty} y(y-x)\, e^{-(y-x)}\, dy = 2 + x$$

pentru $0 \le x \le 1$, în rest fiind 0. Atunci linia de regresie a lui Y în raport cu X este

$$y = \begin{cases} x + 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

c) Densitatea de probabilitate a v.a. Z este

$$f_3(z) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y, z)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_x^{\infty}(y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)}dy\right]dx,$$

pentru $z > 0$, fiind 0 pentr $z \leq 0$. Făcând substituţia $t = (z + 1)(y - x)$ se găseşte că

$$f_3(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(z+1)^3}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

Integrala

$$M(Z^k) = \int_{-\infty}^{\infty} z^k \cdot f_3(z)\,dz = \int_0^{\infty} \frac{2z^k}{(z+1)^3}\,dz,\ k \in \mathbf{N},$$

este convergentă doar pentru $k = 1$. Deci există doar momentul de ordin unu:

$$M(Z) = \int_0^{\infty} \frac{2z}{(z+1)^3}\,dz = 1.$$

d) Se face schimbarea de variabile

$$x = x,\ u = y - x,\ v = z(y - x),$$

care transformă domeniul pe care $f(x, y, z) > 0$ în domeniul Δ: $0 \leq x \leq 1$, $u > 0$, $v > 0$.

Atunci probabilitatea elementară a v.a. (X, U, V) este

$$g(x, u, v)\,dx\,du\,dv = \begin{cases} u e^{-u-v} dx\,du\,dv, & (x, u, v) \in \Delta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

din care se vede că densităţile marginale sunt

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},\ q_2(u) = \begin{cases} u e^{-u}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases},\ q_3(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v > 0 \\ 0, & v \leq 0 \end{cases},$$

deci v.a. X, U, V sunt independente.

29. Fie (X, Y) o v.a. bidimensională. demonstraţi că $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ dacă $M(X / Y = y) = \text{const.}$ (sau $M(Y / X = x) = \text{const.}$).

Rezolvare

Presupunem că $M(X / Y = y) = c$. Atunci

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x / y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f_2(y)}\,dx = \frac{1}{f_2(y)}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\,dx,$$

de unde rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\,dx = c f_2(y),$$

relaţie pe care o integrăm în raport cu y şi obţinem

$$\iint_{\mathbf{R}^2} x f(x, y)\,dx\,dy = c\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,dy,$$

adică $M(X) = c$.

Atunci

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x, y)\, dx\, dy - cM(Y).$$

Dar

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left[y f_2(y)\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/y)\, dx\right] dy = c\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy = cM(Y).$$

Rezultă, aşadar, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

30. Fie $X = (X_1 \dots X_n)$ o v.a. n-dimensională cu densitatea de probabilitate

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{\pi^n (1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)},\ (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

a) Să se determine funcţia de repartiţie a lui X, funcţiile de repartiţie marginale $F_j(x_j)$, $j = 1 \dots n$, şi să se arate că v.a. $X_1 \dots X_n$ sunt independente.

b) Să se calculeze funcţia caracteristică a lui X.

Rezolvare

a) Avem

$$F(x_1 \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1 \dots u_n)\, du_1 \dots du_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x_j} \frac{1}{1+u_j^2}\, du_j = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x_j + \frac{1}{2}\right).$$

Funcţia de repartiţie marginală a lui X_j este

$$F_j(x_j) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_j, +\infty, \dots, +\infty) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x_j + \frac{1}{2}.$$

Rezultă atunci că

$$F(x_1 \dots x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_j(x_j),$$

deci $X_1 \dots X_n$ sunt v.a. independente.

b) V.a. X_j este repartizată Cauchy, iar funcţia ei caracteristică este

$$\varphi_{X_j}(t_j) = e^{-|t_j|},\ j = 1, \dots, n,$$

şi cum $X_1 \dots X_n$ sunt independente, avem

$$\varphi_X(t_1 \dots t_n) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t_j) = e^{-\sum_{j=1}^{n}|t_j|}$$

3.2. Probleme propuse

1. X şi Y sunt două v.a. independente cu aceeaşi densitate de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbf{R}.$$

Aflaţi densitatea de probabilitate a v.a. $Z = X + Y$.

Răspuns: $g(z) = \frac{1+|z|}{4} \cdot e^{-|z|}$.

2. Fie X şi Y v.a. independente având densităţile de probabilitate

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases};$$

$$f_2(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\leq 0 \end{cases}.$$

Determinaţi distribuţia v.a. $Z = X \cdot Y$.

Răspuns: $g(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in \mathbf{R}$.

3. Fie X şi Y v.a. independente, repartizate exponenţial de parametru 1.

a) Determinaţi densitatea de probabilitate a v.a. $Z = X + Y$.

b) Calculaţi $M(Z)$ şi $D(Z)$.

Răspuns: a) $g(z) = \begin{cases} ze^{-z}, & z\geq 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$; b) $M(Z) = 2, D(Z) = \sqrt{2}$.

4. Fie (X, Y) o v.a. bidimensională cu densitatea de probabilitate

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+3y)e^{-x-2y}, & x\geq 0,\ y\geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Verificaţi că f este densitate de probabilitate.

b) Determinaţi densităţile marginale şi condiţionate.

Răspuns: b) $f_2(y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(1+3y)e^{-2y}, & y\geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$; $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x+3)e^{-x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

5. Densitatea de probabiliate a vectorului aleator (X, Y) este

$$f(x, y) = \begin{cases} abe^{-(ax+by)}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

cu a și b constante strict pozitive.

a) Determinați densitățile marginale și condiționate.

b) Determinați liniile de regresie.

c) Demonstrați că v.a. $U = aX + bY$ și $V = X / Y$ sunt independente și găsiți densitățile lor de probabilitate.

Răspuns: b) $M(Y/X = x) = \frac{1}{b}, x \geq 0$; c) $g_1(u) = \begin{cases} ue^{-u}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$; $g_2(v) = \begin{cases} \frac{ab}{(av+b)^2}, & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases}$

6. Fie (X_1, X_2) o v.a. cu densitatea de probabilitate

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}},\ (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$$

și fie $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, unde Y_1 este o v.a. pozitivă. Arătați că Y_1 și Y_2 sunt v.a. independente și determinați densitățile de probabilitate corespunzătoare.

Răspuns: $q_1(y_1) = y_1 e^{-\frac{y_1^2}{2}}, y_1 > 0$; $q_2(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & y_2 \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

7. Dacă X și Y sunt v.a. repartizate $N(0, 1)$, să se calculeze $M[\max(X, Y)]$.

Răspuns: $\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.

8. Dacă X și Y sunt v.a. independente repartizate $\gamma(k_1)$, $\gamma(k_2)$, respectiv, $k_1, k_2 > 0$, să se demonstraze că v.a.

$$U = X + Y,\ V = \frac{X}{X+Y}$$

sunt independente și au, respectiv, repatițiile $\gamma(k_1 + k_2)$ și $\beta(k_1, k_2)$.

9. Fie (X, Y) o v.a. bidimensională a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k_1) \cdot \Gamma(k_2)} x^{k_1 - 1} \cdot (y - x)^{k_2 - 1} \cdot e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

unde k_1, k_2 sunt constante strict pozitive. Să se găsească distribuțiile marginale.

Răspuns: $x \sim \gamma(k_1)$, $Y \sim \gamma(k_1 + k_2)$.

10. Fie X şi Y două v.a. independente cu aceeaşi repartiţie dată de

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}},\ x \in \mathbf{R}.$$

Să se afle distribuţia v.a. $Z = X + Y$.

11. Fie (X, Y) o v.a. bidimensională cu densitatea de probabilitate

$$f(x, y) = \frac{k}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},\ x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Determinaţi constanta k.
b) Calculaţi densităţile marginale.
c) Calculaţi coeficientul de corelaţie a v.a X şi Y.

Răspuns: a) $k = \frac{3}{2\pi}$; b) $f_1(x) = f_2(y) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$; c) $\rho(X, Y) = 0$.

12. Fie X_1, X_2, X_3 v.a. independente repartizate $N(0, 1)$. Să se arate că v.a.

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2),\ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3),\ Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3)$$

sunt repartizate $N(0, 1)$ şi independente.

13. X_1 şi X_2 sunt v.a. independente având funcţiile de repartiţie $F_1(x)$, $F_2(x)$, respectiv. Să se determine funcţiile de repartiţie ale v.a.

$$Y = \max(X_1, X_2),\ Z = \min(X_1, X_2).$$

Răspuns: $G(Y) = F_1(y) \cdot F_2(y)$, $H(z) = F_1(z) + F_2(z) - F_1(z) \cdot F_2(z)$.

14. Fie $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independente repartizate uniform pe $[0, 1]$. Notăm cu

$$Y = \max_i X_i,\ Z = \min_i X_i,\ U = Y - Z,\ V = Y / Z.$$

a) Să se afle distribuţiile v.a. Y, Z, U şi V.
b) Să se calculeze $\rho(Y, Z)$.
c) Să se determine distribuţiile v.a. $Y / Z = z$ şi $Z / Y = y$ şi să se afle liniile de regresie corespunzătoare.

Răspuns: a) $f_Y(y) = \begin{cases} n y^{n-1}, & y \in [0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$; $f_Z(z) = \begin{cases} n(1-z)^{n-1}, & z \in [0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

$$f(y, z) = \begin{cases} n(n-1)(y-z)^{n-2}, & 0 \le z \le y \le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases};$$

b) $\rho(Y, Z) = \frac{1}{n}$; c) $y = \frac{z}{n} + \frac{n-1}{n}$, $0 \le z \le 1$; $z = \frac{y}{n}$, $0 \le y \le 1$.

4

REPARTIȚII CLASICE

4.1. Probleme rezolvate

Vom aminti mai întâi principalele repartiții clasice:

a) discrete, caracterizate prin funcția de frecvență p_k ·

- Bernoulli $X \in \mathrm{Be}(p) \Leftrightarrow p(0) = p, p(1) = q, q = 1-p, p \in [0, 1]$;
- binomială $X \in \mathrm{Bi}(n, p) \Leftrightarrow p_k = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n$;
- geometrică $X \in \mathrm{Ge}(p) \Leftrightarrow p_k = pq^k, k \in \mathbf{N}$;
- binomială negativă $X \in \mathrm{NB}(n, p), n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow p_k = C_{n+k-1}^k p^n q^k, k \in \mathbf{N}$;
- Poisson $X \in \mathrm{Po}(\lambda) \Leftrightarrow p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbf{N}$;
- hipergeometrică $X \in \mathrm{H}(N, n, p) \Leftrightarrow p_k = \dfrac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, ..., Np, q = 1-p,$

  $n-k = 0, ..., Nq, n = 0, 1, ..., N, N \in \mathbf{N}^*, p = 0, \dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, ..., 1$;

b) continue, caracterizate prin densitatea de repartiție f:

- uniformă $X \in U(a, b) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{b-a}, a < x < b$;
- triunghiulară $X \in \mathrm{Tri}(a, b) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{b-a}\left(1-\dfrac{2}{b-a}\left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\right), a < x < b$;
- Cauchy $X \in \mathrm{C}(m, a) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+(x-m)^2}, x \in \mathbf{R}$;
- Pareto $X \in \mathrm{Pa}(k, \alpha), k, \alpha > 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x > k$;
- Gamma $X \in \Gamma(a, b), a, b > 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{b^a\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}, x > 0$;
- exponențială $X \in \exp(\theta), \theta > 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$;
- Hi-pătrat $X \in \chi_n^2, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{2^n}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, x > 0$;

- Laplace $X \in \text{La}(a),\ a > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}},\ x \in \mathbf{R};$
- Beta $X \in \text{B}(p, q),\ p, q > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1},\ 0 < x < 1;$
- Weibull $X \in \text{W}(\lambda, \theta),\ \theta, \lambda > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\lambda}{\theta}x^{\lambda-1}e^{-\frac{x^\lambda}{\theta}},\ x > 0;$
- Rayleigh $X \in \text{Ra}(\theta),\ \theta > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}},\ x > 0;$
- Normala $X \in \text{N}(m, \sigma),\ \sigma > 0,\ m \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbf{R};$
- lognormala $X \in \text{LN}(m, \sigma),\ \sigma > 0,\ m \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-m}{\sigma}\right)^2},\ x > 0;$
- Student $X \in t_n,\ n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ x \in \mathbf{R};$
- Fisher $X \in \text{F}(m, n),\ m, n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}},\ x > 0.$

1. Să se determine funcția de frecvență a v.a. X care are funcția caracteristică

$$\varphi(t) = \frac{e^{it}\left(1-(e^{it})^n\right)}{n(1-e^{it})}.$$

Rezolvare

Putem scrie

$$\varphi(t) = \frac{e^{it}\left(1-(e^{it})^n\right)}{n(1-e^{it})} = \frac{e^{it}(1-e^{it})}{n(1-e^{it})}(1 + e^{it} + e^{2it} + \ldots + e^{(n-1)it}).$$

Rezultă $\varphi(t) = \frac{e^{it} + e^{2it} + \ldots + e^{nit}}{n}$.

Cum $\varphi(t) = M(e^{itX})$, repartiția v. a. X este uniformă discretă

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

2. Să se găsească repartiţia sumei a n v. a. independente $X_k \in Ge(p)$, $k = \overline{1,n}$.

Rezolvare

$$X_k \in Ge(p) \Rightarrow \varphi_{X_k}(t) = \sum_{k\geq 0} e^{itk} pq^k = p\sum_{k\geq 0}(qe^{it})^k = \frac{p}{1-qe^{it}}.$$

Cum v. a. X_k sunt independente, funcţia caracteristică

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t) = p^n(1-qe^{it})^{-n} = p^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{-n(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(qe^{it})^n =$$

$$= p^n\sum_{k\geq 0}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}(qe^{it})^k = p^n\sum_{k\geq 0}C_{n+k-1}^{k}q^k e^{itk}$$

este cea a variabilei $NB(n, p)$.

3. Determinaţi funcţia caracteristică a variabilei binomiale cu exponent negativ, caracterizată de funcţia de frecvenţă $p_k = C_{k-1}^{n-1}p^n q^{k-n}$, $k \geq n$.

Rezolvare

p_k reprezintă probabilitatea ca în $k \geq n$ probe un eveniment A cu probabilitatea de apariţie p să se realizeze de n ori. Denumirea de repartiţie binomială cu exponent negativ este justificată de faptul că p_k reprezintă termenul general al dezvoltării binomului

$p^k(1-q)^{-n} = \left(\frac{1}{p}-\frac{q}{p}\right)^{-n}$ cu exponent negativ, reprezentând generalizarea naturală a repartiţiei $Fs(p): p_k = pq^{k-1}$, $k \in \mathbf{N}^*$ (first success). Aşadar, v. a. X care reprezintă numărul de probe efectuate până la realizarea de n ori a evenimentului A este sumă de v.a. independente identic repartizate indicând numărul de probe necesare realizării evenimentului o singură dată (funcţia de frecvenţă a variabilei $Fs(p)$ „contabilizează" cele $k-1$ „eşecuri" independente care preced realizarea evenimentului A). Astfel

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ X_k \in Fs(p).$$

Cum $\varphi_{X_k}(t) = \sum_{k\geq 1} e^{itk}pq^{k-1} = pe^{it}\sum_{k\geq 1}(qe^{it})^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$,

rezultă folosind proprietatea funcţiei caracteristice utilizată şi în exerciţiul 2,

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^n$$

4. Determinați repartiția v. a. cu funcția caracteristică $\varphi(t) = (2e^{-it} - 1)^{-1}$.

Rezolvare

Cum $\varphi(t) = \dfrac{e^{it}}{2-e^{it}}$, dacă $g(x) = \dfrac{x}{2-x}$, atunci $\varphi(t) = g(e^{it})$.

Dezvoltând $g(x)$ în serie Maclaurin avem succesiv:

$$g'(x) = \frac{2}{(2-x)^2},\ g''(x) = \frac{-2\cdot 2}{(x-2)^3} \text{ ş.a.m.d.,}$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}n!}{(x-2)^{n+1}},\ \text{deci } g^{(n)}(0) = \frac{2(-1)^{n+1}n!}{(-2)^{n+1}} = \frac{n!}{2^n}.$$

Prin urmare, $g(x) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n!}\dfrac{n!}{2^n}$.

Deci $\varphi(t) = g(e^{it}) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{2^n}e^{itn}$, adică $X \in Fs\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5. Un lot compus din o sută de piese conține zece piese defecte. Din lot se extrag pentru a fi verificate cinci piese. Să se afle numărul mediu de piese defecte din eșantionul controlat.

Rezolvare

V. a. care indică numărul pieselor defecte $X \in H(100,5 : 0, 1)$ are repartiția

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \dfrac{C_{10}^0 C_{90}^5}{C_{100}^5} & \dfrac{C_{10}^1 C_{90}^4}{C_{100}^5} & \dfrac{C_{10}^2 C_{90}^3}{C_{100}^5} & \dfrac{C_{10}^3 C_{90}^2}{C_{100}^5} & \dfrac{C_{10}^4 C_{90}^1}{C_{100}^5} & \dfrac{C_{10}^5 C_{90}^0}{C_{100}^5} \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$M(X) = \frac{1}{C_{100}^5}\sum_{j=0}^{5} jC_{10}^j C_{90}^{5-j}.$$

Cum $\sum\limits_{j=0}^{5} C_{10}^j C_{90}^{5-j}$ reprezintă coeficientul lui x^5 din dezvoltarea $(1 + x)^{10}(1 + x)^{90}$,

suma $S = \sum jC_{10}^j C_{90}^{5-j}$ este coeficientul lui x^5 din expresia

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1 + tx)^{10}(1 + x)^{90}]\big|_{t=1} = 10x(1 + x)^{99}.$$

Rezultă $S = 10\,C_{99}^4$, deci numărul mediu de piese defecte din eșantionul controlat

$$M(X) = \frac{10C_{99}^4}{C_{100}^5} = 0{,}5.$$

6. Dintr-o urnă conţinând b bile albe şi c negre, cu $b + c = N$, se extrage la întâmplare o bilă. Înaintea următoarei extrageri $s + 1$ bile de aceeaşi culoare se pun în urnă. Procedeul se repetă de n ori. Fie X numărul bilelor albe obţinute în n extrageri. Determinaţi repartiţia acestei v. a.

Rezolvare

Probabilitatea extragerii a k bile albe în extrageri succesive este

$$\frac{b}{N}\cdot\frac{b+s}{N+s}\cdot\frac{b+2s}{N+2s}\cdot\ldots\cdot\frac{b+(k-1)s}{N+(k-1)s},$$

iar cea de a obţine k bile albe în primele k extrageri şi apoi a $n-k$ bile negre în următoarele $n-k$ extrageri este

$$p_k=\frac{b}{N}\cdot\frac{b+s}{N+s}\cdot\frac{b+2s}{N+2s}\cdot\ldots\cdot\frac{b+(k-1)s}{N+(k-1)s}\cdot\frac{c}{N+ks}\cdot\frac{c}{N+(k+1)s}\cdot\ldots\cdot\frac{c+(n-k-1)}{N+(n-1)s},$$

aceasta reprezentând probabilitatea obţinerii a k bile albe şi $n-k$ negre, în orice altă ordine.

Rezultă $P(X=k) = C_n^k p_k$.

Notând

$$\frac{b}{N}=p,\ \frac{c}{N}=1-p \text{ şi } \frac{s}{N}=\alpha\ (1-p=q)$$

se obţine $P(X=k) = C_n^k\ \dfrac{p(p+\alpha)\ldots(p+(k-1)\alpha)q(q+\alpha)\ldots(q+(n-k-1)\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+(n-1)\alpha)}$.

Observaţie. Repartiţia v. a. X se numeşte repartiţie Polya

Pentru $s=-1$, ceea ce înseamnă că bila obţinută la fiecare extragere nu este repusă în urnă înaintea următoarei extrageri $\alpha=-\dfrac{1}{N}$ şi

$$P(X=k) = C_n^k\ \frac{Np(Np-1)\ldots(Np-(k-1))c(c-1)\ldots(c-(n-k-1))}{N(N-1)\ldots(N-(n-1))}$$

$\max(0, n-Nq)\le k\le \min(n, Np)$, adică $X\in H(N, n, p)$.

7. Fie X şi Y v. a. independente identic repartizate, cu $P(X=k)=p_k>0$. Dacă

$$P(X=n\,|\,X+Y=n) = P(X=n-1)\,|\,X+Y=n) = \frac{1}{n+1},\ \forall n\ge 0,$$

atunci X şi Y sunt variabile geometrice.

Rezolvare

Din ipoteză

$$P(X=n\,|\,X+Y=n) = \frac{p_np_0}{\sum\limits_{k=0}^{n}p_kp_{n-k}} = \frac{1}{n+1} = \frac{p_{n-1}p_1}{\sum\limits_{k=0}^{n}p_kp_{n-k}}$$

rezultă $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}=\dfrac{p_1}{p_0}$, deci $p_n=\left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)^n p_0$.

Cum $\sum_{n\geq 0} p_n = 1$ este necesar ca $\frac{p_1}{p_0} < 1$. Mai mult, $1 = p_0 \frac{1}{1-\frac{p_1}{p_0}}$.

În concluzie, $\frac{p_1}{p_0} = 1 - p_0$, deci $X, Y \in Ge(p_0)$.

8. O substanță radioactivă emite particule α astfel încât numărul de particule emise într-o oră, N, urmează o repartiție $Po(\lambda)$. Dacă particulele sunt înregistrate independent, iar o particulă emisă este înregistrată cu probabilitate p, determinați repartiția numărului de particule înregistrate într-o oră.

Rezolvare

Modelul probabilist al problemei este

$$X \mid N = n \in \mathrm{Bi}(n, p) \text{ cu } N \in \mathrm{Po}(\lambda).$$

Pentru determinarea repartiției v. a. X vom aplica legea probabilității totale

$$P(X = k) = \sum_{n\geq 0} P(X = k | N = n) P(N = n) = \sum_{n\geq k} C_n^k p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n\geq k} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} q^{n-k} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n\geq k} \frac{(nq)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{(\lambda q)^j}{j!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q}.$$

Rezultă

$$P(X = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}, \text{ adică } X \in \mathrm{Po}(\lambda p).$$

9. Determinați repartiție variabilei $X | X + Y = s$ (s – fixat) dacă v. a. $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$ și $Y \in \mathrm{Bi}(m, p)$ sunt independente.

Rezolvare

$$P(X = k | X + Y = s) = \frac{P(X = k) \cdot P(Y = s-k)}{\sum_{k=0}^{s} P(X = k) \cdot P(Y = s-k)} =$$

$$= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_m^{s-k} p^{s-k} (1-p)^{m-s+k}}{\sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} p^s (1-p)^{n+m-s}} = \frac{C_n^k C_m^{s-k}}{C_{n+m}^s} \Rightarrow X \in H(n+m, s, \frac{n}{n+m}).$$

Observație. În calculul sumei $\sum C_n^k C_m^{s-k}$ s-a utilizat argumentul folosit în exercițiul 5.

10. Calculați:

a) $S_1 = \sum_{j=0}^{k} C_{a+j-1}^{j} C_{b+k-j-1}^{k-1}$.

b) $S_2 = \sum_{0<k\le n} \sum_{0<h\le m} khC_n^k C_m^h p_1^k p_2^h (1-p_1)^{n-k}(1-p_2)^{m-h}$.

Rezolvare

a) Cu ajutorul funcției caracteristice se arată că suma a două v. a. independente repartizate $NB(a,p)$ respectiv $NB(b,p)$ este o variabilă $NB(a+b,p)$. Ținând cont de acest lucru

$$P(X_1 = j \mid X_1 + X_2 = k) = \frac{P(X_1 = j, X_1 + X_2 = k)}{P(X_1 + X_2 = k)} =$$

$$= \frac{C_{a+j-1}^{j} p^a (1-p)^j C_{b+k-j-1}^{k-j} p^b (1-p)^{k-j}}{C_{a+b+k-1}^{k} p^{a+b}(1-p)^k} = \frac{C_{a+j-1}^{k} C_{b+k-j-1}^{k-j}}{C_{a+b+k-1}^{k}}.$$

Cum $\sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j \mid X_1 + X_2 = k) = 1$ va rezulta că $S_1 = C_{a+b+k-1}^{k}$.

Observație. Pentru n variabile independente $X_i \in NB(p, a_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Se obține $P(X_i = j_i \mid \sum_{1}^{n} X_i = k) = \prod_{i=1}^{n} C_{a_i+j_i-1}^{j_i} \left(C_{\sum_{i=1}^{n} a_i + k-1}^{k} \right)^{-1}$ cu $j_i \ge 0$ $\sum_{i=1}^{n} j_i = k$.

De aici $\sum_{j_i=0}^{k} \prod_{i=1}^{n} C_{a_i+j_i-1}^{j_i} = C_{\sum_{i=1}^{n} a_i + k-1}^{k}$.

b) Pentru două v. a. independente $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$. termenul general al sumei S_2 reprezintă probabilitatea cu care v. a. $X \cdot Y$ ia valoarea $k \cdot h$ unde $X \in Bi(n, p_1)$, iar $Y \in Bi(m, p_2)$.

Cum $M(X) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p_1^k (1-p_1)^{n-k} = np_1 \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p_1^{k-1} (1-p_1)^{n-k} = np_1$,

rezultă $S_2 = mnp_1p_2$.

11. Dacă X este o v. a. discretă satisfăcând $P(X > m + n \mid X > m) = P(X \ge n)$ pentru orice $m, n \in \mathbf{N}$, atunci variabila X este repartizată geometric.

Rezolvare

Cum X este variabilă discretă $P(X = k) = p_k$, $k \in \mathbf{N}$, deci

$$P(X \ge n) = \sum_{k \ge n} p_k \text{ și } P(X > m) = \sum_{k \ge m+1} p_k.$$

Notând $P(X > m) = q_m$, rezultă în continuare

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)} = \frac{q_{m+n}}{q_m}.$$

Deci $q_{m+n} = q_m \cdot q_{n-1}$.Conform notației făcute

$$q_0 = P(X > 0) = p_1 + p_2 + .. = 1 - p_0 \text{ și } p_k = q_{k-1} - q_k.$$

Pentru $n = 1$ și $m = k - 1 \Rightarrow q_k = q_{k-1}q_0 \Rightarrow q_k = q_0^{k+1} = (1-p_0)^{k+1} \Rightarrow p_k = p_0(1-p_0)^k$.

12. Într-un lot de N produse se află $M \leq N$ produse defecte. Se extrage câte un produs până la obținerea a n produse defecte. Stabiliți repartiția v.a. care indică numărul de produse extrase (fără revenire) până la obținerea a n defecte.

Rezolvare

Notând cu A evenimentul obținerii în primele $k - 1$ extrageri a $n - 1$ defecte și B evenimentul ca la extragerea k să se obțină un defect, avem

$$P(X = k) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Dar $P(A) = \dfrac{C_M^{n-1} \cdot C_{N-M}^{k-n}}{C_N^{k-1}}$ și $P_A(B) = \dfrac{M-n+1}{N-k+1}$.

Rezultă $P(X = k) = \dfrac{C_M^{n-1} C_{N-M}^{k-n}}{C_N^{k-1}} \cdot \dfrac{M-n+1}{N-k+1} =$

$$= \frac{M!\,(N-M)!\,(N-k)!\,(k-1)!}{(M-k)!\,(k-1)!\,(k-n)!\,(N-M-k+n)!\,N!} = \frac{C_{k-1}^{n-1} \cdot C_{N-k}^{M-n}}{C_N^M}.$$

Conform exercițiului 10 a),

$$\sum_{k=n}^{N-M+n} C_{k-1}^{n-1} C_{N-k}^{M-n} = C_N^M,$$

rezultă $\displaystyle\sum_{k=n}^{N-M+n} P(X=k) = 1.$

13. Fie N o variabilă discretă. Independent una de cealaltă, N bile sunt plasate în urna A cu probabilitatea p sau în urna B cu probabilitatea $1-p$, rezultând N_A bile în urna A și $N_B = N - N_A$ în urna B. Arătați că v.a. N_A și N_B sunt independente dacă și numai dacă N este poissoniană.

Rezolvare

În mod evident,

$$P\,(N_A = a, N_B = b \mid N = a + b) = C_{a+b}^a p^a (1-p)^b,\ a, b \in \mathbf{N}.$$

Rezultă $P(N_A = a, N_B = b) = C_{a+b}^a p^a (1-p)^b P(N = a + b)$.

Dacă $N \in Po(\lambda) \Rightarrow P(N_A = a, N_B = b) = \dfrac{(a+b)!}{a!\,b!} p^a (1-p)^b \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{a+b}}{(1+b)!} \Leftrightarrow$

$$P(N_A = a, N_B = b) = e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(p\lambda)^a}{a!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{((1-p)\lambda)^b}{b!},$$

deci N_A și N_B sunt independente.

$$P(N_A = a) = e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{(p\lambda)^a}{a!}\sum_{b\in\mathbf{N}}\frac{((1-p)\lambda)^b}{b!}e^{-\frac{\lambda}{2}} = e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{(p\lambda)^a}{a!}e^{(1-p)\lambda}e^{-\frac{\lambda}{2}} = e^{-\lambda p}\frac{(p\lambda)^a}{a!}.$$

Reciproc, dacă N_A și N_B sunt independente, atunci $P(X = n)n! = f(a)\cdot g(b)$, unde $n = a + b$, iar f, g funcții definite pe $\mathbf{N}$, cu $f(0) \neq 0 \neq g(0)$ întrucât $P(N_A = 0, N_B = 0) > 0$. Prin urmare, există o funcție h astfel încât

$$h(a + b) = f(a)\cdot g(b)\ \forall\ a, b \in \mathbf{N}.$$

Deci $h(1) = f(1)\cdot g(0) = f(0)\cdot g(1)$

$h(2) = f(2)\cdot g(0) = f(1)\cdot g(1) = f(0)\cdot g(2)$ ș.a.m.d.

Inductiv,

$$f(a) = f(1)\left[\frac{g(1)}{g(0)}\right]^{a-1} \text{ și } g(b) = g(1)\left[\frac{f(1)}{f(0)}\right]^{b-1}$$

ceea ce poate fi scris

$$f(a) = \alpha_1 e^{a\lambda} \text{ și } g(b) = \alpha_2 e^{b\lambda} \Rightarrow P(N = n) = \alpha_1\alpha_2\frac{e^{\lambda(a+b)}}{(a+b)!}.$$

14. Problema lui Banach. Un matematician fumător cumpără două cutii de chibrituri și le bagă în buzunare, câte una în fiecare buzunar. De fiecare dată când folosește un chibrit, îl scoate la întâmplare dintr-o cutie. Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că o cutie este goală, cealaltă să conțină k chibrituri, dacă la început ambele cutii aveau câte n chibrituri?

Rezolvare

Cutia din buzunarul stâng (ales cu probabilitate p) va fi goală în momentul în care cea din buzunarul drept conține exact k bețe dacă și numai dacă $n - k$ eșecuri preced succesul $n + 1$. Pentru buzunarul celălalt funcționând același raționament, rezultă:

$$p = C_{2n-k}^{n-k}p^{n+1}q^{n-k} + C_{2n-k}^{n-k}q^{n+1}p^{n-k},\ n \geq k.$$

Observație. Probabilitatea putea fi determinată raționând simplu, astfel: la extragerea $2n - k + 1$ constat că o cutie este goală întrucât din ea au fost extrase cele n bețe, iar din cealaltă $n - k$, deci

$$P = C_{2n-k}^{k}p^n q^{n-k}$$

15. Fie X o v. a. continuă cu funcția de repartiție F. Dacă $Y = F(X)$, atunci $Y \in U[0, 1]$. Reciproc, dacă F este o funcție de repartiție și $X \in U[0, 1]$, atunci există o funcție h a.î. F să fie funcția de repartiție a v.a. $h(X)$.

Rezolvare

Prima afirmație decurge imediat din

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y) = \begin{cases} P(\varnothing), & y \leq 0 \\ P(X < F^{-1}(y)), & 0 < y \leq 1 \\ P(\Omega), & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & y \in (0, 1) \\ 1, & y > 1 \end{cases}.$$

Reciproca este valabilă și pentru v. a. discrete.

Dacă F este funcția de repartiție a variabilei discrete Y, fie $P(Y = y_k) = p_k$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Definind

$$h(x) = \begin{cases} y_1, & \text{dacă } 0 \le x < p_1 \\ y_2, & \text{dacă } p_1 \le x < p_1 + p_2, \\ \vdots \end{cases}$$

rezultă $P(h(X) = y_1) = P(0 \le x < p_1) = p_1; P(h(X) = y_2) = P(p_1 \le x < p_1 + p_2)$ şi, în general,

$$P(h(X) = y_k) = p_k, \forall k \in \mathbf{N}^*,$$

deci $h(X)$ este o variabilă discretă cu funcţia de repartiţie F.

Dacă F este continuă (strict crescătoare), F^{-1} este bine definită.

Luând $h(X) = F^{-1}(X)$, se obţine

$$P(h(X) < x) = P(F^{-1}(X) < x) = P(X < F(x)) = F(x).$$

În general, definind

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) > y\}$$

şi luând $h(X) = F^{-1}(X)$,

obţinem $\{F^{-1}(y) < x\} = \{y < F(x)\}$.

Observaţie. Conform acestei probleme, cu ajutorul repartiţiei uniforme se pot genera alte repartiţii.

Pentru $X \in \exp(1)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases},$$

cum inversa funcţiei $y = 1 - e^{-x}, x > 0$, este $x = -\ln(1-y), y \in (0, 1)$, considerând $h(x) = -\ln(1-x)$, v.a. $Y = -\ln(1-X) \in \exp(1)$.

16. Fie X o v.a. continuă pe $[0, 1]$. dacă $P(x \le X < y)$ depinde doar de lungimea intervalului $[x, y]$, $\forall x, y \in [0, 1], x \le y$, atunci $X \in U[0, 1]$.

Rezolvare

Fie $P(x \le X < y) = F(y - x)$.

Atunci

$$F(x + y) = P(0 \le X < x + y) = P(0 \le X < x) + P(x \le X < x + y) = F(x) + F(y).$$

Vom arăta că $F(x) = cx$, unde c este o constantă, fiind suficient de demonstrat afirmaţia pentru x pozitiv. Din continuitate deducem

$$F(+x) = F(x) + F(0)$$

astfel încât

$$F(0) = 0 \text{ şi } 0 = F(0) = F(x - x) = F(x) + F(-x),$$

deci F este impară.

Fie $m \in \mathbf{N}$. Atunci

$$F(x + x + \ldots + x) = F(x) + \ldots + F(x) = mF(x).$$

Luând $x = \frac{n}{m}$, obţinem

$$F\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = mF\left(\frac{n}{m}\right), \text{ deci } F\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{m}F(x) = \frac{1}{m}F(1), \forall n, m \in \mathbf{N}^*.$$

Notând $F(1) = c$, am demonstrat $F(x) = cx$. Pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, există un şir crescător de numere raţionale $(x_n)_n$ cu $x_n \to x$.

Rezultă $F(x) = \lim\limits_{x_n \nearrow x} F(x_n) = \lim\limits_{x_n \nearrow x} cx_n = cx$. Cum $F(1) = 1$, rezultă $c = 1$, deci $F(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$.

17. Să se arate că repartiţia Poisson poate fi aproximată cu o repartiţie gamma $X \in \Gamma(\alpha, 1)$, $Y \in Po(\mu) \Rightarrow P(X \geq \mu) = P(Y \leq \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{N}$.

Rezolvare

Fie G funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X şi F cea a lui $Y \Rightarrow$

$$P(Y \leq \alpha) = F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Avem $G(\mu) = P(X \geq \mu) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \displaystyle\int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha} e^{-x}\, dx.$

Integrând prin părţi obţinem:

$$G(\mu) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x}\Big|_{\mu}^{\infty} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \mu^{\alpha} e^{-\mu} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \mu^{\alpha} e^{-\mu} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha-1} e^{-\mu} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Continuând integrarea prin părţi vom obţine:

$$G(\mu) = e^{-\mu}\left(\frac{\mu^{\alpha}}{\alpha!} + \frac{\mu^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \dots + \frac{\mu^2}{2!} + \mu + 1\right).$$

Rezultă că $F(\alpha) = G(\mu)$.

18. Fie v. a. independente $X_k \in \Gamma(r_k, 1)$, $k = 1, 2, 3$.

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2},\ Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3} \text{ şi } Y_3 = X_1 + X_2 + X_3.$$

Arătaţi că v. a. Y_k, $k = 1, 2, 3$ sunt independente şi stabiliţi repartiţiile lor.

Rezolvare

Obţinem imediat
$$X_1 = Y_1 Y_2 Y_3$$
$$X_1 + X_2 = Y_2 Y_3$$
$$X_3 = Y_3 - (X_1 + X_2)$$

de unde $X_2 = Y_2 Y_3 (1 - Y_1)$

şi $X_3 = Y_3 (1 - Y_2)$

$$X_k \in \Gamma(r_k, 1) \Rightarrow f_{X_k}(x) = \frac{1}{\Gamma(r_k)} x^{r_k - 1} e^{-x}, x > 0, k = 1, 2, 3$$

şi, din independenţă

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = \prod_{k=1}^{3} f_{X_k}(x_k).$$

Astfel

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = f_{X_1}(y_1,y_2,y_3)\cdot f_{X_2}(y_2y_3(1-y_1))\cdot f_{X_3}(y_3(1-y_2))\cdot|J|,$$

unde J reprezintă jacobianul transformării, $y_1, y_2 \in (0, 1)$ şi $y_3 > 0$.

Cum $J = \begin{vmatrix} y_2y_3 & -y_2y_3 & 0 \\ y_1y_3 & y_3(1-y_1) & -y_3 \\ y_1y_2 & y_2(1-y_1) & 1-y_2 \end{vmatrix} = y_2y_3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ y_1y_3 & y_3(1-y_1) & -y_3 \\ y_1y_2 & y_2(1-y_1) & 1-y_1 \end{vmatrix} = y_2y_3^2,$

rezultă

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = \frac{e^{-y_3}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)\Gamma(r_3)}y_2y_3^2(y_1y_2y_3)^{r_1-1}[y_2y_3(1-y_1)]^{r_2-1}\cdot[y_3(1-y_2)]^{r_3-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(r_1+r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}y_1^{r_1-1}(1-y_1)^{r_2-1}\cdot\frac{\Gamma(r_1+r_2+r_3)}{\Gamma(r_1+r_2)\Gamma(r_3)}y_2^{r_1+r_2-1}(1-y_2)^{r_3-1}\cdot\frac{1}{\Gamma(r_1+r_2+r_3)}y_3^{r_1+r_2+r_3-1}e^{-y_3},$$

deci $Y_1 \in B(r_1, r_2)$, $Y_2 \in B(r_1 + r_2, r_3)$, iar $Y_3 \in \Gamma(r_1 + r_2 + r_3, 1)$.

19. Fie $X_1, X_2 \in U(0, 1)$ v.a. independente. Arătaţi că variabilele

$$Y_1 = \sqrt{-2\ln X_1}\cos 2\pi X_2 \text{ şi } Y_2 = \sqrt{-2\ln X_2}\sin 2\pi X_2$$

sunt independente şi identic repartizate.

Rezolvare

Fie $\quad y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos 2\pi x_2$ şi $y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin 2\pi x_2$.

Rezultă $\quad y_1^2 = -2\ln x_1\cos^2 2\pi x_2$ şi $y_2^2 = -2\ln x_1\sin^2 2\pi x_2$,

de unde $\quad y_1^2 + y_2^2 = -2\ln x_1$,

deci $\quad x_1 = e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}$, iar $y_1 = \sqrt{y_1^2+y_2^2}\cos 2\pi x_2$ sau $x_2 = \dfrac{\arccos\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}{2\pi}$.

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} -y_1e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} & -y_2e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} \\ -\frac{y_2}{2\pi(y_1^2+y_2^2)} & \frac{y_1}{2\pi(y_1^2+y_2^2)} \end{vmatrix},$$

adică $\quad J = -\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}$

Prin urmare,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}, \frac{\arccos\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}$$

Cum $X_1, X_2 \in U(0, 1)$ sunt independente, rezultă:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} = f_{Y_1}(y_1) \cdot f_{Y_2}(y_2),$$

adică v.a. $Y_1, Y_2 \in N(0, 1)$ sunt independente.

20. Determinați repartiția a priori și a posteriori a variabilei X dacă $X \mid Y = \lambda \in \mathrm{Po}(\lambda)$ și $Y \in \exp(1)$.

Rezolvare

Din legea probabilității totale obținem

$$P(X = k) = \int_0^\infty P(X = k \mid Y = x) f_Y(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^k}{k!} e^{-x}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2^{k+1}} \int_0^\infty \frac{2^{k+1}}{P(k+1)} x^k e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

deci $\quad X \in \mathrm{Ge}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pentru determinarea repartiției a posteriori (a variabilei $Y \mid X = k$), pentru $x > 0$ avem

$$F_{Y \mid X=k}(x) = P(Y \le x \mid X = k) = \frac{P((Y \le x) \cap (X = k))}{P(X = k)} =$$

$$= \frac{\int_0^x P(X = k \mid Y = y) f_Y(y) dy}{P(X - k)} = \frac{\int_0^x e^{-y} \frac{y^k}{k!} e^{-y}\, dy}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(k+1)} y^k 2^{k+1} e^{-2y} dy.$$

Rezultă $\quad f_{Y \mid X=k}(x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} x^k 2^{k+1} e^{-2x}, x > 0,$

adică $\quad Y \mid X = k \in \Gamma\left(k+1, \frac{1}{2}\right)$.

21. Arătați că dacă $T \in t(n)$, atunci $T^2 \in F(1, n)$.

Rezolvare

Pentru funcțiile de repartiție avem

$$F_{T^2}(x) = P(T^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < T < \sqrt{x}\right) = F_T\left(\sqrt{x}\right) - F_T\left(-\sqrt{x}\right).$$

Rezultă $\quad f_{T^2}(x) = \frac{f_T\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ pentru $x > 0$,

densitatea de probabilitate a variabilei Student fiind pară.

Vom deduce însă densitățile variabilelor Student și Fisher folosind ca definiții

$$T = \frac{Z_k}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k^2}{n}}}, \text{ cu } Z_k \in N(0, 1) \text{ v. a. independente}$$

şi $\qquad F=\dfrac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$, unde $U\in\chi_m^2$ şi $V\in\chi_n^2$ sunt v. a. independente.

Cum $Z_k\in N(0,1)$, prin acelaşi raţionament de mai sus, avem succesiv:

$$F_{Z_k^2}(x)=P\left(Z_k^2<x\right)=P\left(-\sqrt{x}<Z_k\sqrt{x}\right)=F_{Z_k}\left(\sqrt{x}\right)-F_{Z_k}\left(-\sqrt{x}\right),x>0$$

$$\Rightarrow f_{Z_k^2}(x)=\frac{f_{Z_k}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+\frac{f_{Z_k}(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\frac{f_{Z_k}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

întrucât $f_{Z_k}(\sqrt{x})=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ este pară.

Rezultă densitatea de repartiţie

$$f_{Z_k^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}},x>0$$

este cea a unei variabile χ_1^2.

Întrucât variabilele Z_k^2 sunt independente, cu ajutorul funcţiei caracteristice rezultă:

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}Z_k^2}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\chi_1^2}(t)=\left((1-2it)^{-\frac{1}{2}}\right)^n=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}=\varphi_{\chi_n^2}(t).$$

Deoarece

$$\varphi_{\chi_k^2}(t)=\int_0^\infty e^{itx}f_{\chi_k^2}(x)\,dx=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}\int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1}e^{-x\left(\frac{1}{2}-it\right)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}\int_0^\infty\sum_{n\geq0}\frac{(itx)^n}{n!}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}-1}\,dx=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}\sum_{n\geq0}\frac{(it)^n}{n!}\int_0^\infty x^{n+\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\,dx\overset{y=\frac{x}{2}}{=}$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}\sum_{n\geq0}\frac{(it)^n}{n!}2^{n+\frac{k}{2}}\int_0^\infty y^{n+\frac{k}{2}-1}e^{-y}\,dy=\sum_{n\geq0}\frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{(2it)^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n\geq0}\frac{\left(n+\frac{k}{2}-1\right)\left(n-2+\frac{k}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{k}{2}(2it)^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n\left(-\frac{k}{2}\right)\left(-\frac{k}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{k}{2}-n+1\right)(-2it)^{-\frac{k}{2}}}{n!}=(1-2it)^{-\frac{k}{2}}.$$

Definiția variabilei Student devine așadar:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}, \text{ unde } Z \in N(0, 1) \text{ și } U \in \chi_n^2 \text{ sunt v.a. independente.}$$

Densitatea de repartiție a variabilei Student va fi

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(t, u)\, du,$$

unde $$f_{T,U}(t, u) = f_Z\left(t\sqrt{\frac{u}{n}}\right) \cdot f_U(u) \cdot |J|,$$

unde jacobianul transformării este

$$\frac{D(z,u)}{D(t,u)} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{n}} & \frac{\partial\left(t\sqrt{\frac{u}{n}}\right)}{\partial u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{u}{n}}.$$

Urmând calculele, obținem:

$$f(t, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n}} u^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)}, t \in \mathbf{R}, u > 0, \text{ deci}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} du.$$

Făcând notația

$$\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right) = x,$$

rezultă $$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, t \in \mathbf{R}.$$

Procedând analog pentru determinarea densității de repartiție a variabilei $X \in F(m, n)$, vom avea:

$$U = \frac{m}{n} XV,$$

jacobianul $$J = \begin{vmatrix} \frac{m}{n}v & \frac{m}{n}x \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

deci $\quad f_{F,V}(x, v) = f_U\left(\frac{m}{n}x, v\right) \cdot f_V(v) \cdot \frac{m}{n}v =$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)}, x, v > 0.$$

Prin urmare,

$$f_F(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}}\int_0^{\infty} v^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{m}{n}x\right)} dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, x > 0.$$

Densitatea de repartiție a variabilei T^2:

$$f_{T^2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}, x > 0,$$

nefiind altceva decât cazul particular $m = 1$ al densității $F(m, n)$ obținute mai sus.

22. Determinați repartiția v.a. X dacă $X \mid Y = y \in N\left(0, \sqrt{y}\right)$ și $Y \in \exp(1)$.

Rezolvare

Legea probabilității totale conduce la

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{x^2}{2y}} e^{-y}\, dy.$$

Notând $y = u^2$, expresia densității devine

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2u^2}-u^2}\, du.$$

Fie $\quad I(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2u^2}-u^2}\, du, x > 0.$

Atunci

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pentru calculul integralei $I(x)$ vom avea de rezolvat o problemă Cauchy întrucât

$$I'(x) = \int_0^{\infty} -\frac{x}{u^2} e^{-\frac{x^2}{2u^2}-u^2}\, du$$

devine, notând $y = \dfrac{x}{u\sqrt{2}}$:

$$I'(x) = -\sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-y^2-\frac{x^2}{2y^2}}\, dy,$$

adică $\quad I'(x) = -\sqrt{2}\, I(x).$

Prin urmare,

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x\sqrt{2}}, x > 0.$$

Densitatea variabilei X fiind pară, rezultă

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|x|\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}|x|}, x \in \mathbf{R}, \text{ adică } X \in \mathrm{La}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

23. Determinați repartițiile v.a. având funcția caracteristică:

a) $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$;

b) $\varphi(t) = e^{-a^2t^2}$

Rezolvare

a) Dezvoltând în serie Maclaurin, obținem:

$$\varphi(t) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{ikt}.$$

Aplicând teorema de inversiune sub forma

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-itx}}{it}\varphi(t)\, dt,$$

obținem:

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itk} - e^{it(k-x)}}{it}\, dt =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin tk}{\pi t}dt - \int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}dt\right),$$

întrucât $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, funcțiile trigonometrice fiind una pară, iar cealaltă impară.
Cum factorul discontinuu al lui Dirichelet, integrala

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = \operatorname{sgn}\alpha\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x},$$

conduce la calculul integralei $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}$, ne vom ocupa cu obținerea valorii acesteia.

Integrala cu parametru pe interval necompact

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx,\ t \geq 0,$$

converge uniform în raport cu t (fiind funcție continuă),

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0).$$

Așadar, $\displaystyle \frac{dF(t)}{dt} = \int_0^{\infty} -\sin x\, e^{-tx}\, dx = \frac{\sin x\, e^{-tx}}{t}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, e^{-tx}}{t}\, dx =$

$$= -\frac{1}{t}\left[-\frac{\cos x\, e^{-tx}}{t}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{t}\int_0^{\infty} \sin x\, e^{-tx}\, dx\right] = \frac{1}{t^2}\left[\int_0^{\infty} \sin x\, e^{-tx}\, dx - 1\right],$$

de unde $\displaystyle \frac{dF}{dt} = -\frac{1}{1+t^2}$,

deci $F(t) = C - \operatorname{arctg} t$.

Cum $\displaystyle \lim_{t\to\infty} F(t) = \int_0^{\infty} \lim_{t\to\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx = 0,$

rezultă $\displaystyle C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0) = \frac{\pi}{2}.$

În concluzie,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{\pi t}\, dt = \frac{1}{2},$$

iar $$\int_0^{\infty} \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{dacă } k < x \\ 0, & \text{dacă } k = x, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } k > x \end{cases}$$

căci $\displaystyle I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha.$

Cum $\displaystyle e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$

obținem $\displaystyle F(x) - F(0) = \frac{1}{2} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt - e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!}.$

Rezultă $X \in Po(\lambda)$.

b) Aplicând teorema de inversiune, putem scrie:

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it} e^{-a^2t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{t} e^{-a^2t^2}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{it} e^{-a^2t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{t} e^{-a^2t^2}\, dt,$$

întrucât $\frac{1-\cos tx}{t}e^{-a^2t^2}$ este o funcţie impară (rezultă $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos tx}{it}e^{-a^2t^2}\,dt = 0$).

Derivând în raport cu x relaţia obţinută $F(x) - F(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{t}e^{-a^2t^2}\,dt$, obţinem

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos tx\; e^{-a^2t^2}\,dt \text{ şi } F''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}t\sin tx\; e^{-a^2t^2}\,dt.$$

Integrând prin părţi egalitatea care conţine $F'(x)$, avem:

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos tx\; e^{-a^2t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{\sin tx}{x}e^{-a^2t^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{2a^2}{\pi x}\int_0^{\infty}t\sin tx\; e^{-a^2t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{2a^2}{x}\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}t\sin t\; e^{-a^2t^2}dt\right) = -\frac{2a^2}{x}F''(x).$$

Am obţinut astfel ecuaţia diferenţială $F'(x) = -\frac{2a^2}{x}F''(x)$.

Avem deci $\frac{F''(x)}{F'(x)} = -\frac{x}{2a^2}$.

Integrând, obţinem

$$\ln F'(x) = -\frac{x^2}{4a^2} + \ln C_1 \Rightarrow F'(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$$

Integrând încă o dată această ecuaţie, rezultă:

$$F(x) = C_1\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}\,du + C_2.$$

Cum $F(x)$ este funcţie de repartiţie, putem determina constantele C_1 şi C_2 din condiţiile $F(-\infty) = 0$ şi $F(\infty) = 1$.

Deci $C_2 = 0$ şi $C_1 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}du}$.

Calculul integralei $I = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}\,du$ se reduce la cel al integralei Euler-Poisson, astfel:

$$I = 2\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}\,du \text{ (integrandul fiind funcţie pară).}$$

Notând $\frac{u}{2a} = x$,

$$I = 4a\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx,$$

pentru calculul integralei Euler-Poisson

$$J = \int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx,$$

utilizând $x = ut$, $u > 0$.

Astfel

$$J = u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt \Rightarrow e^{-u^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = u\,e^{-u^2}\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

Integrând în raport cu u, rezultă:

$$J^2 = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(1+t)u^2}u\,du\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Deci $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, iar $I = 2a\sqrt{\pi}$.

Rezultă $C_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}$, iar $F(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4a^2}}\,du$, adică $x \in N(0,\ a\sqrt{2}\,)$.

Observație. Integrala I putea fi calculată cu ajutorul substituției $\frac{u^2}{4a^2} = t$, adică

$$I = 2a^2\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = 2a\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

sau cu substituția $\frac{u}{a\sqrt{2}} = t$, ceea ce conduce la utilizarea valorilor funcției $\Gamma(a)$.

24. Arătați că suma a două v.a. independente Cauchy este Cauchy.

Rezolvare

$$X \in C(m, a) \Leftrightarrow f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2 + (x-m)^2},\ x \in \mathbf{R}.$$

Punând $y = \frac{x-m}{a}$, obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} y\,\Big|_0^\infty = 1,$$

deci f reprezintă densitatea de repartiție a v.a. $C(0, 1)$ cu funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Variabila Cauchy nu are medie. Într-adevăr, momentele de ordin inferior lui 1 există, dar momentele de ordin ≥ 1 nu există.

$$M(X^\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx.$$

Prin schimbarea $z = \frac{1}{1+x^2}$, obținem

$$M(X^\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 z^{\frac{1-\alpha}{2}-1}(1-z)^{\frac{\alpha+1}{2}-1}\,dz,$$

care converge pentru $\alpha < 1$ și diverge pentru $\alpha \geq 1$.

Dacă $Z = X + Y, X, Y \in C(0, 1)$ fiind v.a. independente, atunci

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(z-x)^2}\,dx.$$

Dar $$\frac{1}{(1+x^2)(1+(z-x)^2)} = \frac{1}{z^2(z^2+4)}\left[\frac{2zx}{1+x^2}+\frac{z^2}{1+x^2}+\frac{2z^2-2zx}{1+(z-x)^2}+\frac{z^2}{1+(z-x)^2}\right].$$

Prin urmare

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{z^2(z^2+4)}\left[z\ln\frac{1+x^1}{1+(z-x)^2}+z^2\text{arctg}x+z^2\,\text{arctg}(x-z)\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\frac{2}{z^2+2^2},$$

adică $X + Y \in C(0, 2)$.

Concluzia problemei putea fi obținută folosind funcția caracteristică

$$X \in \text{La}(1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\text{La}(1)}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\cdot e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{itx}\cdot e^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{itx}\cdot e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-itx}e^{-x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{itx}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-x}\sum_{x\ge 0}\left(\frac{(-itx)^n}{n!}+\frac{(itx)^n}{n!}\right) =$$

$$= \int_0^{\infty}e^{-x}\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k(tx)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{2k}\,dx = \sum_{k\ge 0}(-t^2)^k = \frac{1}{1+t^2}.$$

Prin schimbarea variabilelor $x \to t$, $t \to x$, relația

$$\frac{1}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$$

devine $$\frac{1}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt,$$

ceea ce se poate rescrie

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-|t|}\,dt.$$

Conform formulei de inversiune: dacă $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt < \infty$, atunci densitatea variabilei cu această funcție caracteristică este

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,dt,$$

rezultă cu $\varphi_{C(0,1)}(t) = e^{-|t|}$.

Dacă $X \in C(0, 1)$, v.a. $Y = aX + m$ are densitatea

$$f_Y(x) = \frac{dF_Y(x)}{dx} = \frac{dF_X\left(\frac{x-m}{a}\right)}{dx} = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{x-m}{a}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{a^2+(x-m)^2}$$

deci $Y \in C(m, a)$.

Prin urmare, $\varphi_{C(m,a)}(t) = \varphi_{aC(0,1)+m}(t) = e^{imt}\varphi_{C(0,1)}(at) = e^{imt-a|t|}$.

Deci, dacă $U \in C(m_1, a_1)$ și $V \in C(m_2, a_2)$ sunt v.a. independente, atunci

$$\varphi_{U+V}(t) = \varphi_U(t) \cdot \varphi_V(t) = e^{im_1t-a_1|t|} - e^{im_2t-a_2|t|} = e^{it(m_1+m_2)-(a_1+a_2)|t|},$$

adică $U + V \in C(m_1 + m_2, a_1 + a_2)$.

25. Fie $X_1, X_2, \ldots$ v. a. independente, $X_k \in \exp(1)$ și $N \in Fs(p)$ independentă de $X_1, X_2, \ldots$ Determinați repartiția variabilei $X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

Rezolvare

Vom afla repartiția cerută utilizând funcția generatoare de momente

$$\psi_X(t) = M(e^{tX}).$$

Avem

$$\psi_{\exp(a)}(t) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{a}-t\right)}\,dx = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{1}{a}-t} = \frac{1}{1-at}, \text{ pentru } t < \frac{1}{a}.$$

Pentru funcția generatoare a lui Laplace $g_X(t) = \sum_{n\geq 0} t^n P(X = n)$, vom folosi rezultatul

$$\psi_{S_N}(t) = g_N\left(\psi_X(t)\right),$$

care are loc exact în ipotezele date.

Cum $g_{Fs(p)}(t) = \sum_{k\geq 1} t^k pq^{k-1} = tp\sum_{k=1}(tq)^{k-1} = \frac{pt}{1-tq},\ t < \frac{1}{q},$

rezultă $\psi_{\sum_{k=1}^N X_k}(t) = \dfrac{\frac{p}{1-t}}{1-\frac{q}{1-t}} = \dfrac{p}{1-t-q} = \dfrac{p}{p-t} = \dfrac{1}{1-\frac{t}{p}} = \psi_{\exp\left(\frac{1}{p}\right)}(t),$

deci $\sum_{k=1}^N X_k \in \exp\left(\frac{1}{p}\right).$

Observație. Dacă am fi presupus $N \in Ge(p) \Leftrightarrow$

$$g_N(t) = \sum_{k\geq 0} t^k pq^k = p\sum_{k\geq 0}(tq)^k = \frac{p}{1-qt},\ t < \frac{1}{q},$$

am fi obținut

$$\psi_{\sum_{k=1}^N X_k}(t) = \frac{p}{1-\frac{q}{1-t}} = \frac{p(1-t)}{p-t} = p + q\frac{1}{1-\frac{t}{p}},$$

deci $\sum_{k=1}^N X_k$ nu ar fi nici discretă, nici continuă, ci o „combinație" de variabile Dirac, $\delta(0)$, și exponențială, $\exp\left(\frac{1}{p}\right)$, cu ponderi p și q.

26. Fie $X_1, X_2, ..., X_n \in N(m, \sigma)$ v.a. independente și $\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$. Arătați că $\bar{X}$ și $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, ..., X_n - \bar{X})$ sunt independente.

Rezolvare

Vom demonstra independența cerută cu ajutorul funcțiilor generatoare de momente, adică $G(t, t_1, t_2, ..., t_n) = G(t, 0, 0, ..., 0) \cdot G(0, t_1, t_2, ..., t_n)$. Avem succesiv

$$G(t, t_1, t_2, ..., t_n) = M\left[\exp\left\{t\bar{X} + \sum_{k=1}^{n} t_k(X_k - \bar{X})\right\}\right] =$$

$$= M\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k X_k - \left(\sum_{k=1}^{n} t_k - t\right)\bar{X}\right\}\right] = M\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k\left(t_k - \frac{t_1 + t_2 + ... + t_n - t}{n}\right)\right\}\right].$$

Notând $\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{n}$ și ținând seama de independența variabilelor X_k avem în continuare

$$M\left[\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k\left(t_k - \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k - t}{n}\right)\right\}\right] = M\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{\frac{X_k(nt_k - n\bar{t} + t)}{n}\right\}\right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} M\left[\exp\left\{\frac{X_k[t + n(t_k - \bar{t})]}{n}\right\}\right] = C.$$

Cum pentru $X \in N(m, \sigma)$ funcția generatoare de momente

$$\Psi_{N(m,\sigma)}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + x\frac{t\sigma^2 + m}{\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right\} dx =$$

$$= \frac{e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - m - \sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, t \in \mathbf{R},$$

deoarece, cu ajutorul schimbării de variabilă $\frac{x - m - \sigma^2 t}{\sigma} = y$ se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - m - \sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 2\sigma\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma\sqrt{2\pi},$$

va rezulta

$$C = \prod_{k=1}^{n}\exp\left\{\frac{m[t + n(t_k - \bar{t})]}{n} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{n^2}[t + n(t_k - \bar{t})]^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{m}{n}\left[nt + n\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})\right] + \frac{\sigma^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}[t + n(t_k - \bar{t})]^2\right\} =$$

$$= e^{mt}\cdot\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2n^2}\left[nt^2+n\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2\right]\right\} = e^{mt+\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}$$

Ţinând seama de faptul că dacă $X_k \in N(m_k, \sigma_k)$ sunt v. a. independente, atunci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{n} \in N\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k,\ \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}\right),$$

concluzionăm

$$G(t, t_1, t_2, ..., t_n) = \psi_{\bar{X}}(t)\cdot G_{X_1-\bar{X},...,X_n-\bar{X}}(t_1, t_2, ..., t_n) = G(t, 0, ..., 0)\cdot G(0, t_1, ..., t_n).$$

27. Exisă repartiţii având momente de orice ordin pentru care nu există funcţie generatoare de momente.

Rezolvare

O astfel de repartiţie este $Y \in LN(m, \sigma) \Leftrightarrow Y = e^X$ cu $X \in N(m, \sigma)$.

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X < \ln x) = F_X(\ln x), x > 0$$

şi
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, x \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow f_Y(x) = \begin{cases}\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-m}{\sigma}\right)^2}, & x>0\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}.$$

Rezultă $M(Y^r) = M(e^{rX}) = \psi_X(r) = e^{rm+\frac{\sigma^2r^2}{2}}, \forall r > 0,$
deci toate momentele există.

Totuşi, întrucât $e^x \geq \frac{x^n}{n!}, \forall n \in \mathbf{N}$, pentru orice t pozitiv

$$M(e^{tY}) = M(\exp te^X) \geq M\left[\frac{(te^X)^n}{n!}\right] = \frac{t^n}{n!}M(e^{nX}) =$$

$$= \frac{t^n}{n!}\psi_X(n) = \frac{t^n}{n!}\exp\left\{nm+\frac{1}{2}\sigma^2n^2\right\} = \frac{1}{n!}\exp\left\{n\left(\ln t+m+\frac{1}{2}\sigma^2n\right)\right\},$$

care poate fi făcut arbitrar de mare alegând n suficient de mare (deoarece $\ln t + m + \frac{\sigma^2 n}{2} \to \infty$ pentru $t > 0$ fixat când $n \to \infty$ şi $\frac{e^{cn}}{n!} \to \infty$ pentru orice constantă pozitivă c).
Aşadar, funcţia generatoare de momente nu există, $\forall t > 0$.

28. Pentru $X \in \mathrm{Ra}(a)$ determinați $D(X)$. Calculați modul și mediana repartiției Rayleigh și arătați că raportul dintre distanța intercuartilică și abaterea medie pătratică este independent de parametrul $a > 0$.

Rezolvare

$$X \in \mathrm{Ra}(a) \Rightarrow F(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}},\, x > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}},\, x > 0.$$

Momentul de ordin k al acestei v.a. va fi

$$M(X^k) = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} x^{k+1}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Făcând substituția obișnuită, $\frac{x^2}{2a^2} = y \Rightarrow x = a\sqrt{2y} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{a}{\sqrt{2y}}\mathrm{d}y$, obținem:

$$M_k(X) = a^k 2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right).$$

Rezultă $\quad M(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ și $M_2(X) = 2a^2$,

deci $\quad D(X) = a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sigma(X) = \sqrt{2}\,a\sqrt{1-\frac{4}{\pi}}.$

Cum $\quad f'(x) = \frac{1}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$

valoarea cea mai probabilă $x_{mod} = a$.

Funcția de repartiție fiind continuă și strict crescătoare, mediana este soluția ecuației:

$$F(m_e) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{m_e^2}{2a^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m_e = a\sqrt{2\ln 2}.$$

Conform definiției cuartilelor, avem relațiile:

$$\int_0^{\alpha_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Pentru aflarea cuartilelor α_1 și α_3 ($\alpha_2 = m_e$), obținem următoarele ecuații:

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} = \int_{\alpha_3}^{\infty}\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Avem, integrând prin părți

$$e^{-\frac{\alpha_1^2}{2a_2}} = \frac{3}{4} \text{ și } e^{-\frac{\alpha_3^2}{2b^2}} = \frac{1}{4},$$

deci $\quad \alpha_1 = a\sqrt{2}\sqrt{\ln\frac{4}{3}}$ și $\alpha_3 = a\sqrt{2}\sqrt{\ln 4}$,

de unde distanța intercuartilică

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = a\sqrt{2}\left(\sqrt{\ln 4} - \sqrt{\ln\frac{4}{3}}\right),$$

iar valoarea raportului cerut:

$$R = \frac{\sqrt{\ln 4} - \sqrt{\ln \frac{4}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}},$$

nu depinde de parametrul a.

29. Să se arate că dacă $P(X < y + x \mid X \geq y) = P(X < x)$, unde $x > 0$ și $y \geq 0$, atunci v.a. X urmează o repartiție exponențială.

Rezolvare

Din definiția probabilității condiționate, avem

$$P(X < y + x \mid X \geq y) = \frac{P(y \leq X < y + x)}{P(X \geq y)},$$

iar din proprietățile funcției de repartiție, obținem:

$$P(X < y + x \mid X \geq y) = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}.$$

Astfel, relația din ipoteză devine:

$$\frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)} = F(x)$$

sau $\quad (1 - F(x))(1 - F(y)) = 1 - F(x + y).$

Notând $\Phi(x) = 1 - F(x)$, obținem $\Phi(x + y) = \Phi(x)\,\Phi(y)$.

Dacă $\ln \Phi = G$, rezultă $G(x + y) = G(x) + G(y)$, iar din continuitate deducem $G(x) = cx$. Prin urmare, $F(x) = 1 - e^{cx}$, cu $c < 0$ (F reprezentând o funcție de repartiție),

adică $\quad X \in \exp\left(-\frac{1}{c}\right).$

30. Fie $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. independente, identic repartizate (cu funcția de repartiție F) și $N = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Atunci X_k și nN sunt identic repartizate dacă și numai dacă $X_k \in \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0)$.

Rezolvare

Dacă $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$, atunci

$$F_{nN}(y) = P\left(N \leq \frac{y}{n}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{y}{n}\right)\right)^n = 1 - e^{-\lambda y} = F(y)$$

fiind ştiut faptul că

$$F_{\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}}(x) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \ge x) =$$

$$= 1 - P(X_1 \ge x, X_2 \ge x, \dots, X_n > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k \ge x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Reciproc, fie $F_{nN}(y) = F(y), y \in \mathbf{R}$, şi $G(y) = 1 - F(y)$.
Atunci

$$1 - F(y) = \left[1 - F\left(\frac{y}{n}\right)\right]^n \Rightarrow G(ny) = G^n(y) \text{ pentru } y \in \mathbf{R} \text{ şi } n \in \mathbf{N}^*.$$

Astfel, $G(0) = G^n(0)$ şi trebuie să avem $G(0) = 0$ sau $G(0) = 1$.

Fie $y_0 < 0$ astfel încât $G(y_0) < 1$. Atunci $G^n(y_0) \to 0$ şi $G(ny_0) \to 1$ când $n \to \infty$, ceea ce este o contradicţie. Deci, pentru $\forall\, y > 0$, $G(y) \ge 1$ şi, prin urmare, $G(y) = 1$ pentru $y < 0$. Deoarece F este nedegenerată, nu putem avea $G(y) = 0$ pentru $\forall\, y \ge 0$. Aşadar, $G(y_1) > 0$ pentru $y_1 \ge 0$. Dacă $y_1 = 0$, atunci $G(0) > 0$, deci $G(0) = 1$. Pe de altă parte, dacă $G(y_1) > 0$ pentru $y_1 > 0$, atunci $G(y) > 0$ pentru $0 \le y \le y_1$ întrucât G este descrescătoare. Întrucât G este continuă la stânga, rezultă $G(0) = 1$. Astfel

$$G(y) \begin{cases} = 1, & \text{pentru } y < 0 \\ > 0, & \text{pentru } 0 \le y \le y_1 \end{cases}$$

Presupunem existenţa unei constante $y_2 > y_1$ pentru care $G(y_2) = 0$.

Atunci, din $G(ny) = G^n(y)$, rezultă $G(y_2) = G^n\left(\frac{y_2}{n}\right) = 0$, pentru $n \in \mathbf{N}^*$.

Rezultă $G(y) = 0$ pentru $y > \frac{y_2}{n}$. Prin urmare, pentru n suficient de mare, $G(y) = 0$ când $\frac{y_2}{n} \le y \le y_1$, ceea ce contrazice ceea ce am arătat mai sus.

Am demonstrat aşadar că $G(y) > 0$ pentru $y > 0$.

Cum $G^n(1) = G(n) = G\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = G^m\left(\frac{n}{m}\right)$, rezultă $G\left(\frac{n}{m}\right) = G^{\frac{n}{m}}(1)$, pentru $n, m \in \mathbf{N}^*$.

Deoarece $G(y)$ şi $\{G(1)\}^y$ sunt ambele descrescătoare şi coincid pentru numere naturale pozitive, iar $\{G(y)\}^y$ este continuă, rezultă

$$G(y) = \{G(y)\}^y = e^{y \ln G(1)},\ \forall\, y > 0.$$

F fiind nedegenerată, rezultă $\lim_{y \to \infty} G(y) = 0$ astfel încât $G(1) < 1$.

Prin urmare,

$$G(y) = \begin{cases} e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 1, & y \le 0 \end{cases}, \text{ unde } \lambda = -\ln G(1).$$

31. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. identic repartizate. Notând cu $X_{(k)}$ variabila de ordinul k (presupunem $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$), arătați că $F_{X_{(k)}}(x) = F_{\beta(k,n+1-k)}F(x)$, unde F este funcția de repartiție comună.

Rezolvare

Pentru $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, fie $A_j(x) = \{$exact j dintre variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n < x\}$.

Notând $F_n^*(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon(x - X_j)}{n}$, unde $P(x - X_j \ge 0) = F(x)$, iar $P(\varepsilon(x - X_j) = 0) = 1 - F(x)$, adică $n F_n^*(x)$ este o sumă de v.a. Be$(F(x))$, conchidem (conf. ex. propus 2) că $F_n^*(x) \in \text{Bi}(n, F(x))$. Prin urmare,

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(X_{(k)} \le x) = P\left(\bigcup_{j=k}^{n} A_j(x)\right) = \sum_{j=k}^{n} P(A_j(x)) = \sum_{j=k}^{n} C_n^k (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j}$$

Rămâne de arătat

$$\sum_{j=k}^{n} C_n^j z^j (1-z)^{n-j} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+1-k)} \int_0^z y^{k-1}(1-y)^{n-k}\, dy,$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 \le z \le 1$, $z = F(x)$

Pentru $k = n$, ambii membri sunt z^n.

Vom demonstra prin inducție, presupunând formula adevărat pentru $n, n-1, \ldots, k$, și vom arăta că aceasta este valabilă pentru $k - 1$.

Cu notațiile $a_j = C_n^j z^j (1-z)^{n-j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\Sigma_k = \sum_{j=k}^{n} a_j$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și

$I_k = \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+1-k)} \displaystyle\int_0^z y^{k-1}(1-y)^{n-k}\, dy$, va trebui arătat că $\Sigma_{k-1} = I_{k-1}$.

$$\Sigma_k = I_k = \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+1-k)}\left(-\frac{1}{n-k+1}\right) y^{k-1}(1-y)^{n-k+1}\right]\Bigg|_0^z +$$

$$+ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+1-k)} \cdot \frac{k-1}{n-k+1} \int_0^z y^{k-1}(1-y)^{n-k+1}\, dy =$$

$$= -\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n+2-k)} z^{k-1}(1-z)^{n-k+1} + \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k-1)\,\Gamma(n+2-k)} \int_0^z y^{k-2}(1-y)^{n-k+1}\, dy =$$

$$= -C_n^{k-1} z^{k-1}(1-z)^{n-(k-1)} + \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k-1)\,\Gamma(n+1-(k-1))} \int_0^z y^{(k-1)-1}(1-y)^{n-(k-1)}\, dy =$$

$$= -a_{k-1} + I_{k-1},$$

deci $I_{k-1} = \Sigma_k + a_{k-1} = \Sigma_{k-1} \Leftrightarrow$

$$F_{X_{(k)}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k-1)\,\Gamma(n+1-(k-1))} \int_0^{F(x)} y^{k-1}(1-y)^{n-k}\, dy.$$

Observație. Dacă $X \in U(0, 1)$, atunci $X_{(k)} \in \text{B}(k, n+1-k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

32. Fie $X \in Po(Y)$, cu $Y \in \Gamma\left(\lambda, \frac{1}{a}\right)$. Să se determine $D(X)$.

Rezolvare

Aplicând formula probabilității totale, obținem:

$$P(X = k) = \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} e^{-x} \frac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-ax} dx \overset{(a+1)x=y}{=} \frac{a^\lambda}{(a+1)^{k+\lambda}} \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\,\Gamma(\lambda)} =$$

$$= \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{(1+a)^k\, k!}.$$

Rezultă $\varphi_X(t) = \sum_{k\geq 0} e^{itk} P(X=k) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^\lambda \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(-\lambda)(-\lambda-1)\ldots(-\lambda-k+1)}{k!}\left(\frac{e^{it}}{1+a}\right)^k =$

$$= \left(\frac{a}{1+a}\right)^\lambda \left(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\right)^{-\lambda}$$

Prin urmare,

$$M(X) = \frac{1}{i}\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)_{t=1} = \frac{1}{i}\left[\left(\frac{a}{1+a}\right)^\lambda \cdot \lambda\left(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\right)^{-\lambda-1} \cdot \frac{ie^{it}}{1+a}\right]_{it=0} = \frac{\lambda}{a}$$

și $M(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(t)|_{t=0} = \frac{\lambda}{1+a}\left(\frac{a}{1+a}\right)^\lambda \left(\frac{1+a}{a}\right)^\lambda \left[\frac{1+a}{a} + \frac{\lambda+1}{1+a}\left(\frac{1+a}{a}\right)^2\right] = \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda+1}{a^2}\right)$,

deci $D(X) = \frac{\lambda}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

33. Fie v. a. independente $X \in B(\alpha_1, \beta_1)$ și $Y \in B(\alpha_2, \beta_2)$, cu $\alpha_1 = \alpha_2 + \beta_2$. Arătați că $XY \in B(\alpha_1, \beta_1 + \beta_2)$.

Rezolvare

Pentru densitate de probabilitate a variabilei $Z = XY$ avem

$$f(z) = \int_z^1 \frac{1}{x} \frac{x^{\alpha_1+\beta_2-1}(1-x)^{\beta_1-1}}{B(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^{\alpha_2-1}\left[1-\left(\frac{z}{x}\right)\right]^{\beta_2-1}}{B(\alpha_2, \beta_2)} dx =$$

$$= \frac{z^{\alpha_2-1}}{B(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \frac{1}{B(\alpha_2, \beta_2)} \int_z^1 (1-x)^{\beta_1-1}(x-z)^{\beta_2-1} dx.$$

Făcând substituția $u = \frac{x-z}{1-z}$, rezultă:

$$f(z) = \frac{z^{\alpha_2-1}(1-z)^{\beta_1+\beta_2-1}}{B(\alpha_1, \beta_1)\cdot B(\alpha_2, \beta_2)} \int_0^1 (1-u)^{\beta_1-1} u^{\beta_2-1} du =$$

$$= \frac{z^{\alpha_2-1}(1-z)^{\beta_1+\beta_2-1}}{B(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \frac{B(\beta_2, \beta_1)}{B(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{z^{\alpha_2-1}(1-z)^{\beta_1+\beta_2-1}}{B(\alpha_2, \beta_1+\beta_2)}.$$

34. O v.a. normală este trunchiată în $x = X_0$ şi valorile $x < X_0$ sunt lăsate la o parte. Determinaţi dispersia părţii pentru care $x \geq X_0$.

Rezolvare

Pentru ca partea rămasă să constituie o repartiţie, trebuie ca

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, & x \geq X_0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de repartiţie, deci să avem $k > 0$ şi $\int_{X_0}^{\infty} g(x)\,dx = 1$.

Notând $F(X_0) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$, rezultă $k = \dfrac{1}{1-F(X_0)}$.

Fie Y v.a. a cărei densitate de probabilitate este dată de funcţia g.

Rezultă $M(Y) = \dfrac{1}{(1-F(X_0))\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{X_0}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx =$

$$= \frac{1}{(1-F(X_0))\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{\sigma^2\int_{X_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] + m\int_{X_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx\right\} =$$

$$= \frac{\sigma}{(1-F(X_0))\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-m}{\sigma}\right)^2}\Bigg|_{X_0}^{\infty} + \frac{m}{1-F(X_0)}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{X_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$= m + \frac{\sigma}{[1-F(X_0)]\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-m}{\sigma}\right)^2}$$

şi $\quad M_2(Y) = \dfrac{1}{(1-F(X_0))\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{X_0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx \overset{x=\sigma y+m}{=}$

$$= \frac{1}{(1-F(X_0))\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{X_0-m}{\sigma}}^{\infty}(\sigma^2 y^2 + 2m\sigma y + m^2)e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{\sigma^2}{(1-F(X_0))\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{X_0-m}{\sigma}}^{\infty} y\, d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right) + \frac{2m\sigma}{(1-F(X_0))\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{X_0-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{m^2}{(1-F(X_0))\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{X_0-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= m^2 + \sigma^2 + \frac{\sigma(X_0-m)}{(1-F(X_0))\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_0-m}{\sigma}\right)^2} + \frac{2m\sigma}{[1-F(X_0)]\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_0-m}{\sigma}\right)^2}$$

deci $\quad D(Y) = \sigma^2 + \dfrac{\sigma(X_0 - m)}{[1-F(X_0)]\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_0-m}{\sigma}\right)^2} - \dfrac{\sigma^2}{2[1-F(X_0)]^2 \pi} e^{-\left(\frac{X_0-m}{\sigma}\right)^2}$

35. Să se arate că dacă v. a. X a cărei densitate de repartiţie $y = f(x)$ este dată prin ecuaţia diferenţială $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2mx}{a^2 - x^2}$ se exprimă cu ajutorul v. a. T prin relaţia

$X = \dfrac{aT}{\sqrt{2(m+1) + T^2}}$, atunci variabila T are o repartiţie Student.

Rezolvare

Ecuaţia diferenţială cu variabile separabile care dă densitatea de repartiţie a v. a. se poate scrie sub forma

$$\frac{dy}{y} = m\frac{-2x\,dx}{a^2 - x^2}$$

care integrată ne conduce la expresia

$$\ln y = m\ln|a^2 - x^2| + \ln c$$

sau $\quad y = c|a^2 - x^2|^m.$

Deci $\quad y(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin (-a, a) \\ C(a^2 - x^2)^m, & \text{dacă } x \in (-a, a) \end{cases}.$

Pentru ca y să reprezinte o densitate de probabilitate trebuie satisfăcută relaţia

$$C\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^m \, dx = 1.$$

Dacă în această integrală efectuăm schimabarea de variabilă $\dfrac{x^2}{a^2} = y$

obţinem $\quad C\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^m \, dx = 2Ca^{2m} \int_0^a \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)^m dx =$

$$= Ca^{2m+1} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^m \, dy = Ca^{2m+1}B\left(\frac{1}{2}, m+1\right).$$

De aici $\quad C = \dfrac{1}{a^{2m+1}B\left(\frac{1}{2}, m+1\right)} = \dfrac{\Gamma\left(m+1+\frac{1}{2}\right)}{a^{2m+1}\sqrt{\pi}\, m\Gamma(m)} = \dfrac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{a^{2m+1}\sqrt{\pi}\, m\Gamma(m)}$

Utilizând schimbarea de variabilă efectuată pentru determinarea constantei, expresia densităţii de repartiţie obţinută poate fi pusă sub forma unei densităţi tip beta

$$y(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \notin (0, 1) \\ \dfrac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{m\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)} u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^m, & \text{dacă } u \in (0, 1) \end{cases}.$$

Dacă notăm cu $g(t)$ densitatea de repartiție a variabilei T, avem $g(t) = f(x(t))\left|\frac{dx}{dt}\right|$,

unde $$f(x) = \frac{1}{aB\left(\frac{1}{2}, m+1\right)}\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^m \text{ dacă } x \in (-a, a).$$

Astfel $$g(t) = \frac{1}{aB\left(\frac{1}{2}, m+1\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{a^2}\frac{a^2t^2}{[2(m+1)+t^2]}\right)^m\cdot\frac{2a(m+1)}{\left[2(m+1)+t^2\right]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2(m+1)B\left(\frac{1}{2}, m+1\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{2(m+1)}\right)^{\frac{-2(m+1)+1}{2}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2(m+1)+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(m+1)}\Gamma\left(\frac{2(m+1)}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{2(m+1)}\right)^{\frac{-2(m+1)+1}{2}}$$

care este tocmai densitatea de repartiție a unei variabile Student cu $2(m+1) = n$ grade de libertate.

Observație. Utilizând transformarea indicată, în cazul în care numărul gradelor de libertate este dat, putem calcula fără a utiliza tabelele repartiției t_n probabilitatea $P(T \geq k)$, $k \in \mathbf{R}_+$. De exemplu. dacă $n = 4$ și $k = 2$, obținem:

$$2(m+1) = 4, \text{ deci } m = 1, \text{ iar din } x^2 = \frac{a^2t^2}{4+t^2}, \text{ rezultă } x \geq \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ dacă } t \geq 2.$$

Probabilitatea cerută devine:

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \leq X \leq a\right) = \frac{1}{aB\left(\frac{1}{2}, 2\right)}\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \Rightarrow P = \frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{16}.$$

Dacă $n = 2$, obținem $m = 0$, iar pentru același $k = 2$, avem

$$P(T \geq 2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_2^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}dt = P\left(\frac{2}{\sqrt{6}}a \leq X \leq a\right) =$$

$$= \frac{1}{aB\left(\frac{1}{2}, 1\right)}\int_{\frac{2}{\sqrt{6}}a}^{a}dx = \frac{x}{2a}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{6}}a}^{a} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

36. Să se arate că dacă $X_1 \in \chi^2_{n_1}$ și $X_2 \in \chi^2_{n_2}$ sunt v.a. independente, atunci $X_1 + X_2 \in \chi^2_{n_1+n_2}$.

Rezolvare

Evident, proprietatea enunțată se demonstrează simplu utilizând funcția caracteristică (sau cea generatoare de momente) a repartiției χ^2_n. Vom da însă o altă rezolvare, și anume:

Ținând cont de independența v.a. X_1 și X_2, densitatea variabilei bidimensionale va fi $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$, adică

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}}{4\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{x_1}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\dfrac{x_2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}, & \text{dacă } x_1 > 0,\ x_2 > 0 \\ 0, & \text{dacă } \min\{x_1, x_2\} \le 0 \end{cases}$$

Considerând transformarea $u_1 = x_1 + x_2$, $u_2 = x_2$ sau $x_1 = u_1 - u_2$, $x_2 = u_2$, fie $Y_1 = X_1 + X_2$ și $Y_2 = X_2$; jacobianul acestei transformări fiind 1, rezultă

$$f_{Y_1,Y_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{u_1}{2}}}{4\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{u_1-u_2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\dfrac{u_2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}, & \text{dacă } 0 < u_2 < u_1,\ 0 < u_1 < \infty \\ 0, & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$$

Pentru $u_1 > 0$, avem

$$f_{Y_1}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(u_1, u_2)\,du_2 \Rightarrow$$

$$f_{Y_1}(u_1) = \frac{e^{-\frac{u_1}{2}}}{4\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^{u_1}\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{u_2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1} du_2.$$

Notând $x = \dfrac{u_2}{u_1}$, obținem

$$f_{Y_1}(u_1) = \frac{e^{-\frac{u_1}{2}}}{2\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right),$$

deci
$$f_{Y_1}(u_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} e^{-\frac{u_1}{2}}\left(\dfrac{u_1}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}, & \text{dacă } u_1 > 0 \\ 0, & \text{dacă } u_1 \le 0 \end{cases}$$

care este densitatea de repartiție a variabilei $X_1 + X_2$ și se vede că este o repartiție χ^2 cu $n_1 + n_2$ grade de libertate.

Observație. Repartiția χ^2_n este cazul particular $a = \dfrac{n}{2}$, $b = 2$ al repartiției $\Gamma(a, b)$.

37. O bilă pentru rulmenţi se consideră corespunzătoare dacă nu trece printr-un inel cu diametrul $d_1 > 0$, dar trece printr-un inel cu diametrul $d_2 > d_1$; în caz contrar, bila este rebut. Ştiind că diametrul unei bile este o v.a. $X \in N\left(\frac{d_1+d_2}{2}, \frac{d_2-d_1}{4}\right)$, să se afle probabilitatea ca o bilă să fie rebut.

Rezolvare

Evenimentul ca o bilă să fie rebut, fiind opusul ca o bilă să fie corespunzătoare, se scrie:

$$p = 1 - P(d_1 < X < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1+d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1 d_2}{2}}{\frac{d_2-d_1}{4}}\right)\right] =$$

$$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 1 - 2\Phi(2) = 0{,}0456.$$

Întrucât funcţia lui Laplace $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ este impară.

38. Fie $Z = (X, Y)$ o v.a. bidimensională, unde $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, p_1, p_2 > 0, p_1 + p_2 = 1,$ $x_1 < x_2$ şi Y o v.a. continuă astfel încât v.a. condiţionate $(Y \mid X = x_i) \in N(x_i, \sigma), i = 1,2$. Să se afle densitatea de probabilitate g a lui Y.

Rezolvare

Întrucât v.a. X şi Y nu sunt independente, se poate scrie

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y \mid X < x),$$

având următoarele cazuri

$$x \le x_1 \Rightarrow P(X < x) = 0 \Rightarrow F(x, y) = 0$$

$$x_1 < x \le x_2 \Rightarrow P(X < x) = p_1 \Rightarrow F(x,y) = p_1 P(Y < y \mid X = x_1) = p_1\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}p_1$$

$$x > x_2 \Rightarrow F(x, y) = P(X = x_1, Y < y) + P(X = x_2, Y < y) =$$
$$= P(X = x_2) \cdot P(Y < y \mid X = x_1) + P(X = x_2) \cdot P(Y < y \mid X = x_2) =$$
$$= p_1\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + p_2\Phi\left(\frac{y-x_2}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, funcţia de repartiţie a lui Z este

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \le x_1, y \in \mathbf{R} \\ p_1\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}p_1, & \text{pentru } x_1 < x \le x_2,\ y \in \mathbf{R} \\ p_1\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + p_2\Phi\left(\frac{y-x_2}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}, & \text{pentru } x > x_2, y \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

Atunci $F_Y(y) = F(\infty, y)$ și $g(y) = F'_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[p_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right)^2} + p_2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-x_2}{\sigma}\right)^2}\right]$.

39. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n \in Pa(1, 1)$ v. a. independente și G_n media lor geometrică. Determinați repartiția variabilei $2n \ln G_n$.

Rezolvare

Fie $Y = 2n \ln \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n}$. Atunci $Y = 2\sum_{k=1}^{n} \ln X_k$,

iar funcția de repartiție

$$F_Y(x) = F_{2\ln X_k}(x) = P(2\ln X_k < x) = P(X_k < e^x) = F_{X_k}(e^{\frac{x}{2}}),\ x > 0.$$

Cum $X_k \in \text{Pa}(1, 1) \Leftrightarrow f_{X_k}(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 1$, rezultă densitatea de repartiție

$$f_{2\ln X_k}(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} f(e^{\frac{x}{2}}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0.$$

Ținând cont de independența variabilelor X_k, vom avea

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{2\ln X_k}(t) = \varphi^n_{2\ln X_k}(t) = \left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x\left(\frac{1}{2}-it\right)}dx\right)^n = (1 - 2it)^{-n},$$

ceea ce reprezintă funcția caracteristică a repartiției χ^2_{2n}, deci $Y \in \chi^2_{2n}$.

4.2. Probleme propuse

1. Stabiliți identitățile:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} C_{m+k-1}^{m-1} q^k = \frac{1}{(1-q)^m}$, $q \in (0, 1)$;

b) $\sum_{0 \le k \le n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n$; $\sum_{0 \le i+j \le n} C_n^i C_n^j C_n^{n-i-j} = C_{3n}^n$;

c) $\sum_{k,h \in N^*} \frac{\lambda^k \mu^h}{(k-1)!(h-1)!} = \lambda \mu e^{\lambda+\mu}$;

d) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 2^2 C_{2n-2}^n + ... + 2^n C_n^n = 2^{2n}$.

2. Determinați repartiția sumei a n v.a. independente Be(p).

3. Fie $X \in$ Bi(n, p) și $Y = U + k$, unde $U \in$ NB(n, p). Demonstrați că $P(X \ge k) = P(Y \le n)$.

4. Determinați repartiția variabilei $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ dacă X_j sunt k variabile aleatoare independente repartizate:

a) $X_j \in$ Bi(n_j, p); b) $X_j \in$ NB(n_j, p); c) $X_j \in$ Po(λ_j).

5. Arătați că repartiția Poisson este legea limită a repartiției binomiale.

6. Determinați funcția de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{it}}{2}\right)^{-1}$$

7. Determinați punctele modale ale repartițiilor:

a) Bi(n, p); b) Po(λ).

8. Determinați repartiția v.a. $X \mid X + Y = n$ dacă v.a. independente sunt:

a) Ge(p); b) $X \in$ Po(a), $Y \in$ Po(b).

9. Arătați că repartiția geometrică „nu are memorie": $P(X > m + n \mid X > m) = P(X \ge n)$.

10. Fie X_k, $k = \overline{1,n}$, v.a. independente și $Y = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$. Variabilele $X_k \in$ Ge(p) dacă și numai dacă $Y \in$ Ge($1 - (1-p)^n$).

11. Calculați $D(X)$ dacă $X \in$ H(N, n, p).

12. O persoană pariază la ruletă (numere de la 0 la 36) pe 13 până apare. Apoi pariază de acelaşi număr de ori (de câte ori a aşteptat până la apariţia numărului 13) pe numărul 36. Determinaţi pierderea medie din runda a doua.

13. Fie $N \in \mathrm{Bi}(n, 1 - e^{-m})$ şi $(X_j)_j$ şir de v.a. independente Poisson trunchiate

$$P(X_j = k) = \frac{m^k}{k!}\cdot\frac{1}{e^m - 1},\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Determinaţi repartiţia $\sum_{j=1}^{N} X_j$ dacă $N, X_1, X_2, \ldots$ sunt v.a. independente.

14. Într-o urnă se află 3 bile albe şi 7 roşii. Să se scrie funcţiile de repartiţie ale v.a. X_i şi să se determine punctele modale ale acestora dacă X_1, respectiv X_2 indică numărul bilelor roşii obţinute în urma a cinci extrageri revenite, respectiv nerevenite; X_3, respectiv X_4, indică numărul extragerilor revenite, respectiv nerevenite, efectuate până la obţinerea primei bile albe; X_5, respectiv X_6, indică numărul extragerilor revenite, respectiv nerevenite, efectuate până la obţinerea celei de-a treia bile roşii.

15. Dacă $X \in \exp(\theta)$, atunci v.a. X este lipsită de memorie:
$$P(X > r + s \mid X > s) = P(X > r),\ \forall\, r, s \in \mathbf{R}_+.$$

16. Fie $(X_k)_{k \in N^*}$ un şir de v.a. independente identic repartizate $X_k \in \exp(\theta)$.

Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ şi $t > 0$, iar Y numărul de $S_n \in [0, t]$. Atunci $Y \in \mathrm{Po}\left(\frac{t}{\theta}\right)$.

17. Determinaţi repartiţia timpului de funcţionate al unei maşini de ţesut dacă $\frac{\Delta t}{\lambda}$ reprezintă probabilitatea ca în intervalul Δt să se rupă un fir din ţesătură şi $P(t)$ probabilitatea ca până la momentul t să nu avem ruperi de fire.

18. Aflaţi distanţa intercuartilică a repartiţiei exponenţiale.

19. Determinaţi repartiţia v.a. $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$ dacă $X \in U(0, 1)$.

20. Să se arate că există o v.a. a cărei medie este de aceeaşi formă cu densitatea.

21. Determinaţi momentul de ordin r al repartiţiei Erlang

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!},\ x > 0.$$

22. Fie $X_k \in U(0, 1)$, $k = \overline{1,n}$, v.a. independente. Arătaţi că $X_{(k)} \in B(k, n - k + 1)$.

23. Determinaţi modul repartiţiei beta.

24. Determinați densitatea de repartiție și abaterea medie pătratică a variabilei $Y = (b - a)X + a$, unde $0 < a < b$, pentru
a) $X \in B(p, q), p, q > 1$; b) $X \in N(m, \sigma)$.

25. Calculați modul repartiției lognormale.

26. Determinați $M(X^k)$ pentru $X \in LN(m, \sigma)$, utilizând densitatea de repartiție a acesteia.

27. Fie $X_k \in N(0, 1)$, $k = 1, 2, 3$, v.a. independente. Arătați că v.a.
$$Y_1 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}, Y_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2X_3}{\sqrt{6}} \text{ și } \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}$$
sunt independente și identic repartizate.

28. Dacă v.a. independente $X_k \in N(0, 1)$, $k = 1, 2, 3$ și
$$X_1 = Y\cos U \cos V, X_2 = Y\cos U \sin V, \text{ iar } X_3 = Y \sin U,$$
arătați că v.a. Y, U și V sunt independente și determinați repartiția lui U.

29. Determinați repartiția v.a. $V = \sigma Z + m$ dacă $Z = \sqrt{X}\ \cos Y$, unde $X \in \exp(2)$, iar $Y \in U[0, 2\pi]$.

30. Dacă $a_k, b_k \in \mathbf{R}^*$, $k = \overline{1,n}$, iar X_k sunt v.a. independente normale satisfăcând $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k D(X_k) = 0$, atunci v.a. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$ și $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k X_k$ sunt independente.

31. Calculați modul și cuantila de ordinul p a repartiției Weibull.

32. Demonstrați că

a) $X \in C(0, 1) \Rightarrow \frac{1}{X} \in C(0, 1), X^2 \in F(1, 1)$.

b) $Y \in F(m, n) \Rightarrow \frac{1}{Y} \in F(n, m), \dfrac{1}{1+\frac{m}{n}Y} \in B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$.

33. Dacă $X, Y \in \exp(1)$ sunt v.a. independente, arătați că $U = \dfrac{X}{X+Y}$ și $V = X + Y$ sunt v.a. independente și stabiliți repartițiile acestora.

34. Fie $X_k \in N(0, \sigma)$, $k = \overline{1,n}$ un șir de v.a. independente cu
$$P\left(X_k = -\frac{1}{2^k}\right) = P\left(X_k = \frac{1}{2^k}\right), k \in \mathbf{N}^*.$$

Să se determine repartiția seriei aleatoare $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}^*} X_n$.

35. Stabiliţi repartiţia variabilei:

a) $Y = \frac{2}{\theta}\sum_{n=1}^{n} X_k$ dacă v.a. independente identic repartizate

i) $X_k \in \exp(\theta)$; ii) $F_{X_k}(x) = 1 - \left(1+\frac{x}{\theta}\right)e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0.$

b) $Y = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^{\lambda}}{\theta}$, dacă $X_k \in W(\lambda, \theta)$ sunt v.a. independente identic repartizate.

36. Dacă v.a. $X, Y \in N(0, 1)$ sunt independente, arătaţi că variabilele $X + Y$ şi $X - Y$ sunt independete şi identic repartizate.

37. Fie $X_1, X_2, X_3, X_4 \in N(0, 1)$ v.a. independente. Arătaţi că $X_1X_2 + X_3X_4 = Y \in La(1)$.

38. Fie $X_k \in C(m_k, a_k)$ v.a independente şi $Y = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}}$.

Dacă $m = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{m_k^2 + a_k^2}$ şi $a = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{m_k^2 + a_k^2}$ arătaţi că $Y \in C\left(\frac{m}{m^2+a^2}, \frac{a}{m^2+a^2}\right)$.

39. Determinaţi repartiţia v.a. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_kX_k + b_k}$ dacă $a_k \neq 0$ şi $X_k \in C(0, 1)$ sunt v.a. independente.

40. Fie $X_k \in N(0, \sigma)$, $k = \overline{1,n}$, v.a. independente, $Y = \max(|X_1|, |X_2|)$ şi $V = \min(|X_1|, ..., |X_n|)$. Determinaţi $D(Y)$ şi $M(V)$.

41. Fie $X_1 \in \chi^2_{2n}$ şi $X_2 \in \chi^2_{2m}$ v.a. independente, $a, b > 0$, şi $Y = aX_1 - bX_2$. Arătaţi că

$$\varphi_Y(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{n+m-j-1}^{m-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^m\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-j}(1-2iat)^{-j} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} C_{n+m-k-1}^{n-1}\left(\frac{b}{a+b}\right)^n\left(\frac{a}{a+b}\right)^{m-k}(1+2ibt)^{-k}.$$

42. Fie $X \in N(15, 4)$. Determinaţi $P(X \leq 12)$. $P(10 \leq X \leq 17)$, $P(0 \leq X \leq 19 \mid X \leq 17)$ şi $P\left(|X-15| \geq \frac{1}{2}\right)$.

43. Fie $X_k \in U(0, 1)$ v.a. independente și $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Arătați că funcția de frecvență a variabilei S_n este $p_k = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k [\varepsilon(x-k)]^{n-k-1}$.

44. Arătați că:

a) $\frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n} \xrightarrow{N\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;

b) $C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k \longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ când $p \to 1$, $n \to \infty$, astfel încât $n(1-p) = \lambda$.

45. Determinați repartiția apriori a variabilei Y și repartiția apriori a variabeilei X știind că $Y \mid X = p \in Bi(n, p)$ și $X \in U(0, 1)$.

46. V.a. $N, X_1, X_2 \ldots$ sunt independente, $N \in \text{Po}(\lambda)$ și $X_k \in Be\left(\frac{1}{2}\right)$, $k \geq 1$. Fie $Y_1 = \sum_{k=1}^{N} X_k$ și $Y_2 = N - Y_1$. Arătați că v.a. Y_1 și Y_2 sunt independente și stabiliți repartițiile acestora.

47. Fie $Y \in B(n, m)$, $m, n \in \mathbf{N}^*$. Calculați funcția generatoare de momente a variabilei $V = -\ln Y$. Arătați că $\sum_{k=1}^{m} X_k$, unde X_k sunt variabile exponențiale independente are aceeași repartiție cu variabila V.

48. Determinați funcția caracteristică a v.a. X repartizată **a)** $U(-1, 1)$; **b)** $\text{Tri}(-1, 1)$.

49. Dacă $X \in U(a, b)$ și $Y \in \text{Tri}(a, b)$, arătați că $M(X) = M(Y)$.

50. Determinați constanta k astfel încât f să reprezinte o densitate de repartiție și calculați dispersia v.a. având această densitate:

a) $f(x) = k x^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha}}$, (repartiția Weibull).

b) $f(x) = k x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$, $x > 0$, (repartiția Rayleigh).

51. Determinați $D(X)$ dacă:

a) $X \in \text{Pa}(k, \alpha)$, $k > 0$, $\alpha > 2$; b) $X \in F(m, n)$; $m \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

52. Determinați repartiția v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ dacă v.a. X_k sunt independente cu

a) $X_k \in N(m_k, \sigma_k)$; b) $X_k \in \Gamma(\alpha_k, \beta_k)$.

53. Dacă v.a. independente $X, Y \in N(0, \sigma)$, arătați că $\sqrt{X^2 + Y^2} \in \text{Ra}(\sigma)$.

54. Dacă $Y, X \in \exp\left(\frac{1}{a}\right)$ sunt v.a. independente, atunci $\frac{X}{Y} \in F(2, 2)$.

55. Dacă v.a. independente X_k, $k = \overline{1,n}$, sunt repartizate uniform $\left(P(X_k = k) = \frac{1}{N},\right.$ $\left.k = \overline{1,N}\right)$, aflaţi funcţiile de frecvenţă ale variabilelor $\max(X_1, X_2, ..., X_n)$ şi $\min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

56. Fie $X \in \Gamma(r, 1)$ şi $Y \in \Gamma(s, 1)$ două v.a. independente. Arătaţi că $\frac{X}{X+Y}$ şi $X + Y$ sunt v.a. independente. Folosind relaţia $X = (X + Y) \cdot \frac{X}{X+Y}$, calculaţi media şi dispersia unei variabile $B(r, s)$.

57. Fie $X, Y \in N(0, 1)$ v.a. independente. Arătaţi că v.a. $X^2 + Y^2$ şi $\frac{X}{Y}$ sunt independente şi determinaţi-le repartiţiile.

58. Determinaţi momentele de ordin r ale variabilei:
a) $N(0, 1)$; b) t_n.

59. Calculaţi $M(|X|^{2r})$ şi $M(|X|^{2r+1})$ dacă $X \in N(0, 1)$.

60. Dacă $X_1, X_2, ..., X_n \in N(m, \sigma)$ sunt v. a. independente, detrminaţi repartiţia variabilei

$$Y = \frac{\sum_{k=1}^{n} kX_k - m\sum_{k=1}^{n} k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2}}.$$

61. Dacă $X, Y \in N(0, \sigma)$ sunt v. a. independente, atunci $\frac{X}{Y} \in C(0, 1)$.

62. Dacă $X \in C(0, a)$, atunci $\frac{b}{X} \in C(0, |b|a)$ unde b este o constantă.

63. Determinaţi repartiţia v. a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dacă variabilele independente.

a) $X_k \in C(m, a)$; b) $X_k \in N(m, \sigma)$, $k = \overline{1, n}$.

64. Cu notaţia exerciţiului anterior, arătaţi că dacă v. a. independente $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt repartizate

a) $C(0, 1)$, atunci $\frac{S_n}{n} \in C(0, 1)$ şi $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_n}{k} \in C(0, 1)$. b) $N(0, 1)$, atunci $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in N(0, 1)$.

65. Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, fixate; $X_1, ..., X_m \in N(m_1, \sigma_1)$ şi $Y_1, ..., Y_n \in N(m_2, \sigma_2)$ v. a. independente

$$\overline{X} = \frac{\sum_1^m X_k}{m},\ \overline{Y} = \frac{\sum_1^n Y_k}{n},\ S_1^2 = \frac{\sum_1^m (X_k - \overline{X})^2}{m-1} \text{ şi } S_2^2 = \frac{\sum_1^n (Y_k - \overline{Y})^2}{n-1}.$$

Determinaţi repartiţia variabilei $\dfrac{\alpha(\overline{X} - m_1) + \beta(\overline{Y} - m_2)}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{m} + \dfrac{\beta^2}{n}}}$.

66. Determinaţi repartiţia variabilei $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dacă v. a. independente $X_1 ... X_n$ sunt identic repartizate.

a) $X_k \in \Gamma(\alpha_j, \beta)$; b) $X_k \in \exp(\beta)$; c) $X_k \in \chi^2(r_k)$.

67. Dacă $X \in U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci tg $X = Y$ este o variabilă Cauchy.

68. Dacă v. a. independente $X_k \in U(0, 1)$, $k = \overline{1, n}$, determinaţi repartiţia variabilei $V = -2\sum_{k=1}^{n} \ln X_k$.

69. Determinaţi repariţia v. a. $Y = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} X_k}$ dacă $(X_k)_{k=\overline{1,n}} \in U(0, 1)$ sunt v. a. independente.

70. Fie $X_k \in N(m_k, \sigma)$, $k = \overline{1, n}$ v. a. independente şi $Y = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}{\sigma^2}$. V.a. $Y \in \chi_n^2\left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k^2}{\sigma^2}\right)$ se numeşte variabilă χ_n^2 cu parametru de necentralitate $\delta = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k^2}{\sigma^2}$. Determinaţi $M(Y)$ şi $D(Y)$. Determinaţi densitatea de repartiţie, media şi dispersia variabilelor necentrate.

a) Student $T = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$, unde $X \in N(m, \sigma)$ şi $\dfrac{Y}{\sigma^2} \in \chi_n^2$ sunt v. a. independente (parametrul de necentralitate $\delta = \dfrac{m}{\sigma}$).

b) Fisher $F = \dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$, unde $X \in \chi_m^2(\delta)$ şi $Y \in \chi_n^2$ sunt v. a. independente.

5

LEGILE NUMERELOR MARI

5.1. Probleme rezolvate

1. Se consideră $X \in \Gamma(\alpha + 1, \alpha)$. Să se arate că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, pentru α suficient de mic, cu o probabilitate oricât de apropiată de 1, se poate afirma că $|X| < \varepsilon$.

Rezolvare

Vom aplica inegalitatea lui Cebâşev sub forma:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon_0) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon_0^2},$$

cunoscând

$$M(X) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(1+\alpha)} dx = \frac{\alpha^{\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} = \alpha(\alpha + 2)$$

şi $$M(X^2) = \frac{1}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+2} e^{-\frac{x}{\alpha}} dx = \alpha^2(\alpha + 1)(\alpha + 2),$$

deci $$D(X) = \alpha^2(\alpha + 2),$$

adică $$P(|X - \alpha(\alpha + 1) < \varepsilon_0) > 1 - \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\varepsilon_0^2},$$

pe care o mai putem scrie sub forma

$$P(-\varepsilon_0 + \alpha(\alpha+1) < X < \varepsilon_0 + \alpha(\alpha + 1)) > 1 - \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\varepsilon_0^2}.$$

De aici rezultă că, pentru α suficient de mic, avem $P(|X| < \varepsilon) > 1 - \eta$.

2. Să se arate că nu se poate defini o normă cu ajutorul convergenţei în probabilitate.

Rezolvare

Dacă convergenţa în probabilitate ar fi compatibilă cu existenţa unei norme, ar rezulta că dacă un şir de v.a. ar tinde în probabilitate la zero, el ar fi convergent în normă la zero, întrucât

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \right\| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \| X_k \|.$$

În ipoteza că s-a definit o normă compatibilă cu acest mod de convergență

$$\| X_n \| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0.$$

Se poate însă construi un șir $(X_n)_{n\in N^*}$ convergent în probabilitate care nu tinde la zero: fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independente cu funcțiile de repartiție

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+n}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$,

rezultă că $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Notând $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, avem

$$\frac{Y_n}{n} \le \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

de unde, dacă $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 0$, rezultă $\dfrac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.

Dar $F_{Y_n}(x) = P(Y_n < x) = P(X_1 < x, X_2 < x, \ldots, X_n < x) =$

$$= \prod_{j=1}^{n} P(X_j < x) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{x+j}\right), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Prin urmare,

$$P\left(\frac{Y_n}{n} < \varepsilon\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n\varepsilon + j}\right) < \left(1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}\right)^n,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{Y_n}{n} < \varepsilon\right) \le e^{-(1+\varepsilon)} \ne 1.$

Rezultă $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \not\xrightarrow{P} 0$, deci convergența în probabilitate nu este compatibilă cu existența unei norme.

3. Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de v.a. independente pentru care

$$P(X_n = 3^{n-1}) = P(X_n = -3^{n-1}) = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \; S_n^2 = D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \text{ și } Y_n = \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Să se arate că Y_n nu converge în probabilitate către zero.

Rezolvare

Întrucât $|X_n| = 3^{n-1}\ \forall n \in \mathbf{N}$ și $|X_n| = |X_n + X_{n-1} - X_{n-1}| \le |X_n + X_{n-1}| + |X_{n-1}| =$
$= |X_n + X_{n-1} + X_{n-2} - X_{n-2}| + |X_{n-1}| \le \ldots \le |X_n + X_{n-1} + X_{n-2} + \ldots + X_1| + |X_{n-1}| + \ldots + |X_1|,$

rezultă că

$$|Y_n| \geq \frac{|X_n| - |X_1| - |X_2| - \ldots - |X_{n-1}|}{S_n}.$$

Variabilele şirului dat fiind independente, iar $M(X_k) = 0$ şi $M(X_k^2) = 3^{2(k-1)}$, rezultă

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 3^{2(k-1)},$$

adică $\quad S_n = \sqrt{\dfrac{9^n - 1}{8}}$.

Prin urmare,

$$|Y_n| \geq \frac{3^{n-1} - (1 + 3 + \ldots + 3^{n-2})}{\sqrt{\dfrac{9^n - 1}{8}}} > \sqrt{2}\,\frac{3^{n-1} + 1}{3^n} > \frac{\sqrt{2}}{3},$$

de unde $P\left(|Y_n| > \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) = 1$.

În concluzie, dacă $\varepsilon \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $P(\omega : |Y_n(\omega)| > \varepsilon) \not\to 0$, adică şirul $(Y_n)_{n \in N^*}$ nu converge în probabilitate către zero.

4. Fie $X_n \in \mathrm{Bi}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, cu $\lambda > 0$ şi $n \in \mathbf{N}^*$. Arătaţi că $(X_n)_n \xrightarrow{s} X \in \mathrm{Po}(\lambda)$.

Rezolvare

Dacă $X \in \mathrm{Bi}(n\ p)$, atunci funcţia caracteristică

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n,$$

deci $\quad X_n \in \mathrm{Bi}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow \varphi_{X_n}(t) = \left(\dfrac{\lambda}{n} e^{it} + 1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$, cu $0 \leq \dfrac{\lambda}{n} \leq 1$.

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda}{n}e^{it} + 1 - \frac{\lambda}{n} - 1\right)n} = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi_{Po(\lambda)}(t)$.

5. Să se demonstreze teorema lui Bernoulli cu ajutorul funcţiei caracteristice.

Rezolvare

Probabilitatea ca un eveniment realizabil într-o experienţă cu o probabilitate p să apară de k ori când se repetă experienţa este

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Frecvența de apariție a acestui eveniment, $\frac{k}{n}$ este o v.a. a cărei funcție caracteristică este

$$\varphi_n(t) = M(e^{it\frac{k}{n}}) = \sum_{k=0}^{n} e^{it\frac{k}{n}} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(p e^{i\frac{t}{n}} \right)^k q^{n-k} = (p e^{i\frac{t}{n}} + q)^n.$$

Notând $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \to \infty$ dacă și numai dacă $\alpha \to 0$.

Logaritmând obținem:

$$\ln \varphi_n(t) = n \ln (p e^{i\frac{t}{n}} + q) = \frac{\ln(p e^{i\alpha t} + q)}{\alpha}.$$

De aici, rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \ln \varphi_n(t) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(p e^{it\alpha} + q)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{pit e^{i\alpha t}}{pit e^{i\alpha t} + q} = ipt$$

sau $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = e^{ipt}$,

care este funcția caracteristică a v.a. constante p, deci $\frac{k}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p} p$.

6. Fie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. cu medii și dispersii finite astfel încât $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = 0$ și $\rho(X_i, X_j) \leq 0$, $\forall\, i \neq j$. Să se arate că $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(X_k) \right)_n \xrightarrow{P} 0$.

Rezolvare

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right) = \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} D(X_k) + 2 \sum [M(X_i X_j) - M(X_i) M(X_j)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} D(X_k) + 2 \sum_{i<j} \rho(X_i, X_j) \sqrt{D(X_i) D(X_j)} \right\} \Rightarrow 0 \leq D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k),$$

deci este îndeplinită condiția $D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right) \to 0$.

Aplicând inegalitatea lui Cebîșev v. a. $Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, rezultă convergentă în probabilitate cerută.

7. Să se arate că şirurile de v.a. independente

a) $(X_n)_n$ cu $X_k : \begin{pmatrix} -k & -(k-1) & & -1 & 0 & 1 & & k-1 & k \\ \frac{1}{3k^3} & \frac{1}{3(k-1)^3} & & \frac{1}{3} & p & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3(k-1)^3} & \frac{1}{3k^2} \end{pmatrix}$;

b) $(Y_n)_n$ cu densităţi $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{k\pi^2}} e^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}}$ $\theta \in [0, 1), x \in \mathbf{R}$

se sepun legii numerelor mari.

Rezolvare

Vom arăta că cele două şiruri verifică condiţiile teoremei Markov.

a) Conform definiţiei

$$M(X_k) = 0 \cdot p + \frac{1}{3}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{j^3} - \sum_{j=1}^{k}\frac{j}{j^3}\right] = 0 \text{ cu } p = 1 - \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{j^3},$$

iar $$D(X_k) = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{k}\frac{j^2}{j^3} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right), k \in \mathbf{N}^*.$$

Notând $U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, obţinem: $M(U) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) = 0$ şi $D(U) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k)$.

Dar $$D(X_k) = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right) < \frac{2}{3}\left(1+\int_1^k \frac{dx}{x}\right) = \frac{2}{3}(1 + \ln k),$$

deci $$D(U) < \frac{2}{3n^2}\left(n+\int_1^n \ln x\, dx\right) = \frac{2}{3n^2}(1 + n \ln n) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

adică este îndeplinită condiţia lui Markov. Prin urmare, şirul $(X_n)_n$ se supune legii numerelor mari.

b) Cum $M(Y_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2}\, dy + \frac{\theta^k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \theta^k$,

căci, cu notaţia $y = \frac{x-\theta^k}{\sqrt[4]{k}}$, rezultă că media varaibilei Y_k este suma dintre o integrală nulă ($f(y) = ye^{-y^2}$ este impară) şi dublul integralei Euler-Poisson $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$D(Y_k) = M[(Y_k - M(Y_k))^2] = M[(X_k - \theta^k)^2] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\theta^k) f_k(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\theta^k)^2 e^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}}\, dx.$$

Făcând aceeaşi substituţie $y = \frac{x-\theta^k}{\sqrt[4]{k}}$, obţinem

$$D(Y_k) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\, dy = 2\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2}\, dy \overset{y^2=t}{=} \sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{t}\, e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{k}}{2}, k \in \mathbf{N}^*.$$

De aici, $M(U) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta^k = \frac{\theta-\theta^{n+1}}{n(1-\theta)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

și $\quad D(U) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(Y_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{2} < \frac{n\sqrt{n}}{2n^2} \to 0$ (condiția Markov)

deci șirul $(Y_n)_n$ se supune legii numerelor mari.

8. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de v.a. independente repartizate exponențial cu $M(X_k) = ck^\alpha$, unde $c > 0$ și $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Dacă $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, arătați că șirul $\left(S_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge în probabilitate către zero.

Rezolvare

Fie $\quad Y_n = S_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}$.

Atunci $M(Y_k) = M(S_n) - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1} = \frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}$,

adică $\quad M(Y_k) = \frac{cn^\alpha}{n}\left(\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha - \frac{n}{\alpha+1}\right)$.

Cum $M(X_k) = ck^\alpha$, iar $X_k \in \exp(\theta)$

$$\Rightarrow M(X_k) = \int_0^\infty x f_{X_k}(x)\,dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = ck^\alpha,$$

adică $\quad f_{X_k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le 0 \\ \frac{1}{ck^\alpha} e^{-\frac{x}{ck^\alpha}}, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

Deducem imediat printr-un calcul simplu că

$M(X_k^2) = 2c^2k^{2\alpha}$, deci $D(X_k) = c^2k^{2\alpha}$.

Urmează că

$$D(Y_k) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{c^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}.$$

Știind că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha+1}$ și că $0 < \alpha < \frac{1}{2}$,

rezultă că $\quad \lim\limits_{n\to\infty} D(Y_k) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = c^2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-2\alpha}}\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = 0.$

Având îndeplinite inegalitățile

$$P(\omega : |Y_n(\omega)| \le P(\omega : |Y_n'(\omega) - M(Y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}) \le 4\frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2},$$

deducem că șirul $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge în probabilitate către zero.

9. Fie șirul de v.a. $(X_n)_{n\in N^*}$ cu $X_n \in \Gamma(n, 1)$. Să se arate că șirul $\left(\frac{X_n - M(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ urmează la limită o lege $N(0, 1)$.

Rezolvare

Întrucât $M(X_k) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(n-1)!} = n$

și $$M(X_n^2) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+2)}{(n-1)!} = n(n+1),$$

deci $$D(X_n) = M(X_n^2) - M^2(X_n) = n$$

va fi suficient să deminstrăm că funcția caracteristică $\varphi_n(t)$ a v.a.

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}X_n - \sqrt{n}$$

îndeplinește condiția

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Conform definiției, avem:

$$\varphi_n(t) = \int_0^\infty e^{it\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)}f(x)\,dx = e^{-it\sqrt{n}}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)x}\,dx.$$

Integrând prin părți de $n-1$ ori sau folosind funcția Γ, găsim

$$\varphi_n(t) = e^{-it\sqrt{n}}\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{-n+1}$$

deci $$\ln\varphi_n(t) = -it\sqrt{n} - (n-1)\ln\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right).$$

Dezvoltând în serie $\ln\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$ pentru $\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right| < 1$, obținem

$$\ln\varphi_n(t) = -it\sqrt{n} + (n-1)\left(\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \theta(n)\right) = -\frac{t^2}{2} + \theta'(n),$$

adică $$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ deci } \lim_{n\to\infty}P(\omega : \frac{X_n(\omega)-M(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}} < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

10. Dacă n, numărul gradelor de libertate tinde la infinit, atunci repartiția Student cu n grade de libertate tinde către repartiția normală $N(0, 1)$.

Rezolvare

Vom începe prin observația că dacă $Z_n \in N(0, 1)$, iar $V_n \in \chi_n^2$ sunt v.a. independente, atunci $T_n = \dfrac{Z_n}{\sqrt{\dfrac{V_n}{n}}}$, $n = 1, 2, \ldots \xrightarrow{s} N(0, 1)$, care este de fapt o altă formulare a problemei.

Într-adevăr, cum $M(V_n) = n$ și $D(V_n) = 2n$, din inegalitatea lui Cebâșev obținem:

$$P\left(\left|\frac{V_n}{n} - 1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\dfrac{V_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{2}{n\varepsilon^2} \to 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ deci } \frac{V_n}{n} \xrightarrow{p} 1.$$

Întrucât $g(x) = \sqrt{x}$ este continuă în $x = 1$, rezultă $\sqrt{\dfrac{V_n}{n}} \xrightarrow{p} 1$ pentru $n \to \infty$, iar teorema lui Cramer încheie demonstrația.

O altă soluție a problemei se bazează pe faptul că este suficient să arătăm că șirul momentelor $M_r(T_{(n)})$, cu $r = 0, 1, 2, \ldots$, tinde către $M_r(Z)$, cu $Z \in N(0, 1)$.

Întrucât densitatea de probabilitate a variabilei Student este pară:

$$f(T_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbf{R},$$

media acestei variabile este nulă și drept urmare momentele inițiale coincid cu cele centrate

$$\mu_{2r+1}(T_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = 0,$$

funcția de integrat fiind impară cu limitele de integrare simetrice, iar

$$\mu_{2r}(T_n) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} x^{2r}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Cu substituția $\dfrac{x^2}{n} = y$ se obține:

$$\mu_{2r}(T_n) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)n^r}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty} y^{r-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)n^r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}B\left(r + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - r\right).$$

Cum $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right)\ldots\left(\frac{n}{2} - r\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - r\right)$ și $\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r - \frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$,

rezultă $M_{2r}(T_n) = \dfrac{n^r\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\dfrac{\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \dfrac{n^r(2r-1)!!}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2r)}$.

Pentru $Z \in N(0, 1)$, avem:

$$M_k(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \begin{cases} 0, & k = 2r+1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2r} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, & k = 2r \end{cases}$$

Notând $y = \frac{x^2}{2}$, obținem

$$M_{2r}(Z) = \frac{2^r}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} y^{r-\frac{1}{2}} e^{-y}\,dy = \frac{2^r}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right) = (2r-1)!!,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} M_{2r}(T_n) = M_{2r}(Z)$.

11. Fie $X_k \in \mathrm{La}(1)$, $k \in \mathbf{N}^*$, v.a. independente.

Arătați că $\sqrt{n}\,\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2} \xrightarrow{s} X \in N(0, \sigma)$ când $n \to \infty$ și determinați σ.

Rezolvare

Raportul se poate scrie

$$\frac{\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}}.$$

Întrucât $X_k \in \mathrm{La}(1)$, rezultă

$$M(X_k) = 0 \text{ și } M(X_k^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} = \Gamma(3) = 2,$$

din teorema limită centrală numărătorul converge în repartiție către o variabilă $N(0, \sqrt{2})$, iar conform legii numerelor mari, numitorul converge la $M(X_k^2) = 2$. Conform teoremei lui Cramer, raportul converge slab către o variabilă $X \in N\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. Dacă $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un șir de v.a. independente $N(0, 1)$, arătați că

$$\frac{X_k}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2}} \xrightarrow{s} Z \in N(0, 1).$$

Rezolvare

Conform legii numerelor mari,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow{p} M(X_k^2) = 1$$

deci numitorul

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2} \xrightarrow{p} 1.$$

Aplicând teorema lui Cramer, cum $X_k \in N(0, 1)$, rezultă concluzia.

13. Fie $F_n(x)$ funcția empirică de repartiție pentru o selecție de volum n. Arătați că pentru x fixat $F_n(x) \xrightarrow{p} F(x)$ și $\sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{s} Z \in N(0, \sigma(x))$ determinând $\sigma(x)$.

Rezolvare

$nF(x)$ reprezintă numărul variabilelor X_k, $k = \overline{1,n}$, care iau valori inferioare lui x, funcția empirică de repartiție fiind $F_x(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon(x - X_j)}{n}$. Dacă $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ reprezintă statistica ordonată a variabilelor $X_1, X_2, ..., X_n$, $X_{(1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ și $X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$, atunci

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le X_{(1)} \\ \dfrac{k}{n}, & \text{dacă } X_{(k)} < x \le X_{(k+1)}\,, k \in \{1, 2, ..., n-1\}. \\ 1, & \text{dacă } x > X_{(n)} \end{cases}$$

Pentru x arbitrar fixat, funcția empirică de repartiție $F_n(x)$ este o v.a.

Cum $P\{\varepsilon(x - X_j) = 1\} = P\{x - X_j \ge 0\} = F(x)$, iar $P\{\varepsilon(x - X_j) = 0\} = 1 - F(x)$, v.a. $\varepsilon(x - X_j), j = \overline{1,n}$, sunt independente și identic repartizate $\mathrm{Be}(F(x))$, deci suma acestora $nF(x) \in \mathrm{Bi}(n, F(x))$.

Introducând $I_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_k < x \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$, legea numerelor mari implică

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k(x) \xrightarrow{p} M(I_1(x)) = F(x).$$

Mai mult $nF(x) \in \mathrm{Bi}(n, F(x))$ implică

$$P\left(F_n(x) = \frac{j}{n}\right) = C_n^j\,[F(x)]^j[1 - F(x)]^{n-j}, j = \overline{0, n}$$

având $\quad M(F_n(x)) = F(x)$ și $D(F_n(x)) = \dfrac{F(x)[1 - F(x)]}{n}$.

Teorema limită centrală implică $\sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{s} Z \in N(0, \sigma(x))$ cu

$$\sigma(x) = \sqrt{D(I_1(x))} = F(x)\,(1 - F(x)) \text{ sau } \frac{\sqrt{n}[F_n(x) - F(x)]}{\sqrt{F(x)[1 - F(x)]}} \xrightarrow{s} Z \in N(0,1).$$

14. De câte ori trebuie aruncată o monedă pentru ca să putem spune cu o probabilitate de 0,6 ca abaterea frecvenţei de apariţie a stemei de la probabilitatea $p = \frac{1}{2}$ este mai mică decât 0,01?

Rezolvare

Folosind teorema Moivre-Laplace: $P\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\,|X_n - p| \le \beta\right) \cong 2\Phi(\beta) - 1$.

Cu $2\Phi(\beta) - 1 = 0{,}6$, rezultă $\Phi(\beta) = 0{,}8$. Rezultă din tabele $\beta = 0{,}84$.

Cum $p = q = \frac{1}{2}$ vom afla n din relaţia $0{,}84 = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\cdot 0{,}01 \Leftrightarrow 2\sqrt{n} = 84$, adică $n = 1764$.

15. Se aruncă de 360 de ori o pereche de zaruri. Cu ce probabilitate ne putem aştepta să apară 12 puncte (dubla 6) de un număr de ori cuprins 8 şi 12?

Rezolvare

Probabilitatea să apară 12 puncte într-o aruncare cu două zaruri este $p = \frac{1}{36}$.

Folosind teorema Moivre-Laplace:

$$P\left(\alpha \le \sqrt{\frac{n}{pq}}(X_n - p) \le \beta\right) \cong \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Cum $n = 360$, obţinem

$$\alpha = \sqrt{\frac{360}{\frac{1}{36}\cdot\frac{35}{36}}}\left(\frac{1}{45} - \frac{1}{36}\right) = -\frac{6}{5\sqrt{3{,}5}} \cong 0{,}641;\ \beta = \sqrt{\frac{360}{\frac{1}{36}\cdot\frac{35}{36}}}\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{36}\right) = \frac{6}{5\sqrt{3{,}5}} = -\alpha,$$

deci $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 2\Phi(\beta) - 1$.

Cum $\beta = 0{,}641$, din tabele obţinem $\Phi(\beta) = 0{,}7389$.

Aceasta ne conduce la rezultatul $P\left(-\frac{6}{5\sqrt{3{,}5}} \le X_n - \frac{1}{36} \le \frac{6}{5\sqrt{3{,}5}}\right) \cong 0{,}48$.

16. De câte ori este suficient să aruncăm un zar pentru ca, cu o probabilitate de 0,99 să putem afirma că faţa 6 apare cu o frecvenţă cuprinsă între $\frac{1}{6} - 0{,}05$ şi $\frac{1}{6} + 0{,}05$?

Rezolvare

Aplicând regula 3σ în formularea teoremei lui Moivre-Laplace, obţinem:

$$P(|X_n - p| < 3\sigma) \cong 2\Phi(3) - 1 = 0{,}9973.$$

Cum $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$, obţinem, din $3\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n}} = 0{,}05$, $n = 500$.

Folosind inegalitatea lui Cebîşev

$$P(|X_n - p| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X_n)}{q^2},$$

întrucât $D(X_n) = \frac{pq}{n}, p = \frac{1}{6} q = \frac{5}{6}$ şi $\varepsilon = 0{,}05$

va trebuie îndeplinită inegalitatea

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n(0{,}05)^2} < 0{,}01$$

care conduce la

$$n = \frac{200\,000}{36} = 5555.$$

Aplicând teorema lui Moivre-Laplace sub forma

$$P\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\,|X_n - p| \le \beta\right) \cong 2\Phi(\beta) - 1 = 0{,}99,$$

pentru $\Phi(\beta) = 0{,}995$, obţinem din tabele $\beta = 2{,}57$, iar din egalitatea

$$\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\cdot 0{,}05 = 2{,}56,\ n = 368.$$

17. Să se arate că şirului de v.a. independente $(X_n)_{n\in N^*}$ astfel încât

$$P\left(X_n = \frac{1}{n^\beta}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{n^\beta}\right) = p \text{ cu } \frac{1}{3} < \beta \le \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ şi } P(X_n = 0) = 1 - 2p$$

i se poate aplica teorema lui Leapunov.

Rezolvare

Se obţine evident $M(X_k) = 0$.

$$M(X_k^2) = \mu_k^2 = \frac{2p}{k^{2\beta}} \text{ şi } M(|X_k|^3) = \rho_k^3 = \frac{2p}{k^{3\beta}}, k \in \mathbf{N}^*.$$

De aici, $\mu_{(n)}^2 = \sum_{k=1}^{n}\mu_k^2 = 2p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2\beta}}$ şi $\rho_{(n)}^3 = \sum_{k=1}^{n}\rho_k^3 = 2p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3\beta}}$.

Întrucât avem $\frac{1}{3} < \beta \le \frac{1}{2}$ sau $1 < 3\beta \le \frac{3}{2}$, rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3\beta}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3\beta}}$$

este o serie convergentă.

Cum $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2\beta}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ care tinde la ∞ când $n \to \infty$, condiţa lui Leapunov $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\rho_{(n)}^3}}{\sqrt{\mu_{(n)}^2}} = 0$

este îndeplinită şi teorema se poate aplica.

5.2 Probleme propuse

1. Fie $X \in \Gamma(m+1, 1)$, $m \in \mathbf{N}^*$. Arătați că $P(0 < X < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}$.

2. Fie $X_n \in \Gamma\left(n, \frac{1}{n}\right)$. Arătați că $X_n \xrightarrow{P} 1$ când $n \to \infty$.

3. Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un șir de v. a. independente identic repartizate $X_n \in Pa(1, \alpha)$ și $Y_n = n^{-\frac{1}{2}} \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$. Arătați că Y_n converge în repartiție și determinați repartiția limită.

4. Fie $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independente astfel încât $P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Arătați că $X_n \xrightarrow{p} 1$ când $n \to \infty$.

5. Fie $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independente identic repartizate cu $M_k(X) < \infty$.

Arătați că $\frac{X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k}{n} \xrightarrow{p} M_k(X)$ când $n \to \infty$.

6. Fie $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ v.a. independente identic repartizate $X_k \in U(0, 1)$.

Arătați că $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2} \xrightarrow{p} \frac{3}{2}$.

7. Fie $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ v.a. independente identic repartizate $X_k \in N(0, 1)$.

Determinați repartiția limită a v.a. $\sqrt{n}\,\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$.

8. Dacă $X \in \chi_n^2$ arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sqrt{2X} - \sqrt{2n-1} \leq z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$.

9. Fie $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. astfel încât $Y_n \xrightarrow{p} 2$ când $n \to \infty$. Atunci $Y_n^2 \xrightarrow{p} 4$.

10. Fie $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independente identic repartizate cu medie finită $m \geq 0$.

Arătați că $\sqrt{\overline{X}_n} \xrightarrow{p} \sqrt{m}$ când $n \to \infty$, unde $\overline{X}_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{n}$.

11. Fie $X_n \in \mathrm{Ge}\left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda > 0$. Arătați că $\frac{X_n}{n}$ converge în repatiție și determinați parametrul repartiției limită.

12. Fie $(X_n)_{n\in N^*}$ un șir de v.a. cu $P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pentru $k = 1, 2, ..., n$. determinați repartiția limită a lui X_n.

13. Fie $X_n \in P(n, 1)$. Arătați că $\frac{X_n - n}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{s} Z \in N(0, 1)$.

14. Fie $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ v.a. independente identic repartizate $U(-1, 1)$ și $Y_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{k=1}^{3} X_k^3}$

Arătați că $Y_n \xrightarrow{p} 0$ și $\sqrt{n}\, Y_n \xrightarrow{s} Z \in N(0, \sqrt{3})$.

15. Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Cebîșev șirurilor de v.a. independente definite pe același câmp de probabilitate.

$$X_n : \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, n \geq 2, P(X_1 = 0) = 1 \qquad U_n : \begin{pmatrix} -5n & 0 & 5n \\ \frac{1}{3n^2} & 1-\frac{2}{3n^2} & \frac{1}{3n^2} \end{pmatrix}$$

$$Y_n : \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & n^2 \\ \alpha^{-n} & 1-2\alpha^{-n} & \alpha^{-n} \end{pmatrix}, \text{cu } \alpha > 1 \qquad V_n \in \exp(\lambda^{-n}), \lambda > 0$$

16. Fie șirul de v.a. independente $(X_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ cu repartițiile

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_k : \begin{pmatrix} -\sqrt{\log k} & \sqrt{\log k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, k \geq 2.$$

Să se arate că șirul dat se supune legii numerelor mari (în formularea lui Cebîșev în varianta Markov). Aceeași problemă pentru șirul de v.a. independente $(Y_n)_n$ cu $M(Y_n) = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, și dispersii $D(X_n) = n^\lambda$, $\lambda \in (0, 1)$.

17. Determinați repartiția limită a unei variabile reduse:
a) χ_n^2 când $n \to \infty$; b) $\mathrm{Po}(\lambda)$ când $\lambda \to \infty$.

18. Într-o cercetare științifică se efectuează n experiențe, urmărindu-se apariția unei anumite caracteristici. Să se determine numărul minim de experiențe astfel încât cu o probabilitate de cel puțin 0,95 frecvența de apariție să difere în valoare absolută de probabilitatea p cu mai puțin de 10^{-3}.

19. Se poate afirma cu o probabilitate de 0,97 că din 1000 de aruncări ale unei monede apare stema de un număr de ori cuprins între 450 şi 600?

20. Determinaţi probabilitatea minimă cu care se poate afima că din 360 de aruncări ale unui zar, apare faţa 5 de un număr de ori cuprins între 40 şi 80.

21. Determinaţi repartiţia limită pentru:

a) $\frac{X_n}{n^2}$ dacă $X_n \in \chi_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) $n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$ dacă variabilele aleatoare $X_k \in N(0, 1)$ sunt identic repartizate şi $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \rho$, $i \neq j$;

c) $\frac{X_n}{n}$ dacă $X_n \in \Gamma(n, \beta)$, $\beta > 0$.

22. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independente identic repartizate $X_k \in \mathrm{Be}(p)$, $k = \overline{1,n}$.

Arătaţi că $P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, dacă $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

23. Arătaţi că

a) dacă $X \in \mathrm{NB}(n, p)$ şi $Y \in \chi_{2n}^2$, atunci $2pX \xrightarrow{s} Y$ când $p \to 0$;

b) dacă $X_n \in \mathrm{NB}(k_n, p_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, şi $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$, atunci $X_n \xrightarrow{s} X$ când $k_n \to \infty$, $p_n \to 0$ astfel încât $k_n p_n \to \lambda$;

c) dacă $X_1, X_2, \ldots$ sunt v.a. independente identic repartizate cu $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{2^k}$ şi $Z \in U(-1, 1)$, atunci $Z_n \xrightarrow{s} Z$.

24. Să se determine numărul n al probelor independente începând cu care are loc $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 0{,}1\right) \geq 0{,}97$, dacă într-o singură probă evenimentul se realizează cu o probabilitate $p = 0{,}8$.

25. O firmă producătoare încheie un contract pentru livrarea a 30000 de piese unui beneficiar. Ştiind că o piesă este acceptată de beneficiar numai dacă valoarea caracteristicii X a acestei piese se află în intervalul $(9{,}8; 10{,}2)$ şi că v.a. $X \in N(10, 0, 15)$, să se determine numărul de piese pe care trebuie să-l producă firma pentru a putea onora contractul.

26. Se efectuează 800 de probe independente. În 200 dintre ele probabilitatea apariției unui rezultat așteptat a fost de 0,5; în 400 de probe această probabilitate a fost de 0,4, iar în restul probelor a fost de 0,3. Să se determine marginea inferioară a probabilității în abaterea absolută a frecvenței relative de apariție a evenimentului astfel încât media probabilităților să nu depășească 0,04.

27. Cu ce probabilitate putem afirma că din 100 de aruncări ale unei monede stema apare de un număr de ori cuprins între 40 și 60?

28. De câte ori trebuie să aruncăm o monedă astfel încât să putem afirma cu o probabilitate de 0,99 că frecvența apariției stemei să fie între 40% și 52%?

29. Probabilitatea obținerii unei piese rebut din producția unei mașini automate este $p = 0{,}005$. Să se determine probabilitatea ca din 1000 de piese fabricate de această mașină, numărul pieselor rebut să fie:

a) între 60 și 70; b) cel mult 70.

30. Să se arate că șirului de v.a. independente $(X_n)_{n\in N^*}$ astfel încât

$$P(X_k = -\sqrt{k}) = \frac{1}{2} = P(X_k = \sqrt{k})$$

i se poate aplica teorema Leapunov.

6

TEORIA SELECȚIEI ȘI A ESTIMAȚIEI

6.1. Probleme rezolvate. Teoria selecției

1. Se controlează greutatea unor pachete și pentru aceasta se extrage o selecție de volum $n = 10$ care dă următoarele valori ordonate:

Pachetul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Greutatea în kg	21,5	21,6	21,75	22	22,45	22,6	23,2	23,4	23,5	23,65

Să se calculeze $F_{10}(20)$, $F_{10}(22)$, $F_{10}(23)$ unde prin $F_n(x)$ am notat funcția emipirică de repartiție. Să se scrie repartiția empirică și să se calculeze media de selecție.

Rezolvare

Avem

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \dfrac{k}{n}, & x_k < x \le x_{k+1}, \ k = \overline{1, n-1}, \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

unde $x_1, ..., x_n$ sunt valorile observate ordonate crescător.

Rezultă $F_{10}(20) = 0$, $F_{10}(22) = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ și $F_{10}(23) = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$ $(x_6 < 23 < x_7)$.

Notăm cu X^* variabila aleatoare de selecție.

$$X^* : \begin{pmatrix} 21{,}5 & 21{,}6 & 21{,}75 & 22 & 22{,}45 & 22{,}6 & 23{,}2 & 23{,}4 & 23{,}5 & 23{,}65 \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{10}(21{,}5 + 21{,}6 + 21{,}75 + 22 + 22{,}45 + 22{,}6 +$$

$$+ 23{,}2 + 23{,}4 + 23{,}5 + 23{,}65) = \frac{225{,}65}{100} = 2{,}2565.$$

2. Pentru a cerceta prezența studenților la o anumită materie s-a ales un eșantion de $n = 100$ studenți și s-a înregistrat numărul absențelor acestora la patru cursuri consecutive.

Nr. studenți x_i	50	20	15	8	7
Nr. absențe n_i	0	1	2	3	4

a) Să se scrie repartiția empirică și funcția de repartiție empirică $F_n(x)$.
b) Să se calculeze media și dispersia de selecție.
c) Să se calculeze $F_{100}(4)$.

Rezolvare

a) Fie X variabila aleatoare de selecție

$$X^* : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{50}{100} & \frac{20}{100} & \frac{15}{100} & \frac{8}{100} & \frac{7}{100} \end{pmatrix}.$$

$$F_{100}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}5, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}7, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}85, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}93, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

b) $$\bar{x} = \frac{1}{\sum n_i} \sum n_i x_i = \frac{102}{100} = 1{,}02$$

$$\bar{\mu}_2 = \frac{1}{\sum n_i} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{52{,}02 + 0{,}008 + 14{,}406 + 31{,}3632 + 62{,}1628}{100} =$$

$$= \frac{159{,}96}{100} = 1{,}5996.$$

c) $F_{100}(4) = 0{,}93$.

3. Dintr-o populație oarecare s-a extras o selecție de volum $n = 50$ care a condus la rezultatele:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

unde n_i reprezintă frecvența apariției valorii x_i în selecție $\left(n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 50\right)$.

Să se calculeze media de selecție $\bar{x}$ și dispersia de selecție $\bar{\mu}_2$.

Rezolvare

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} n_i} \cdot \sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \frac{1}{50}(16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10) = 5{,}76.$$

$$\bar{\mu}_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} n_i} \cdot \sum_{i=1}^{4} n_i (x_i - \bar{x})^2 .$$

Organizăm calculele în următorul tabel:

n_i	x_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$n_i(x_i-\overline{x})^2$
16	2	–3,76	14,1376	226,20
12	5	–0,76	0,5776	6,93
8	7	1,24	1,5376	12,30
14	10	4,24	17,9776	251,69
$n=\sum_{i=1}^{4}n_i=50$	$\overline{x}=5,76$			$\overline{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}n_i(x_i-\overline{x})^2=\frac{497,12}{50}\cong 9,94.$

4. Un lot de 100 de pies se repartizează după diametrul lor astfel:

Diametrul (mm)	110–120	–130	–140	–150	–160	–170	–180	–190	–200
Frecvența n_i	2	3	3	6	10	20	26	14	16

a) Să se determine diametrul mediu și dispersia de selecție.

b) Să se reprezinte grafic funcția de repartiție de selecție.

Rezolvare

a) Se aleg ca date de selecție x_i; $i = 1, ..., n$, mijloacele intervalelor și apoi se efectuează o transformare liniară de forma $u_i = \frac{x_i - a}{b}$ pentru simplificarea calculelor cu a și b constante alese convenabil.

Intervalele	x_i	$u_i=\frac{x_i-155}{10}$	n_i	n_iu_i	u_i^2	$n_iu_i^2$
110 – 120	115	–4	2	–8	16	32
120 – 130	125	–3	3	–9	9	27
130 – 130	135	–2	3	–6	4	12
140 – 130	145	–1	6	–6	1	6
150 – 130	155	0	10	0	0	0
160 – 130	165	1	20	20	1	20
170 – 130	175	2	26	52	4	104
180 – 130	185	3	14	42	9	126
190 – 130	195	4	16	64	16	256
Total			100	149		583

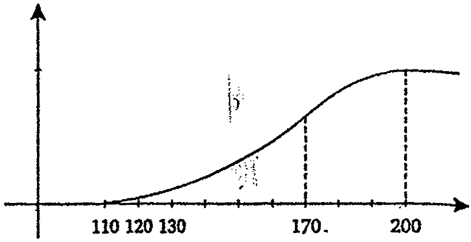
Se obține $\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_iu_i = \frac{149}{100} = 1,49$

$$S_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_iu_i^2 - \overline{u}^2 = \frac{583}{100} - (1,49)^2 = 3,61$$

Atunci $\overline{x} = 10\overline{u} + 155 = 169,9$; $S_x^2 = 100 \cdot S_u^2 = 361.$

b) Funcția de repartiție de selecție se determină cu ajutorul frecvențelor relative $\frac{n_i}{n}$, astfel:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<100 \\ \frac{2}{100}\frac{x-110}{10}, & 110\le x<120 \\ \frac{2}{100}+\frac{3}{100}\frac{x-120}{10}, & 120\le x<130 \\ \frac{5}{100}+\frac{3}{100}\frac{x-130}{10}, & 130\le x<140. \\ \dots\dots\dots & \\ \frac{84}{100}+\frac{16}{100}\frac{x-190}{10}, & 190\le x<200. \\ 1, & x\ge 200 \end{cases}$$



5. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ date de selecție extrase dintr-o populație repartizată:

a) normal de parametrii m și σ;

b) gama de parametrii α și β;

c) Poisson de parametru λ;

d) binomial $B_i(m; p)$, $m \in \mathbf{N}$, $0 \le p \le 1$.

Să se determine repartiția mediei de selecție $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Rezolvare

Se folosește funcția caracteristică a repartiției corespunzătoare deoarece

$$\varphi_{\overline{X}}=\varphi_{X_1}\left(\frac{1}{n}t\right)\cdot\varphi_{X_2}\left(\frac{1}{n}t\right)\cdot\dots\cdot\varphi_{X_n}\left(\frac{1}{n}t\right).$$

a) $\varphi_X(t)=e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2n}}$, dacă $X\sim N(m,\sigma)$. Atunci

$$\varphi_{\overline{X}}=e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2n}}$$

de unde rezultă că $\overline{X}\sim N\left(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

b) $\varphi_X(t)=(1-\beta it)^{-\alpha}$ dacă $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$. Deci

$$\varphi_{\overline{X}}(t)=\left(1-\frac{B}{n}it\right)^{-n\alpha},\text{ adică } \overline{X}\sim\Gamma\left(n\alpha,\frac{B}{n}\right).$$

c) $\varphi_X(t)=e^{-\lambda(1-e^{it})}$, deci $\varphi_{\overline{X}}(t)=e^{-n\lambda\left(1-e^{i\frac{t}{n}}\right)}$, adică $\overline{X}$ nu este o variabilă repartizată Poisson.

d) $\varphi_X(t)=(pe^{it}+q)^m$, deci $\varphi_{\overline{X}}(t)=\left(pe^{i\frac{t}{n}}+q\right)^{mn}$.

Dacă se ia variabila aleatoare $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$, atunci

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\cdot\dots\cdot\varphi_{X_n}(t)=\left(pe^{it}+q\right)^{mn}$$

ceea ce reprezintă faptul că Y are tot o repartiţie binomială, adică

$$P(Y = y) = C_{mn}^{y} p^{y} q^{mn-y}, y = 0, 1, .., mn.$$

Se face schimbarea de variabilă $Y = n\bar{X}$ şi se obţine

$$P(\bar{X} = x) = C_{mn}^{mx} p^{nx} q^{mn-nx}, x = 0, 1, ..., m$$

care este probabilitatea ce defineşte repartiţia binomială.

6. Dacă se presupune că producţia la ha pentru o anumită cultură este repartizată normal cu $\sigma = 2$, care trebuie să fie numărul de loturi pe care să se efectueze cercetări statistice astfel încât cu probabilitatea de 0,99 producţia medie obţinută din selecţie să difere de producţia medie în valoare absolută cu mai puţin de o unitate?

Rezolvare

Prin ipoteză, $P(|\bar{x} - m| < 1) = 0{,}99$.

Se ştie că dacă populaţia are o repartiţie $N(m, \sigma)$, atunci $\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Atunci

$$P(|\bar{X} - m| < 1) = P(-1 < \bar{X} - m < 1) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}99.$$

Din tabel se găseşte că $\frac{\sqrt{n}}{2} = 2{,}58$, de unde $n \cong 26$.

7. Se face o selecţie de 12 piese a căror caracteristică este diametrul şi s-au obţinut următoarele valori

Piesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diam.	31,5	31,6	31,6	31,7	32,2	32,4	32,5	32,5	32,6	32,7	32,5	32,6

Să se calculeze:
a) media de selecţie;
b) dispersia de selecţie;
c) funcţia de repartiţie de selecţie.

Rezolvare

Se organizează datele astfel:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
31,5	−0,7	0,49
31,6	−0,6	0,36
31,6	−0,6	0,36
31,7	−0,5	0,25
32,2	0	0
32,4	0,2	0,04

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
32,5	0,3	0,09
32,5	0,3	0,09
32,6	0,4	0,16
32,7	0,5	0,25
32,5	0,3	0,09
32,6	0,4	0,16
386,4		2,34

Deci: a) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{386,4}{12} = 32,2$

b) $S^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{2\cdot 34}{12}$.

8. Se consideră două populaţii caracterizate de v. a. independente cu repartiţii normale, având aceeaşi medie şi abateri medii pătratice, 5 respectiv 8. Din fiecare populaţie se extrage câte o selecţie de volum 81. Să se afle probabilitatea ca diferenţa celor două medii de selecţie în valoare absolută să fie mai mare decât 0,8.

Rezolvare

V. a. $\bar{X}_1 \sim N\left(m, \frac{5}{9}\right)$, $\bar{X}_2 \sim N\left(m, \frac{8}{9}\right)$

sunt independente, de unde rezultă că

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \sqrt{\frac{25+64}{81}}\right).$$

Atunci $P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 0,8) = 1 - P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < 0,8) = 1 - 2\Phi\left(\frac{0,8\cdot 9}{\sqrt{89}}\right)$.

9. Dintr-o populaţie normală de medie 80 şi dispersie 40 se extrage o selecţie de volum 400, iar din altă populaţie normală, independentă de prima, de medie 76 şi dispersie 180 se extrage o selecţie de volum 200. Să se afle probabilitatea ca:

a) media primei selecţii să fie mai mare decât media celei de a doua selecţii cu 5 unităţi,

b) diferenţa mediilor celor două selecţii în valoare absolută să fie mai mică decât 6.

Rezolvare

$$\bar{X}_1 \sim N\left(80, \sqrt{\frac{40}{400}}\right), \ \bar{X}_2 \sim N\left(76, \sqrt{\frac{180}{200}}\right).$$

Deci $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(4, \sqrt{\frac{40}{400} + \frac{180}{200}}\right)$.

a) $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + 5) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 5) = 1 - F(5) = 1 - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{5-4}{\sqrt{\frac{40}{400} + \frac{180}{200}}}\right)$.

b) $P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < 6) = F(6) - F(-6) = \Phi\left(\frac{6-4}{\sqrt{\frac{40}{400} + \frac{180}{200}}}\right) + \Phi\left(\frac{6+4}{\sqrt{\frac{40}{400} + \frac{180}{200}}}\right)$.

10. Considerăm selecția aleatoare $\{X_1, ..., X_n\}$ dintr-o populație normală $N(m, \sigma)$ și fie

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \,;\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})\,;\ U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 .$$

În cazul unei selecții de volum $n = 15$, să se determine numerele reale a și u astfel încât $P(\hat{\sigma}^2 < a) = 0,95$ și $P(U < u) = 0,95$.

Rezolvare

Se știe că variabila $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ urmează repartiția χ^2 cu $n - 1$ grade de libertate.

Notăm astfel: $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Prin urmare:

$$P(\hat{\sigma}^2 < a) = P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \frac{na}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2 < \chi^2_{p;n}\right) = p.$$

Pentru $n - 1 = 14$ și $p = 0,95$, găsim în tabelul cu valorile funcției de repartiție χ^2

$$a = \chi^2_{0,95;14} = 23,7.$$

Similar, deoarece $\frac{nU}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$, obținem

$$P(U < u) = P\left(\frac{nU}{\sigma^2} < \frac{nu}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2 < \chi^2_{p;n}\right) = p.$$

Pentru $n = 15$ și $p = 0,95$ obținem $u = \chi^2_{0,95;15} = 25$.

11. Fie $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecție de volum n dintr-o populație $N(0, \sigma)$. Să se determine repartițiile următoarelor variabile de selecție.

a) $U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$; b) $V = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}$.

Rezolvare

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$h(x, n, \sigma) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}},\ x \geq 0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbf{N}^*.$$

a) $F_U(u) = P(U < u) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 < u\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 < nu\right) = H_X(nu),\ u > 0,$

unde H_X este funcția de repartiție a variabilei $\chi^2_{(n)}$.

$$f(u) = nH'(nu) = n \cdot h(nu) = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nu}{2\sigma^2}},\ u > 0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbf{N}^*.$$

b) $$F_V(v) = P(V < v) = P\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2} < v\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 < v^2\right) = H_X(v^2),\ v > 0.$$

$$f(v) = F'(v) = 2vh(v^2) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}v^{n-1}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}},\ v > 0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbf{N}^*.$$

12. Punctajul obținut la un examen pentru a deveni agenți de schimb poate fi presupus normal distibuit cu media $m = 200$ și abaterea medie pătratică $\sigma = 20$. O evaluare mai mare de 230 puncte permite obținerea certificatului de agent de schimb. Sunt aleși 10 subiecți la întâmplare care au punctajele $X_1, \ldots, X_{10}$.

a) Care este probabilitatea ca toți cei 10 candidați să treacă examenul?

b) Punând $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$ și $s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2$, media de selecție și dispersia de selecție modificată, să se determine $P(\overline{X} \geq 210)$ și $P(185 < s^2 < 653)$.

Rezolvare

a) Pentru o v. a. $X \sim N(m, \sigma)$, funcția de repartiție se găsește cu ajutorul funcției Laplace ce are valori tabelate astfel

$$P(X < x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

Atunci

$$P(X_1 > 230, X_2 > 230, \ldots, X_{10} > 230) = \prod_{i=1}^{10} P(X_i > 230) = [1 - F(230)]^{10} =$$
$$= [1 - \Phi(1,5)]^{10} = (0,066)^{10}.$$

b) Se știe că $\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ și $U = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. Atunci

$$P(\overline{X} \geq 210) = 1 - \Phi\left(\frac{210 - 200}{\frac{20}{\sqrt{10}}}\right) = 1 - \Phi(1,58) = 0,057$$

$$P(185 < s^2 < 653) = P\left(\frac{9 \cdot 185}{400} < U < \frac{9 \cdot 653}{400}\right) = P(4,1625 < U < 14,6925) =$$
$$= P(U > 4,1625) - P(U > 14,6925) = 0,9 - 0,1 = 0,8.$$

13. Fie X o v. a. continuă cu densitatea de probabilitate simetrică față de origine și fie X_1, ..., X_n o selecție aleatoare. Notăm $U_n = \min(X_1, ..., X_n)$ și $V_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Să se calculeze a) $P(U_n > 0$ sau $V_n < 0)$; b) $P(U_n < 0$ și $V_n > 0)$.

Rezolvare

a) Evenimentele $\{U_n > 0\}$ și $\{V_n < 0\}$ sunt incompatibile, deci

$$P(U_n > 0 \cup V_n < 0) = P(U_n > 0) + P(V_n < 0) = [1 - F(0)]^n + [F(0)]^n =$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

pentru că am folosit faptul că

$$P(X < 0) = P(X \leq 0) = F(0) = \frac{1}{2} \text{ din simetria și continuitatea lui } f(x).$$

b) $P(U_n < 0 \cap V_n > 0) = 1 - P(U_n > 0 \cup V_n < 0) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

14. Se presupune că greutatea în grame a unei cutii cu biscuiți este o v. a. normală cu media $m = 1500$ gr și abaterea medie pătratică $\sigma = 40$ gr. O cutie este considerată necorespunzătoare dacă greutatea ei este sau mai mare decât 1540 gr sau mai mică decât 1440 gr.

a) Să se afle probabilitatea de a produce o cutie necorespunzătoare.

b) Au fost extrase 200 de cutii printr-o selecție bernoulliană. Câte cutii necorespunzătoare vor fi în medie?

c) Câte cutii vor fi extrase, în medie, înainte de a găsi una necorespunzătoare?

Rezolvare

a) Fie X o v. a. reprezentând greutatea unei cutii. Cum $X \sim N(m, \sigma)$ avem

$$P(X < 1440 \cup X > 1540) = P(X < 1440) + P(X > 1540) =$$

$$= P\left(Z < \frac{1440 - m}{\sigma}\right) + P\left(X > \frac{1540 - m}{\sigma}\right) =$$

$$= P(Z < 1{,}5) + P(Z > 1) = 0{,}0668 + 0{,}1587 = 0{,}2255,$$

unde $Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

b) Fie Y v.a. ce reprezintă numărul de cutii necorespunzătoare în cele 200 extrase. Atunci Y este repartizată binomial cu $n = 200$ și $p = 0{,}2255$. Deci

$$M(Y) = np = 45{,}1 \cong 45.$$

c) V.a. W reprezintă numărul de extrageri până la prima cutie necorespunzătoare, deci va avea o repartiție geometrică cu $p = 0{,}2255$. Atunci

$$M(W) = \frac{1}{p} = 4{,}43 \cong 5.$$

15. Fie $\{X_1, ... X_n\}$ o selecție asupra v. a. uniforme pe $(0, 1)$. Să se determine densitatea de repartiție a mediei geometrice:

$$Y = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} X_K}.$$

Rezolvare

Logaritămm Y şi obţinem

$$\ln Y = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k$$

$$X \sim \text{Uniform } (0,1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}.$$

Densitatea de repartiţie a variabilei $U = \ln X$ este

$$g(u) = \begin{cases} e^u, & u<0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Deci $\ln X_k$ sunt v. a. independente, identic repartizate cu U. Calculăm funcţia caracteristică a lui U:

$$\Phi_u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{itu}\cdot e^u\,du = \int_{-\infty}^{0} e^u\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(itu)^k}{k!}\,du = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\int_{-\infty}^{0}u^k\cdot e^u\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}(-1)^k\int_0^{\infty}y^k\cdot e^{-y}\,dy = \sum_{k=0}^{\infty}(-it)^k = (1+t)^{-1}.$$

Rezultă:

$$\Phi_{\ln Y}(t) = \Phi_{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}\Phi_{\ln X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1+\frac{it}{n}\right)^{-n}$$

Obţinem că densitatea de repartiţie a v. a. $\ln Y$ este

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{n^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}(-\ln y)^{n-1}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

16. Două populaţii normale au aceeaşi medie şi cu dispersiile $\sigma_1^2 = 24$, $\sigma_2^2 = 45$ sunt independente. Presupunând că din fiecare populaţie se extrage câte o selecţie de volume $n_1 = 36$, $n_2 = 64$, să se calculeze $P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 0{,}8)$.

Rezolvare

Ştiind că diferenţa mediilor de selecţie $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ este o v.a. repartizată $N\left(0, \sqrt{\dfrac{263}{3\cdot 64}}\right)$, avem

$$P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 0{,}8) = 1 - P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \le 0{,}8) = 1 - 2\Phi\left(\frac{0{,}8}{\sqrt{\frac{263}{3\cdot 64}}}\right) =$$

$$= 1 - 2\Phi(0{,}68) = 1\ \ 2\cdot 0{,}25175 = 0{,}4965.$$

6.2 Estimare punctuală

1. Se dau următorii estimatori ai mediei m a unei populații

$$T_1 = \frac{3X_1 + X_2 + ... + X_{n-1} - X_n}{n},\ T_2 = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

a) Să se stabilească dacă sunt nedeplasați.

b) Care dintre ei se va alege pentru a estima pe n?

c) Ce alte calități au cei doi estimatori?

d) Presupunând că dispersia populației este 90, să se determine volumul minim de selecție astfel încât dispersia estimatorului ales la punctul **b)** să nu depășească valoarea 10.

Rezolvare

a) Se calculează mediile celor doi estimatori:

$$M(T_1) = \frac{1}{n}[3M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_{n-1}) - M(X_n)] = \frac{1}{n}[3m + (n-2)m - m] = m$$

$$M(T_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) = m,$$

deci ambii estimatori sunt deplasați.

b) Dispersiile estimatorilor sunt:

$$D(T_1) = \frac{n+8}{n^2}D(X);\ D(T_2) = \frac{1}{n}D(X),$$

unde $D(X)$ este dispersia v.a. teoretice.

Cum $D(T_2) < D(T_1)$, se va alege estimatorul T_2.

c) T_1 și T_2 sunt estimatori absolut corecți și consistenți.

d) Se obține inegalitatea

$$\frac{90}{n} \leq 10,$$

din care volumul minim al selecției este 9.

2. Arătați că estimatorul nedeplasat de dispersie minimă este unic.

Rezolvare

Fie T_1 și T_2 estimatori nedeplasați distincți pentru θ, fiecare având dispersia D și $T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}$.

Deoarece $M(T_3) = \theta$, rezultă că T_3 este, de asemenea, un estimator nedeplasat pentru θ.

Avem: $D(T_3) = \frac{1}{4}[D(T_1) + D(T_2) + 2\operatorname{cov}(T_1, T_2)] = \frac{D + \operatorname{cov}(T_1 + T_2)}{2}$.

Conform inegalității lui Schwarz,

$$\operatorname{cov}(T_1 + T_2) = \int ... \int (t_1 - \theta)(t_2 - \theta)\, P\, dx_1\, dx_2 ... dx_n \leq$$

$$\leq \left[\int ... \int (t_1 - \theta)^2 P\, dx_1 ... dx_n \cdot \int ... \int (t_2 - \theta)^2 P\, dx_1 ... dx_n\right]^{\frac{1}{2}} = [D(T_1) \cdot D(T_2)]^{\frac{1}{2}} = D.$$

Urmează că:

$$D(T_3) \leq D,$$

ceea ce contrazice faptul că T_1 şi T_2 au dispersie minimă în afara cazului când are loc egalitatea, adică atunci când:

$$\text{cov}\,(T_1, T_2) = k(t)\,D.$$

Pe de altă parte, $k(t) = 1$ deoarece trebuie să avem $D(T_3) = D$.

Deci $(T_1 - \theta) = (T_2 - \theta)$ şi, prin urmare,

$$T_1 = T_2.$$

3. Fie T_1 şi T_2 doi estimatori ai parametrului θ, nedeplasaţi şi de dispersii V_1, respectiv V_2. Considerăm estimatorul

$$T_3 = cT_1 + (1-c)T_2.$$

a) Arătaţi că estimatorul T_3 este nedeplasat.

b) Determinaţi constanta c pentru care T_3 are dispersia minimă.

c) Dacă ipotezele teoremei Rao-Cramer sunt verificate, este posibil ca ambii estimatori T_1 şi T_2 să fie eficienţi?

Rezolvare

a) $M(T_3) = cM(T_1) + (1-c)M(T_2) = c\theta + (1-c)\theta = \theta.$

b) Notăm $V_3 = D(T_3)$. Avem:

$$V_3 = c^2V_1 + (1-c)^2V_2.$$

Calculăm minimul funcţiei $V_3(c)$:

$$\frac{dV_3}{dc} = 2cV_1 - 2(1-c)V_2 = 0 \Rightarrow c = \frac{V_2}{V_1+V_2}.$$

$$\frac{d^2V_3}{dc^2} = 2V_1 + 2V_2 > 0$$

Deci V_3 este minimă pentru $c = \dfrac{V_2}{V_1+V_2}$ şi are expresia:

$$V_3 = \frac{V_1V_2}{V_1+V_2}.$$

c) Presupunem că T_1 şi T_2 sunt ambii eficienţi. Avem deci:

$$V_1 = \frac{1}{nI(\theta)} = V_2.$$

Atunci $V_3 = \dfrac{V_1^2}{2V_1} = \dfrac{V_1}{2} < \dfrac{1}{nI(\theta)}$, ceea ce contrazice teorema Rao-Cramer.

Deci T_1 şi T_2 nu pot fi simultan eficienţi.

4. Se consideră o selecţie de volum n extrasă dintr-o populaţie care are dispersie finită şi

$$M(X) = a\theta + b,\ \theta \in \mathbf{R},\ a \neq 0.$$

Propuneţi un estimator nedeplasat pentru θ şi verificaţi dacă este consistent.

Rezolvare

Se ştie că $\overline{X}$ este un estimator nedeplasat al mediei teoretice. Atunci se propune un estimator al lui θ de forma

$$T_n = c\overline{X} + d,\ c, d \in \mathbf{R},$$

care, pentru a fi nedeplasat, trebuie să îndeplinească condiţia

$$M(T_n) = cM(\overline{X}) + d = ac\theta + bc + d = \theta.$$

De aici rezultă că $c = \frac{1}{a}$ şi $d = -\frac{b}{a}$, adică

$$T_n = \frac{\overline{X} - b}{a}.$$

Condiţia suficientă ca T_n să fie estimator consistent este ca

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} M(T_n) = \theta \\ \lim\limits_{n\to\infty} D(T_n) = 0 \end{cases}.$$

Calculăm

$$D(T_n) = \frac{1}{a^2}D(\overline{X}) = \frac{1}{a^2 n}D(X).$$

Deci T_n este consistent.

5. O selecţie de volum $n = 41$ a dat estimaţia deplasată $\hat{\sigma}^2 = 3$ a dispersiei teoretice σ^2. Să se determine o estimaţie nedeplasată a dispersiei σ^2.

Rezolvare

Dacă selecţia este $\{X_1, ..., X_n\}$, atunci $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$ este estimator deplsat al dispersiei populaţiei

$$M(\hat{\sigma}^2) = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n}M\left[\sum_{k=1}^{n}\left((X_k - m) - (\overline{X} - m)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}M\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 - 2(\overline{X} - m)\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) + n(\overline{X} - m)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}M\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 - n(\overline{X} - m)^2\right] = \frac{n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Estimatorul nedeplsat al dispersiei va fi

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2.$$

Pentru $n = 41$ şi $\hat{\sigma}^2 = 3$, obţinem:

$$s^2 = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3{,}075.$$

6. Se consideră o selecţie bernoulliană de volum n extrasă dintr-o populaţie X cu densitatea de probabilitate

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}, & x \geq \beta \\ 0, & x < \alpha \end{cases}, \alpha, \beta > 0.$$

Să se determine:

a) estimatorul de maximă verosimilitate al lui β dacă se cunoaşte α;

b) estimatorul de maximă verosimilitate al lui α dacă se cunoaşte β.

Rezolvare

Funcţia de verosimilitate este

$$L(x_1, \dots, x_n; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha^{n\beta} \cdot \beta^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\beta-1}, & x_1,\dots,x_n \geq \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta} = n\ln\alpha + \dfrac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0, \beta > 0$

de unde

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum \ln x_i - n\ln\alpha}$$

pentru că $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} < 0, \ \forall\, \beta > 0.$

b) Avem $\dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = n\beta\alpha^{n\beta-1}\left[\beta^{n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-\beta-1}\right] > 0, \min x_i \geq \alpha > 0,$

deci funcţia de verosimilitate este crescătoare. Atunci punctul de maxim absolut pe domeniul lui α este atins în limita superioară a domeniului, deci

$\hat{\alpha} = \min x_i.$

7. Se dă densitatea de probabilitate

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{4}, & 0 \le x < 1 \\ 1 - \frac{\theta}{2}, & 1 \le x < 2, \ 0 < \theta < 2. \\ \frac{\theta}{4}, & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

a) Să se găsească estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ pe baza selecției $\{2{,}5;\ 1{,}5;\ 0{,}5;\ 2{,}8\}$.

b) Presupunând că s-a extras o selecție de volum n care are k_1 valori în intervalul $[0, 1)$, k_2 valori în intervalul $[1, 2)$ și restul în $[2, 3)$, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

Rezolvare

a) Pentru selecția realizată funcția de verosimilitate este

$$L(x_1, \ldots, x_4; \theta) = \left(\frac{\theta}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{\theta}{2}\right), \ 0 < \theta < 2,$$

pentru care ecuația de verosimilitate este

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{6 - 4\theta}{\theta(2-\theta)} = 0,$$

cu soluția $\theta = \frac{3}{2}$. Cum

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{3}{\theta^2} - \frac{1}{(2-\theta)^2}, \ 0 < \theta < 2,$$

rezultă că $\hat{\theta} = \frac{3}{2}$

este estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

b) Funcția de verosimilitate corespunzătoare selecției considerate este

$$L(x_1 .. x_4; \theta) = \left(\frac{\theta}{4}\right)^{k_1} \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{\theta}{4}\right)^{n-k_1-k_2} = \left(\frac{\theta}{4}\right)^{n-k_2} \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{k_2}, \ 0 < \theta < 2.$$

Atunci $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n-k_2}{\theta} - \frac{k_2}{2-\theta} = 0$

are soluția $\hat{\theta} = \frac{2}{n}(n - k_2)$,

care este estimator de maximă verosimilitate a lui θ pentru că $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0,\ 0 < \theta < 2.$

8. O populaţie statistică x are densitatea de probabilitate

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta(1+x)^{-\theta-1}, & x \geq 0,\ \theta > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Se ştie că θ poate lua numai valorile 2, 3, 4. Fie $x_1 = 0{,}2$ şi $x_2 = 0{,}8$ o realizare a unei selecţii extrase din X.

Pe baza datelor observate, care dintre cele trei valori admisibile pentru θ este estimator de maximă verosimilitate? Justificaţi răspunsul.

Rezolvare

Pentru selecţia dată funcţia de verosimilitate este

$$L(x_1, x_2; \theta) = \theta^2 \cdot (1{,}2 \cdot 1{,}8)^{-\theta-1},$$

ale cărei valori pentru $\theta = 2, 3, 4$ sunt

$$L(x_1, x_2; 2) = 4 \cdot 2{,}16^{-3} = 0{,}397$$
$$L(x_1, x_2; 3) = 9 \cdot 2{,}16^{-4} = 0{,}413$$
$$L(x_1, x_2; 4) = 16 \cdot 2{,}16^{-5} = 0{,}340$$

Estimatorul de maximă verosimilitate este deci $\hat{\theta} = 3$, funcţia $L(x_1, x_2; \theta)$ având valoarea maximă.

9. Să se găsească estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ pe baza a n observaţii pentru funcţia de frecvenţă

$$f(x,\theta) = (1+\theta)x^\theta,\ \theta > 0,\ 0 \leq x \leq 1$$

Rezolvare

Probabilitatea obţinerii valorilor $(x_1, x_2, ..., x_n)$ este

$$P(x_1, ..., x_n; \theta) = (1+\theta)^n \prod_1^n x_i^\theta$$

$$\ln P(x_1, ..., x_n; \theta) = n \ln(1+\theta) + \theta \sum_{k=1}^n \ln x_i .$$

Ecuaţia de maximă verosimilitate va fi

$$\frac{\partial \ln P(x_1, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{1+\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

Deci $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1.$

10. Fie variabila aleatoare X cu funcţia de probabilitate

$$p(x,\theta) = \frac{\theta^x}{(1+\theta)^{1+x}},\ \theta > 0,\ x = 0, 1, 2, ...$$

a) Să se determine funcţia caracteristică $\varphi_X(t)$ şi să se calculeze cu ajutorul ei $M(X)$ şi $D(X)$.

b) Să se estimeze parametrul θ pe baza unei selecţii aleatoare $\{X_1, ..., X_n\}$ din populaţia de caracteristică X.

c) Să se arate că estimatorul obţinut la punctul precedent este nedeplasat, consistent şi eficient.

Rezolvare

a) $\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{\theta^x}{(1+\theta)^{x+1}} = \frac{1}{1+\theta}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\theta e^{it}}{1+\theta}\right)^x = \frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{1}{1-\frac{\theta e^{it}}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta(1-e^{it})}$,

deoarece $\left|\frac{\theta e^{it}}{1+\theta}\right| < 1$

$$M(X) = \frac{\varphi_x'(0)}{i} = \theta$$

$$M(X^2) = \frac{\varphi_x''(0)}{i^2} = 2\theta^2 + \theta.$$

Prin urmare, $D(X) = 2\theta^2 + \theta - \theta^2 = \theta(1+\theta)$.

b) Aplicând metoda momentelor, obţinem:

$$\hat{\theta} = \overline{X}.$$

c) $M(\hat{\theta}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) = \frac{nM(X)}{n} = M(X) = \theta.$

Deci $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

$$D(\hat{\theta}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{nD(X)}{n^2} = \frac{D(X)}{n} = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Rezultă că $\hat{\theta}$ este consistent, deoarece avem:

$1 - \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} \le P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) \le 1$, de unde:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

Să arătăm că $\hat{\theta}$ este eficient. Avem:

$I_n(\theta) = -nM\left(\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right) M\left[\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right]^2$ şi $D(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}$.

Arătăm că $D(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_n(\theta)}$.

$$\ln p(x;\theta) = x\ln\theta - (1+x)\ln(1+\theta).$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1+x}{(1+\theta)^2}$$

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{1}{\theta(1+\theta)}$$

Atunci $I_n(\theta) = \dfrac{n}{\theta(1+\theta)}$.

Deci, estimatorul $\hat{\theta}$ este eficient.

11. Fie X o v.a. cu densitatea

$$f(x, \theta) = \frac{A}{x^{\frac{\theta+1}{\theta}}}, x \geq 1, \theta > 0$$

şi să considerăm o selecţie aleatoare $\{X_1, ..., X_n\}$ din populaţia de caracteristică X.

a) Să se determine A în funcţie de θ.

b) Să se afle estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ şi să se studie proprietăţile acestuia.

Rezolvare

a) Pentru ca f să fie o densitate, trebuie ca $f \geq 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

În cazul nostru, avem:

$$\int_1^{\infty} f(x,\theta)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{A}{x^{\frac{\theta+1}{\theta}}}\,dx = 1$$

$$A\left(-\frac{\theta}{x^{\frac{1}{\theta}}}\right)\Bigg|_1^{+\infty} \Leftrightarrow A\theta = 1$$

Rezultă deci $A = \dfrac{1}{\theta}$ şi $f(x, \theta) = \dfrac{1}{\theta x^{\frac{\theta+1}{\theta}}}$.

b) $L(x_1, ..., x_n, \theta) = \dfrac{1}{\theta^n} \cdot \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{\theta+1}{\theta}}}$.

$$\ln L = -n \ln \theta - \frac{\theta+1}{\theta} \sum_{k=1}^{n} \ln x_k$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{k=1}^{n} \ln x_k = \frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln x_k - n\theta\right)$$

Rezultă $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln x_k$.

$$M(\hat{\theta}) = M(\ln X) = \int_1^{\infty} \ln x f(x, \theta)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\theta \cdot x^{\frac{\theta+1}{\theta}}}\, dx =$$

$$= \left(-x^{-\frac{1}{\theta}} \ln x\right)\Bigg|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} x^{-1-\frac{1}{\theta}}\, dx = \left[-\frac{\theta}{x^{\frac{1}{\theta}}}\right]\Bigg|_1^{+\infty} = \theta.$$

Deci $\hat{\theta}$ este nedeplasat. Analog se obţine $M(\ln^2 X) = 2\theta^2$ şi rezultă

$$D(\hat{\theta}) = \frac{D(\ln X)}{n} = \frac{2\theta^2 - \theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Aceasta implică $\hat{\theta}$ consistent.

Studiem eficienţa estimatorului $\hat{\theta}$. Avem:

$$I_n(\theta) = M\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} n M(\ln X) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}.$$

Obţinem că $D(\hat{\theta}) = -\frac{1}{I_n(\theta)}$ adică estimatorul $\hat{\theta}$ este şi eficient.

12. În urma măsurătorilor efectuate pe 9 loturi s-au determinat producţiile medii la ha pentru o anumită cultură ca fiind: 10,28; 10,27; 10,29; 10,28; 10,29; 10,28; 10,26; 10,29; 10,28. Ştiind că producţia la ha este o v. a. normală, să se estimeze prin metoda momentelor producţia medie m şi dispersia σ^2. Să se afle calităţile estimatorilor şi să se determine valorile lor folosind selecţia dată.

Rezolvare

Se ştie că pentru o v. a. $N(m, \sigma)$ avem

$$M(X) = m,\ M_2(X) = \sigma^2 + m^2.$$

iar momentele de selecţie corespunzătoare sunt

$$m_1^* = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i;\ m_2^* = \frac{1}{n}\sum X_i^2.$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} m^* = \overline{X} \\ \sigma^2 + m^2 = m_2^* \end{cases}$$

din care rezultă soluţia

$$\hat{m} = \overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = m_2^* - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \overline{X})^2 = S^2,$$

adică media de selecţie şi dispersia de selecţie sunt estimatorii mediei şi, respectiv, ai dispersiei teoretice.

Pentru a afla calitățile estimatorului $\overline{X}$ este necesar să determinăm:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum M(X_i) = \frac{1}{n}nm = m$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Din aceste relații rezultă că $\overline{X}$ este un estimator absolut corect, deci și consistent al mediei teoretice.

Pentru a verifica dacă este eficient, se determină cantitatea de informație

$$I(m) = -nM\left(\frac{\partial^2}{\partial m^2}\ln f(x;m,\sigma)\right) = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Se vede că $D(\overline{X}) = \frac{1}{I(m)}$, deci $\overline{X}$ este estimator eficient.

Pentru estimatorul S^2 al dispersiei teoretice avem

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2;\ D(S^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

Rezultă că S^2 este un estimator corect al lui σ^2 care satisface condițiile suficiente: $\lim\limits_{n\to\infty} M(S^2) = \sigma^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} D(S^2) = 0$, deci este și consistent.

Cu datele de selecție se obțin:

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
10,28	0	0
10,27	-0,01	0,0001
10,29	0,01	0,0001
10,20	0	0
10,29	0,01	0,0001

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
10,28	0	0
10,26	-0,02	0,0004
10,29	0,01	0,0001
10,28	0	0
92,52		0,0008

$$\overline{x} = \frac{92,52}{9} = 10,28;\ S^2 = \frac{0,0008}{9} \doteq 0,00009$$

13. Să se estimeze, prin metoda verosimilității maxime, parametrii m și σ^2 ai repartiției normale:

$$f(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbf{R},\ m \in \mathbf{R},\ \sigma > 0.$$

Rezolvare

Scriem funcția de verosimilitate:

$$L(x_1, ..., x_n, m, \sigma^2) = (2\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-m)^2}$$

Considerăm logaritmul său natural:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 .$$

Sistemul ecuaţiilor de verosimilitate este:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial m} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - m) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial(\sigma^2)} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 = 0 \end{cases}$$

Obţinem $\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ şi $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{m})^2$.

Să arătăm că ($\hat{m}$, $\hat{\sigma}^2$) este un punct de maxim al funcţiei de verosimilitate. Avem:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m \cdot \partial(\sigma^2)} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)\cdot\partial m} = -\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2}{(\sigma^2)^2} .$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial m \cdot \partial(\sigma^2)} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial m \cdot \partial(\sigma^2)} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{n^2}{2(\sigma^2)^2} - \frac{\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2\right]}{(\sigma^2)^4} .$$

Înlocuind în expresia precedentă parametrii m şi σ^2 cu estimaţiile lor, obţinem:

$$\Delta = \frac{n^5}{2\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{m})^2\right]^3} > 0.$$

Prin urmare, ($\hat{m}$, $\hat{\sigma}^2$) este maximul funcţiei de verosimilitate.

14. Repartiţia timpului de funcţionare a unui tip de lampă electronică este caracterizată de densitatea

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \lambda > 0.$$

a) Să se estimeze prin metoda verosimilităţii maxime parametrul λ folosind o selecţie $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

b) Să se estimeze prin metoda momentelor.

c) Să se determine calităţile estimatorului.

Rezolvare

a) Funcţia de verosimilitate este

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum x_i}$$

şi ecuaţia de verosimilitate este:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum x_i = 0,$$

de unde estimatorul de maximă verosimilitate (soluţia acestei ecuaţii pentru care $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}$ este pozitivă şi apoi negativă) este

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

b) Prin metoda momentelor se obţine ecuaţia

$$M(X) = \bar{X}$$

unde $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \lambda.$

Deci $\hat{\lambda} = \bar{X}$

adică prin ambele metode s-a obţinut că media de selecţie este estimatorul parametrului λ.

c) Se determină dispersia teoretică.

$$D(X) = M_2(X) - M^2(X) = \lambda^2.$$

Atunci

$$M(\hat{\lambda}) = M\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum M(X_i) = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$$

$$D(\hat{\lambda}) = D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \frac{1}{n^2} n\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{n} \to 0$$

deci $\bar{X}$ este estimator absolut corect, prin urmare şi consistent al parametrului λ.

Cantitatea de informaţie este:

$$I(\lambda) = -nM\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2X}{\lambda^3}\right) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Rezultă că $\bar{X}$ este şi estimator eficient al lui λ.

15. Să se estimeze parametrul λ al următoarelor repartiţii, folosind o selecţie x_1, x_2, ..., x_n:

a) $f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, ...; \lambda > 0$

b) $f(x;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda}}e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$, $x \in \mathbf{R}; \lambda > 0$.

c) $f(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}$, $x > 0; \lambda > 0; \alpha > 0$ cunoscut.

Să se afle calităţile estimatorilor.

Rezolvare

a) Prin metoda verosimilităţii maxime avem

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda) = e^{n\lambda}\frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1!\cdot x_2!\cdot ...\cdot x_n!}.$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0$$

deci $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum X_i = \overline{X}$

pentru că $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} < 0, \forall \lambda > 0$.

Repartiţia punctului *a)* este repartiţia Poisson pentru care se ştie că

$$M(X) = \lambda; D(X) = \lambda.$$

Atunci $M(\hat{\lambda}) = M\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda$

$$D(\hat{\lambda}) = D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \frac{\lambda}{n} \to 0$$

deci $\overline{X}$ este estimator absolut corect, prin urmare şi consistent al parametrului λ.

Cantitatea de informaţie este:

$$I(\lambda) = -nM\left(-\frac{X}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{D(\hat{\lambda})}.$$

Rezultă că $\overline{X}$ este un estimator absolut corect, consistent şi eficient al lui λ din repartiţia Poisson.

b) Se observă că $f(x;\lambda)$ este o repartiţie normală $N(0, \sqrt{\lambda})$. Folosim metoda verosimilităţii maxime:

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\lambda}\sum x_i^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum x_i^2 = 0$$

de unde $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

care reprezintă momentul de selecție de ordinul doi.

c) Repartiția $f(x; \lambda)$ este o repartiție Gama. Prin metoda verosimilității maxime avem

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda) = \frac{1}{\lambda^{n\alpha}[\Gamma(\alpha)]^n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n\alpha}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Cum $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}$ este pozitivă și apoi negativă la stânga, respectiv la dreapta soluției acestei ecuații, rezultă că estimatorul de maximă verosimilitate al lui λ este

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\alpha}\bar{X}.$$

Pentru a afla calitățile acestui estimator folosim următoarele rezultate

$$M(X) = \frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx = \alpha\lambda.$$

și $\quad D(X) = \lambda^2\alpha(\alpha + 1) - \lambda^2\alpha^2 = \alpha\lambda^2.$

Atunci

$$M(\hat{\lambda}) = \lambda, D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{\alpha n}$$

iar cantitatea de informație este

$$I(\lambda) = \frac{\alpha n}{\lambda^2}.$$

Deci estimatorul $\hat{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\bar{X}$ este un estimator absolut corect, consistent și eficient.

16. Să se estimeze parametrul p al următoarei repartiții:

$$f(x; p) = p^x(1-p)^{1-x}; x = 0, 1; 0 \le p \le 1$$

folosindu-se o selecție $x_1, x_2, ..., x_n$. Caz particular

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 0; x_5 = 1; x_6 = 1.$$

Rezolvare

Se folosește metoda verosimilității maxime

$$L(x_1, ..., x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} = 0$$

Atunci $\left(\frac{\partial \ln L}{\partial p} > 0 \text{ pentru } p < \hat{p} \text{ și } \frac{\partial \ln L}{\partial p} < 0 \text{ pentru } p > \hat{p}\right)$ estimatorul de maximă

erosimilitate este $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum X_i = \overline{X}$.

Pentru a afla calitățile estimatorului se calculează

$$M(\hat{p}) = M\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}np = p$$

$$D(\hat{p}) = D\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$I(p) = -nM\left(-\frac{X}{\lambda^2} - \frac{1-X}{(1-p)^2}\right) = \frac{n}{p(1-p)}.$$

Așadar $\hat{p} = \overline{X}$ este estimator absolut corect, consistent și eficient.

Caz particular: $\overline{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

17. Să se determine estimatorul parametrului p al repartiției binomiale $Bi(m; p)$, $m \in N$

$$f(x; p) = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, x = 0, 1, \ldots, m; p > 0$$

folosind o selecție $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se afle calitățile estimatorului.

Rezolvare

Se determină:

$$L(x_1, \ldots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = \left(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}\right) \cdot p^{\sum x_i}(1-p)^{mn-\sum x_i}.$$

Atunci

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{mn - \sum x_i}{1-p} = 0,$$

de unde (cu aceleași considerații ca în exercițiul precedent) estimatorul de maximă verosimilitate al lui p este

$$\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum X_i = \frac{\overline{X}}{m}.$$

Pentru repartiția binomială $B(n, p)$ se știe că

$M(X) = mp$; $D(X) = mp(1-p)$.

Atunci

$$M(\hat{p}) = M\left(\frac{1}{mn}\sum x_i\right) = \frac{1}{mn}\sum M(x_i) = \frac{1}{mn} mnp = p$$

$$D(\hat{p}) = D\left(\frac{1}{mn}\sum x_i\right) = \frac{1}{m^2n^2}\sum D(x_i) = \frac{1}{m^2n^2} mnp(1-p) = \frac{p(1-p)}{mn},$$

iar $I(p) = -nM\left(-\frac{x}{p^2} - \frac{m-x}{(1-p)^2}\right) = \frac{mn}{p(1-p)}$.

Deci $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$ este un estimator absolut corect, consistent şi eficient al parametrului p.

18. Să se estimeze prin metoda momentelor parametrii α şi β ai repartiţiei

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, x > 0, \alpha, \beta > 0$$

cu ajutorul unei selecţii $x_1, x_2, ..., x_n$.

Rezolvare

Pentru repartiţia gama se ştie că: $M(X) = \alpha\beta$; $M_2(X) = \alpha(\alpha+1)\beta^2$.

Atunci se obţin ecuaţiile

$$\begin{cases} \alpha\beta = \overline{X} = m_1^* \\ \alpha(\alpha+1)\beta^2 = m_2^* \end{cases}, \text{ cu soluţia } \begin{cases} \hat{\alpha} = \dfrac{m_1^{*2}}{m_2^* - m_1^{*2}} = \dfrac{\overline{X}}{S^2} \\ \hat{\beta} = \dfrac{S^2}{\overline{X}} \end{cases}$$

19. Folosind metoda momentelor, să se estimeze parametrii α şi β ai repartiţiei Beta cu densitatea:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, x \in (0, 1), \alpha, \beta > 0.$$

Rezolvare

Calculăm mai întâi media şi dispersia unei variabile aleatoare cu repartiţie Beta(α, β):

$$M(X) = \int_0^1 x f(x, \alpha, \beta)\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$M(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha+2, \beta) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

Rezultă $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Sistemul care ne dă estimaţiile $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ale parametrilor α şi β este următorul:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \overline{X} \\ \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = S^2 \end{cases}.$$

Obţinem: $\hat{\alpha} = \dfrac{\overline{X}^2(1-\overline{X}) - S^2\overline{X}}{S^2}$; $\hat{\beta} = \dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})^2 - S^2(1-\overline{X})}{S^2}$.

20. Fie $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecție aleatoare asupra variabilei X repartizată normal, cu media θ și dispersia $\theta(1-\theta)$, unde θ este un parametru necunoscut, $\theta \in (0, 1)$.

a) Să se arate că estimatorii parametrului θ

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ și } \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

sunt nedeplasați și consistenți.

b) Care dintre cei doi estimatori va fi preferat?

Rezolvare

a) $M(\hat{\theta}_1) = M(X) = \theta$; $M(\hat{\theta}_2) = M(X^2) = D(X) + M^2(X) = \theta$.

Rezultă deci că ambii estimatori sunt nedeplasați.

Pentru a demonstra consistența este suficient să arătăm că dispersiile celor doi estimatori tind către 0 când $n \to \infty$.

Avem: $D(\hat{\theta}_1) = \dfrac{D(X)}{n} = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$D(\hat{\theta}_2) = \frac{D(X^2)}{n} = \frac{2\theta^2(1-\theta^2)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Deci $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ sunt estimatori consistenți ai parametrului θ.

b) Cercetăm care dintre cei doi estimatori are dispersia mai mică. Avem:

$$\frac{D(\hat{\theta}_2)}{D(\hat{\theta}_1)} = 2\theta(1+\theta).$$

Deci $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ pentru $2\theta(1+\theta) > 1$, adică alegerea depinde de parametrul θ.

În concluzie, parametrul θ fiind necunoscut, nu putem decide care dintre estimatorii $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ va fi preferat.

21. Considerăm o populație Poisson de parametru $\theta > 0$ și fie $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecție aleatoare din această populație:

$$P(X_k = x) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}, x \in \mathbf{N}, \theta > 0, 1 \le k \le n.$$

a) Determinați doi estimatori nedeplasați $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ ai parametrului θ folosind metoda momentelor.

b) Comparați cei doi estimatori $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$.

c) Este vreunul dintre ei estimator eficient?

Rezolvare

a) Deoarece în cazul repartiției Poisson avem $M(X) = D(X) = \theta$, aplicând metoda momentelor, putem alege:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} X_k;\ \hat{\theta}_2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2.$$

Avem: $M(\hat{\theta}_1) = M(\overline{X}) = M(X) = \theta$; $M(\hat{\theta}_2) = M(s^2) = D(X) = \theta$, adică amândoi estimatorii sunt nedeplasați.

b) $D(\hat{\theta}_1) = D(\overline{X}) = \dfrac{D(X)}{n} = \dfrac{\theta}{n}$; $D(\hat{\theta}_2) = D(s^2) = \dfrac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} + \dfrac{2\mu_2^2}{n(n-1)}$,

unde $\mu_2 = D(X) = \theta$; $\mu_4 = M[X - M(X)]^4 = \theta(1 + 3\theta)$.

Deci $D(\hat{\theta}_2) = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\theta^2}{n-1}$.

Rezultă deci că $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, adică $\hat{\theta}_1$ este un estimator mai bun al parametrului θ.

c) Verificăm dacă $\hat{\theta}_1$ este estimatorul de dispersie minimă:

$$\ln P(x, \theta) = x \ln \theta - \ln x! - \theta$$

$$\frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} - 1 = \frac{x - \theta}{\theta};\quad \frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{x}{\theta^2}$$

$$I(\theta) = -nM\left[\frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}.$$

Avem deci $D(\hat{\theta}_1) = \dfrac{\theta}{n} = \dfrac{1}{I(\theta)}$, adică $\hat{\theta}_1$ este estimator eficient al parametrului θ.

22. Variabila aleatoare K reprezintă numărul ieșirilor din funcțiune ale unui dispozitiv electronic și urmează o repartiție Poisson de parametru λ:

$$P(K = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k \in \mathbf{N},\ \lambda > 0.$$

Se verifică opt aparate în componența cărora există acest dispozitiv electronic. Pentru fiecare aparat se înregistrează numărul căderilor în decursul unui an și se obțin rezultatele: 6, 3, 1, 3, 1, 4, 0, 2.

a) Estimați parametrul λ al repartiției Poisson pe baza eșantionului observat.

b) Determinați valoarea k_0 pentru care avem:

$$P(K \leq k_0) = 0{,}95$$

c) Se poate admite că asupra primului aparat au intervenit și alți factori externi mărind numărul defectărilor nejustificat de mult?

d) Dacă eliminăm primul aparat pentru a avea un eșantion mai omogen, care va fi valoarea estimată a parametrului λ?

Rezolvare

a) Aplicăm metoda verosimilității maxime:

$$L(k_1, \ldots, k_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(K = k_i) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \cdot e^{-n\lambda}}{k_1! \ldots k_n!}.$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \ln \lambda - n\lambda - \ln (k_1! \ldots k_n!)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\lambda} - n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \bar{k} = 2{,}5.$$

Deci legea de probabilitate a v.a. K este

$$P(K = k) = \frac{(2{,}5)^k}{k!} e^{-2,5},\ k \in \mathbf{N}.$$

b) Calculăm în următorul tabel câteva valori ale probabilității $P(K = k)$:

Număr de căderi Probabilitatea numărului de căderi

k	$P(K = k)$	$P(K \le k)$
0	0,082	0,082
1	0,205	0,287
2	0,256	0,543
3	0,213	0,756

k	$P(K = k)$	$P(K \le k)$
4	0,133	0,889
5	0,067	0,956
6	0,028	0,984
...	...	...

Din tabelul precedent reiese că $P(K \le 5) = 0{,}956$, adică avem $k_0 = 5$.

c) Numărul căderilor suferite de primul aparat este $6 > k_0$. La un coeficient de încredere 0,95 vom admite că în cazul primul aparat au intervenit factori externi.

d) $\hat{\lambda} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} k_i = 2.$

23. V.a. X este repartizată Poisson de parametru $\theta \ge 0$. Se extrage o selecție de volum 1.

a) Să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului $\tau(\theta) = 1 - e^{-\theta}$.

b) Să se calculeze $M(\hat{\tau})$.

Rezolvare

a) Funcția de verosimilitate pentru selecția considerată este

$$L(x_1; \theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^{x_1}}{x_1!},\ \theta \ge 0,$$

de unde rezultă estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ

$$\hat{\theta} = x_1,$$

deci al lui τ va fi

$$\hat{\tau} = 1 - e^{-\hat{\theta}} = 1 - e^{-x_1}.$$

b) X_1 are aceeași repartiție ca X. Atunci

$$M(\hat{\tau}) = \sum_{x=0}^{\infty} (1 - e^{-x}) e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} = 1 - e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\theta e^{-1})^x}{x!} = 1 - e^{-\theta(1-e^{-1})}.$$

24. Numărul de probe necesar pentru a obține pentru prima dată un „succes" urmează legea de probabilitate geometrică de parametru θ necunoscut:

$$P(X = x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \ldots, 0 < \theta < 1.$$

O selecție extrasă din populația X a furnizat următoarea realizare: $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 1,$ $x_4 = 10$.

a) Să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

b) Dorind să estimăm $g(\theta) = \frac{3}{\theta}$, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate și să se stabilească dacă este corect și consistent.

Rezolvare

a) Funcția de verosimilitate fiind

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i; \theta) = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$$

ecuația de verosimilitate conduce la:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{\sum x_i - n}{1-\theta} = 0,$$

din care soluția este

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Pentru a ne asigura că acesta este punct de maxim, studiem semnul derivatei a doua:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \frac{-\theta^2 \sum x_i + 2n\theta - n}{\theta^2 (1-\theta)^2},$$

care este negativă pentru că $\Delta = n^2(1 - \overline{x}) < 0$.

Așadar $\hat{\theta}$ este estimatorul de maximă verosimilitate.

b) Din proprietatea de invarianță avem că:

$$\overline{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = 3\overline{X}.$$

Este cunoscut faptul că v.a. X are

$$M(X) = \frac{1}{\theta} \text{ și } D(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}.$$

Atunci

$$M(g(\hat{\theta})) = 3M(\overline{X}) = 3M(X) = \frac{3}{\theta} = g(\theta),$$

deci estimatorul este corect, iar

$$D(g(\hat{\theta})) = 9D(\overline{X}) = \frac{9}{n} D(X) = \frac{9}{n} \cdot \frac{1-\theta}{\theta^2},$$

care are limita egală cu 0 pentru $n \to \infty$. Rezultă că estimatorul $g(\hat{\theta})$ este absolut corect, prin urmare și consistent.

25. Fie X o populaţie cu funcţia de probabilitate

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 \le x \le 1,\ \theta > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

a) Pe baza unei selecţii de volum n, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al funcţiei

$$h(\theta) = \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right).$$

b) Presupunând $n=1$, să se arate că estimatorul obţinut la punctul a) este deplasat.

Rezolvare

a) Se determină estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ şi se aplică proprietatea lui de invarianţă. Astfel, funcţia de verosimilitate este

$$L(x, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1},$$

de unde $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \dfrac{n}{\theta} + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = 0,$

cu soluţia $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$

Cum $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\dfrac{n}{\theta^2} < 0$

rezultă că $\hat{\theta}$ este estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

Atunci estimatorul căutat este

$$\overline{h(\theta)} = h(\hat{\theta}) = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

b) Pentru $n = 1$, avem $h(\hat{\theta}) = X_1$, care are aceeaşi distribuţie ca populaţia din care provine. Atunci

$$M(X_1) = M(X) = \int_0^1 \theta x^{\theta}\, dx = \frac{\theta}{\theta+2} \neq \exp\left(-\frac{1}{\theta}\right).$$

26. Durata de viaţă X a unui tip de aparat are densitatea de probabilitate

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x}, & x \geq 0, \theta > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

a) Să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ.

b) Dacă X_1 este o selecţie de volum 1 extrasă din X, estimatorul $T(X_1) = \frac{2}{X_1}$ este nedeplasat pentru θ?

Rezolvare

a) Fie $\{x_1, ..., x_n\}$ realizarea unei selecţii. Atunci funcţia de verosimilitate este

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^{2n} e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i, \ \theta > 0$$

pentru care

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

are soluţia $\overline{\theta} = \frac{2n}{\sum x_i}$.

Cum prima derivată este pozitivă la stânga şi negativă la dreapta lui θ, aceasta va fi abscisa punctului de maxim, deci

$$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{2}{\overline{X}}$$

este estimatorul de maximă verosimilitate.

b) X_1 are aceeaşi densitate de probabilitate ca şi X. Atunci

$$M[T(X_1)] = \int_0^{\infty} \frac{2}{x} \theta^2 x e^{-\theta x}\, dx = 2\,\theta \neq \theta$$

deci $T(X_1)$ este estimator deplasat al lui θ.

27. Se consideră v. a. $X \sim N(m, 1)$. Din această populaţie se extrage o selecţie cu realizarea $\{x_1, ..., x_n\}$ dintre care, printr-o greşală, nu au putut fi înregistrate decâtcele strict pozitive în număr de k, $0 < k < n$. Demonstraţi că estimatorul de maximă verosimilitate al lui m obţinut pe baza informaţiilor disponibile este

$$\hat{m} = -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

unde Φ este funcţia de repartiţie a legii normale normate.

Rezolvare

Cu datele pe care le avem funcţia de verosimilitate este

$$L(m) = [P(X > 0)]^k [P(X \leq 0)]^{n-k}.$$

Pentru v. a. X se ştie că $X - m \sim N(0, 1)$, deci

$$F(x) = P(X < x) = P(X - m < x - m) = \Phi(x - m), \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Atunci

$$L(m) = [1-\Phi(-m)]^k[\Phi(-m)]^{n-k}$$

din care deducem ecuaţia

$$\frac{\partial \ln L(m)}{\partial \Phi(-m)} = -\frac{k}{1-\Phi(-m)} + \frac{n-k}{\Phi(-m)} = 0$$

Se găseşte că

$$\Phi(-m) = \frac{n-k}{n}$$

care conduce la estimatorul propus în enunţ.

28. Fie X o populaţie statistică având densitatea de probabilitate

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0, \theta>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Pe baza unei selecţii de volum n, să se determine:

a) estimatorul de maximă verosimilitate al medianei lui X;

b) are acest estimator proprietatea de a fi nedeplasat şi cea de consistenţă?

Rezolvare

a) Mediana lui X se află din ecuaţia

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}\,dt = 1-e^{-\frac{x}{\theta}} = \frac{1}{2}.$$

Deci $x_{me} = \theta \cdot \ln 2$.

Din ecuaţia de verosimilitate se găseşte estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ

$$\hat{\theta} = \bar{X},$$

iar prin proprietatea de invarianţă a acestui tip de estimator rezultă că

$$\hat{x}_{me} = \hat{\theta}\cdot\ln 2 = \bar{X}\ln 2.$$

b) Se calculează

$$M(\hat{x}_{me}) = \ln 2 \cdot M(\bar{X}) = \theta \ln 2,$$

deci $\hat{x}_{me}$ este un estimator nedeplasat.

Pentru a fi şi consistent condiţia suficientă este ca

$$\lim_{n\to\infty} D(\hat{x}_{me}) = 0.$$

Cum $D(\hat{x}_{me}) = (\ln 2)^2 \cdot D(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}(\ln 2)^2$,

rezultă că $\hat{x}_{me}$ este şi consistent.

29. Fie X o v a. distribuită bernoullian de parametru p şi fie K v. a. ce reprezintă numărul de „succese" dintr-o selecţie de volum n.

a) Să se determine legea de probabilitate a lui K.

b) Considerând estimatorii

$$T' = \frac{K}{n} \text{ şi } T'' = \frac{K+1}{n+1}$$

să se verifice dacă sunt nedeplasaţi şi consistenţi pentru p.

Rezolvare

a) Dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ este o selecţie de volum n, atunci

$$K = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

adică sumă de v. a. bernoulliene, toate de parametru p şi stochastic independente. Legea de probabilitate va fi aşadar binomială

$$P(K = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n, 0 \le p < 1$$

având $M(K) = np, D(K) = np(1-p)$.

b) Verificăm dacă T' şi T'' sunt estimatori nedeplasaţi ai lui p şi obţinem

$$M(T') = \frac{1}{n} M(K) = p$$

$$M(T'') = \frac{1}{n+1}[M(K) + 1] = \frac{np+1}{n+1}.$$

Rezultă că T' este estimator nedeplasat şi cum

$$\lim_{n\to\infty} M(T'') = p$$

T'' va fi estimator asimptotic nedeplasat.

Pentru a verifica dacă ei sunt consistenţi, calculăm:

$$D(T') = \frac{1}{n^2} D(K) = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$D(T'') = \frac{1}{(n+1)^2} D(K) = \frac{np(1-p)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fiind satisfăcute condiţiile suficiente pentru convergenţa în probabilitate a lui T' şi a lui T'' către parametrul p, rezultă că ambii sunt estimatori consistenţi.

30. Dintr-o populaţie caracterizată de v. a. X cu funcţia de probabilitate:

$$p(x; \theta) = C_{15}^{x-5} \theta^{x-5} (1-\theta)^{20-x}, x = 5, ..., 20; 0 < \theta < 1.$$

pe baza unei selecţii de volum n, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

Observând că $X = Y + 5$, unde Y este repartizată binomial $Bi(15, \theta)$, să se verifice dacă estimatorul obţinut este corect şi consistent.

Rezolvare

Fie $(x_1, ..., x_n)$ o realizare a selecției. Atunci funcția de verosimilitate este:

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} C_5^{x_i-5}\right) \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 5n} (1-\theta)^{20n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

iar
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - 5n}{\theta} - \frac{20n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} = 0$$

de unde $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{15} - \frac{1}{3}$.

Deoarece prima derivată este negativă la dreapta și pozitivă la stânga lui $\hat{\theta}$, rezultă că aceasta este abscisa unui punct de maxim.

Cum $Y \sim Bi(15, \theta)$, rezultă că $E(Y) = 15\theta$ și $D(Y) = 15\theta(1-\theta)$.

Atunci $E(X) = 15\theta + 5$ și $D(X) = 15\theta(1-\theta)$. Deci

$$E(\hat{\theta}) = \frac{1}{15}E(\overline{X}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}(15\theta + 5) - \frac{1}{3} = \theta$$

prin urmare $\hat{\theta}$ este estimator nedeplasat al lui θ, iar

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{15^2}D(\overline{X}) = \frac{1}{15^2 n}15\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{15n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

de unde rezultă că $\hat{\theta}$ este și consistent.

31. Fie X o populație statistică având distribuția

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6\theta^2 - 4\theta + 1 & \theta(1-2\theta) & \theta(3-4\theta) \end{pmatrix}, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}.$$

a) Realizarea unei selecții de volum1 este $x_1 = 1$. Care este estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ?

b) Dar dacă realizarea selecției este $x_1 = 0$?

c) În ambele cazuri să se afle estimatorul prin metoda momentelor.

Rezolvare

a) Funcția de verosimilitate este

$$L(x_1; \theta) = \theta(1-2\theta)$$

pentru care

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 1 - 4\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{4}$$

care este abscisa punctului de maxim (parabolă concavă).

Deci estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ este

$$\hat{\theta} = \frac{1}{4}.$$

b) În acest caz

$$L(x_1;\theta) = 6\theta^2 - 4\theta + 1$$

este parabolă concavă, deci $\theta = \frac{1}{3}$ este abscisa punctului de minim. Cum $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$, se observă că $L(0) = 1$ și $L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, deci estimatorul de maximă verosimilitate este $\hat{\theta} = 0$.

c) Valoarea medie a v. a X este

$$M(X) = -10\theta^2 + 7\theta,$$

iar mediile de selecție pentru cazurile a) și b) sunt

$$\overline{x}' = 1, \overline{x}'' = 0.$$

Ecuația corespunzătoare cazului a)

$$10\theta^2 - 7\theta + 1 = 0$$

conduce la soluțiile $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{5}$, care pot fi estimatori ai lui θ, iar ecuația din cazul b)

$$10\theta^2 - 7\theta = 0$$

are doar soluția $\hat{\theta} = 0$ acceptată ca estimator.

32. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei v. a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Arătați că statistica $U = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{1}^{n}\frac{|X_j - \mu|}{n}$ este un estimator nedeplasat pentru σ.

Rezolvare

Fie $Y_j = X_j - \mu$.

Atunci

$$M(U) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}M\left(\sum_{1}^{n}|Y_j|\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}M(|Y_j|)$$

și având în vedere că $Y_j \sim N(0, \sigma^2)$, $1 \le j \le n$, obținem că

$$M(U) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2}\,dt = \frac{1}{2\sigma}2\int_{0}^{\infty}te^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2}\,dt = \sigma.$$

33. Pentru densitatea $f(.;\theta)$ se consideră problema estimării punctuale a funcției $\tau(\theta)$. Statisticile T_1 și T_2 sunt estimatori nedeplasați ai lui $\tau(\theta)$ bazați pe aceeași selecție de volum fixat.

a) Introducând statistica $T_3 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, să se calculeze $M(T_3)$.

b) Să se exprime $D(T_3)$ în funcție de dispersiile și de covarianța lui T_1 și T_2.

c) Presupunând că $D(T_1) = D(T_2) = v$, să se arate că

$$\operatorname{cov}(T_1, T_2) \le v.$$

d) În ipotezele enunțate, să se arate că $D(T_3) \leq v$.

e) Presupunând că T_1 și T_2 sunt estimatori nedeplasați cu dispersie minimă ai lui $\tau(\theta)$, să se exprime $D(T_3)$ numai în funcție de v.

f) Să se exprime cov (T_1, T_2) în funcție de v.

g) Să se calculeze $D(T_1 - T_2)$.

h) Să se calculeze $P(T_1 = T_2)$.

Rezolvare

a) Avem: $M(T_3) = \frac{1}{2}[M(T_1) + M(T_2)] = \tau(\theta)$.

b) $D(T_3) = \frac{1}{4}[D(T_1) + D(T_2) + 2\operatorname{cov}(T_1, T_2)]$.

c) $\operatorname{cov}(T_1, T_2) = M[(T_1 - \tau(\theta))(T_2 - \tau(\theta))] \leq \sqrt{M\left[(T_1 - \tau(\theta))^2\right] \cdot M\left[(T_2 - \tau(\theta))^2\right]} = \theta$, dedusă din inegalitatea lui Schwarz.

d) $D(T_3) \leq \frac{1}{4}(v + v + 2v) = v$.

e) Cum $D(T_1) = D(T_2) = v$ este minimă, avem $D(T_3) \geq v$ și din inegalitatea anterioară se deduce $D(T_3) = v$.

f) Din e) rezultă: $v = \frac{1}{4}[2v + 2\operatorname{cov}(T_1, T_2)]$, de unde $\operatorname{cov}(T_1, T_2) = v$.

g) $D(T_1 - T_2) = D(T_1) + D(T_2) - 2\operatorname{cov}(T_1, T_2) = 0$.

h) Știind că $M(T_1 - T_2) = 0$ și $D(T_1 - T_2) = 0$, rezultă că $P(T_1 - T_2 = 0) = 1$, deci că estimatorul de minimă dispersie a lui $\tau(\theta)$ este unic.

34. Fie f_1 și f_2 două densități de probabilitate și fie $0 \leq \theta \leq 1$ pentru care se notează $f_\theta = \theta f_1 + (1 - \theta)f_2$.

a) Să se arate că f_θ este o densitate de probabilitate.

b) Se presupune că există o constantă k astfel încât $f_1(x) > 0$ numai pentru $x < k$ și $f_2(x) > 0$ numai pentru $x > k$. Fie $X_1, X_2, ..., X_n$ o selecție din populația f_θ. Să se determine estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

Rezolvare

a) Cum $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$, iar $\theta \geq 0$ și $1 - \theta \geq 0$, rezultă că $f_\theta \geq 0$, $\forall\, \theta \in [0, 1]$, iar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)\,dx = \theta \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx + (1 - \theta)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,dx = 1.$$

b) Funcția de verosimilitate este

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n}[\theta f_1(x_i) + (1 - \theta)f_2(x_i)]$$

și se anulează dacă un $x_i = k$, $i = 1, 2, ..., n$.

Pentru toate $x_i \neq k$ se poate scrie

$$L = \prod_{\substack{i=1\\ x_i<k}}^{n} \theta f_1(x_i) \cdot \prod_{\substack{i=1\\ x_i>k}}^{n} (1-\theta) f_2(x_i) = c \cdot \theta^{n_k}(1-\theta)^{n-n_k},$$

unde c este o constantă în raport cu θ, iar n_k este numărul datelor de selecție mai mici decât k. Atunci

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n_k}{\theta} - \frac{n-n_k}{1-\theta}$$

se anulează pentru $\hat{\theta} = \frac{n_k}{n}$ sau

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,\, k)}(x_i).$$

Deci $\hat{\theta}$ este estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ și reprezintă frecvența relativă cu care apar rezultate mai mici decât k, unde

$$I_{(-\infty,\, k)}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i < k \\ 0, & x_i \geq k \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

este funcția indicatoare.

35. Se consideră populația X uniform distribuită pe $[-\theta, \theta]$.

a) Găsiți prin metoda momentelor un estimator $\tilde{T}_n$ pentru θ folosind o selecție de volum n.

b) Determinați estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{T}_n$ pentru θ.

c) Comparați cei doi estimatori când n este mare.

Rezolvare

a) Densitatea de probabilitate a lui X este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & x \in [-\theta, \theta] \\ 0, & x \notin [-\theta, \theta] \end{cases}, \ \theta > 0$$

și $$M(X) = 0,\ M_2(X) = \frac{\theta^2}{3}.$$

Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție extrasă din populația X și momentele inițiale de selecție

$$m_1^* = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i,\ m_2^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i^2$$

Cum $M(X) = 0$, se utilizează momentele de ordin doi

$$M_2(X) = m_2^*,$$

din care se obține

$$\tilde{T}_n = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

b) Funcţia de verosimilitate este

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{(2\theta)^n}\prod_{i=1}^{n} I_{[-\theta,\, \theta]}(x_i).$$

Produsul funcţiilor indicatoare este diferit de 0 dacă toate sunt diferite de 0 şi aceasta se întâmplă dacă toate $x_i \in [-\theta, \theta]$, $i = \overline{1,n}$.

Trebuie deci ca $\min\limits_i x_i \geq \theta$ şi $\max\limits_i x_i \leq \theta$, adică $\max |x_i| \leq \theta$. Atunci

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{(2\theta)^n} I_{[\max|x_i|,\, \infty)}(\theta).$$

Maximul lui L este atins când $\theta = \max |x_i|$. Atunci

$$\hat{T}_n = \max\{|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|\}.$$

c) V.a. X_i^2; $i = 1, ..., n$ sunt independente şi au

$$M(X^2) = \frac{\theta^2}{3}, D(X^2) = \frac{4\theta^4}{45}.$$

Atunci v.a. $Y_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ are $M(Y_{(n)}) = \frac{\theta^2}{3}$ şi $D(Y_{(n)}) = \frac{4\theta^4}{45n}$ şi, conform teoremei limită centrale, v.a.

$$Z_{(n)} = \frac{Y_{(n)} - \frac{\theta^2}{3}}{\frac{2\theta^2}{3}}\sqrt{5n} = \left[\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \theta^2\right]\cdot\frac{\sqrt{5n}}{2\theta^2} = (3Y_{(n)}) - \theta^2)\frac{\sqrt{5n}}{2\theta^2}$$

converge în repartiţie către v.a. $Z \sim N(0, 1)$ sau v.a. $3Y_{(n)} \sim N\left(\theta^2, \frac{2\theta^2}{\sqrt{5n}}\right)$ pentru n suficient de mare.

Pentru a determina distribuţia lui $\tilde{T}_n$ se obţine

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P(\tilde{T}_n \leq t) = P\left(\sqrt{3Y_{(n)}} \leq t\right) = P(3Y_{(n)} \leq t^2) = F_{3Y_{(n)}}(t^2),$$

pentru $t \geq 0$, din care

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = 2t \cdot f_{3Y_{(n)}}(t^2) \cdot I_{[0,\, \infty)}(t) \equiv \sqrt{\frac{5n}{2\pi}}\cdot\frac{t}{\theta^2}\cdot\exp\left[-\frac{5n}{8\theta^4}(t^2 - \theta^2)^2\right]\cdot I_{[0;\, \infty)}(t).$$

Pentru a calcula media şi dispersia lui $\tilde{T}_n$ se poate aplica următoarea teoremă:

Dacă $g(x)$ este o funcţie diferenţiabilă şi dacă X_n şi Y_n sunt v.a. a.î. $Y_n = g(X_n)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} D(X_n) = 0$, atunci

$$M(g(X_n)) = g(M(X_n)) + 0\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$D(g(X_n)) = [g'(x)]^2\Big|_{x=M(X_n)} \cdot D(X_n) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

În cazul nostru, $g(x) = \sqrt{x}$, iar v.a. căreia i se aplică este $3Y_{(n)}$ repartizată asimptotic normal, așa cum am văzut. Atunci

$$M(\tilde{T}_n) = M\left(\sqrt{3Y_{(n)}}\right) \approx \sqrt{M(3Y_{(n)})} \approx \theta$$

$$D(\tilde{T}_n) = D\left(\sqrt{3Y_{(n)}}\right) \approx \frac{1}{4\theta^2} \cdot \frac{4\theta^4}{5n} = \frac{\theta^2}{5n}.$$

Se observă deci că estimatorul $\tilde{T}_n$ este asimptotic corect și consistent.

c) În ceea ce privește estimatorul $\hat{T}_n$, v.a. $|X_i|$, $i = \overline{1,n}$, au densitățile de probabilitate

$$f_{|X|}(x) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\,\theta]}(x)$$

și deci densitatea de probabilitate a lui $\hat{T}_n$ va fi

$$f_{\hat{T}_n}(x) = n[F_{|X|}(x)]^{n-1} \cdot f_{|X|}(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \cdot I_{[0,\,\theta]}(x).$$

Atunci $\quad M(\hat{T}_n) = n\int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

și $\quad D(\hat{T}_n) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \theta^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$

deci și estimatorul $\hat{T}_n$ este asimptotic corect și consistent. Se vede însă că dispersia lui $\hat{T}_n$ este mai mică decât cea a lui $\tilde{T}_n$, prin urmare $\hat{T}_n$ va fi preferat.

36. Fie $\{X_1, ..., X_n\}$ n observații independente asupra variabilei aleatoare X repartizată uniform pe $[0, \theta]$, $\theta > 0$.

a) Determinați estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\theta}$ al parametrului θ.

b) Este $\hat{\theta}$ un estimator nedeplasat?

c) Construiți un estimator nedeplasat $\bar{\theta}$ al parametrului θ pe baza estimatorului de verosimilitate maximă.

d) Calculați dispersia estimatorului $\tilde{\theta}$.

Rezolvare

Fie $f(x)$ densitatea de repartiție a v.a. X:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \theta > 0.$$

a) $L(x_1, ..., x_n; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \le x_k \le \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, k = \overline{1,n}.$

Se observă că funcția de verosimilitate este nulă pentru $0 < \hat{\theta} < \max\{x_k \mid 1 \le k \le n\}$, deci o astfel de valoare a lui θ nu maximizează funcția de verosimilitate. De asemenea, începând de la punctul de abscisă $\theta = \max\{x_k \mid 1 \le k \le n\}$, funcția de verosimilitate este descrescătoare și tinde către 0. Dacă $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ sunt două valori posibile ale lui $\hat{\theta}$ astfel încât

$$\max\{x_k \mid 1 \le k \le n\} \le \hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2,$$

atunci $L(x_1, ..., x_n; \hat{\theta}_1) = \frac{1}{\hat{\theta}_1^n} > \frac{1}{\hat{\theta}_2^n} = L(x_1, ..., x_n; \hat{\theta}_2)$

$$P(\max\{x_k \mid 1 \le k \le n\} > 0) = 1$$

Estimatorul de verosimilitate maximă pntru θ este deci:

$$\hat{\theta} = \max\{X_k \mid 1 \le k \le n\}.$$

b) $P(\hat{\theta} < x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k < x\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k < x) = F^n(x),$

unde F este funcția de repartiție a legii uniforme pe $[0, \theta]$.

Densitatea lui $\hat{\theta}$ este deci

$$nF^{n-1}(x) f(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}, x \in [0, \theta].$$

de aici obținem:

$$M(\hat{\theta}) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta} x^n \, dx = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Rezultă că $\hat{\theta}$ este un estimator deplasat al lui θ, deplasarea fiind

$$\frac{n}{n+1}\theta - \theta = -\frac{\theta}{n+1}.$$

c) Fie $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}$

$$M(\tilde{\theta}) = \frac{n+1}{n} M(\hat{\theta}) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\theta = \theta.$$

deci $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}$ este un estimator nedeplasat al parametrului θ.

d) $D(\tilde{\theta}) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(\hat{\theta})$

$$M_2(\hat{\theta}) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta} x^{n+1} \, dx = \frac{n}{n+2}\theta^2;$$

$$D(\hat{\theta}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2.$$

Rezultă $D(\tilde{\theta}) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$.

37. Fie $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecţia aleatoare dintr-o populaţie cu repartiţie uniformă pe $[\theta, \theta + 1]$. Considerăm statisticile

$Min = \min\{X_i \mid 1 \le i \le n\}$

$Max = \max\{X_i \mid 1 \le i \le n\}$.

a) Să se arate că există o infinitate de estimatori de maximă verosimilitate ai parametrului θ de forma:

$$\hat{\theta}(\alpha) = \alpha(Max - 1) + (1 - \alpha)Min, \; 0 \le \alpha \le 1.$$

b) Să se determine α_0 pentru care $\hat{\theta}(\alpha_0)$ este nedeplasat.

c) Să se calculeze $D[\hat{\theta}(\alpha_0)]$.

d) Să se determine un alt estimator nedeplasat al lui θ prin metoda momentelor şi să se compare cu $\hat{\theta}$.

Rezolvare

a) Avem:

$$f(x_i; \theta) = \begin{cases} 1, & \theta \le x_i \le \theta + 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \begin{cases} 1, & \theta \le Min \le Max \le \theta + 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Funcţia de verosimilitate are deci valoarea constantă 1 pentru $Max - 1 \le \theta \le Min$, deci toate punctele acestui interval maximizează funcţia de verosimilitate.

Există deci o infinitate de estimatori de verosimilitate maximă care se pot exprima ca o combinaţie liniară convexă de capetele intervalului $[Max - 1, Min]$, adică

$$\hat{\theta}(\alpha) = \alpha(Max - 1) + (1 - \alpha)Min, \; 0 \le \alpha \le 1.$$

În cazul $Max - 1 = Min$, obţinem soluţie unică.

b) Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare max este

$$nF^{n-1}(x)\,f(x) = n(x - \theta)^{n-1}, \; \theta \le x \le \theta + 1,$$

iar densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare Min este

$$n[1 - F(x)]^{n-1}f(x) = n[1 - (x - \theta)]^{n-1}, \; \theta \le x \le \theta + 1.$$

$$M(Max) = n\int_{\theta}^{\theta+1} x(x - \theta)^{n-1}\,dx = \theta + \frac{n}{n+1}$$

$$M(Min) = n\int_{\theta}^{\theta+1} x(1 - x + \theta)^{n-1}\,dx = \theta + \frac{1}{n+1}.$$

Obținem deci $M[\hat{\theta}(\alpha)] = \alpha M(Max-1) + (1-\alpha)M(Min) = \theta + \frac{1-2\alpha}{n+1}$, adică $\hat{\theta}$ este nedeplasat pentru $\alpha_0 = \frac{1}{2}$:

$$\hat{\theta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{Max+Min-1}{2}.$$

c) $D\left(\hat{\theta}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}D(Max + Min - 1) = \frac{1}{4}D(Max + Min) =$

$$= \frac{1}{4}[D(Max) + D(Min) + 2\operatorname{cov}(Max, Min)].$$

Avem

$$M(Max^2) = \theta^2 + \frac{2n\theta}{n+1} + \frac{n}{n+1};$$

$$M(Min^2) = \theta^2 + \frac{2}{n+1}\theta + \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Obținem deci $D(Max) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)} = D(Min)$.

$$M(Max \cdot Min) = \iint\limits_{\theta \le u \le v \le \theta+1} uv\, f_{Min\, Max}(u, v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{\theta}^{\theta+1} du \int_{u}^{\theta+1} n(n-1)v(v-u)^{n-2}\, dv =$$

$$= n(n-1)\int_{\theta}^{\theta+1} u\left[\frac{(\theta+1)(\theta+1-u)^{n-1}}{n-1} - \frac{(\theta+1-u)^n}{n(n-1)}\right] du = \frac{1}{n+2} + \theta(\theta+1).$$

$$\operatorname{cov}(Max, Min) = M(Max \cdot Min) - M(Max)\cdot M(Min) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Rezultă deci $D\left[\hat{\theta}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

d) $M(X) = \dfrac{2\theta+1}{2} = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta} = \dfrac{2\bar{X}-1}{2} = \bar{X} - \dfrac{1}{2}$.

Dispersia estimatorului $\tilde{\theta}$ este:

$$D(\tilde{\theta}) = D\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{1}{12n}.$$

e) Pentru $n = 1$ și $n = 2$ cei doi estimatori au dispersiile egale, iar pentru $n \geq 3$ avem

$$D(\hat{\theta}(\alpha_0)) \leq D(\tilde{\theta}),$$

deci vom alege estimatorul $\hat{\theta}(\alpha_0)$.

38. Fie $X_1, X_2, ..., X_n$ variabile aleatoare independente fiecare cu repartiția uniformă pe $[a - b, a + b]$, unde $b > 0$ este cunoscut și $a \in \mathbb{R}$ este necunoscut. Să se găsească estimatorul de maximă verosimilitate pentru a.

Rezolvare

Funcția de verosimilitate este

$$P(x, a) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2b}\right)^n, & \text{dacă } a-b \le x_1, ..., x_n \le a+b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Deci orice a astfel încât $P(x, a) > 0$ este un estimator de maximă verosimilitate. Restricția este

$$a - b \le x_1, ..., x_n \le a + b$$

sau $\quad x_1 - b, ..., x_n - b \le a \le b + x_1, ..., b + x_n$

sau $\quad \max(x_1, ..., x_n) - b \le \hat{a} \le \min(x_1, ..., x_n) + b.$

39. Să se determine un estimator nedeplasat pentru parametrul $e^{-\lambda}$, unde λ este parametrul necunoscut ce apare în densitatea Poisson.

Rezolvare

Fie X v.a. cu repartiția:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, ...$$

și T definit astfel: $T = \begin{cases} 1, & X = 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$.

Avem $\quad M(T) = 1 \cdot P(X = 0) = 1 \cdot \dfrac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda}.$

Prin urmare, T este un estimator nedeplasat pentru $e^{-\lambda}$.

40. a) Dată fiind $f(x, \theta) = \dfrac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$, să se găsească estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ.

b) Se consideră $\lambda = \theta^2$ ca parametru ce trebuie estimat în densitatea de la punctul a). Să se găsească estimatorul de maximă verosimilitate pentru λ și să se compare cu rezultatul de la punctul a).

Rezolvare

Probabilitatea obținerii valorilor $x_1, x_2, ..., x_n$ este

$$P(\theta, x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\theta^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}}$$

Rezultă că $\dfrac{\partial \ln P(\theta, x_1, ..., x_n)}{\partial\theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{\sum x_i^2}{\theta^2}$, de unde $\hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n}}$.

b) Avem $P(\lambda, x_1, ..., x_n) = \dfrac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\lambda}}$

Ecuația de verosimilitate:

$$\frac{\partial \ln P(\lambda, x_1, ..., x_n)}{\partial \lambda} = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{\sum x_i^2}{2\lambda^2} = 0$$

dă cea mai bună estimație a lui λ,

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum x_i^2}{n} = \hat{\theta}^2 .$$

41. Doi prieteni, A și B, joacă „cap și pajură" cu o monedă adusă de A. A primește punct pentru cap și B pentru pajură. La $n = 20$ de aruncări învinge A cu 15 puncte. B se supără, susținând că moneda este trucată, având probabilitatea de a apărea pajura $P(C) = \frac{1}{4}$. Moneda este reținută și ei se prezintă la judecată. Judecătorul, după un anumit număr m de aruncări ale monedei, trebuie să-și formeze o opinie: dacă probabilitatea p ca într-o aruncare să apară pajura este $p_0 = \frac{1}{2}$, atunci A este liber, dacă, însă, este $p_1 = \frac{1}{4}$, atunci A va fi condamnat. Pentru condamnarea lui A, judecătorul trebuie să ajungă să fie convins că $p_1 = \frac{1}{4}$.

a) Pentru fiecare dintre cele două valori ale lui p (p_0 și p_1) să se calculeze probabilitatea de a obține rezultatul de 15 la 5 într-o partidă $n = 20$ aruncări, așa cum au jucat A și B.

b) Pentru v.a. „numărul de apariții ale pajurei în 20 de aruncări", să se determine valoarea medie și abaterea medie pătratică corespunzătoare celor 2 valori ale lui p. În cele m aruncări independente care se vor efectua, judecătorul va nota cu X_i v.a. ce ia valoarea 1 dacă apare pajura și 0 altfel la aruncarea i, $i = \overline{1,m}$.

c) Pentru selecția $(X_1, ..., X_m)$ să se scrie funcția de verosimilitate în termenii parametrului p.

d) Se consideră v.a. $Y_m = \frac{L(X_1...X_m; p_0)}{L(X_1...X_m; p_1)}$. Să se exprime Y_m cu ajutorul unei statistici S_m nedeplasate pentru parametrul p.

e) Fie v.a. $R_m = \frac{1}{m} \ln Y_m$. Să se calculeze media și dispersia lui R_m corespunzătoare valorii $p_0 = \frac{1}{2}$ a parametrului, pe care le vom nota $M_0(R_m)$ și $D_0(R_m)$.

f) Pentru $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ fixați, să se determine $m_0(\varepsilon, \delta)$ astfel încât pentru $m > m_0$

$$P_0[\exp m(M_0(R_m) - \varepsilon) < Y_m < \exp m(M_0(R_m) + \varepsilon)] \geq 1 - \delta,$$

unde P_0 arată că această probabilitate se calculează pentru valoarea $p_0 = \frac{1}{2}$ a parametrului.

g) Să se arate că, pentru $m > m_0(\varepsilon, \delta)$, avem

$$P_0[Y_m \leq \exp m(M_0(R_m) - \varepsilon)] \leq \delta.$$

h) Să se calculeze media și dispersia lui R_m corespunzătoare valorii $p_1 = \frac{1}{4}$ a parametrului p, notate cu $M_1(R_m)$ și $D_1(R_m)$.

i) Pentru $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ fixaţi, să se determine $m_1(\varepsilon, \eta)$ astfel încât pentru $m > m_1$,

$$P_1[\exp m(M_1(R_m) - \varepsilon) < Y_m < \exp m(M_1(R_m) + \varepsilon)] \geq 1 - \eta.$$

j) Să se arate că, pentru $m > m_1(\varepsilon, \eta)$, avem:

$$P_1[Y_m \leq \exp m(M_1(R_m) + \varepsilon)] \geq 1 - \eta.$$

k) Să se determine ε astfel încât

$$\exp m(M_1(R_m) + \varepsilon) = \exp m(M_0(R_m) - \varepsilon).$$

Fie $\bar{\varepsilon}$ valoarea găsită şi $\bar{m}(\delta, \eta) = \max\{m_0(\bar{\varepsilon}, \delta), m_1(\bar{\varepsilon}, \eta)\}$.

Dacă $a = M_1(R_m) + \bar{\varepsilon} = M_0(R_m) - \bar{\varepsilon}$, atunci pentru $m > \bar{m}(\delta, \eta)$

$$P_0\left[Y_m \leq e^{ma}\right] \leq \delta, P_1\left[Y_m \leq e^{ma}\right] \geq 1 - \eta.$$

l) Fie $\delta = 0{,}01$ şi $\eta = 0{,}1$. Să se determine $\bar{m}(\delta, \eta)$.

Judecătorul decide a face $\bar{m}(\delta, \eta)$ probe şi de a-l condamna pe A dacă $Y_m \leq e^{ma}$.

m) Probabilitatea ca judecătorul să-i recunoască vina, în cazul în care A este vinovat, este mai mare sau egală cu ... .

n) Probabilitatea ca el să ceară ca A, nevinovat, să fie pedepsit este mai mică sau egală cu ... .

Rezolvare

a) Fie X numărul de apariţii ale „pajurei" în $n = 20$ de aruncări ale monedei corespunzătoare celor două probabilităţi p_0, p_1, având

$$P_i(X = k) = C_n^k p_i^k (1 - p_i)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n; i = 0, 1.$$

Atunci $P_0(X = 5) = C_{20}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cong 0{,}0148$

$$P_1(X = 5) = C_{20}^5 \cdot \frac{1}{4^5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \cong 0{,}2023$$

b) $M_0(X) = np_0 = 10; M_1(X) = np_1 = 5$

$$D_0(X) = np_0(1 - p_0) = \sqrt{5}; D_1(X) = np_1(1 - p_1) = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

c) $L(x_1, ..., x_m; p) = p^{\sum_{i=1}^{m} x_i} (1 - p)^{m - \sum_{i=1}^{m} x_i} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum x_i} (1 - p)^m.$

d) $Y_m = \left(\frac{p_0}{1 - p_0} \cdot \frac{1 - p_1}{p_1}\right)^{\sum_{i=1}^{m} x_i} \left(\frac{1 - p_0}{1 - p_1}\right)^m = \left(\frac{p_0}{1 - p_0} \cdot \frac{1 - p_1}{p_1}\right)^{m\bar{X}} \left(\frac{1 - p_0}{1 - p_1}\right)^m,$

unde $S_m = \bar{X}$ este o statistică nedeplasată a lui p.

e) $R_m = \ln \frac{1 - p_0}{1 - p_1} + \bar{X} \ln \frac{p_0}{1 - p_0} \cdot \frac{1 - p_1}{p_1}$

$$M_0(R_m) = \ln \frac{1 - p_0}{1 - p_1} + M_0(\bar{X}) \cdot \ln \frac{p_0}{1 - p_0} \cdot \frac{1 - p_1}{p_1} =$$

$$= p_0 \ln \frac{p_0}{p_1} + (1 - p_0) \ln \frac{1 - p_0}{1 - p_1} = \ln \frac{2}{\sqrt{3}} \cong 0{,}1438.$$

$$D_0(R_m) = D_0(\bar{X})\cdot\left[\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^2 = \frac{p_0(1-p_0)}{m}\left[\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^2 = \frac{1}{4m}(\ln 3)^2.$$

f) Se foloseşte inegalitatea Cebîşev:

$$P_0(|R_m - M_0(R_m)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_0(R_m)}{\varepsilon^2},\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Atunci inegalitatea propusă va fi satisfăcută dacă

$$\frac{D_0(R_m)}{\varepsilon^2} \leq \delta,$$

adică $$\frac{p_0(1-p_0)}{m\varepsilon^2}\left[\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^2 \leq \delta,$$

din care se deduce că

$$m \geq \frac{p_0(1-p_0)}{\delta\varepsilon^2}\left[\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^2 = \frac{(\ln 3)^2}{4\delta\varepsilon^2}.$$

Găsim astfel că $m_0(\varepsilon, \delta) \geq \dfrac{0{,}302}{\delta\varepsilon^2}$.

g) $P_0(Y_m \leq \exp m(M_0(R_m) - \varepsilon)] = 1 - P_0[R_m > M_0(R_m) - \varepsilon] \leq 1 - P_0[M_0(R_m) - \varepsilon < R_m <$
$< M_0(R_m) + \varepsilon] \leq 1 - (1 - \delta) = \delta.$

h) $$M_1(R_m) = \ln\frac{1-p_0}{1-p_1} + M_1(\bar{X})\cdot\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1} =$$

$$= p_1\ln\frac{p_0}{p_1} + (1-p_1)\ln\frac{1-p_0}{1-p_1} = -\frac{1}{4}\ln\frac{27}{16} = -0{,}1308$$

$$D_1(R_m) = \frac{p_1(1-p_1)}{m}\left[\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^2 = \frac{3}{16m}(\ln 3)^2.$$

i) Cu aceleaşi calcule de la punctul f) se găseşte că

$$m \geq \frac{p_1(1-p_1)}{\eta\varepsilon^2}\left[\ln\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^2 = \frac{3\ln^2 3}{16\eta\varepsilon^2} \cong \frac{0{,}226}{\varepsilon^2\eta},$$

deci $m_1(\varepsilon, \eta) \geq \dfrac{0{,}226}{\eta\varepsilon^2}$.

j) Se raţionează la fel ca la punctul g).

k) Din ecuaţia dată se obţine:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}[M_0(R_m) - M_1(R_m)] \cong 0{,}1373.$$

l) Pentru valorile date lui δ şi η avem:

$$m_0(\bar{\varepsilon}, \delta) \geq \frac{0{,}302}{0{,}1373^2\cdot 0{,}01} \cong 1609{,}04 \Rightarrow m_0 = 1610$$

$$m_1(\bar{\varepsilon}, \eta) \geq \frac{0{,}226}{0{,}1373^2\cdot 0{,}1} \cong 120{,}4 \Rightarrow m_1 = 121$$

Atunci $\bar{m} = 1610$, $a \cong 0{,}0065$ şi $e^{\bar{m}a} \cong 62706$

m) $P_1(Y_m \le e^{\bar{m}a}) \ge 1-\eta = 0{,}9$

n) $P_0(Y_m \le e^{\bar{m}a}) \le \delta = 0{,}01.$

42. Considerăm v.a. X cu densitatea de repartiție

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \theta > 0$$

și $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecție asupra variabilei X.

a) Să se determine funcția de repartiție F a v.a. X și să se calculeze $M(X)$ și $D(X)$.

b) Să se estimeze parametrul θ prin metoda momentelor pe bază selecției $\{X_1, ..., X_n\}$ și să se cerceteze calitățile estimatorului $\hat{\theta}_1$ astfel obținut.

c) Să se determine funcția de repartiție G_n și densitatea de repartiție g_n ale v.a. $Y_n = \min\{X_i \mid 1 \le i \le n\}$. Să se calculeze $M(Y_n)$ și $D(Y_n)$.

d) Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_2$ al parametrului θ și, pe baza acestuia să se construiască un estimator nedeplasat $\bar{\theta}$.

e) Să se arate că $\bar{\theta}$ este consistent și să se compare cu $\hat{\theta}_1$ obținut la punctul b).

Rezolvare

a) $$F(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ 3\theta^3 \int_\theta^x \dfrac{dt}{t^4}, & x > \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ \theta^3(-t^{-3})\Big|_\theta^x, & x > \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ 1-\dfrac{\theta^3}{x^3}, & x > \theta \end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{l} M(X) = 3\theta^3 \int_\theta^\infty x^{-3}\,dx = \dfrac{3\theta}{2} \\ M(X^2) = 3\theta^3 \int_\theta^\infty x^{-2}\,dx = 3\theta^2 \end{array}\right\} \Rightarrow D(X) = 3\theta^2 - \frac{9\theta^2}{4} = \frac{3}{4}\theta^2.$$

b) $\theta = \dfrac{2M(X)}{3}$

Din metota momentelor, avem $M(X) = \bar{X}$, de unde rezultă

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2\bar{X}}{3}$$

Prin construcție, $\hat{\theta}_1$ este stimator nedeplasat. De asemenea, aplicând legea numerelor mari, rezultă:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \frac{2}{3}M(X) = \theta \text{ când } n \to \infty.$$

Sau $D(\hat{\theta}_1) = \dfrac{4}{9}D(\bar{X}) = \dfrac{4D(X)}{9n} = \dfrac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\hat{\theta}_1 - \theta| < \varepsilon\right) = 1$, adică $\hat{\theta}_1$ este consistent.

c) $P(Y_n \geq t) = P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \geq t)\right\} = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq t) = [1 - F(t, \theta)]^n = \frac{\theta^{3n}}{t^{3n}}$ dacă $t > \theta$.

$$G_n(t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^{3n}, & t > \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$g_n(t) = \begin{cases} 3n \cdot \frac{\theta^{3n}}{t^{3n+1}}, & t > \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$M(Y_n) = 3n\int_0^{\infty} \frac{\theta^{3n}}{t^{3n}}\, dt = 3n\theta^{3n}\left[-\frac{1}{(3n-1)t^{3n-1}}\right]\Bigg|_{\theta}^{\infty} = \frac{3n}{3n-1}\theta$$

$$M(Y_n^2) = 3n\theta^{3n}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3n-1}} = 3n\theta^{3n}\left[-\frac{1}{(3n-2)t^{3n-2}}\right]\Bigg|_{\theta}^{\infty} = \frac{3n}{3n-2}\theta^2$$

$$D(Y_n) = M(Y_n^2) - M^2(Y_n) = \frac{3n}{3n-2}\theta^2 - \frac{9n^2}{(3n-1)^2}\theta^2 = \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}\theta^2.$$

d) $$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \begin{cases} \frac{3n}{\prod_{i=1}^{n} x_i^4}\theta^{3n}, & \min\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Funcția de verosimilitate își atinge maximul pentru

$$\hat{\theta}_2 = \min\{X_i \mid 1 \leq i \leq n\} = Y_n;\ M(\hat{\theta}_2) = M(Y_n) = \frac{3n}{3n-1}\theta.$$

Deci $\hat{\theta}_2$ este un estimator deplasat. Construim estimatorul $\tilde{\theta}$ astfel:

$$\tilde{\theta} = \frac{3n-1}{3n}\hat{\theta}_2 = \frac{3n-1}{3n}\min\{X_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$M(\tilde{\theta}) = \frac{3n-1}{3n}M(\hat{\theta}_2) = \theta$$

e) $$D(\tilde{\theta}) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 D(Y_n) = \frac{\theta^2}{3n(3n-2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Deci $\tilde{\theta}$ este nedeplasat și consistent. De asemenea, avem:

$$\frac{D(\tilde{\theta})}{D(\hat{\theta}_1)} = \frac{1}{3n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

deci, dintre cei doi estimatori $\tilde{\theta}$ și $\hat{\theta}_1$ îl vom prefera pe $\tilde{\theta}$.

6.3. Intervale de încredere

1. Pentru estimarea producţiei unei plante agricole dintr-o regiune, au fost cercetate $n = 100$ loturi de aceeaşi suprafaţă pentru care s-a obţinut $\sum_{i=1}^{100} x_i = 860$. Ştiind că din anii trecuţi $\sigma = 3,5$, să se construiască un interval de încredere pentru media producţiei, dacă selecţia a fost extrasă dintr-o populaţie normală. Coeficientul de încredere este $1 - \alpha = 0,95$.

Rezolvare

Intervalul de încredere pentru medie, în cazul în care σ este cunoscut, este

$$\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

unde $2\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$.

Din tabelele funcţiei Laplace avem $z_\alpha = 1,96$, deci

$$8,6 - 1,96\frac{3,5}{10} < m < 8,6 + 1,96\frac{3,5}{10}$$

sau $\quad 7,914 < m < 9,286.$

2. În condiţiile problemei 12 din paragraful precedent, să se determine un interval de încredere pentru m la un coeficient de încredere $1 - \alpha = 0,95$.

Rezolvare

Deoarece σ este necunoscut, intervalul de încredere pentru m este

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}},$$

unde t_α se obţine din tabelele repartiţiei Student cu $n - 1 = 8$ g.l. ($\alpha = 0,05$), adică $t_\alpha = 2,306$.

Atunci $\quad 10,28 - 2,306\dfrac{0,009}{\sqrt{9}} < m < 10,28 + 2,306\dfrac{0,009}{\sqrt{9}},$

adică $\quad 10,2731 < m < 10,2869.$

3. Rezultatele a 10 măsurători asupra adâncimii brazdelor sunt: 13,2; 13,6; 14,2; 14,7; 15,3; 15,3; 15,4; 15,8; 16,1; 16,4. Să se determine un interval de încredere pentru:
a) media adâncimii; b) dispersia adâncimii, la un coeficient de încredere 0,98.

Rezolvare

a) Se organizează calculele:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
13,2	-1,8	3,24
13,6	–1,4	1,96
14,2	–0,8	0,64
14,7	–0,3	0,09
15,3	0,3	0,09
15,3	0,3	0,09
15,4	0,4	0,16
15,8	0,8	0,64
16,1	1,1	1,21
16,4	1,4	1,96
150		10,8

Deci $\bar{x} = \frac{150}{10} = 15$ şi $s^2 = \frac{10,08}{9} = 1,12$.

a) Intervalul de încredere al lui m (σ necunoscut) se determină folosind repartiţia Student cu $n - 1 = 9$ g.l.. Deci $P(|T| < t_\alpha) = 1 - \alpha$ sau $P(|T| > t_\alpha) = \alpha = 0,02$, de unde $t_\alpha = 2,821$ (din tabele). Atunci:

$$15 - 2,821\sqrt{\frac{1,12}{10}} < m < 15 + 2,821\sqrt{\frac{1,12}{10}},$$

adică $\quad 14,07 < m < 15,93$.

b) Pentru determinarea intrvalului de încredere al lui σ^2 se foloseşte repartiţia χ^2.

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Rightarrow \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1} = 2,088$$

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\, n-1}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Rightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2};\, n-1} = 21,666$$

Atunci $\quad \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\, n-1}} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}},$

adică $\quad \dfrac{10,08}{21,666} < \sigma^2 < \dfrac{10,08}{2,088}$.

4. Producţiile de cereale din două asociaţii se consideră a fi variabile normale cu $\sigma_1 = 3$ şi $\sigma_2 = 4$. S-au efectuat cercetări pe 36 de loturi ale primei asociaţii şi pe 32 de loturi ale celei de a doua şi s-au obţinut $\bar{x}_1 = 1007$ kg/ha şi $\bar{x}_2 = 1002$ kg/ha. Să se determine un interval de încredere pentru diferenţa mediilor celor două producţii, coeficientul de încredere fiind $1 - \alpha = 0,95$.

Rezolvare

Intervalul de încredere este

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < m_1 - m_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},$$

unde $z_\alpha = 1,96$ (determinat din repartiţia normală). Se obţine:

$$1007 - 1002 - 1,96\sqrt{\frac{9}{36} + \frac{16}{32}} < m_1 - m_2 < 1007 - 1002 + 1,96\sqrt{\frac{9}{36} + \frac{16}{32}},$$

adică $\quad 4,31 < m_1 - m_2 < 6,69$.

5. O selecţie aleatoare de volum $n = 16$ dintr-o populaţie normală a dat următoarele valori: 16,16; 12,31; 7,75; 11,38; 9,33; 8,93; 15,55; 6,53; 12,96; 6,02; 3,58; 9,75; 11,49; 10,66; 11,34; 9,47. Să se estimeze media şi dispersia populaţiei prin intervale de încredere 95%.

Rezolvare

Intervalul de încredere pentru m în cazul σ necunoscut este:

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

unde $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})$, iar $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ este cuantila $1-\frac{\alpha}{2}$ a repartiţiei Student cu $n-1$ grade de libertate.

Pentru coeficientul de încredere $1-\alpha = 0,95$ şi 15 grade de libertate, găsim:

$t_{0,975;\,15} = 2,131.$

Calculăm media de selecţie

$$\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{16} x_k = 10,20$$

şi dispersia de selecţie modificată:

$$s^2 = \frac{1}{15}\sum_{k=1}^{16}(x_k - \bar{x})^2 = 2,313.$$

Obţinem intervalul de încredere 95 % pentru m: (8,435; 11,965).

Intervalul de încredere pentru σ^2 este

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

$$\chi^2_{0,975;15} = 27,50; \quad \chi^2_{0,025;\,15} = 6,26.$$

Astfel, intervalul de încredere 95% pentru σ^2 este: (5,987; 26,303).

6. Pentru a estima precizia unui termometru se realizează 15 măsurători independente asupra temperaturii unui lichid menţinut constant la 20°C. Presupunem că rezultatele măsurătorilor sunt realizări ale variabilelor aleatoare normale X_k, $1 \le k \le n$ de medie $m = 20$ şi σ necunoscută. Construiţi un interval de încredere $1-\alpha = 0,99$ pentru σ^2 ştiind că:

$$\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{15}(x_k - 20)^2 = 18.$$

Rezolvare

Considerăm estimatorul nedeplasat al lui σ^2:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{15}\sum_{k=1}^{15}(x_k - 20)^2$$

Ştiind că $\frac{15\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ urmează o lege $\chi^2_{(15)}$, obţinem intervalul:

$$\frac{15\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{0,995;\,15}} < \sigma^2 < \frac{15\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{0,005;\,15}}.$$

$$\chi^2_{0,995;\,15} = 32,8;\ \chi^2_{0,005;\,15} = 4,60$$

Deci intervalul de încredere 99% pentru σ^2 este:

$$8,23 < \sigma^2 < 58,7.$$

7. Pe baza unei selecţii de volum 64 extrasă dintr-o populaţie $X \sim N(m, \sigma)$ s-a construit un interval de încredere pntru m la un coeficient de încredere $1 - \alpha = 0,95$ de forma $(a, a + 4,9)$.

a) Să se determine valoarea lui σ^2.

b) Presupunând că $\sigma = 20$, care este volumul selecţiei ce asigură o lungime a intervalului de încredere de cel mult 3 unităţi?

Rezolvare

a) Intervalul căruia îi va aparţine m este

$$\bar{x} - z_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + z_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

unde z_0 este obţinut din tabelul Laplace pentru $2\Phi(z_0) = 1 - \alpha$. deci $z_0 = 1,96$. Lungimea intervalului de încredere va fi atunci:

$$2z_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4,9,$$

de unde se deduce $\sigma = 10$.

b) Pentru $\sigma = 20$ (şi acelaşi z_0), avem:

$$2 \cdot 1,96\, \frac{20}{\sqrt{n}} \le 3,$$

din care rezultă $n \ge 682,9$, deci $n \ge 683$.

8. Distanţa dintre două puncte a fost măsurată (în unităţi de măsură convenabile) în patru ocazii diferite, obţinând valorile: 1456,3; 1458,5; 1457,7; 1457,2. Aceste valori pot fi considerate o selecţie extrasă dintr-o populaţie normală $N(m, \sigma)$, unde m reprezintă adevărata distanţă, iar σ^2 dă informaţii despre precizia instrumentului de măsurare.

a) Să se propună un estimator nedeplasat al dispersiei dacă: i) $m = 1457$; ii) nu se cunoaşte m.

b) Să se determine un interval de încredere al dispersiei pentru cazurile i) şi ii) cu $\alpha = 0,05$.

Rezolvare

a) Un estimator nedeplasat al lui σ^2, când m este cunoscut, este:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2,$$

care pentru selecţia dată are valoarea

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1457)^2 = 0{,}8175.$$

Când m nu este cunoscut, un estimator nedeplasat al lui σ^2 este dispersia de selecţie modificată

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 .$$

Selecţia considerată are $\overline{X} = 1457{,}425$ şi deci
$s^2 = 0{,}85$

b) În cazul i) se ştie că $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$, deci

$$P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{u_2} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{u_1}\right) = 1 - \alpha,$$

unde $$P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > u_1\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

$$P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > u_2\right) = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

şi, folosind tabelele repartiţiei χ^2 cu 4 grade de libertate, găsim $u_1 = 0{,}484$, $u_2 = 11{,}143$. Rezultă:

$$0{,}294 < \sigma^2 < 6{,}756.$$

În cazul ii) v.a. $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$. Atunci, din aceleaşi tabele, dar la 3 g.l. avem

$u_1 = 0{,}216$; $u_2 = 9{,}35$, deci

$$0{,}273 < \sigma^2 < 11{,}806.$$

9. O firmă producătoare de becuri afirmă că durata medie de viaţă a becurilor produse este de 170 de ore. Un reprezentant al Oficiului pentru Protecţia Consumatorilor cercetează un eşantion aleator de $n = 100$ becuri şi o abatere standard $s = 30$ de ore.

a) Determinaţi un interval de încredere $1 - \alpha = 0{,}99$ pentru durata medie de viaţă m în ipoteza că durata de viaţă a becurilor este o variabilă aleatoare normală.

b) Poate fi acuzată firma de publicitate mincinoasă?

Rezolvare

a) Ştim că $X_k \sim N(m, \sigma)$, $k = \overline{1, n = 100}$, deci

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ şi } \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Deci variabila $\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ urmează o repartiţie Student cu $n - 1$ grade de libertate.

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0,99.$$

Din tabelele Student găsim $t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\cong 2,63$, de unde rezultă intervalul de încredere bilateral simetric:

$$\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}<m<\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Obţinem $150 < m < 166$.

b) Ţinând cont de întrebare, trebuie să construim un interval de încredere unilateral stânga, definit de:

$$P\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}>t_\alpha\right)=0,99.$$

În tabelele Student găsim $t_\alpha=-2,37$ şi intervalul devine

$$m < 165.$$

Deci putem afirma cu o probabilitate de 99% că firma poate fi acuzată de publicitate mincinoasă.

10. Fie X v.a. normală care reprezintă grosimea unor plăci metalice. O selecţie de volum $n = 5$ a dat rezultatele: $x_1 = 2,015$, $x_2 = 2,020$, $x_3 = 2,025$, $x_4 = 2,020$, $x_5 = 2,015$. Se cere să se estimeze grosimea medie a plăcilor de metal printr-un interval de încredere 95%. Să se afle volumul minim n al selecţiei astfel încât eroarea în estimarea mediei la nivelul de încredere specificat mai sus să nu depăşească 0,003.

Rezolvare

Alcătuim tabelul:

i	x_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$
1	2,015	−0,004	0,000016
2	2,020	0,001	0,000001
3	2,025	0,006	0,000036
4	2,020	0,001	0,000001
5	2,015	−0,004	0,000016
Σ	10,095	0	0,000070

Avem:

$$\overline{x}=\frac{10,095}{5}=2,019;$$

$$s=\sqrt{\frac{0,00007}{4}}=0,0042.$$

Intervalul de încredere pentru m când σ este necunoscut este

$$\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}<m<\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}=t_{0,975;\,4}=2,776$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}=2,776\,\frac{0,0042}{\sqrt{5}}=0,0048$$

şi prin urmare $2,0142 < m < 2,0238$.

Pentru aflarea volumului minim n avem:

$$\varepsilon = t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \ge \frac{t^2_{1-\frac{\alpha}{2}} s^2}{\varepsilon^2}, \text{ adică } n \ge (2{,}776)^2\,\frac{0{,}000018}{0{,}000009} \cong 16.$$

11. Diametrul aparent vertical al planetei Venus este o v.a. $N(m, \sigma)$. Făcând 15 măsurători ale lui s-au obținut valorile: 42,7; 42,56; 43,01; 43,48; 42,76; 43,06; 43,63; 42,87; 41,6; 42,78; 42,95; 43,2; 43,18; 43,39; 43,1. Determinați un interval de încredere cu nivelul de semnificație $\alpha = 0{,}1$ pentru:

a) m; b) σ^2.

Rezolvare

Din datele de selecție găsim

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i = 42{,}95$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0{,}213$$

a) Se folosește v.a.

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \sim s_{n-1},$$

pentru care $P(|T| > t_\alpha) = \alpha$, deci se află $t_\alpha = 1{,}761$ din tabelele repartiției Student. Intervalul de încredere pentru m va fi

$$m \in (42{,}73;\ 43{,}17)$$

corespunzător pragului de semnificație 0,1.

b) Avem v.a.

$$U = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

și $\qquad P(U > u_1) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}95,$

de unde $\quad u_1 = 6{,}57$

și $\qquad P(U > u_2) = \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}05$

din care $u_2 = 23{,}68$ folosind tabelele repartiției χ^2. Atunci intervalul de încrdere de nivel 0,1 pentru dispersia populației normale este

$$\sigma^2 \in (0{,}13;\ 0{,}49).$$

12. Două selecții de volume $n_1 = 18$ și $n_2 = 12$ din două populații normale independente au dat $\bar{x}_1 = 1{,}786$, $\bar{x}_2 = 1{,}041$, $s_1^2 = 0{,}0159$ și $s_1^2 = 0{,}0446$. Să se determine un interval de încredere pentru $m_1 - m_2$ cu un coeficient de încredere $1 - \alpha = 0{,}95$.

Rezolvare

Intervalul de încredere pentru $m_1 - m_2$ se construiește folosind variabila

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \sim t_{n_1+n_2-2}.$$

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2} < T < t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n_1+n_2-2}\right) = 0{,}95.$$

Deci intervalul este:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}} < m_1 - m_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}},$$

unde am notat $\hat{s}^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

În tabelele Student, la 28 grade de libertate găsim $t_{0,975;\,28} = 2{,}048$, deci obținem

$$0{,}624 < m_1 - m_2 < 0{,}866.$$

13. Un producător de automobile trebuie să aleagă între două tipuri de pneuri A și B și pentru a decide face un studiu privind rezistența acestora la uzură. Numărul de kilometri parcurși cu pneuri de tip A (respectiv B) până la uzură reprezintă o v.a. X (respectiv Y) normală, de parametri (m_A, σ_A) (respectiv (m_B, σ_B)).

a) Construiți un interval de încredere $1-\alpha$ pentru $m_A - m_B$ știind că:

$\sigma_A = 200$ km, $\sigma_B = 5000$ km, $\bar{x} = 20000$ km, $\bar{y} = 25000$ km,

$n_A = 9$, $n_B = 21$, $1-\alpha = 0{,}95$.

b) În cazul σ_A și σ_B necunoscute, construiți un interval de încredere 95% pentru $\dfrac{\sigma_B}{\sigma_A}$, dacă

$$s_A^2 = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{9}(x_k - \bar{x})^2 = 2.560.000 \text{ km}^2;\ s_B^2 = \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{21}(y_k - \bar{y})^2 = 25.000.000 \text{ km}^2$$

Rezolvare

a) $\bar{X}_A \sim N\left(m_A, \dfrac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}\right)$; $\bar{X}_B \sim \left(m_B, \dfrac{\sigma_B}{\sqrt{n_B}}\right) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N\left(m_A - m_B, \sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$;

$$P\left(-x_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (m_A - m_B)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}95;\ z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$$

Rezultă intervalul de încredere 95% pentru diferența mediilor:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} < m_A - m_B < \bar{X}_A - \bar{X}_B + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

$$-7380 < m_A - m_B < -2620.$$

Producătorul va alege deci pneurile de tipul B.

b) Ştim că $\frac{(n_A-1)s_A^2}{\sigma_A^2} \sim \chi^2_{n_A-1}$ şi $\frac{(n_B-1)s_B^2}{\sigma_B^2} \sim \chi^2_{n_B-1}$ şi sunt independente, deci

$$\frac{s_A^2}{\sigma_A^2} \Big/ \frac{s_B^2}{\sigma_B^2} \sim F_{(n_A-1, n_B-1)};\ P\left(F_{0,025} < \frac{s_A^2}{s_B^2}\cdot\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < F_{0,975}\right) = 0,95.$$

Din tabelul cu valorile funcţiei de repartiţie Fisher (8,20), găsim

$F_{0,025} = 0,25$ şi $F_{0,975} = 2,91$.

Intervalul de încredere $\frac{\sigma_B}{\sigma_A}$ este

$$\sqrt{F_{0,025}}\cdot\frac{s_B}{s_A} < \frac{\sigma_B}{\sigma_A} < \sqrt{F_{0,975}}\cdot\frac{s_B}{s_A};\ 1,56 < \frac{\sigma_B}{\sigma_A} < 5,33.$$

14. Se consideră v.a. X a cărei funcţie de repartiţie este:

$$F(x,\theta) = 1 - \left(1+\frac{x}{\theta}\right)e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0, \theta > 0.$$

a) Să se determine densitatea de repartiţie $f(x, \theta)$ a v.a. X, funcţia caracteristică $\varphi_X(t)$ şi momentul iniţial de ordinul r, m_r.

b) Să se estimeze prin metoda verosimilităţii maxime parametrul θ al densităţii $f(x, \theta)$ pe baza unei selecţii aleatoare de volum n extrasă din populaţia cu densitatea $f(x, \theta)$.

c) Să se arate că estimatorul $\hat{\theta}$ determinat la punctul b) este nedeplasat, consistent şi eficient.

d) Să se arate că variabila $U_n = \frac{4n\hat{\theta}}{\theta}$ urmează o lege $\chi^2_{(4n)}$ şi pe baza acestui rezultat să se determine un interval de încredere $1-\alpha$ pentru parametrul θ al repartiţiei.

Rezolvare

a) $f(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} f(x,\theta) = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\theta}} e^{itx}\, dx = (1-\theta i t)^{-2}$$

$$m_r = M(X^r) = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x^{r+1}e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx = \frac{\theta^{r+2}}{\theta^2}\int_0^\infty y^{r+1}e^{-y}\, dy = \theta^r\Gamma(r+2) = \theta^r(r+1)!$$

(cu schimbarea de variabilă $y = \frac{x}{\theta}$).

b) $L(x_1, ..., x_n, \theta) = \frac{x_1x_2...x_n}{\theta^{2n}}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}x_k}$

$$\ln L = -2n\ln\theta + \sum_{k=1}^{n}\ln x_k - \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}x_k;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}X_k = \frac{\bar{X}}{2}.$$

c) $M(\hat{\theta}) = M\left(\frac{\overline{X}}{2}\right) = \frac{M(X_k)}{2} = \frac{m_1}{2} = \frac{2\theta}{2} = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ este nedeplasat

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{4}D(\overline{X}) = \frac{D(X_k)}{4n} = \frac{6\theta^2 - 4\theta^2}{4n} = \frac{\theta^2}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$1 - \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} \le P\left(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\right) \le 1$$

$$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$

$$1$$

Rezultă deci că $\hat{\theta}$ este estimator consistent.
Pentru eficiență trebuie să arătăm că

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)} \text{ cu } I(\theta) = n\,M\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$$

$$\ln f(x,\theta) = \ln x - 2\ln\theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{2}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} = \frac{x - 2\theta}{\theta^2}$$

$$M\left(\frac{X - 2\theta}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4}M[(X - 2\theta)^2] = \frac{D(X)}{\theta^4} = \frac{2\theta^2}{\theta^4} = \frac{2}{\theta^2}.$$

Avem $D(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{2n} = \frac{1}{I(\theta)}$, adică $\hat{\theta}$ este eficient.

d) $U_n = \frac{4n\hat{\theta}}{\theta} = \frac{2}{\theta}\sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\varphi_X(t) = (1 - \theta it)^{-2} \Rightarrow \varphi_{U_n}(t) = \varphi_{\frac{2}{\theta}\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{2}{\theta}t\right) = (1 - 2it)^{-2n}.$$

Aceasta este tocmai funcția caracteristică a unei variabile aleatoare $\chi^2_{(4n)}$, deci rezultă:

$$U_n \sim \chi^2_{(4n)};\ P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,4n} < \frac{4n\hat{\theta}}{\theta} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,4n}\right) = 1 - \alpha.$$

Obținem deci intervalul de încredere $1 - \alpha$ pentru parametrul θ:

$$\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,4n}} = \frac{4n\hat{\theta}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,4n}} < \theta < \frac{4n\hat{\theta}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,4n}} = \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,4n}}.$$

15. Un sondaj de opinie privind popularitatea unui om politic indică faptul că 51% dintre persoanele chestionate sunt de acord cu inițiativele acestuia și îl susțin. Construiți un interval de încredere 0,95 pentru proporția p de susținători ai acestui politician știind că sondajul a fost realizat pe un eşantion de $n = 100$ de persoane. Care este valoarea minimă a lui n pentru care lungimea acestui interval este cel mult egală cu 0,05?

Rezolvare

Asociem fiecărei persoane chestionate o variabilă aleatoare Bernoulli

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{dacă persoana } k \text{ susţine omul politic} \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \ 1 \le k \le n$$

$$\Rightarrow X_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \ 1 \le k \le n.$$

Parametrul p al acestei legi Bernoulli reprezintă proporţia de persoane care susţin politicianul şi va fi estimat cu frecvenţa relativă empirică:

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k .$$

Presupunem că volumul populaţiei este suficient de mare pentru a putea considera variabilele X_k independente. Volumul eşantionului este şi el suficient de mare ($n = 100$), deci putem aplica teorema limită centrală:

$$\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \xrightarrow{rep} N(0,1); \ P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}96$$

$$\hat{p}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} .$$

Pentru a simplifica forma intervalului de încredere rezultat din rezolvarea sistemului de inecuaţii de mai sus, se face de obicei o a doua aproximare, înlocuind sub cei doi radicali p cu $\hat{p}_n$. Rezultă intervalul:

$$\hat{p}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} < p < \hat{p}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} .$$

După efectuarea calculelor, obţinem:

$0{,}41 < p < 0{,}61$

Lungimea intervalului de încredere pentru n oarecare este:

$$l_n = 2z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} .$$

deci, pentru $l_n \le 0{,}05$, obţinem $n \ge 1536$.

16. Se estimează la un coeficient de încredere de cel puțin 0,95 fracția θ de studenți ce au susținut examenul de Calculul probabilităților și statistică matematică cu o incertitudine mai mică sau egală cu 0,01. Să se determine mărimea n a selecției care trebuie examinată:

a) folosind inegalitatea Cebîșev;

b) folosind un interval de încredere asimptotic.

Rezolvare

a) Fie k numărul studenților ce au susținut examenul din selecția de volum n. Cum

$$M\left(\frac{k}{n}\right)=\theta,\ D\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}\leq\frac{1}{4},$$

avem că $P\left(\left|\frac{k}{n}-\theta\right|\leq 0{,}01\right)\geq 1-\frac{\theta(1-\theta)}{n\cdot 0{,}01^2}\geq 1-\frac{10^4}{4n}\geq 0{,}95,$

de unde $n\geq 5000$.

b) Pentru n suficient de mare, v.a. $\frac{k}{n}$ este distribuită $N\left(\theta,\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right)$. Atunci condiția

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-1\right|\leq 0{,}01\right)\geq 0{,}95$$

are loc dacă

$$0{,}01\cdot\sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}\geq 1{,}96,$$

de unde $n\approx 10.000$ (când $\theta(1-\theta)=\frac{1}{4}$).

17. Să se estimeze procentul pieselor defecte produse de o mașină știind că au fost extrase 400 de piese, dintre care 20 sunt defecte. Să se determine intervalul de încredere al procentului pentru $\alpha=0{,}05$.

Rezolvare

V.a. X ce reprezintă rezultatul unei extrageri urmează o lege Bernoulli de parametru p. Estimatorul procentului de piese defecte este:

$$\hat{p}=\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_i=\overline{X}=\frac{1}{20}.$$

Selecția fiind de volum mare, conform teoremei limită centrală, avem că $\overline{X}\sim N\left(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Deci intervalul de încredere al valorii medii p se va face considerând estimatorul dispersiei $\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}$. Atunci

$$P\left(\overline{X}-z_\alpha\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}<p<\overline{X}+z_\alpha\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right)=1-\alpha,$$

de unde deducem ($z_\alpha=1{,}96$) că:

$$0{,}0286<p<0{,}0714.$$

6.4. Probleme propuse

1. O populație statistică X are densitatea de probabilitate

$$f(x, \theta) = \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq \theta, \theta > 0.$$

Demonstrați că estimatorul dispersiei teoretice

$$T(X_1..X_n) = \frac{1}{3}\overline{X}^2$$

este deplasat.

2. Se consideră densitatea de probabilitate

$$f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 \leq x \leq 1, \ \theta > -1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Folsind selecția: $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}5$; $x_4 = 0{,}7$; $x_5 = 0{,}8$; $x_6 = 0{,}8$; $x_7 = 0{,}9$; $x_8 = 0{,}9$, să se determine estimația de maximă verosimilitate al lui θ.

3. O populație statistică X are repartiția $N(m, \sigma)$. Dacă $\{x_1, ..., x_n\}$ este o selecție realizată din X, să se găsească un estimator nedeplasat pentru m^2.

4. Dintr-o populație statistică X de medie m și dispersie σ^2 au fost extrase trei selecții independente: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$, $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$. Pentru a estima media populației se pot folosi estimatorii:

$$\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i, \ \overline{Y} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} Y_j, \ \overline{Z} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} Z_k.$$

a) Determinați $M(\overline{X})$, $M(\overline{Y})$, $M(\overline{Z})$.

b) Determinați $D(\overline{X})$, $D(\overline{Y})$, $D(\overline{Z})$.

c) Verificați dacă estimatorii lui m

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X} + \overline{Y} + Z}{3}, \ \overline{X}^* = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i + \sum_{j=1}^{4} Y_j + \sum_{k=1}^{5} Z_k}{12}$$

sunt deplasați sau nu.

d) Care dintre cei doi estimatori ai punctului c) sunt convenabil de utilizat?

5. Fie X o populație statistică având media m și dispersia σ^2 și $\{X_1, X_2\}$ o selecție extrasă din X. Se alege o funcție

$$T_\alpha(X_1, X_2) = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Să se demonstreze că:

a) $T_\alpha(X_1, X_2)$ este un estimator nedeplasat al lui m, $\alpha \in [0, 1]$.

b) $T_\alpha(X_1, X_2)$ are dispersia minimă pentru $\alpha = \frac{1}{2}$.

c) $\text{cov}\,[T_1(X_1, X_2), T_{\frac{1}{2}}(X_1, X_2)] = \frac{\sigma^2}{2}$.

6. V.a. X are repartiția binomială:

$$f(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, x = 0, 1; 0 < \theta < 1.$$

Dacă $\{X_1..X_n\}$ este o selecție extrasă din X, arătați că

$$T(X_1..X_n) = \bar{X}^2$$

este un estimator deplasat al lui θ^2.

7. O selecție de volum n a fost extrasă dintr-o populație a cărei funcție de probabilitate este

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta+1}, & x=-k \\ \frac{2\theta}{2\theta+1}, & x=k \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, k \text{ constantă pozitivă}, \theta > 0$$

și fie $\{x_1, ..., x_n\}$ realizare a acestei selecții astfel încât $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Să se demonstreze că estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ este independent de n.

8. Să se determine estimatorii de maximă verosimilitate ai parametrilor următoarelor repartiții

a) $f(x,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5-2\lambda)^{\frac{1}{2}(3-x)(2-x)} \cdot (\lambda-1)^{\frac{1}{2}(x-1)(4-x)}, & \text{pentru } x=1,2,3;\ 1 \le \lambda \le \frac{5}{2}; \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

b) $f(x,\lambda) = (2-\lambda)\, x^{\frac{\ln(\lambda-1)}{(2-\lambda)\ln 2}}, x = 1, 2; 1 < \lambda < 2;$

c) $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{1-\theta} \cdot x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}, & 0 < x < 1;\ \frac{1}{2} < \theta < 1; \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

d) $f(x,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \cdot x^{\theta-1} \cdot e^{-x}, x > 0, \theta > 0,$

folosind o selecție $(X_1..X_n)$.

9. Să se găsească un estimator al parametrului θ din

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \cdot e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta}}, x \in \mathbf{R}, \theta > 0$$

pe baza unei selecții $(X_1..X_n)$.

10. Să se estimeze parametrul θ din repartiția

$$f(x,\theta) = e^{-\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\theta^x}{x! \cdot 2^x}, x = 0, 1, 2, ...; \theta > 0$$

și să se afle calitățile estimatorului.

11. Dacă $(X_1 \ldots X_n)$ este o selecţie de volum n extrasă din populaţia a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^2}, & x \geq 0;\ \theta > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

să se afle estimatorul de maximă verosimilitate al lui θ.

12. Se extrage o selecţie de volum n_1 dintr-o populaţie normală $X^{(1)}$ de valoare medie m_1 şi dispersie $\sigma_1^2 = 121$. O altă selecţie de volum n_2 este extrasă dintr-o populaţie normală $X^{(2)}$, independentă de prima, având valoarea medie m_2 şi dispersia $\sigma_2^2 = 144$.

a) Fie $T = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ un estimator al parametrului $\theta = m_1 - m_2$. Punând $n_1 = n_2$, să se verifice dacă T este un estimator nedeplasat şi consistent.

b) Presupunând că se pot observa valorile $Z_i = X_i^{(1)} - X_i^{(2)}$, $i = 1 \ldots n_1$, să se determine intervalul de încredere 96% al lui θ pe baza selecţiei $z_1 = 37, z_2 = 43, z_3 = 38, z_4 = 29, z_5 = 51$.

13. Populaţia X are funcţia de probabilitate dată de

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \theta, & x = 7 \\ \dfrac{1}{2} + \theta, & x = 8 \\ \dfrac{1}{6}, & x = 20 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \quad -\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{3}.$$

a) Presupunând că s-a extras o selecţie de volum $n = 10$ şi că s-a observat de 9 ori rezultatul $x = 7$ şi o dată rezultatul $x = 20$, să se determine estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\theta}$ al lui θ.

b) Folosind $\hat{\theta}$ determinat înainte, să se afle $P(X \geq 8)$.

14. Calitatea unor aparte electrice este apreciată după numărul de puneri în funcţiune până la prima defectare. S-au analizat $n = 100$ de aparte şi s-au obţinut următoarele rezultate:

x_i (în mii) numărul de porniri până la prima defectare	1	3	6	8	10
n_i numărul de aparate la care s-au înregistrat x_i porniri până la prima defectare	15	20	30	10	25

Să se calculeze media de selecţie, dispersia de selecţie şi valoarea funcţiei empirice de repartiţie în punctul $x = 7$.

Răspuns: $\bar{x} = 5{,}85$; $\bar{\mu}_2 = 9{,}925$; $F_{100}(7) = 0{,}75$.

15. Presupunem că greutatea unor piese fabricate de o maşină automată este o v.a. normală de medie m şi $\sigma = 2$. Care trebuie să fie volumul selecţiei astfel încât să putem afirma cu probabilitate 0,99 că diferenţa în valoare absolută dintre media obervată şi media teoretică nu depăşeşte 1?

Răspuns: $\frac{\sqrt{n}}{2} = 2{,}58$, adică $n = 26$

16. Fie $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecţie de volum n dintr-o populaţie $N(0, \sigma)$. Să se determine densitatea de repartiţie a statisticii

$$W = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2} \qquad \text{Răspuns: } f(w) = \frac{2n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\,\sigma^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot w^{n-1} \cdot e^{-\frac{nw^2}{2\sigma^2}},\ w > 0.$$

17. Dintr-o populaţie normală de medie $m = 16$ şi abatere medie pătratică $\sigma = 2$ se extrage o selecţie de volum $n = 8$. Se cere probabilitatea ca dispersia de selecţie să fie cuprinsă în intervalul $(1{,}09; 8{,}75)$.

Răspuns: 0,95

18. Fie $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecţie asupra v.a. X cu repartiţia Pareto, de densitate:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{4\theta^4}{x^5}, & x \geq \theta \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Determinaţi estimatorul $\hat{\theta}$ de maximă verosimilitate al parametrului θ şi deduceţi un estimator nedeplasat $\hat{\theta}_1$.

b) Propuneţi un alt estimator nedeplasat $\hat{\theta}_2$ obţinut prin metoda momentelor.

c) Care dintre estimatorii $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$ este preferat?

Răspuns: a) $\hat{\theta} = \min\{X_k \mid 1 \leq k \leq n\}$, $\hat{\theta}_1 = \frac{4n-1}{4n}\hat{\theta}$; b) $\hat{\theta}_2 = \frac{3\bar{X}}{4}$;

c) $\hat{\theta}_1$, deoarece este nedeplasat şi are dispersia mai mică decât dispersia lui $\hat{\theta}_2$.

19. Să se estimeze folosind metoda momentelor parametrii repartiţiilor următoare, pe baza unei selecţii $\{X_1, ..., X_n\}$.

a) $f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2}$, $x \in \mathbf{R}$ (Normala $N(\theta_1, \theta_2)$), $\theta_1 \in \mathbf{R}$, $\theta_2 > 0$.

b) $f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$, $\theta_1 \leq x \leq \theta_2$, $\theta_1 < \theta_2$ (Uniforma (θ_1, θ_2));

c) $f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2 x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \theta_1}{\theta_2}\right)^2}$, $x > 0, \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta_2 > 0$ (Log-normala (θ_1, θ_2)).

Răspuns: a) $\hat{\theta}_1 = \overline{X}$, $\hat{\theta}_2 = \overline{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$; b) $\hat{\theta}_1 = \overline{X} - \hat{S}\sqrt{3}$, $\hat{\theta}_2 = \overline{X} + \hat{S}\sqrt{3}$,

unde am notat $\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}$ abaterea medie pătratică de selecție;

$$\text{c) } \hat{\theta}_1 = 2\ln\overline{X} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right),\ \hat{\theta}_2 = \ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2}{\overline{X}^2}\right).$$

20. Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

unde $\theta > 0$ este un parametru necunoscut.

a) Calculați $M(X)$ și $D(X)$.

b) Folosind metoda momentelor, determinați un estimator $\hat{\theta}$ al parametrului θ și arătați că $\hat{\theta}$ este nedeplasat și consistent.

Răspuns: a) $M(X) = \frac{\theta}{3}$, $D(X) = \frac{\theta^2}{18}$; b) $\hat{\theta} = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 3\overline{X}$,

$$M(\hat{\theta}) = \theta,\ D(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

21. Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{e}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

θ fiind un parametru necunoscut strict pozitiv. Considerăm $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecție asupra variabilei aleatoare X.

a) Să se calculeze media și dispersia lui X.

b) Să se arate că estimatorul $\hat{\theta}$ (al parametrului θ), obținut prin metoda momentelor pe baza selecției $\{X_1, ..., X_n\}$ este nedeplasat și consistent.

Răspuns: a) $M(X) = 2\theta$, $D(X) = \theta^2$; b) $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \overline{X}$, $M(\hat{\theta}) = \theta$, $D(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

22. Fie X o v.a. cu densitatea de repartiţie:

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\ \theta>0$$

şi $\{X_1, ..., X_n\}$ o selecţie asupra variabilei X.

a) Să se determine funcţia de repartiţie F a v.a. X şi să se calculeze $M(X)$.

b) Să se estimeze parametrul θ prin metoda momentelor pe baza selecţiei $\{X_1, ..., X_n\}$ şi să se studieze calităţile estimatorului $\hat{\theta}$ astfel obţinut.

c) Să se determine funcţia de repartiţie a v.a. $Y_n = \min\{X_i \mid 1 \le i \le n\}$ şi să se deducă expresia densităţii de repartiţie.

d) Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă al parametrului θ şi, pe baza acestuia, să se construiască un estimator nedeplasat $\tilde{\theta}$.

e) Să se arate că estimatorul $\tilde{\theta}$ este consistent.

Răspuns: a) $F(x,\theta)=\begin{cases}1-\dfrac{\theta^2}{x^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$; b) $\hat{\theta}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k=\dfrac{\overline{X}}{2}$, $\hat{\theta}$ este nedeplasat şi consistent; c) $G_n(y)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\theta}{t}\right)^{2n}, & t>\theta\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$, $g_n(y)=\begin{cases}2n\cdot\dfrac{\theta^{2n}}{t^{2n+1}}, & t>0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$;

d) $\tilde{\theta}=\dfrac{2n-1}{2n}Y_n$, $M(\tilde{\theta})=\theta$; e) $D(\tilde{\theta})=\dfrac{\theta^2}{4n(4n-1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

23. Se presupune că venitul anual al unui salariat bugetar ales la întâmplare este o v.a. V având densitatea:

$$f(v,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}(v-v_0)}e^{-[\ln(v-v_0)-\theta]^2}, & v>0\\ 0, & \text{altfel}\end{cases},$$

unde v_0 reprezintă venitul minim al unui salariat bugetar, iar θ este un parametru real necunoscut, pe care dorim să îl estimăm pe baza eşantionului $\{V_1, ..., V_n\}$ asupra lui V.

a) Calculaţi $M(V)$ şi $D(V)$.

b) Determinaţi estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ al parametrului θ.

c) Determinaţi funcţia de repartiţie a variabilei $Z = \ln(V - v_0)$.

d) Studiaţi proprietăţile estimatorului $\hat{\theta}$ obţinut la punctul b).

e) Construiţi un interval de încredere 95% pentru parametrul θ.

Răspuns: a) $M(V)=v_0+e^{\theta+\frac{1}{4}}$, $D(V)=e^{2\theta}(e-\sqrt{e})$; b) $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(V_k-v_0)$;

c) $Z\sim N\left(\theta,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; d) $\hat{\theta}$ este nedeplasat şi consistent; e) $\hat{\theta}-\dfrac{1,96}{\sqrt{2n}}<\theta<\hat{\theta}+\dfrac{1,96}{\sqrt{2n}}$.

24. Durata T de funcţionare fără defectare a unor aparate electrocasnice este o v.a. exponenţială cu densitatea de repartiţie:

$$f(t,\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}},\ t > 0,\ \theta > 0.$$

a) Să se estimeze parametrul θ folosind metoda verosimilităţii maxime, pe baza selecţiei $\{T_1, ..., T_n\}$ asupra variabilei T.

b) Să se arate că estimatorul găsit la punctul a) este nedeplasat, consistent şi eficient.

c) Să se arate că v.a. $U = \frac{2\sum_{k=1}^{n} T_k}{\theta}$ are o repartiţie χ^2 cu $2n$ grade de libertate.

d) S-au verificat $n = 10$ aparate înregistrându-se momentul ieşirii din funcţiune al fiecărui aparat şi s-a construit tabelul următor:

Aparatul i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Durata de funcţionare fără defectare t_i (în ore)	200	350	600	450	400	400	500	350	540	550

Pe baza acestor observaţii şi a rezultatului obţinut la punctul c) să se estimeze parametrul θ printr-un interval de încredere 90%.

Răspuns: a) $\hat{\theta} = \bar{X}$; b) $M(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ M\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]^2 = \frac{n}{\theta^2} = \frac{1}{D(\hat{\theta})}$;

c) $\varphi_U(t) = (1-2it)^{-n}$, deci $U \sim \chi^2_{(2n)}$; d) (270,7; 779,8).

25. a) Să se estimeze pe baza unei selecţii $\{X_1, ..., X_n\}$ parametrul θ al repartiţiei Rayleigh:

$$f(x,\theta) = \frac{2}{\theta}x \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}},\ x > 0,\ \theta > 0.$$

B) Să se arate că v.a. $Y = \frac{2\sum_{k=1}^{n\theta} X_n^2}{\theta}$ urmează o repartiţie χ^2 cu $2n$ grade de libertate şi pe baza acestui rezultat să se construiască un interval de încredere $1-\alpha = 0,95$ pentru parametrul θ.

Răspuns: a) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$; b) $\frac{2n\hat{\theta}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};\,2n}} < \theta < \frac{2n\hat{\theta}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};\,2n}}$.

26. Pentru a testa viteza cu care este absorbit pe piaţă un produs nou, firma producătoare pune în vânzare prin 9 magazine loturi identice. Cantităţile se epuizează după un număr de zile variabil, după cum urmează:

Magazin i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr. de zile x_i	51	54	49	50	50	48	49	50	49

a) Să se estimeze printr-un interval de încredere 95% viteza cu care este absorbit pe piaţă produsul (nr. mediu de zile m).

b) Să se determine un interval de încredere 90% pentru dispersia σ^2 a numărului de zile X în care se epuizează produsul.

Răspuns: a) (48,674; 51,235); b) (1,548; 8,791).

7
VERIFICAREA IPOTEZELOR STATISTICE

7.1. Probleme rezolvate. Ipoteze simple și compuse

1. Fie $X \sim N(m, 4)$ și $\{X_1, ..., X_2\}$ o selecție de volum $n = 25$ extrasă din X. Se consideră ipotezele simple:

$$H_0: m = 20, H_1: m = 22.$$

Să se determine regiunea de acceptare a celui mai puternic test de nivel $\alpha = 0,05$ al lui H_0 contra lui H_1, eroarea de ordinul doi și puterea testului.

Rezolvare

Avem

$$f(x, m) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{32}(x-m)^2\right],$$

deci $$\frac{L(x_1 \dots x_n; 22)}{L(x_1 \dots x_n; 20)} = \prod_{i=1}^{n}\frac{f(x_i; 22)}{f(x_i; 20} = \exp\left[\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - 525\right)\right].$$

Conform Lemei Neyman – Pearson, regiunea de acceptare de nivel α a lui H_0 este

$$A(\alpha) = \{(x_1 \dots x_{25}) \in R^{25} \mid \exp\left[\frac{25}{8}(\bar{X}-21)\right] \le c_\alpha\},$$

unde $$P_0\left(\exp\left[\frac{25}{8}(\bar{X}-21)\right] \le c_\alpha\right) = 0,95.$$

Dar $$P_0\left(\exp\left[\frac{25}{8}(\bar{X}-21)\right] \le c_\alpha\right) = P_0\left(\bar{X} \le 21 + \frac{8}{25}\ln c_\alpha\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-20}{4/5} \le \frac{5}{4} + \frac{2}{5}\ln c_\alpha\right) = \Phi\left(\frac{5}{4} + \frac{2}{5}\ln c_\alpha\right) = 0,95,$$

de unde $\frac{5}{4} + \frac{2}{5}\ln c_\alpha = 1,645,$

valoare obținută din tabelul funcției de repartiție $\Phi(z)$ a v.a. normale normate.

Găsim că $\ln c_\alpha = 1,1125$, deci regiunea de acceptare va fi:

$$A(\alpha) = \{(x_1 \dots x_{25}) \in R^{25} \mid \bar{X} \le 21,356\}.$$

Eroare de ordin doi este:

$$\beta = P_1(\bar{X} \leq 21{,}356) = P\left(\frac{\bar{X}-22}{415} \leq -0{,}805\right) = \Phi(-0{,}805) =$$
$$= 1-\Phi(0{,}805) = 1-0{,}8023 = 0{,}1927,$$

iar puterea testului este

$$\pi = 1-\beta = 0{,}8023.$$

2. Fie $X \sim N(m, 8)$ şi $\{X_1 \dots X_n\}$ o selecţie de volum $n = 100$ a v.a. X şi fie ipotezele simple:

$$H_0\colon m = 12,\ H_1\colon m = 15,$$

pentru care se decide a se aplica următoare regulă: dacă $\bar{X} < 14$, atunci se acceptă H_0 dacă $\bar{X} \geq 14$, atunci se acceptă H_1. Să se afle erorile de primul şi al doilea ordin.

Rezolvare

Se ştie că $\bar{X} \sim N\left(m, \frac{4}{5}\right)$. Eroarea de primul ordin este:

$$\alpha = P(\mathrm{acc}\, H_1 \mid H_0) = P(\bar{X} \geq 14 \mid m = 12) = P\left(\frac{\bar{X}-12}{4/5} \geq 2{,}5\right) =$$
$$= 1-\Phi(2{,}5) = 1-0{,}9938 = 0{,}0062.$$

Eroarea de ordinul doi este

$$\beta = P(\mathrm{acc}\, H_0 \mid H_1) = P(\bar{X} < 14 \mid m = 15) = P\left(\frac{\bar{X}-15}{4/5} < -\frac{5}{4}\right) =$$
$$= \Phi\left(-\frac{5}{4}\right) = 1-\Phi(1{,}25) = 0{,}1056.$$

3. Fie X o v.a. $N(0, \sigma)$ şi o selecţie de volum $n = 25$ extrasă din X. Se consideră ipotezele simple:

$$H_0\colon \sigma = 1,\ H_1\colon \sigma = 2.$$

Să se determine regiunea de acceptare a celui mai puternic test de nivel $\alpha = 0{,}01$ a lui H_0 contra H_1.

Rezolvare

Avem:

$$\frac{L(x_1 \dots x_{25}; 2)}{L(x_1 \dots x_{25}; 1)} = \prod_{i=1}^{25} \frac{f(x_i; 2)}{f(x_i; 1)} = \frac{1}{2^{25}} \exp\left(\frac{3}{8}\sum_{i=1}^{25} x_i^2\right).$$

Atunci regiunea de acceptare a lui H_0 de nivel $\alpha = 0{,}01$ este

$$A(\alpha) = \{(x_1 \dots x_{25}) \in \mathrm{R}^{25} \mid \sum_{i=1}^{25} x_i^2 \leq \frac{8}{3} \ln c(\alpha)\},$$

unde $$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i^2 \leq \frac{8}{3} \ln c(\alpha) \mid H_0\right) = 0{,}99.$$

Ştiind că v.a. $\sum_{i=1}^{25} X_i^2 \sim \chi_{25}^2$ de parametru $\sigma = 1$, atunci din tabelele repartiţiei χ^2 găsim:

$$\frac{8}{3}\ln c(\alpha) = 44{,}31,$$

deci regiunea de acceptare este

$$A(\alpha) = \{(x_1 \dots x_{25}) \in \mathrm{R}^{25} \mid \sum_{i=1}^{25} x_i^2 \le 44{,}31\}.$$

4. Fie $\{X_1 \dots X_n\}$ o selecţie extrasă din populaţia $X \sim N(m, \sigma)$, m, σ – parametrii necunoscuţi, şi fie ipotezele simple

H_0: $\sigma = \sigma_0$, H_1: $\sigma = \sigma_1$.

Să se propună un test pentru H_0 contra H_1.

Rezolvare

Dispersia de selecţie este

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

deci v.a. $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$. Atunci un test al lui H_0 contra H_1 este

$S^2 \ge k$, dacă $\sigma_0 < \sigma_1$

$S^2 \le k$, dacă $\sigma_0 > \sigma_1$.

Fie α nivelul de semnificaţie al testului.

Dacă $\sigma_0 < \sigma_1$, atunci constanta k se determină din

$P(S^2 > k \mid \mathrm{H}_0) = \alpha$,

care conduce la

$$P\left(\frac{nS^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{nk}{\sigma_0^2}\right) = \alpha,$$

şi folosind tabelele repartiţiei χ^2 cu $n - 1$ grade de libertate.

În acest caz, eroarea de ordinul doi este

$$\beta = P\left(\frac{nS^2}{\sigma_1^2} < \frac{nk}{\sigma_1^2}\right).$$

Dacă $\sigma_0 > \sigma_1$, atunci k se determină din

$$P\left(\frac{nS^2}{\sigma_0^2} < \frac{nk}{\sigma_0^2}\right) = \alpha,$$

iar eroarea de ordinul doi va fi

$$\beta = P\left(\frac{nS^2}{\sigma_1^2} \ge \frac{nk}{\sigma_1^2}\right).$$

5. Fie $\{X_1 \dots X_n\}$ o selecţie extrasă din populaţia $X \sim N\left(0, \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right), \theta > 0$. Să se verifice ipotezele

$$H_0: \theta = 1, H_1: \theta > 1$$

şi să se determine funcţia putere a testului cu ajutorul nivelului său de semnificaţie.

Rezolvare

Densitatea de probabilitate a lui X este

$$f(x, \theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\, e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$$

Considerând ipotezele simple H_0: $\theta = 1$, H_1: $\theta = \theta_1, \theta_1 > 1$; regiunea de acceptare a celui mai puternic test de nivel α a lui H_0 contra lui H_1 este

$$A(\alpha) = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathrm{R}^n \mid \frac{L(x_1 \dots x_n; \theta_1)}{L(x_1 \dots x_n; 1)} \le c_\alpha\},$$

unde $\quad P(A(\alpha) / H_0) = 1 - \alpha.$

Avem $\dfrac{L(x_1 \dots x_n; \theta_1)}{L(x_1 \dots x_n; 1)} = \theta_1^{\frac{n}{2}} \exp\left[\dfrac{1-\theta_1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] \le c_\alpha,$

din care găsim

$$A(\alpha) = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge k_\alpha\},$$

unde am notat cu $k_\alpha = \dfrac{2}{1-\theta_1} \ln\left(c_\alpha \cdot \theta_1^{-\frac{n}{2}}\right)$. Deci regiunea de acceptare are nivelul de semnificaţie

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < k_\alpha \mid \theta = 1\right).$$

Dar v.a. $X\sqrt{\theta} \sim N(0, 1)$, deci $Y = \theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$. Rezultă

$$\alpha = F_Y(k_\alpha),$$

unde F_Y este funcţia de repartiţie a v.a. Y.

Dacă notăm cu $\beta(\theta)$, $\theta > 1$, eroarea de ordinul doi, atunci

$$\beta(\theta) = P_\theta(A(\alpha)) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \ge k_\alpha\right) = P(Y \ge \theta k_\alpha) = 1 - F_Y(\theta k_\alpha),$$

deci funcţia putere va fi

$$\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta) = F_Y(\theta k_\alpha) = F_Y(\theta\ F_Y^{-1}(\alpha)), \theta > 1.$$

6. Fie X o v.a. cu densitatea de probabilitate

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0,\ \theta > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Verificați ipotezele alternative simple

H_0: $\theta = \theta_0$, H_1: $\theta = \theta_1$.

Rezolvare

Avem:

$$\frac{L(x_1 \ldots x_n; \theta_1)}{L(x_1 \ldots x_n; \theta_0)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i\right].$$

Atunci regiunea de acceptare a lui H_0 de nivel α este

$$A(\alpha) = \{(x_1 \ldots x_n) \in \mathrm{R}^n \mid \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left[\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \le c\},$$

unde $P(A\alpha \mid H_0) = 1 - \alpha$.

Dacă $\theta_0 < \theta_1$ și notând

$$\frac{\theta_0\theta_1}{\theta_1 - \theta_0} \ln\left[c\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n\right] = k,$$

regiunea $A(\alpha)$ devine

$$A(\alpha) = \{(x_1 \ldots x_n) \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \le k\},$$

cu proprietatea

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ge k \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha.$$

Pentru a calcula această probabilitate se folosește faptul că v.a. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ are densitatea de probabilitate

$$g(y; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!\,\theta^n} y^{n-1} e^{-\frac{y}{\theta}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

Atunci

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ge k \mid \theta = \theta_0\right) = \frac{1}{(n-1)!\,\theta_0^n} \int_k^{\infty} y^{n-1} e^{-\frac{y}{\theta_0}} dy =$$

$$= e^{-\frac{k}{\theta_0}}\left[1 + \frac{k}{\theta_0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{k}{\theta_0}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{k}{\theta_0}\right)^{n-1}\right],$$

ecuație din care se determină k.

Eroarea de ordinul doi corespunzătoare va fi

$$\beta = e^{-\frac{k}{\theta_1}}\left[1+\frac{k}{\theta_1}+\frac{1}{2!}\left(\frac{k}{\theta_1}\right)^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{k}{\theta_1}\right)^{n-1}\right].$$

Dacă $\theta_0 > \theta_1$, atunci

$$A(\alpha) = \{(x_1 \ldots x_n) \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\},$$

cu proprietatea

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha,$$

din care $\alpha = \frac{1}{(n-1)!\,\theta_0^n}\int_0^k y^{n-1} e^{-\frac{y}{\theta_0}}\,dy = 1 - \frac{1}{(n-1)!\,\theta_0^n}\int_k^{\infty} y^{n-1} e^{-\frac{y}{\theta_0}}\,dy =$

$$= 1 - e^{-\frac{k}{\theta_0}}\left[1+\frac{k}{\theta_0}+\frac{1}{2!}\left(\frac{k}{\theta_0}\right)^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{k}{\theta_0}\right)^{n-1}\right],$$

iar eroarea de ordinul doi este

$$\beta = 1 - e^{-\frac{k}{\theta_1}}\left[1+\frac{k}{\theta_1}+\frac{1}{2!}\left(\frac{k}{\theta_1}\right)^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{k}{\theta_1}\right)^{n-1}\right].$$

7. Procentul de piese defecte fabricate de o mașină este $p = 5\%$ dacă mașina este calibrată și $p = 10\%$ dacă mașina nu este calibrată. Fie ipotezele alternative

H_0: $p = 0{,}05$; H_1: $p = 0{,}1$.

O selecție de $n = 100$ de piese alese dintr-un lot conține 8 piese defecte.

a) Determinați regiunea de accepatre de nivel $\alpha = 0{,}05$ a celui mai puternic test pentru H_0 contra H_1.

b) Calculați eroarea de specia a doua.

c) Ce volum, trebuie să aibă selecția pentru ca frecvența $k_n = 0{,}08$ de piese defecte să permită a trage concluzia că mașina este necalibrată.

Rezolvare

a) Se aplică teorema Moivre-Laplace pentru $n = 100$. Deci k_n are repartiția $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Atunci

$$\alpha = P(\mathrm{acc}\, H_1 \mid H_0) = P(k_n \geq c_\alpha \mid H_0) = P\left(\frac{k_n - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{100}}} \geq \frac{c_\alpha - 0{,}05}{0{,}022}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{c_\alpha - 0{,}05}{0{,}022}\right) = 0{,}95,$$

iar din tabelele funcției de repartiție $N(0, 1)$ găsim

$$\frac{c_\alpha - 0{,}05}{0{,}022} = 1{,}645.$$

Se ajunge ca regiunea de acceptare $k_n < 0{,}086$.

b) Eroarea de ordinul doi este

$$\beta = P(\text{acc}\, H_0 \mid H_1) = P(k_n < 0{,}086 \mid H_1) = P\left(\frac{k_n - 0{,}1}{0{,}03} < -0{,}46\right) =$$

$$= \Phi(-0{,}46) = 1 - 0{,}6772 = 0{,}3228.$$

c) Regiunea de respingere a lui H_0 de nivel $\alpha = 0{,}05$ este $k_n \geq 0{,}08$ (pentru că 0,08 este frecvenţa pieselor defecte care permite să concluzionăm că maşina este stricată). Atunci

$$\alpha = P(k_n \geq 0{,}08 \mid H_0) = P\left(\frac{k_n - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05 \cdot 0{,}95}} \cdot \sqrt{n} \geq \frac{0{,}03\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right) =$$

$$= P\left(Z_n \geq \frac{0{,}03\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}0495}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}03\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}0495}}\right),$$

deci $\dfrac{0{,}03\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}0495}} = 1{,}645,$

de unde $n = 148$.

8. Se efectuează un control statistic de calitate pentru livrarea unui număr mare de piese de serie şi fie p procentul de piese defecte la o livrare. Dacă ipoteza H_0: $p = 5\%$ este acceptată, atunci cumpărătorul va accepta lotul, dacă H_1: $p = 8\%$ este adevărată, lotul va fi refuzat. Cupărătorul şi vânzătorul se pun de acord să verifice 400 de piese şi fixează valoarea critică $c = 6\%$ astfel încât, notând cu k_n procentul pieselor defecte din selecţia făcută, să accepte livrarea dacă $k_n \leq c$ şi să o refuze dacă $k_n > c$. Calculaţi erorile de cele două ordine.

Rezolvare

$$k_n \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \text{ pentru } n = 400 \text{ (volum mare)}$$

$$\alpha = 1 - \Phi(0{,}909) = 0{,}1817$$

$$\beta = 1 - \Phi(1{,}54) = 0{,}0618.$$

9. Se controlează durata de funcţionare a unui tip de lampă. Dacă se notează cu p procentul de lămpi ce nu funcţionează un timp fixat, să se verifice ipotezele alternative

$$H_0 : p = p_0 = 0{,}05, H_1 : p > p_0$$

folosind o selecţie de volum 144.

a) Să se determine regiunea de acceptare a lui H_0 de nivel $\alpha = 0{,}05$.

b) Să se calculeze eroarea de genul doi.

Rezolvare

a) Notăm cu k_n procentul de lămpi ce nu funcţionează stabilit pe baza selecţiei, unde $k = \sum_{i=1}^{n} X_i$ cu $X_i \sim Bi(1; p)$. Atunci pentru ipotezele simple $H_0 : p = p_0, H_1 : p = p_1, p_1 > p_0$ avem

$$\frac{L(x_1 \ldots x_n; p_1)}{L(x_1 \ldots x_n; p_0)} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i} \leq c_\alpha$$

din care deducem

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = k_n \le \ln\left(c_\alpha^{\frac{1}{n}} \frac{p_0}{p_1}\right) = C(\alpha)$$

unde $\quad P(k_n \le c(\alpha) \mid p = p_0) = 1 - \alpha.$

Pentru o selecție de volum mare ($n = 144$) teorema Moivre-Laplace ne asigură că v. a. k_n are o repartiție aproximativ normală $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$. Atunci pentru $p = p_0 = 0{,}05$ avem

$$P\left(\frac{k_n - 0{,}05}{0{,}018} \le \frac{C(\alpha) - 0{,}05}{0{,}18}\right) = 0{,}95.$$

Folosind tabelele repartiției normale normate găsim:

$$\frac{C(\alpha) - 0{,}05}{0{,}18} = 1{,}645,$$

deci $C(\alpha) = 0{,}0796$, prin urmare

$$A(\alpha) = \{(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid k_n \le 0{,}0796\}$$

este regiunea de acceptare a lui H_0 de nivel $\alpha = 0{,}05$.

b) Eroarea de ordinul doi este

$$\beta(p) = P(k_n \le 0{,}0796 \mid H_1) = P\left(\frac{k_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \frac{0{,}0976 - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) =$$

$$= F\left(12\frac{0{,}0796 - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right), p > p_0,$$

F fiind funcția de repartiție normală normată.

10. Se consideră o v.a. X repartizată Poisson de parametru λ și $\{X_1 \ldots X_n\}$ o selecție din această populație. Să se determine cel mai puternic test de nivel α al ipotezei nule $H_0 : \lambda \ge \lambda_0$ contra alternativei $H_1 : \lambda > \lambda_0$, $0 \le \alpha \le 1$.

Rezolvare

Raportul valorilor funcției de verosimilitate este

$$\frac{L(x_1 \ldots x_n; \lambda_2)}{L(x_1 \ldots x_n; \lambda_1)} = e^{-n(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

pentru ipotezele simple $\lambda = \lambda_1$ și $\lambda = \lambda_2$ ($\lambda_1 < \lambda_2$).

Dacă notăm cu

$$h(u) = e^{-n(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^u$$

și cu $\quad G(x_1 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

atunci $\dfrac{L(x_1...x_n;\lambda_2)}{L(x_1...x_n;\lambda_1)} = h(G(x)).$

Deoarece funcţia $h(u)$ este strict crescătoare pentru $\lambda_1 < \lambda_2$ rezultă că v.a. X are proprietatea (G), deci, conform teoremei lui Lehmann, există un cel mai puternic test de nivel α a cărei regiune de acceptare este

$$A(\alpha) = \left\{(x_1...x_n) \in R^n \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \le c_\alpha \right.\right\}, \forall \alpha \in [0, 1]$$

cu proprietatea că

$$P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le c_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Este ştiut faptul că v.a. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ are o repartiţie Poisson de parametru $n\lambda$, atunci proprietatea de mai sus se scrie

$$\sum_{k=1}^{c_\alpha - 1} e^{-n\lambda_0} \frac{(n\lambda_0)^k}{k!} = 1 - \alpha,$$

de unde se găseşte c_α.

11. Greutatea unor pachete de zahăr pudră, ca urmare a imperfecţiunii procesului de împachetare, este o v. a. normală cu $\sigma = 5$ g. Greutatea marcată pe pachete este de 900 g.

O selecţie aleatoare de 10 pachete conduce la o greutate medie observată de 898 g. Să se testeze la pragul de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$ ipoteza că procesul de împachetare este bine reglat. Să se calculeze probabilitatea acceptării ipotezei $H_0 : m = m_0 = 900$ g cu alternativa $H_1 : m = m_1 = 898$ g.

Rezolvare

Procesul de împachetare este bine reglat dacă $m = 900$ g, deci vom testa la pragul de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$:

$H_0 : m = 900\ (= m_0)$

$H_1 : m \ne 900$

Aplicăm testul Z bilateral, întrucât σ este cunoscută

$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$|Z_{\text{calculat}}| = \left|\frac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{898 - 900}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right| = 1{,}26.$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1{,}96$$

Avem $|Z_{\text{calculat}}| < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ deci acceptăm ipoteza H_0.

Înseamnă că procesul de împachetare nu necesită reglaje. Probabilitatea acceptării ipotezei H_0 pentru $m_1 = 898$ g $\neq m_0$ este riscul de genul II, β.

Regiunea de acceptare a ipotezei H_0 este definită de:

$$900 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} < \bar{X} < 900 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\beta(m_1) = P\left(896,9 < \bar{X} < 903,1 \,|\, m = m_1\right) = P\left(\frac{896,9-898}{\frac{5}{\sqrt{10}}} < \frac{\bar{X}-m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{903,1-898}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\sqrt{10} \cdot \frac{903,1-898}{5}\right) - \Phi\left(\sqrt{10} \cdot \frac{896,9-898}{5}\right) =$$

$$= \Phi(3,22) - \Phi(-0,69) = 0,9994 - 1 + 0,7549 = 0,7543.$$

Aceasta înseamnă că există 75,43% şanse să acceptăm ipoteza nulă când $m = 898$ g iar greutatea medie observată a fost $\bar{x} = 898$ g.

Acest rezultat oarecum paradoxal se poate explica prin faptul că ipoteza nulă $H_0 : m = 900$ g este ipoteza privilegiată.

12. S-a stabilit că grutatea tabletelor dintr-un mediacment cu acţiune toxică puternică trebuie să fie $m_0 = 0,5$ mg. O cercetare selectivă de $n = 121$ tablete a dat o greutate medie observată a tabletelor egală cu $\bar{X} = 0,53$ mg. Se cere să se verifice la pragul $\alpha = 0,01$ ipoteza nulă H_0: $m = m_0 = 0,50$ faţă de H_1: $m \neq 0,50$ O observare atentă, prin cântăriri numeroase, a tabletelor a condus la concluzia că variabila greutate a tabletelor are o repartiţie normală cu $\sigma = 0,11$ mg.

Rezolvare

Se aplică testul Z bilateral

$$|Z_{\text{calculat}}| = \left|\frac{\bar{X}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| = 3$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,995} = 2,58$$

Deci $|Z_{\text{calculat}}| = 3 > Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ şi respingem H_0. Greutatea medie a tabletelor diferă semnificativ de greutatea admisă, deci administrarea acestui medicament bolnavilor trebuie interzisă.

13. Experienţa acumulată arată că rezistenţa la rupere a cablurilor fabricate la o anumită întreprindere poate fi considerată o v. a. X cu repartiţie normală având $\sigma = 15$ kg. O selecţie de volum $n = 9$ conduce la o rezistenţă medie la rupere, $\bar{x} = 400$ kg. Dacă m este media rezistenţei la rupere:

a) Să se verifice la $\alpha = 0,01$, ipoteza $H_0 : m = m_0 = 450$ faţă de H_1: $m = m_1 \neq m_0$.

b) Să se determine puterea testului pentru $m_1 = 460$.

c) Să se determine volumul n al selecţiei astfel ca testul să aibă puterea 0,99.

Rezolvare

a) În tabele găsim $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,995} = 2,57$.

Deoarece $\left|\dfrac{\bar{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\dfrac{400 - 450}{\frac{15}{3}}\right| = 10 > 2,57 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

respingem ipoteza H_0.

b) Avem: $\pi(m_1) \approx \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{m_1 - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$ şi cum $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -2,57$, găsim:

$$\pi(460) \approx \Phi\left(-2,57 + \frac{460-450}{\frac{15}{3}}\right) = 1 - \Phi(-0,57) = 1 - 0,2843 = 0,7157.$$

$$\pi(m_1) = \Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{450 - 460}{\frac{15}{3}} - 2,57\right) + 1 - \Phi\left(\frac{450-460}{\frac{15}{3}} + 2,57\right) =$$

$$= \Phi(-4,57) + 1 - \Phi(-0,57) = \Phi(0,57).$$

c) Avem $n = \left(Z_{1-\beta} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \left(\dfrac{\sigma}{m_1 - m_0}\right)^2$ şi cum $Z_{1-\beta} = Z_{,99} = 2,33$ găsim:

$$n \approx (2,33 + 2,57)^2 \left(\frac{15}{460 - 450}\right)^2 \approx 54.$$

14. O maşină automată produce ţevi al căror diametru nominal este de 12 mm. S-a controlat producţia dintr-un schimb luându-se la întâmplare $n = 36$ ţevi, pentru care s-a obţinut o medie observată a diametrului egală cu 11,7 mm.

În ipoteza că diametrul ţevilor produse este o v. a. normală $N(m; 0,5)$, se poate afirma că maşina automată produce ţevi cu diametrul mai mic decât diametrul nominal? ($\alpha = 0,05$).

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza

$$H_0 : m = 12$$

cu alternativa $\quad H_1 : m < 12.$

Regiunea critică este definită de inegalitatea

$$\bar{X} < m_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

unde z_α reprezintă α - cuantila repartiţie normale:

$$\alpha = P(Z < z_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z_\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx .$$

Cum $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ obţinem $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,64$.

Deci $\frac{\bar{x}-m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{11,7-12}{0,5}\sqrt{36} = -3,6$.

Deoarece $-3,6 < -1,64$, respingem ipoteza H_0 şi acceptăm alternativa H_1 conform căreia maşina produce ţevi cu diametrul sub valoarea standard, deci nu funcţionează corect.

15. Durata la funcţionare a unui tip oarecare de bec electric de 100 waţi poate fi considerată ca o v. a. X repartizată normal cu media $m = 1500$ şi $\sigma^2 = 200^2$. O selecţie de $n = 25$ de astfel de becuri dă o durată medie de funcţionare de 1380 de ore.

a) La pragul $\alpha = 0,01$ să se verifice ipoteza H_0: $m = m_0 = 1500$ faţă de H_1: $m = m_1 < 1500$.

b) Care este puterea testului pentru $m_1 = 1400$.

c) Să se determine volumul selecţiei astfel încât puterea testului să fie 0,90.

Rezolvare

a) În tabele găsim $z_\alpha = z_{0,01} = -2,33$ şi

$$m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha = 1500 - \frac{200}{5}2,33 = 1406,80.$$

Deoarece $\bar{X} = 1380 < 1406,80$, respingem H_0.

b) Avem: $\Pi(m_1) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(-2,33 + \frac{1500-1400}{\frac{200}{5}}\right) = \Phi(0,17) = 0,5675$.

Deci $\Pi(1400) = 0,5675$.

c) $\frac{m_0 - m_1}{\sigma}\sqrt{n} + z_\alpha = 1,30 \Rightarrow \sqrt{n} = 7,26 \Rightarrow n \approx 52$.

16. Experienţa anterioară arată că durabilitatea unei anvelope auto poate fi considerată o v. a. normală cu media $m = 30\,000$ km şi dispersia $\sigma^2 = (800 \text{ km})^2$. Se face o schimbare în procesul de producţie, iar testarea noii metode de fabricaţie se face pe baza unei selecţii de $n = 100$ anvelope pe care dă $\bar{x} = 29\,000$ km. Luând $\alpha = 0,05$, se poate afirma că noua metodă conduce la scăderea durabilităţii anvelopelor?

Rezolvare

Trebuie să verificăm ipoteza $H_0: m = m_0 = 30\,000$ faţă de alternativa $H_1: m = m_1 < 30\,000$.

Tabelele ne dau $z_\alpha = z_{0,05} = -1,64$ ceea ce conduce la valoarea

$$m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha = 30\,000 - \frac{800}{10}1,64 = 29\,864,8.$$

Conform testului Z unilateral stânga, deoarece $\bar{x} = 29\,000 < 29\,864,8$ respingem H_0, deci noua metodă duce la scăderea durabilităţii anvelopelor, în consecinţă trebuie abandonată.

17. Pentru efectuarea unei anumite operații, norma tehnică prevede o durată medie de 40 sec. Muncitorii care efectuează această operație sesizează că această durată medie este insuficientă. Pentru verificare se cronometrează durata operației la $n = 16$ muncitori găsindu-se o durată medie observată $\bar{x} = 42$ sec. și o abatere medie pătratică

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 3{,}5 \text{ sec.}$$ Putem lua un prag de senificație $\alpha = 0{,}01$ să respingem ipoteza că durata medie reală este conformă cu norma tehnică prevăzută?

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0: $m = 40$ (norma prevăzută este justă) față de alternativa H_1: $m \neq 40$ (norma nu este justă). Este cazul testului T bilateral cu lungimea critică definită de relația:

$$\left|\frac{\bar{X} - m_0}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}.$$

Avem $t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1} = t_{0,995;\, 15} = 2{,}947$ și, cum

$$\frac{\bar{x} - m_0}{\hat{\sigma}}\sqrt{n-1} = \frac{42-40}{3{,}5}\sqrt{15} = 2{,}21 < 2{,}947,$$

acceptăm H_0, adică admitem că diferența dintre durata medie observată și cea propusă de standarde este întâmplătoare (s-a presupus că durata operației este o v.a. cu repartiție normală).

18. S-a stabilit că nivelul colesterolului în organismul unui adult este o variabilă aleatoare normală. O selecție aleatoare de $n = 41$ de adulți a dat un nivel mediu observat al colesterolului $\bar{x} = 213$ cu $s^2 = 48{,}4$. Să se testeze ipoteza H_0: $m = m_0 = 200$, cu alternativa H_1: $m = m_1 > 200$ la un prag de semnificație $\alpha = 0{,}05$.

Rezolvare

Considerăm variabila aleatoare:

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ unde } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2,$$

care urmează repartiția Student cu n – 1 grade de libertate. Aplicăm testul T unilateral dreapta. Regiunea critică a ipotezei nule este definită de:

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_{1-\alpha,\, n-1}.$$

Avem: $T_{\text{calculat}} = \dfrac{213-200}{1{,}086} = 11{,}97.$

În tabelele cu valorile funcției de repartiție Student, la 40 de grade de libertate găsim $t_{0,95;\,40} = 1{,}684$. Deoarece $T_{\text{calculat}} > t_{1-\alpha;\, n-1}$, respingem ipoteza H_0 la pragul de semnificație $\alpha = 0{,}05$.

19. Pentru estimarea producţiei unei plante agricole s-au cercetat 15 parcele de aceeaşi suprfafaţă, obţinând: 4075, 4125, 4050, 4075, 4050, 4125, 4100, 4075, 4100, 4100, 4025, 4050, 4025, 4100, 4050. Să se verifice ipoteza H_0: $\sigma^2 = 800$ cu alternativa H_1: $\sigma^2 \neq 800$ la un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}02$, ştiind că producţia plantei este o v.a. normală.

Rezolvare

Ipoteza se va verifica cu testul

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

pentru care avem:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99$$

$$P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2} = 0{,}01.$$

Din tabelele repartiţiei χ^2 la 14 grade de libertate se găsesc valorile $\chi_1^2 = 4{,}66$, $\chi_2^2 = 29{,}1$. Pentru a calcula valoarea testului în cazul în care H_0 este adevărată, avem:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
4075	0	0
4125	50	2500
4050	–25	625
4075	0	0
4050	–25	625
4125	50	2500
4100	25	625
4075	0	0

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
4100	25	625
4100	25	625
4025	–50	2500
4050	–25	625
4025	–50	2500
4100	25	625
4050	–25	625
61125		15000

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{61125}{15} = 4075$$

Deci $\chi^2_{calc.} = \dfrac{15000}{800} = 18{,}75$

Deoarece $\chi_1^2 < \chi^2_{calc.} < \chi_2^2$ $(4{,}66 < 18{,}75 < 29{,}1)$, rezultă că H_0 se acceptă.

20. Precizia unui cântar electronic se verifică cu ajutorul dispersiei măsurătorilor efectuate asupra unui etalon. Dispersia măsuraătorilor nu trebuie să depăşească valoarea nominală $\sigma_0^2 = 0{,}04$. S-au efectuat $n = 11$ cântăriri ale unui etalon şi s-au obţinut rezultatele:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	100,6	99,6	100	100,1	100,3	100	99,9	100,2	100,4	100,6	100,5

Să se verifice la un prag de semnificație $\alpha = 0,05$ dacă cântarul asigură precizia standard stabilită, presupunând că datele selecției sunt observații asupra unei variabile aleatoare normale.

Rezolvare

Avem de testat ipoteza H_0: $\sigma^2 = 0,04$ cu alternativa H_1: $\sigma^2 > 0,04$ (cântarul nu asigură precizia cerută). Ipoteza alternativă H_2: $\sigma^2 < 0,04$ nu prezintă interes, deoarece nu ne temem că precizia cântarului ar fi mai mare decât cea impusă de standarde). Regiunea critică a ipotezei H_0 este dată de inegalitatea:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha;\, n-1},$$

unde $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Cu datele din tabel obținem:

$$\bar{x} = 100,2,\ (n-1)s^2 \cong 1,00 \text{ și } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \cong 25.$$

Din tabele χ^2 cu 10 grade de libertate luăm

$$\chi^2_{0,95;\,10} = 18,3$$

$$\chi^2_{calculat} \cong 25 > 18,3 = \chi^2_{0,95;\,10}$$

Respingem deci ipoteza H_0. Cântarul nu asigură precizia cerută, prin urmare trebuie reglat.

21. Precizia în prelucrare a unui strung automat se verifică cu ajutorul dispersiei dimensiunii controlate a pieselor produse. Disperisa nu trebuie să depășească $\sigma_0^2 = 0,1$. O probă de volum $n = 25$ extrasă la întâmplare a dat rezultatele:

x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
n_i	2	6	9	7	1

Presupunem că x_i sunt observații asupra unei variabuile aleatoare normale. Să se verifice dacă strungul asigură precizia cerută la pragul de semnificație $\alpha = 0,025$.

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,1$ față de H_1: $\sigma^2 > 0,1$.

Pentru calculul lui s_x^2 facem schimbarea $u_i = 10x_i - 39$. Obținem:

u_i	–9	–4	–1	5	6
n_i	2	6	9	7	1

și $$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum n_i u_i\right)^2}{n-1} = 19,91$$

și $$s_x^2 = \frac{s_u^2}{10^2} = 0,2,$$

$$\chi^2_{1-\alpha;\,n-1} = \chi^2_{0,975;\,24} = 39{,}4.$$

Întrucât $\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24\cdot 0{,}2}{0{,}1} = 48 > 39{,}4 = \chi^2_{1-\alpha;\,n-1}$,

respingem H_0, adică strungul nu asigură precizia necesară şi trebuie reglat.

22. Se emite ipoteza că aplicarea unei metode noi de aşchiere scurtează durata de prelucrare a unor piese de acelaşi tip. Pentru verificare se fac câte 10 măsurători ale duratei de aşchiere prin vechea şi noua metodă. Se obţin rezultatele de mai jos în minute:

x_{1i}	58	58	56	38	70	38	42	75	68	67
x_{2i}	57	55	63	24	67	43	33	68	56	54

Să se verifice la pragul $\alpha = 0{,}05$ ipoteza H_0: $m_1 = m_2$ (duratele de prelucrare prin cele două metode sunt egale) faţă de malternativa H_1: $m_1 > m_2$ (noul tip scurtează durata de medie de aşchiere), presupunând că datele sunt observaţii asupra variabilelor aleatoare normale independente X_1 şi X_2 de dispersii egale $\sigma_1 = \sigma_2$.

Rezolvare

Avem $n_1 = n_2 = 10$. Vom aplica testul T unilateral dreapta, având regiunea critică:

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} > t_{1-\alpha;\,n_1+n_2-2},$$

în care $t_{1-\alpha;\,n_1+n_2-2} = t_{0,095;\,18} = 1{,}734$. Pentru calculul statisticii precedente, alcătuim tabelul de mai jos:

nr. c.	metoda veche		metoda nouă	
	x_{1i}(minute)	$(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$	x_{2i}(minute)	$(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$
1	58	1	57	25
2	58	1	55	9
3	56	1	63	121
4	38	361	24	784
5	70	169	67	225
6	38	361	43	81
7	42	225	33	361
8	75	324	68	256
9	68	121	56	16
10	67	100	54	4
$\sum$	$\sum x_{1i} = 570$; $\bar{x}_1 = 57{,}0$	$n_1 s_1^2 = \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 =$ $= 1664$; $s_1^2 = 166{,}4$	$\sum x_{2i} = 520$; $\bar{x}_2 = 52{,}0$	$n_2 s_2^2 = \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 =$ $=1882$; $s_2^2 = 188{,}2$

Prin urmare,

$$\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{57-52}{\sqrt{\frac{1664+1882}{10+10-2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}}=0{,}796<1{,}734,$$

de unde rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza că duratele de prelucrare prin cele două metode sunt aceleași. Aceasta înseamnă că diferența $\bar{x}_1-\bar{x}_2=5$ minute prin folosirea metodei noi este întâmplătoare (din punct de vedere statistic, nesemnificativă).

23. Două selecții independente de volum redus, respectiv $n_1=12$, $n_2=18$ extrase din populații normale independente asupra variabilelor X_1 și X_2 au dat $\bar{x}_1=31{,}2$; $\bar{x}_2=29{,}2$ și dispersiile de selecție modificate $s_1^2=0{,}84$, $s_2^2=0{,}40$. Să se verifice ipoteza H_0: $m_1=m_2$ față de alternativa H_1: $m_1\neq m_2$ ($\alpha=0{,}05$).

Rezolvare

Deoarece dispersiile s_1^2 și s_2^2 sunt diferite, să verificăm dacă această diferență este sau nu semnificativă. Testul F pentru H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

$$F_{\text{calc}}=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{0{,}84}{0{,}40}=2{,}1$$

Cum alternativa este H_1: $\sigma_1^2>\sigma_2^2$, în tabele găsim $F_{n_1-1;\,n_2-1;\,\alpha}=F_{11;\,17;\,0{,}05}=2{,}41$.

Întrucât $F_{\text{calc.}}<F_{n_1-1;\,n_2-1;\,\alpha}$, nu avem motive să respingem H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$, adică la pragul $\alpha=0{,}01$ considerăm că dispersiile σ_1^2 și σ_2^2 nu diferă semnificativ.

Să trecem acum la verificarea ipotezei de egalitate a mediilor. Avem:

$$T_{\text{calc.}}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2-2}}=7{,}8.$$

În tabele găsim $t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n_1+n_2-2}=t_{0{,}975;\,28}=2{,}048$.

Cum $t_{\text{calc.}}=7{,}8>t_{0{,}975;\,28}=2{,}048$, respingem ipoteza H_0: $m_1=m_2$.

24. Prin două medote de măsurare se efectuează măsurători asupra aceleiași mărimi fizice. Prin prima metodă mărimea fizică se măsoară de $n_1=10$ ori și se obține $\bar{x}_1=10{,}28$; $s_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{10}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2=0{,}00084$. Prin metoda a doua se efectuează $n_2=8$ măsurători și se obține $\bar{x}_2=10{,}30$; $s_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{8}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2=0{,}0041$. Se poate considera că cele două metode asigură aceeași precizie în măsurare? ($\alpha=0{,}05$ și presupunem că rezultatele măsurătorilor sunt repartizate normal).

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (ambele metode asigură aceeași precizie) față de alternativa H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (metoda a doua asigură o precizie mai mare). Regiunea critică a ipotezei H_0 este:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\alpha},$$

iar $F_{n_1-1;\, n_2-1;\, 1-\alpha} = F_{9,7;\, 0,95} = 3{,}68$ și $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0{,}00084}{0{,}00041} = 2{,}05 < 3{,}68,$

ceea ce ne conduce la concluzia că nu există motive să respingem ipoteza H_0. Cu alte cuvinte informația pe care o avem referitoare la procizia celor două metode nu ne oferă motive să considerăm că a doua metodă este mai bună decât prima.

25. Se verifică stabilitatea în timp a preciziei unui strung, caracteristica cercetată fiind o anumită dimensiune a pieselor fabricate. În acest scop, la fiecare 30 de minute de iau probe formate din câte 20 de piese. În total se iau $k = 15$ probe și, pe baza datelor observate se calculează dispersiile caracteristicii $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{15}^2$ ale căror valori sunt date în tabelul de mai jos:

Numărul probei	Dispersia s_i^2	Numărul probei	Dispersia s_i^2	Numărul probei	Dispersia s_i^2
1	0,082	6	0,109	11	0,112
2	0,094	7	0,121	12	0,109
3	0,162	8	0,094	13	0,110
4	0,143	9	0,156	14	0,156
5	0,121	10	0,110	15	0,164

Se poate afirma la pragul de semnificație $\alpha = 0{,}05$ că strungul lucrează cu aceeași precizie pe toată durata celor 450 de minute, adică procesul de fabricație al strungului este stabil?

Rezolvare

Avem $n - 1 = 19$ și $k = 15$ grade de libertate. Cu datele din tabel, valoarea calculată pentru testul Cochran este $C = 0{,}089$, iar din tabelul Cochran pentru $\alpha = 0{,}05$, găsim $C(0{,}05;\, 19;\, 15) = 0{,}1386$.

Deoarece $C_{\text{calc.}} = 0{,}089 < C(0{,}05;\, 19;\, 15) = 0{,}1386$, acceptăm ipoteza H_0 de egalitate a dispersiilor $\sigma_1^2 \ldots \sigma_{15}^2$. Prin urmare, strungul a lucrat cu aceeași precizie, deci nu s-a dereglat pe parcursul celor 450 de minute.

26. În problema prcedentă să se verifice la un prag de semnificație $\alpha = 0{,}05$ omogenitatea primelor zece dispersii.

Rezolvare

Valoarea statisticii lui Hartley este

$$H_{calc.} = \frac{\max\limits_i s_i^2}{\min\limits_i s_i^2} = \frac{0{,}162}{0{,}082} = 1{,}975$$

Cum $H^{(k)}_{n-1;\,1-\alpha} = H^{(10)}_{19;\,0{,}95} = 4{,}45$, din tabelul Hartley rezultă că este satisfăcută relația $H < H^{(k)}_{n-1;\,1-\alpha}$, care definește regiunea sde acceptare a ipotezei H_0, prin urmare nu avem motive să respingem ipoteza de omogenitate a celor 10 dispersii.

27. Dispunem de un lot de semifabricate de același tip ce constituie producția în 7 schimburi a unei mașini de forjat, repartizată pe schimburi în modul următor:

Schimbul	1	2	3	4	5	6	7	Total
Prod. bucăți	500	400	300	400	400	500	500	3000 buc.

Din producția fiecărui schimb au fost extrase selecții egale cu 5% din numărul de semifabricate prelucrate în schimbul respectiv. Semifabricatele extase au fost măsurate după înălțime și pentru fiecare selecție s-au calculat estimațiile nedeplasate s_i^2 ale dispersiilor σ_i^2, după cum urmează:

Nr. schimb.	1	2	3	4	5	6	7	Total
n_i	25	20	15	20	20	25	25	150
s_i^2	0,067	0,136	0,168	0,068	0,066	0,102	0,137	

Se cere să se verifice ipoteza omegenității (egalității) dispersiilor, cu alte cuvinte să se verifice ipoteza că nu există dereglări ale mașinii de forjat, examinând împrăștierea dimensiunii pieselor fabricate în cele 7 schimburi.

Rezolvare

Volumele celor $k = 7$ selecții fiind diferite, vom aplica testul Bartlett:

$$B = \frac{1}{c}\left[(n-k)\ln \overline{s}^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln s_i^2\right],$$

unde $$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k}\right),$$

iar $$s_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_j^{(i)} - \overline{X}^{(i)}\right)^2,\ i = 1, \ldots, k, \qquad \overline{s}^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k} s_i^2$$

sunt dispersiile de selecție modificate ale celor k selecții și $\overline{s}^2$ este o estimație a dispersiei generale σ^2.

Calculele se organizează în următorul tabel:

nr. schimb	s_i^2	n_i	n_{i-1}	$(n_i-1)\,s_i^2$	$\frac{1}{n_i-1}$	$\ln s_i^2$	$(n_i-1)\ln s_i^2$
1	0,067	25	24	1,61	0,0417	2,8261	29,826
2	0,136	20	19	2,58	0,0526	1,1335	17,536
3	0,168	15	14	2,35	0,0714	1,2253	11,154
4	0,068	20	19	1,29	0,0526	2,8325	23,818
5	0,066	20	19	1,25	0,0526	2,8195	23,570
6	0,102	25	24	2,45	0,0417	1,0086	24,206
7	0,137	25	24	3,29	0,0417	1,1367	21,281
Total		150	143	14,82	0,3543		146,391

$$\overline{s}^2 = \frac{14,82}{150-7} = 0,104 \text{ mm}^2$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(7-1)}\left(0,3543 - \frac{1}{150-7}\right) = 1,0193$$

$$\log \overline{s}^2 = \ln 1,104 = 1,0170,$$

atunci valoarea calculată a testului Bartlett este

$$B_{calc} = \frac{2,3026}{1,0193}[(150-7)\cdot 1,0178 - 145,391] = 9,13$$

Alegând pragul de semnificație $\alpha = 0,05$, găsim că

$$\chi^2_{1-\alpha;\,k-1} = \chi^2_{0,95;\,6} = 12,6.$$

deoarece am obținut $b = 9,13 < \chi^2_{0,95;\,6}$, rezultă că ipoteza H_0 privind egalitatea dispersiilor este justă, ea nu este infirmată de observații, în sensul că în decursul celor 7 schimburi nu a avut loc o dereglare a mașinii de forjat.

7.2. Teste de concordanță

1. La controlul tehnic de calitate s-au verificat $n = 100$ loturi de produse. Din fiecare lot s-au verificat $N = 10$ produse și s-a obținut următoarea repartiție emipricǎ a variabilei discrete X care reprezintă numărul de produse necorespunzătoare dintr-un lot.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = n = 100$$

(În prima linie figurează numărul x_i al produselor necorespunzătoare dintr-un lot, iar în linia a doua frecvențele n_i, adică numărul de loturi care conțin x_i produse necorespunzătoare). Se cere să se verifice la pragul de semnificație $\alpha = 0,05$ ipoteza că repartiția teoretică a variabilei X este binomială, știind că probabilitatea apariției unui produs necorespunzător la o extragere este $p = 0,3$.

Rezolvare

Avem conform formulei lui Bernoulli:

$$p_i = p_N(x_i) = C_N^{x_i} p^{x_i} q^{N-x_i},\ x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

unde p_i este probabilitatea ca din cele N produse verificate, x_i sunt necorespunzătoare. Cum $p = 0,3$ și $q = 0,7$ obținem:

$$p_0 = p_{10}(0) = (0,7)^{10} = 0,0282;\ p_1 = p_{10}(1) = 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 = 0,1211$$

și analog: $p_2 = 0,2335;\ p_3 = 0,2668;\ p_4 = 0,2001;\ p_5 = 0,1029$.

Frecvențele teoretice sunt $n_i' = np_i$, unde $n = 100$, deci: $n_0' = 2,82;\ n_1' = 12,11;\ n_2' = 23,35;$ $n_3' = 26,68;\ n_4' = 20,01;\ n_5' = 10,29$.

Alcătuim tabelul în care cumulăm frecvențele n_0 și n_1 știind că $n_0 + n_1 = 2,82 + 12,1 = 14,93$.

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i)^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	12	14,93	–2,93	8,5849	0,5750
2	27	23,35	3,65	13,3225	0,5706
3	32	26,68	5,32	28,3024	1,0608
4	23	20,01	2,99	8,9401	0,4468
5	6	10,29	–4,29	18,4041	1,7886

$\Sigma n = 100$ $\hat{\chi}^2 = 4,44$

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{5=(r-1)} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 4,44 < \hat{\chi}^2_{0,95;\,4} = 9,5$$

($r = 6, l = 1$, deci $\chi^2_{1-\alpha;\, r-1-1}$ deoarece am cumulat n_0 și n_1 și nu am estimat nici un parametru).

Vom accepta ipoteza că numărul de produse defecte din problemă urmează o repartiție binomială.

2. În decursul a 100 de zile s-a înregistrat numărul de avarii ale reţelei de conducte pentru canalizare dintr-un oraş, obţiându-se următoarele date:

numărul de avarii X	0	1	2	3	4	5
Frecvenţe n_i	8	28	31	18	9	6

$$n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 100$$

Se cere să se verifice ipoteza că variabila X (numărul de avarii) urmează o lege de repartiţie Poisson ($\alpha = 0{,}05$).

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0: $F(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ cu

$$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i x_i}{n} = \frac{8\cdot 0+28\cdot 1+31\cdot 2+18\cdot 3+9\cdot 4+6\cdot 5}{100} = 2{,}1.$$

Probabilităţile teoretice p_i de apariţie a exact x_i avarii în decursul a n zile se calculează cu ajutorul repartiţiei Poisson:

$$p_i = P_n(x_i) = \frac{\hat{\lambda}^{x_i} e^{-\hat{\lambda}}}{x_i!};\ x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Alcătuim tabelul:

x_i	n_i	p_i	$n_i' = np_i$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
0	8	0,122	12,2	17,64	1,45
1	28	0,257	23,7	5,29	0,21
2	31	0,270	27,0	16,00	0,59
3	18	0,189	18,9	0,81	0,04
4	9	0,099	9,9	0,81	0,08
5	6	0,063	6,3	0,03	0,01
Σ	1001	1,000	100,0		$\hat{\chi}^2 = 2{,}38$

Luând $\alpha = 0{,}05$, iar numărul gradelor de libertate $\nu = r - 1 - 1 = 6 - 2 = 4$, rezultă valoarea critică $\chi^2_{1-\alpha;\,4} = \chi^2_{0{,}95;\,4} = 9{,}488$.

$$\chi^2_{0{,}95;\,4} > \hat{\chi}^2 = 2{,}38$$

deci vom accepta ipoteza că numărul de avarii X urmează o lege Poisson.

3. Ca rezultat al încercării a $n = 200$ de elemente în ce priveşte durata lor de funcţionare, s-a obţinut repartiţia empirică:

$x_i - x_{i+1}$	n_i
0 – 5	133
5 – 10	45
10 – 15	15
15 – 20	4
20 – 25	2
25 – 30	1

În prima coloană figurează intervalul de timp în ore, iar în coloana a doua frecvenţele n_i, adică numărul de elemente ce funcţionează în intervalul corespunzător. Se cere să se verifice la pragul de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$, ipoteza că durata de funcţionare X a elementelor are o repartiţie exponenţială.

Rezolvare

Se ştie că în cazul repartiţiei exponenţiale $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$

şi cum $\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{133 \cdot 2{,}5 + 45 \cdot 7{,}5 + 15 \cdot 12{,}5 + 4 \cdot 17{,}5 + 2 \cdot 22{,}5 + 1 \cdot 27{,}5}{200} = \frac{1000}{200} = 5.$

Deci $\hat{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

Densitatea de repartiţie a duratei de funcţionare X va fi:

$$f(x) = (0{,}2)\, e^{-0{,}2 \cdot x}$$

$$p_i = P(x_i < C < x_{i+1}) = \hat{\lambda}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\lambda} \cdot e^{-\hat{\lambda}x}\, dx = e^{-\hat{\lambda}x_i} - e^{-\hat{\lambda}x_{i+1}}$$

Avem astfel: $p_1 = P(0 < X < 5) = e^{-0{,}2 \cdot 0} - e^{-0{,}2 \cdot 1} = 1 - e^{-1} = 0{,}6321.$

Analog: $p_2 = 0{,}2326$; $p_3 = 0{,}0855$; $p_4 = 0{,}0315$; $p_5 = 0{,}0116$; $p_6 = 0{,}0043$.

Frecvenţele teoretice $n_i' = np_i = 200\,p_i$. Obţinem:

$n_1' = 126{,}42$; $n_2' = 46{,}52$; $n_3' = 17{,}10$; $n_4' = 6{,}30$; $n_5' = 2{,}32$; $n_6' = 0{,}86$.

Cumulăm ultimele trei frecvenţe relative $n_6 + n_5 + n_4 = 1 + 2 + 4 = 7$ şi corespunzător numărul gradelor de libertate scade cu 2 unităţi, iar $n_6' + n_5' + n_4' = 0{,}86 + 2{,}32 + 6{,}30 = 9{,}48$.

Alcătuim tabelul:

i	n_i	$n_i' = np_i$	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	133	126,42	6,58	43,2964	0,3425
2	45	46,52	−1,52	2,3104	0,0497
3	15	17,10	−2,10	4,4100	0,2579
4	7	9,48	−2,48	6,1504	0,6488
Σ	200				$\hat{\chi}^2 = 1{,}30$

Luând $\alpha = 0{,}05$ şi la $v = (6 - 1) - 2 - 1 = 2$ grade de libertate (deoarece am estimat un parametru) găsim limita critică: $\chi^2_{1-\alpha;\,v} = \chi^2_{0{,}95;\,2} = 6$.

Deoarece $\hat{\chi}^2 = 1{,}30 < \chi^2_{0{,}95;2} = 6$, acceptăm ipoteza că durata de funcţionare X urmează o lege exponenţială.

4. S-au efectuat $n = 200$ de probe, rezultatul fiecăreia dintre ele fiind un eveniment care apare la diferite momente. S-a obținut repartiția empirică de mai jos (în prima coloană sunt intervale de timp în minute, iar în coloana a doua frecvențele corespunzătoare n_i, adică numărul de apariții ale evenimentului în intervalul respectiv). Se cere să se verifice ipoteza că momentele aparițiilor evenimentului urmează o repartiție *uniformă* ($\alpha = 0{,}05$).

Intervale $x_{i-1} - x_i$	Frecvențe n_i	$x_{i-1} - x_i$	Frecvențe n_i
2 – 4	21	12 – 14	14
4 – 6	16	14 – 16	21
6 – 8	15	16 – 18	22
8 – 10	26	18 – 20	18
10 – 12	22	20 – 22	25

Rezolvare

Se știe că densitatea de repartiție a legii uniforme este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Am văzut de asemenea (ex.) că estimațiile parametrilor a și b sunt:

$$\hat{a} = \hat{X} - s\sqrt{3}\,;\ \hat{b} = \overline{X} + s\sqrt{3},$$

unde s este abaterea medie pătratică de selecție.

Prin urmare $f(x) = \dfrac{1}{b^* - a^*}$, iar frecvențele teoretice se calculează succesiv:

$$n_1' = nP_1 = n[f(x)(x_1 - a^*)] = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*}(x_1 - a^*);$$

$$n_2' = n_3' = \ldots = n'_{s-1} = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*}(x_{is} - x_{i-1});\ i = 1, 2, \ldots, s-1.$$

$$n_s' = n \cdot \frac{1}{b^* - a^*}(b^* - x_{s-1}).$$

Numărul gradelor de libertate al variabilei χ^2 din testul lui Pearson este $k = r - 1 - l - s$, unde r este numărul de intervale, l numărul de intervale ce dispar prin contopire și $s = 2$ numărul de parametri estimați.

Luând $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ = mijlocul intervalului $[x_{i-1}, x_i]$, repartiția empirică este:

x_i^*	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Pe baza datelor precedente $\overline{X} = 12{,}21$; $s = 5{,}81$

Prin urmare $a^* = 12{,}21 - 1{,}73 \cdot 5{,}81 = 2{,}16$

$b^* = 12{,}21 - 1{,}73 \cdot 5{,}81 = 22{,}26$

Apoi legea de repartiție

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*} = \frac{1}{22{,}26 - 2{,}16} = 0{,}05$$

Frecvențele teoretice sunt:

$n_1' = nf(x)\,(x_1 - a^*) = 200 \cdot 0{,}05(4 - 2{,}16) = 18{,}4$

$n_2' = 200 \cdot 0{,}05\,(x_2 - x_1) = 10\,(6 - 4) = 20$

$n_3' = n_4 = .. = n_8' = n_9' = 20;$

$n_{10}' = 200 \cdot 0{,}05(b^* - x_9) = 10\,(22{,}26 - 20) = 2{,}26 \cdot 10 = 22{,}6$

La un prag de semnificație $\alpha = 0{,}05$ și $r - 1 - l - s = 7$ grade de libertate găsim

$$\chi^2_{0{,}05;7} = 14{,}1.$$

Calculele pentru obținerea statisticii testului:

i	n_i	n_i	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i)^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	21	18,4	2,6	6,76	0,37
2	16	20	–4	16,00	0,80
3	15	20	–5	25	1,25
4	26	20	6	36	1,80
5	22	20	2	4	0,20
6	14	20	–6	36	1,80
7	21	20	1	1	0,05
8	22	20	2	4	0,20
9	18	20	–2	4	0,20
10	25	22,6	2,4	5,76	0,25

$$\chi^2_{calculat} = 6{,}92.$$

$\chi^2_{calculat} = 6{,}92 < 14{,}1 < \chi^2_{0{,}05;\,7}$ și deci acceptăm ipoteza că legea este uniformă.

5. Rezultatele măsurării rezistenței la presiunea X a n 200 de module de beton au condus la repartiția empirică din tabelul de mai jos:

Intervale pentru rezistență kg/cm^2	Frecvențe n_i
190 – 200	10
200 – 210	26
210 – 220	56
220 – 230	64
230 – 240	30
240 – 250	14

$$\sum n_i = n = 200$$

Să se testeze folosind testul lui Pearson ipoteza de normalitate a repartiției rezistenței la presiune X la un prag de semnificație $\alpha = 0{,}05$.

Rezolvare

Avem: $\hat{m} = \overline{X} = \dfrac{\sum x_i^* n_i}{n} = \dfrac{195 \cdot 10 + 205 \cdot 26 + \ldots + 245 \cdot 14}{200} = 221$ kg/cm^2,

unde $\quad x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ sunt mijloacele intervalelor

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i^* - \overline{X}\right)^2 n_i = \frac{1}{200}\left[(-26)^2 \cdot 10 + \ldots + 24^2 \cdot 14\right] = 152$$

$$\hat{\sigma} = S = 12{,}33 \text{ kg/cm}^2.$$

$$p_i = P(x_{i-1} \le X < x_i) = \frac{1}{2}[\Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})],\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

unde $\quad z_i = \dfrac{x_i^* - \overline{X}}{S}$; $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{z_i} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

În vederea calculului statisticii χ^2 alcătuim tabelul următor:

Intervale	Frecvențe n_i	Intervale $[z_i, z_{i+1}]$	$p_i = \frac{1}{2}[\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)]$	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
190–200	10	$(-\infty, -1{,}70)$	0,015	9	1	0,11
200–210	26	$[-1{,}70; -0{,}89)$	0,142	28,4	5,76	0,20
210–220	56	$[-0{,}89; -0{,}08)$	0,281	56,2	0,04	0,00
220–230	64	$[-0{,}08; 0{,}73)$	0,299	59,8	17,64	0,29
230–240	30	$[0{,}73; 1{,}54)$	0,171	34,2	17,64	0,52
240–250	14	$[1{,}54; +\infty)$	0,062	12,4	2,56	0,23
Σ	200		1,000	200,0		= 1,35

Observație

Valoarea $\dfrac{190 - 221}{12{,}33} = -2{,}51$ s-a înlocuit cu $-\infty$; analog valoarea $\dfrac{250 - 221}{12{,}33} = 2{,}35$ s-a înlocuit cu $+\infty$.

Avem $r = 6$; $l = 0$; $s = 2$,

deci $\quad \chi^2_{0{,}05;\,3} = 7{,}815$

și deoarece $\chi^2_{\text{calculat}} = 1{,}35 < 7{,}815$ se acceptă ipoteza de normalitate.

6. În problema precedentă să se testeze ipoteza de normalitate folosind testul lui Kolmogorov și luând $\alpha = 0{,}01$.

Rezolvare

S-a obținut $\hat{m} = \overline{X} = 221$ kg/cm^2; $\hat{\sigma} = S = 12{,}33$ kg/cm^2 estimații bune ale parametrilor m și σ, având în vedere volumul mare $n = 200$ al selecției.

Intervale $[x_i, x_{i+1})$ kg/cm^2	Frecvențe n_i	Intervale normate $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$F^*(x_{i+1})$ Funcție empirică de repartiție	Funcția teoretică de repartiție $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(z_{i+1}))$	$\|F^*(x) - F(x)\|$
< 190	0	(−∞; −2,51)	0,00	0,006	0,006
190-200	10	[−2,51; −1,70)	0,05	0,045	0,065
200-210	26	[−1,70; −0,89)	0,18	0,187	0,007
210-220	56	[−0,89; −0,08)	0,46	0,468	0,008
220-230	64	[−0,08; +0,73)	0,78	0,767	0,013
230-240	30	[0,73; 1,54)	0,93	0,938	0,008
240-250	14	[1,54; +∞)	1,00	1,000	0,000
	200				

$$d_n = \max_x |F^*(x) - F(x)| = 0{,}013;\ d_{n,\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{\lambda_{0,01}}{\sqrt{200}} = \frac{1{,}224}{\sqrt{200}} = 0{,}086$$

Cum $d_n < d_{n,\alpha}$, se acceptă ipoteza de normalitate.

7. S-a cercetat un lot de 1000 de lămpi electronice de un anumit tip, caracteristica sub cerecetare, T, fiind durata lor de funcționare fără defectări. În tabelul de mai jos sunt date intervalele de funcționare în ore a lămpilor până la ieșirea lor din funcțiune (t_i, t_{i+1}) și frecvențele absolute n_i. Se cere să se testeze ipoteza că durata T de funcționare are o repartiție Weibull ($\alpha = 0{,}01$).

(t_i, t_{i+1})	n_i	(t_i, t_{i+1})	n_i
0-100	78	500-600	107
100-200	149	600-700	77
200-300	174	700-800	50
300-400	165	800-900	32
400-500	139	900-1000	27
		>1000	2
			1000

Rezolvare

Ne propunem să testăm ipoteza H_0 aplicând testul lui Kolmogorov. Pe baza datelor din tabel găsim:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{11} n_i t_i}{\sum n_i} = 391{,}4 \text{ și } s_T = \sqrt{\frac{\sum n_i (t_i - \bar{t})^2}{\sum n_i - 1}} = 228{,}1,$$

t_i fiind mijloacele intervalelor.

Conform problemei precedente, găsim $\hat{V}_T = \frac{s_T}{\bar{t}} = 0{,}58$ și din tabel citim $\lambda = 1{,}8$.

La problema precedentă am găsit că pentru repartiția Weibull avem:

$$M(T) = a = b_\lambda \cdot \theta^{\frac{1}{2}}.$$

Ținând seama de relația precedentă, funcția de repartiție este:

$$F(t,\lambda) = 1 - e^{-\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^\lambda},$$

iar b_λ se ia din tabel și este $b_\lambda = 0{,}889$.

t	$\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^2$	$e^{-\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^2}$	$1-e^{-\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^2}$
50	0,019	0,981	0,019
150	0,142	0,868	0,132
250	0,356	0,700	0,300
350	0,653	0,521	0,479
450	1,026	0,351	0,642
550	1,473	0,229	0,771

t	$\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^2$	$e^{-\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^2}$	$1-e^{-\left(\frac{b_\lambda t}{\bar{t}}\right)^2}$
650	1,989	0,137	0,863
750	2,573	0,076	0,924
850	3,224	0,040	0,960
950	3,938	0,019	0,981
1050	4,716	0,009	0,991

Valorile corespunzătoare ale funcției de repartiție teoretice $F(t)$ se calculează în tabel folosind formula dată.

Tabelul corespunzător testul;ui lui Kolmogorov ne conduce, pentru nivelul de semnificație $\varepsilon = 0{,}01$ la valoarea $\lambda_0 = 1{,}63$. Deoarece

$$0{,}101 = \max |F_n(t) - F(t)| < \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}63}{\sqrt{11}} = 0{,}49,$$

acceptăm ipoteza H_0.

i	t_i	n_i	$n_i t_i$	$n_i(t_i - \bar{t})^2$	$F_n(t_i)$	$F(t_i)$	$\lvert F_n(t_i) - F(t_i)\rvert$
1	50	78	3900	9091208,8	0,078	0,019	0,059
2	150	149	22350	8682820,0	0,227	0,132	0,095
3	250	174	43500	279915,4	0,401	0,300	0,101 max
4	350	165	577750	282803,4	0,566	0,479	0,087
5	450	139	62550	477320,4	0,705	0,642	0,063
6	550	107	58850	2691473,7	0,812	0,771	0,041
7	650	77	50050	5149294,9	0,889	0,863	0,026
8	750	50	37500	6429698,0	0,939	0,924	0,015
9	850	32	27200	6730646,7	0,971	0,960	0,011
10	950	27	25650	8424916,9	0,998	0,981	0,017
11	1050	2	2100	867507,9	1,000	0,991	0,009
Total:		1000	391400	51977580,1			

8. Cu ajutorul unui aparat de control a fost măsurată distanța X (în microni) a orificiului axului centrat până la axul geometric al suprafeței cilindrice a unei piese pentru 602 piese. Rezultatele măsurătorii sunt cele din tabelul de mai jos:

Intervale (x_{i-1}, x_i)	Frecvenţe n_x
0-16	40
16-32	129
32-48	140
48-64	126
64-80	91

Intervale (x_{i-1}, x_i)	Frecvenţe n_x
80-96	88
96-112	104
112-128	120
128-144	136
144-160	152

Să se verifice ipoteza că distanţa X urmează o lege Reyligh ($\alpha = 0,01$).

Rezolvare

Se ştie că legea Reyligh are densitatea de repartiţie:

$$f(x, \theta) = \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x > 0, \theta > 0.$$

Se poate calcula media variabilei X şi se găseşte

$$M(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\theta} = a.$$

Avem $\overline{X} = \hat{a} = \frac{\sum x n_x}{\sum n_x} = \frac{30080}{602} = 49,967,$

iar pentru estimaţia lui θ din relaţia $\hat{\theta} = \frac{4\hat{a}}{\pi}$, găsim $\hat{\theta} = 3180,62.$

Valorile corespunzătoare funcţiei de repartiţie

$$F(x, \theta) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}$$

sunt date în tabelul de mai jos, coloana 7.

Intervale (x_{i-1}, x_i)	x	Frecv. abs.	xN_x	$F_n(x)$	$\frac{x}{\sqrt{\theta}}$	$F(x)$	$F_n(x) - F(x)$
0-16	8	40	320	0,066	0,142	0,005	0,061
16-32	24	129	3096	0,281	0,426	0,077	0,204
32-48	40	140	5600	0,513	0,710	0,217	0,296
48-61	56	126	7056	0,723	0,993	0,393	0,330 max
64-80	72	91	6552	0,874	1,278	0,570	0,304
80-96	88	45	3960	0,948	1,561	0,722	0,226
96-112	104	19	1976	0,980	1,845	0,802	0,178
112-129	120	8	970	0,993	2,129	0,890	0,103
128-144	136	3	408	0,998	2,413	0,944	0,054
144-160	152	1	152	1,00	2,697	0,974	0,026
Total:	–	602	30080				

Considerând pragul de semnificaţie $\alpha = 0,01$ tabelul corespunzător testului lui Kolmogorov ne conduce la valoarea $\lambda_\alpha = 1,63$ şi deci $\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{1,63}{\sqrt{10}} = 0,516.$

Deoarece $\max |F_n(x) - F(x)| < \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$, acceptăm ipoteza.

7.3. Probleme propuse

1. O selecție de volum $n = 20$ dintr-o populație normală a condus la rezultatele:

x_i	34,8	34,9	35	35,1	35,3
n_i	2	3	4	6	5

Să se verifice la pragul de semnificație $\alpha = 0{,}05$ ipoteza H_0: $m = m_0 = 35$ cu alternativa H_1: $m \neq 35$.

Răspuns: Se aplică testul T bilateral. Se respinge H_0.

2. Dintr-o populație normală s-a extras o selecție de volum $n = 21$ care a dat $S^2 = 16{,}2$. Să se verifice ipoteza: H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$. cu alternativa H_1; $\sigma^2 > 15$ la pragul de semnificație $\alpha = 0{,}01$.

Răspuns: Se aplică testul χ^2 unilateral dreapta. Se acceptă H_0.

3. O selecție de volum $n = 31$ dintr-o populație normală a dat rezultatele:

x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12
n_i	1	3	7	10	6	3	1

Să se verifice ipoteza H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$ față de altenativa H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$ la pragul de semnificație $\alpha = 0{,}05$.

Răspuns: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \approx 45 > 43{,}7 = \chi^2_{0,95;\,30}$.

Conform testului χ^2 unilateral dreapta, rspingem ipoteza H_0.

4. Fie H_0 ipoteza nulă și H_1 alternativa sa. Dacă $\alpha = 0{,}01$ și $\beta = 0{,}005$ resprezintă respectiv riscurile de genul I și II, care este probabilitatea respingerii ipotezei H_0 când aceasta nu este adevărată? Dar probabilitatea acceptării ipotezei H_0 când este adevărată?

Răspuns: $1 - \beta = 0{,}995$; $1 - \alpha = 0{,}990$.

5. Dintr-o populație normaă cu $\sigma = 5$ s-au extras două selecții de volum $n = 9$. Selecțiile au dat respectiv $\bar{x}_1 = 2$ și $\bar{x}_2 = 3$. Se poate afirma la un prag de semnificație $\alpha = 0{,}05$ că diferența înregistrată este întâmplătoare?

Răspuns: În urma aplicării testului Z bilateral pentru verificarea ipotezei H_0: $m_1 = m_2$ cu alternativa, se poate afirma că diferența înregistrată este întâmplătoare.

6. Pentru a compara două tipuri de germeni de grâu se aleg la întâmplare 7 parcele de câte 1 ha şi se însămânţează fiecare parcelă, jumătate cu germeni de tipul A şi jumătate cu germeni de tipul B. Producţia agricolă obţinută este prezentată în tabelul următor:

Parcela	1	2	3	4	5	6	7
A	68	82	95	109	112	76	81
B	66	88	106	121	116	79	89

În ipoteza că producţia agricolă este o variabilă aleatoare normală, decideţi dacă tipul de germeni B este mai bun ($\alpha = 0{,}05$).

7. O firmă producătoare de cosmetice constată scăderea cifrei de afceri de când o firmă concurentă a lansat pe piaţă un produs nou. Pentru a stabili dacă această scădere este semnificativă, se cercetează volumul încasărilor săptămânale cu $n_1 = 20$ săptămâni înaintea lansării noului produs de către firma concurentă şi cu $n_2 = 32$ de săptămâni după. Se obţin următoarele rezultate:

$$\bar{x} = 33{,}8,\ y = 30{,}9,\ \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 763,\ \sum_{i=1}^{32}(y_i - \bar{y})^2 = 875.$$

În ipoteza că volumul încasărilor săptămânale este o variabilă aleatoare normală, să se decidă la pragul de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$ dacă scăderea încasărilor este semnificativă, presupunând că $\sigma_1 = \sigma_2$.

Răspuns: se verifică ipoteza H_0: $m_1 = m_2$ cu alternativa H_1: $m_1 > m_2$; $t_{calc.} \approx 1{,}78 > 1{,}68 = t_{0,95;\,50}$. Deci scăderea încasărilor este semnificativă.

8. Din două loturi de piese prelucrate la două maşini diferite s-au extras selecţii de volume $n_1 = 10$ şi $n_2 = 12$ obţinându-se următoarele rezultate asupra diametrului pieselor

x_i	3,4	3,5	3,7	3,9
n_{1i}	2	3	4	1

y_i	3,2	3,4	3,6
n_{2i}	2	2	8

Să se verifice ipoteza H_0: $m_1 = m_2$ faţă de alternativa H_1: $m_1 \neq m_2$, presupunând că diametrul pieselor fabricate este o variabilă aleatoare normală.

Răspuns: Se testează mai întâi H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ cu alternativa H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ şi se acceptă ipoteza egalităţii dispersiilor. Se acceptă H_0.

8

CORELAŢIE ŞI REGRESIE

8.1. Probleme rezolvate

1. Să se estimeze prin metoda verosimilităţii maxime parametrii $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$ ($\rho \neq \pm 1$) ai repartiţiei normale bidimensionale cu densitatea:

$$f(x,y;m_x,m_y,\sigma_x,\sigma_y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

Rezolvare

Fie o selecţie de volum n din populaţia normală bidimensională $\{(x_i,y_i),\ i=\overline{1,n}\}$.

$$L((x_k,y_k),m_x,m_y,\sigma_x,\sigma_y\,\rho)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k,y_k;\ldots)=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n\cdot e^{-\frac{1}{1(1-\rho^2)}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

$$\ln L=-n\ln\left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right].$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial m_x}=\frac{1}{1-\rho^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x_k-m_x}{\sigma_x^2}-\frac{\rho(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-m_x}{\sigma_x^2}=\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}\sum_{k=1}^{n}(y_k-m_y)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial m_y}=\frac{1}{1-\rho^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k-m_y}{\sigma_y^2}-\frac{\rho(x_k-m_x)}{\sigma_x\sigma_y}\right)=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-m_y}{\sigma_y^2}=\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sigma_x}\sum x_k-\frac{n}{\sigma_x}m_x=\frac{\rho}{\sigma_y}\sum y_k-\frac{n\rho}{\sigma_y}m_y & \Big|\cdot\rho\\ \frac{1}{\sigma_y}\sum y_k-\frac{n}{\sigma_y}m_y=\frac{\rho}{\sigma_x}\sum x_k-\frac{n\rho}{\sigma_x}m_x\end{cases}$$

$$\frac{\rho}{\sigma_x}\sum x_k+\frac{1}{\sigma_y}\sum y_k-\frac{n}{\sigma_y}m_y=\frac{\rho^2}{\sigma_y}\sum y_k-\frac{n\rho^2}{\sigma_y}m_y+\frac{\rho}{\sigma_x}\sum x_k$$

$$\left(\frac{n\rho^2}{\sigma_y}-\frac{n}{\sigma_y}\right)m_y=\left(\frac{\rho^2}{\sigma_y}-\frac{1}{\sigma_y}\right)\sum y_k \Rightarrow \hat{m}_y=\frac{1}{n}\sum y_k=\bar{y}\,.$$

Analog rezultă $\hat{m}_x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\bar{x}$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial(\sigma_x^2)}=0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial(\sigma_y^2)}=0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial\rho}=0\end{cases}$$

$$\ln L=-n\ln 2\pi-\frac{n}{2}\left[\ln\sigma_x^2+\ln\sigma_y^2+\ln(1-\rho^2)\right]-$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial(\sigma_x^2)}=-\dfrac{n}{2\sigma_x^2}-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{-\sum(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^4}+\rho\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x^3\sigma_y}\right]=\\ \qquad=-\dfrac{1}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\left[n(1-\rho^2)-\dfrac{\sum(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\rho\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial(\sigma_y^2)}=-\dfrac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left[n(1-\rho^2)-\dfrac{\sum(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}+\rho\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial\rho}=\dfrac{n\rho}{1-\rho^2}-\dfrac{1}{(1-\rho^2)^2}\left[\rho\left(\dfrac{\sum(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\dfrac{\sum(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]\\ \qquad-(1+\rho^2)\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\quad n(1-\rho^2)=\dfrac{\sum(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\rho\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\\ (2)\quad n(1-\rho^2)=\dfrac{\sum(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\rho\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\\ (3)\quad n(1-\rho^2)=\dfrac{\sum(x_k-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\dfrac{\sum(y_k-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\dfrac{1+\rho^2}{\rho}\cdot\dfrac{\sum(x_k-m_x)(y_k-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\end{cases}$$

$$-(3) + [(1) + (2)] \Leftrightarrow n(1-\rho^2) = \frac{1-\rho^2}{\rho} \cdot \frac{\sum (x_k - m_x)(y_k - m_y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} = r = \frac{\sum (x_k - m_x)(y_k - m_y)}{n \sigma_x \sigma_y}$$

$$n\left(1 - \frac{\left(\sum (x_k - m_x)(y_k - m_y)\right)^2}{n^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2}\right) = \frac{\sum (x_k - m_y)^2}{\sigma_x^2} - \frac{\left[\sum (x_k - m_y)(y_k - m_y)\right]^2}{n \sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 .$$

Analog $\Rightarrow \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (y_k - m_y)^2$

şi cum $\hat{m}_x = \bar{x}$, $\hat{m}_y = \bar{y} \Rightarrow$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \; ; \; \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (y_k - \bar{y})^2 \; ;$$

$$\hat{\rho} = r = \frac{1}{n \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (y_k - \bar{y})^2}} .$$

2. La 14 întreprinderi dintr-un anumit sector s-au înregistrat productivitatea muncii anuală pe muncitor şi gradul de utilare energetică de asemenea pe fiecare muncitor. S-au obţinut datele din tabelul alăturat.

Se cere să se determine ecuaţia liniei de regresie a lui Y în raport cu X (Y = productivitatea muncii în funcţie de X = energoutilarea), precum şi coeficientul de corelaţie de selecţie.

Nr. întrepr. i	Productivitatea muncii mii lei/muncitor y_i	Energoutilarea kwt/muncitor x_i
1	6,7	2,8
2	6,9	2,8
3	7,2	3,0
4	7,3	2,9
5	8,4	3,4
6	8,8	3,9
7	9,1	4,0
8	9,8	4,8
9	10,6	4,9
10	10,7	5,2
11	11,1	5,4
12	11,8	5,5
13	12,1	6,2
14	12,4	7,0

Rezolvare

Avem:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{132,9}{14} = 9,4928;$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{61,8}{14} = 4,4143$$

$$x_i' = x_i - \bar{x}\,;\ y_i' = y_i - \bar{y}\,.$$

$$\sum (x_i')^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 296{,}8 - 14 \cdot 4{,}4143^2 = 23{,}9973$$

$$\sum x_i' y_i' = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 622{,}81 - 14 \cdot 4{,}4143 \cdot 9{,}4928 = 34{,}7516$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sum (x_i')^2} = \frac{34{,}7516}{23{,}9973} = 1{,}4481$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 9{,}4928 - 1{,}4481 \cdot 4{,}4143 = 3{,}1003$$

Ecuaţia va fi

$$\bar{y}_x = \hat{a} + \hat{b}x = 3{,}1003 + 1{,}4481x.$$

Coeficientul de corelaţie este

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i' y_i'}{\sqrt{\sum (x_i')^2 \sum (y_i')^2}} = \frac{34{,}7516}{\sqrt{23{,}9973 \cdot 52{,}35}} = 0{,}98,$$

unde $\sum (y_i')^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y} = 1313{,}95 - 14 \cdot 9{,}4928^2 = 52{,}35.$

3. O selecţie de volum $n = 11$ extrasă dintr-o populaţie normală bidimensională (X, Y) a dat un coeficient de corelaţie $r_{xy} = 0{,}76$. Să se verifice la pragul de semnificaţie $\alpha = 0{,}01$ ipoteza H_0: $\rho = 0$, faţă de alternativa H_1: $\rho \neq 0$.

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0; $\rho = 0$, faţă de alternativa H_1: $\rho \neq 0$.

Se foloseşte statistica

$$\hat{t} = r_{xy} \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}},$$

care, când este adevărată, are o repartiţie Student cu $n - 2$ grade de libertate.

Regiunea critică a ipotezei H_0 este dată de inegalitatea

$$|\hat{t}| \geq t_{\frac{\alpha}{2};n-2},$$

iar cea de acceptare de:

$$|\hat{t}| < t_{\frac{\alpha}{2};n-2}.$$

Avem: $\hat{t} = r_{xy} \cdot \dfrac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} = 0{,}76 \cdot \dfrac{\sqrt{11-2}}{\sqrt{1-(0{,}76)^2}} = 3{,}50$

Întrucât $|\hat{t}| = 3{,}50 > 3{,}25 = t_{\frac{\alpha}{2};n-2} = t_{0{,}005;9}$.

Rezultă că coeficientul de corelaţie al selecţiei diferă semnificativ de zero, adică X şi Y sunt corelate (respingem H_0).

4. Se fac $n = 150$ de măsurători ale diametrului tuburilor în două plane perpendiculare unul pe altul. Se cere să se verifice ipoteza H_0: $\rho = 0,5$ față de alternativa H_1: $\rho \neq 0,5$ cunoscând că $r_{xy} = 0,5273$.

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0: $\rho = \rho_0$ față de alternativa H_1: $\rho \neq \rho_0$. Vom aplica un test Z care folosește statistica

$$\hat{Z} = \frac{W - m_W}{\sigma_W},$$

unde $$W = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}},\ m_W = M(W) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} + \frac{\rho_0}{2(n-1)}$$

și $$\sigma_W^2 \approx \frac{1}{n-3}.$$

Regiunea critică a ipotezei H_0 este $|\hat{Z}| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ și regiunea de acceptare este: $|\hat{Z}| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Avem: $$W = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,5273}{1-0,5273} = 0,5862$$

$$m_W = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,5}{1-0,5} + \frac{0,5}{2\cdot 149} = 0,5510$$

și $$\sigma_W = \frac{1}{\sqrt{147}} = 0,082;\ Z = \frac{0,5862-0,5510}{0,082} = 0,43$$

Pentru $\alpha = 0,05$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,025} = 1,96$.

Întrucât $Z = 0,43 < 1,96$ nu respingem H_0. Înseamnă că selecție formată cu cele 150 de observații a fost extrasă dintr-o populație normală bidimensională al cărui coeficient de corelație $\rho_{XY} = 0,5$.

5. Pentru compararea a două sorturi de oțel s-au cercetat la fiecare sort două caracteristici: fluiditatea φ și durabilitatea δ. S-au cercetat $n_1 = 60$ probe de oțel de primul tip și s-a determinat coeficientul de corelație $r_{xy}^{(1)} = 0,9207$ (X = limita fluidității φ în kg/mm^2 și Y = limita durabilității δ în kg/mm^2). De asemenea s-au cercetat $n_2 = 90$ de probe de oțel din cel de-al doilea sort de oțel și s-a găsit $r_{xy}^{(2)} = 0,8232$. Se întreabă dacă există o diferență semnificativă între cele două sorturi de oțel în ce privește legătura dintre cele două caracteristici, cu alte cuvinte pot fi socotite cele două selecții ca aparținând unor populații normale cu același coeficient de corelație?

Rezolvare

Avem de verificat ipoteza H_0: $r_{xy}^{(1)} = r_{xy}^{(2)}$ față de alternativa H_1: $r_{xy}^{(1)} \neq r_{xy}^{(2)}$.

Folosim testul Z având statistica:

$$Z = \frac{W_1 - W_2}{\sqrt{\sigma_{W_1}^2 + \sigma_{W_2}^2}},$$

în care: $W_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}^{(1)}}{1-r_{xy}^{(1)}}$; $W_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}^{(2)}}{1-r_{xy}^{(2)}}$,

unde $r_{xy}^{(1)}$ și $r_{xy}^{(2)}$ sunt coeficienții de corelație ai celor două selecții independente de volume n_1, respectiv n_2 și

$$\sigma_{W_1}^2 = \frac{1}{n_1-3};\ \sigma_{W_2}^2 = \frac{1}{n_2-3}.$$

Statistica Z are pentru n_1 și n_2 mari o repartiție normală $N(0, 1)$. Regiunea critică pentru ipoteza H_0 este după cum se știe $|z| \geq z_\alpha$, α fiind pragul de semnificație dat.

Obținem:

$$W_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}^{(1)}}{1-r_{xy}^{(1)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,9207}{1-0,9207} = \frac{1}{2}\ln 24,22 = 1,5932;$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}^{(2)}}{1-r_{xy}^{(2)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,8232}{1-0,8232} = \frac{1}{2}\ln 10,31 = 1,1661.$$

Valoarea criteriului este:

$$Z = \frac{W_1 - W_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}} = \frac{1,5932-1,1661}{\sqrt{\frac{1}{57}+\frac{1}{87}}} = \frac{0,4271}{0,1704} \approx 2,506.$$

Pentru $\alpha = 0,01$, găsim $Z_{0,01} = 2,576$ și cum $2,506 < 2,57$, acceptăm ipoteza H_0, adică cei doi coeficienți de corelație sunt egali și diferența dintre coeficieții de corelație $r_{xy}^{(1)}$ și $r_{xy}^{(2)}$ poate fi socotită întâmplătoare.

6. Să se scrie ecuația liniei de regresie a lui Y în raport cu X pentru datele din problema 4 dacă $\Sigma x_i = 1173$, $\Sigma y_i = 1179$, $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 3543$, $\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 4537,5$.

Rezolvare

Vom determina ecuația liniei de regresie a lui Y în raport cu X, care permite să estimăm dependența corelativă liniară între cele două caracteristici X și Y. Pentru o valoare fixă arbitrară x a lui X variabila Y are în populația generală o repartiție normală $N(M(Y/x) = a + bx, \sigma^2)$, unde σ^2 este independentă de x. Pe baza selecției $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, metoda celor mai mici pătrate permite estimarea parametrilor necunoscuți din ecuația liniei de regresie

$$y = a + bx$$

și care dă estimațiile:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}; \qquad \hat{b} = r_{xy}\frac{S_y}{S_x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \qquad S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2.$$

Estimația liniei de regresie a lui Y în raport cu X va fi

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x = \overline{y} + \hat{b}(x - \overline{x}).$$

Mărimea $\hat{b}$ se numește coeficientul unghiular al liniei de regresie a lui y în raport cu x. Așa cum se vede, el depinde de coeficientul de corelație al selecției care se calculează după relația:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}.$$

Ca estimație a dispersiei σ^2 a variabilei Y în populația generală, servește dispersia reziduală sau dispersia în raport cu linia de regresie.

Ea este dată de relația:

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

și care transformată conduce la expresia

$$\tilde{S}^2 = \frac{n-1}{n-2}S_y^2(1 - r_{xy}^2).$$

Avem: $r_{xy} = 0,5273$ și se dă $S_y = 5,50$; $S_x = 4,86$; $\overline{y} = 7,86$ și $\overline{x} = 7,82$.

Avem: $\hat{b} = 0,5273 \cdot \dfrac{5,50}{4,86} = 0,5967 \approx 0,60.$

Ecuația liniei de regresie va fi:

$$\hat{y} = 7,86 + 0,60(x - 7,82)$$

sau $\hat{y} = 0,60x + 3,17$

unde x aparține intervalului valorilor posibile ale lui x. Dispersia reziduală este

$$\tilde{S}^2 = \frac{149}{148} \cdot 30,25(1 - 0,2780) = 21,99 \Rightarrow \tilde{S} = 4,69,$$

în care $S_y^2 = 30,25$ și $r_{xy}^2 = 0,2780$.

7. În problema 6 să se verifice ipoteza $H_0 : b = 0$ care afirmă că între caracteristicile X și Y, nu există o depedndență corelativă liniară.

Rezolvare

În legătură cu parametrul b al liniei teoretice de regresie se poate face o ipoteză de forma $H_0 : b = b_0$ față de alternativa $H_1 : b \neq b_0$ (b_0 este o valoare dată). Statistica folosită este:

$$\hat{t}_b = \frac{\hat{b} - b_0}{S_{\hat{b}}}$$

unde $$S_{\hat{b}} = \frac{\tilde{S}}{\sqrt{(n-1)S_x^2}}.$$

Mărimile b, S_x^2 și $\tilde{S}$ se calculează pe baza celor n perechi de valori de selecție conform formulelor date anterior. Statistica $\hat{t}_b$ are o lege Student cu $n - 2$ grade de libertate.

Regiunea critică a ipotezei H_0 este dată de $|\hat{t}_b| \geq t_{\alpha;\,n-2}$, iar cea de acceptare este dată de $|\hat{t}_b| < t_{\alpha;\,n-2}$, α fiind pragul de semnificație.

Respingerea ipotezei H_0 semnifică faptul că b_0 nu este valoarea parametrului b al colectivității generale din care a fost extrasă selecția.

Selecția de volum $n = 150$ măsurători ale diametrelor tuburilor în cele două plane perpendiculare unul pe altul, a dat valorile:

$$\hat{b} = 0{,}60;\ S_x = 4{,}86;\ \tilde{S} = 4{,}69.$$

Cu aceste valori găsim:

$$S_{\hat{b}} = \frac{4{,}69}{\sqrt{149 \cdot 4{,}86^2}} = 0{,}079;\ \hat{t}_b = \frac{0{,}60}{0{,}079} = 7{,}59.$$

Pentru $\alpha = 0{,}01$ și $n=2= 148$ găsim: $t_{0{,}01;\,148} \approx t_{0{,}01;\,\infty} = 2{,}58$.

Deoarece $|\hat{t}_b| = 7{,}59 > 2{,}58$

respingem ipoteza H_0 potrivit căreia X și Y ar fi necorelate.

8. Pentru o anumită cantitate de lână se determină conținutul în biosulfit – X și conținutul de apă saturată – Y, amândouă fiinf date în procente. Să se găsească dreapta de regresie a lui Y în raport cu X pe baza următoarelor date:

x_i	10	15	30	40	50	55	80	100
y_i	50	46	43	43	36	39	37	33

Rezolvare

Pentru simplificarea calculelor vom nota

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1} = \frac{x_i - 50}{10};\ v_i = \frac{y_i - c_2}{h_2} = y_i - 43$$

u_i	v_i	u_i^2	$u_i v_i$
–4	7	16	–280
–3	3	12,25	–10,5
–2	0	4	0
–1	0	1	0
0	–7	0	0
0,5	–4	0,25	–2
3	–6	9	–18
5	–10	25	–50
–2	–17	67,5	–108,5

$$\bar{u} = -\frac{2}{8} = -0{,}25$$

$$\bar{v} = -\frac{17}{8} = -2{,}125$$

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum u_i\right)^2\right] = \frac{67{,}5 - 0{,}5}{7} = 9{,}57$$

$$S_{uv} = \frac{1}{n-1}\left[\sum u_i v_i - \frac{1}{n}\left(\sum u_i\right)\left(\sum v_i\right)\right] = \frac{-108{,}5 - 4{,}25}{7} = -16{,}1.$$

În baza transformărilor efectuate vom avea:

$$S_x^2 = h_1^2 S_u^2 = 100 \cdot 9,57 = 957$$

$$S_{xy} = h_1 h_2 S_{uv} = -10 \cdot 16,1 = -161$$

$$\bar{x} = h_1\bar{u} + c_1 = 47,5; \ \bar{y} = \bar{v} + c_2 = 49,875.$$

Ecuația liniei de regresie

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$$

se va scrie:

$$y - 40,875 = -0,108(x - 47,5).$$

9. În problema 6 ne propunem să verificăm ipoteza $H_0 : a = 0$ față de $H_1 : a \neq 0$.

Rezolvare

Pentru testarea ipotezei $H_0 : a = a_0$ (a_0 dat) față de alternativa $H_1 : a \neq a_0$, se folosește variabila:

$$\hat{t}_a = \frac{\hat{a} - a_0}{S_{\hat{a}}}$$

în care $\quad S_{\hat{a}} = \tilde{S}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)S_x^2}}.$

Mărimile $\hat{a}$, $\bar{x}$, S_x și $\tilde{S}$ se calculează pe baza unei selecții de n perechi de observații extrasă din populația generală. Se arată că $\hat{t}_a$ urmează o lege Student cu $n - 2$ grade de libertate. Regiunea critică este definită de inegalitatea $|\hat{t}_a| \geq t_{\alpha; n-2}$ și cea de acceptare dată de $|\hat{t}_a| < t_{\alpha; n-2}$.

Avem $n = 150$; $\bar{x} = 7,82$; $S_x^2 = 4,86$; $\hat{a} = 3,17$ și $\tilde{S} = 4,69$ deci

$$S_{\hat{a}} = 4,69\sqrt{\frac{1}{150} + \frac{7,82^2}{149 \cdot 4,86^2}} = 0,727$$

iar $\quad \hat{t}_a = \frac{317}{0,727} = 4,36.$

Întrucât

$$\hat{t}_a = 4,36 > t_{0,01;\,148} = 2,58.$$

respingem ipoteza H_0.

10. În tabelul de mai jos se dau rezultatele obţinute prin tratarea la rece a oţelului în ceea ce priveşte rezistenţa la rupere Y (kg/mm^2) în funcţie de suprafaţa secţiunii X (mm^2). Să se verifice ipoteza $H_0 : a = 0$ ($\alpha = 0{,}05$).

x_i	6	9	10	12	22	26	28	32	35
y_i	69	67	65	53	44	40	37	34	32

Rezolvare

Pentru a folosi testul de la problema 9 vom alcătui tabelul necesar calculelor

$u_i = x_i - 22$	$v_i = y_i - 53$	$u_i v_i$	u_i^2	v_i^2
−16	16	−256	256	256
−13	14	−182	169	196
−12	12	−144	144	144
−10	0	0	100	0
0	−9	0	0	81
4	−13	−52	16	169
6	−16	−96	36	256
10	−19	−190	100	361
13	−21	−273	169	441
−10	−36	−1193	990	1904

$\bar{u} = -2$, $\bar{v} = -4$, deci $\bar{x} = 49$, $\bar{y} = 49$;

$S_u^2 = S_{x2} = 119{,}25$, $S_v^2 = S_y^2 = 220$, $S_{uv} = S_{xy} = -158{,}125$.

Avem deci:

$$\hat{a} = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2} \cdot \bar{x} = 75{,}4 \text{ şi } \hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = -1{,}32$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n-2}\left[(n-1)S_y^2 - b(n-1)S_{xy}\right] = \frac{90{,}2}{7} = 12{,}9$$

$$S_a^2 = \bar{S}^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)S_x^2}\right] = 6{,}84$$

Se obţine valoarea calculată a testului

$$\hat{t}_a = \frac{75{,}4}{\sqrt{6{,}84}} = 28{,}9$$

Cum $\hat{t}_a = 28{,}9 > t_{0,05;\,7} = 2{,}36$, rezultă că ipoteza H_0: $a = 0$ nu se acceptă.

8.2. Probleme propuse

1. Să se arate că unghiul θ dintre dreptele de regresie este dat de expresia

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\rho^2}{\rho^2}\cdot\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\right)$$

(se presupune că regresiile corespunzătoare vectorului (X, Y) sunt liniare).

2. Să se determine ecuațiile curbelor de regresie ale v.a. X asupra v.a. Y în cazul când densitatea de repartiție a vectorului (X, Y) este:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+3y)e^{-x-2y}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(1+x)^4}e^{-\frac{y}{1+x}}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{9}{2}\,\frac{1+x+y}{(1+x)^4(1+y)^4}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Aceeași problemă pentru curbele de regresie ale v.a. Y asupra lui X.

3. Pentru $n = 9$ probe dintr-un minereu se determină în procente conținutul de fier – Y – față de întreaga compoziție – X – și se obține:

x_i	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,4
y_i	27	23	30	28	30	32	34	33	30

a) Să se verifice ipoteza H_0: $\rho = 0{,}9$ cu alternativa H_1: $\rho \neq 0{,}9$ pentru $\alpha = 0{,}05$.
b) Să se determine dreapta de regresie de selecție a lui Y în raport cu X.

4. Compararea a două sorturi de oțel în ceea ce privește legătura dintre limita fluidității (X) și limita durabilității (Y) a dat pentru $n_1 = 60$ de perechi de observații din primul sort de oțel următoarele valori: $\bar{x} = 96{,}7$; $\bar{y} = 114{,}7$; $S_x^2 = 1168{,}14$; $S_Y^2 = 1177{,}62$; $S_\varepsilon^2 = 182{,}44$. În mod analog, pe baza a $n_2 = 90$ de observații din al doilea sort de oțel s-au obținut valorile: $\bar{x} = 94{,}7$; $\bar{y} = 113{,}9$; $S_x^2 = 1033{,}22$; $S_Y^2 = 943{,}2$; $S_\varepsilon^2 = 307{,}45$. Să se verifice dacă există o diferență semnificativă între ecuațiile celor două drepte de regresie, deci, dacă dependența dintre cele două caracteristici (fluiditate și durabilitate) este influențată de sortul de oțel.

Bibliografie

1. Apolloni B., Barchielli A., Battistini E., De Falco D., Verri M. – *Problemi svolti di probabilità e statistica matematica* – Mc Graw–Hill, Milano, 1993
2. Beganu G. – *Metode probabilistice aplicate în economie şi asigurări* – Editura Tehnică, Bucureşti, 1996
3. Ciucu. G., Craiu V., Săcuiu I. – *Probleme de teoria probabilităţilor* – Editura Tehnică, Bucureşti, 1974
4. Craiu V. – *Statistică matematică* – Editura Universităţii, Bucureşti, 1997
5. Dumitrescu M., Florea D., Tudor C. – *Probleme de teoria probabilităţilor şi statistică matematică* – Editura Tehnică, Bucureşti, 1985
6. Lecoutre J. P., Legait–Maille S., Tassi P. – *Statistique* – 3e Edition, Dunod, Paris, 1997
7. Popescu O. – coordonator – *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme* – Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1996
8. Săcuiu I., Moscovici E., Popescu Al. – *Culegere de probleme de matematici aplicate în economie* – Lito ASE, Bucureşti, 1981

CUPRINS

Tiparul executat la S.C. *LUMINA TIPO* s.r.l.
Str. Luigi Galvani nr. 20 bis, sect. 2, Bucureşti, tel./fax 211.32.60; tel. 212.29.27