18. Februarie 2019

CURS 1 – Probleme de optimizare liniară

inf / sup $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k = b_k \end{cases}$$

FORMA STANDARD A UNEI PROBLEME DE OPTIMIZARE LINIARĂ

- restricțiile sunt egalități și var. nenegative
- alg. simplex rezolvă **doar** probleme în formă standard

$x_1, \dots, x_k$ - var. de interes

funcția liniară : $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_k) = c_1x_1 + \dots + c_kx_k$

s.n. funcție obiectiv

$c_1, \dots, c_k$ – costuri

ecuațiile $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ik}x_k$ s.n. restricții

$x_1, \dots, x_k \geq 0$ var. nenegative

$(x_1, \dots, x_k)$ care verifică restricțiile (ecuații și cond. de semn) s.n. soluție admisibilă

Notăm P - mulțimea sol. admisibile

dacă $(x_1, \dots, x_n) \in P$ și în plus este pct. de min/max pt. f obiectiv

SCRIEREA MATRICIALĂ A PROBLEMEI

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ vectorul termenilor liberi

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$

Problema în forma standard se scrie

inf / sup $\quad c^T \cdot x$

$Ax = b$ $\quad$ cu egalități

$x \geq (\underbrace{0, \dots, 0}_{k})$, $0 \in \mathbb{R}^k$

$$c^T \cdot x = (c_1, \dots, c_k)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$$

Alte forme ale problemei de optimizare :

I) forma canonică

problema de minimizare $\qquad$ problema de maximizare

$\inf \; c^T \cdot x$ $\qquad$ sau $\qquad$ $\sup \; c^T \cdot x$

$Ax \geq b$ $\qquad\qquad$ $Ax \leq b$

$x \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x \geq 0$

Obs: O restricție (inecuație cu $\geq$ / $\leq$) s.n. concordantă dacă prob este de (minimizare) $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ik}x_k \geq b_i$ și invers.

și neconcordantă la (maximizare) $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ik}x_k \leq b_i$

Aducerea unei pr. din forma canonică în forma standard și invers:

a_i - linia i a matricei A

standard $\downarrow$ canonică :

$$a_i^T x = b_i \iff \begin{cases} a_i^T x \geq b_i \\ a_i^T x \leq b_i \;\; | \cdot (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_i^T x \geq b_i \\ -a_i^T x \geq -b_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a_i^T x \leq -b_i \\ a_i^T x \leq b_i \end{cases}$$

Invers: canonică $\downarrow$ standard :

$a_i^T \cdot x \leq b \Rightarrow a_i^T x + y = b$, unde $y \geq 0$ este var. $\boxed{\text{ecart}}$ (de egalizare)

$a_i^T x \geq b \Rightarrow a_i^T x - y = b_i$, unde $y \geq 0$ var. ecart

ii) formă generală

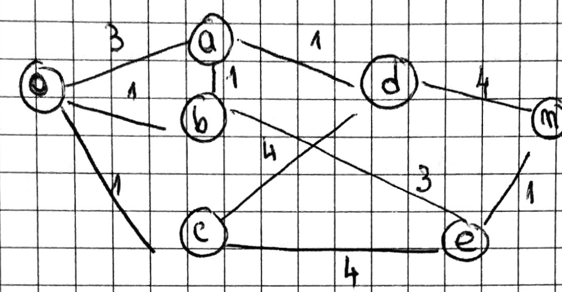
- problema în care avem restricții → ecuații
  - inecuații ($\le$, $\ge$)
  - variabile (≥ 0, ≤ 0)

$$x_i \le 0 \Rightarrow x_i' = -x_i \ge 0$$

$$x_i' \ge 0$$

Exemple de probleme de optimizare în rețele

EX 1:



Pr. rata de maximizare a transf. de la o la n?

- rata de transfer pe un link : Mbit/s

a → b și b → a dar nu simultan

Variabile: 10 variabile

$x_{oa} \ge 0$ o → a

$x_{oa} \le 0$ a → o

Problema de optimizare: max $x_{oa} + x_{ob} + x_{oc}$

$-3 \le x_{oa} \le 3$ $-1 \le x_{ad} \le 1$ $-4 \le x_{ce} \le 4$

$-1 \le x_{ob} \le 1$ $-1 \le x_{ab} \le 1$ $-4 \le x_{dn} \le 4$

$-1 \le x_{oc} \le 1$ $-4 \le x_{cd} \le 4$ $-1 \le x_{en} \le 1$

$-3 \le x_{be} \le 3$

$x_{oa} = x_{ad} + x_{ab}$ $x_{ad} + x_{cd} = x_{dn}$

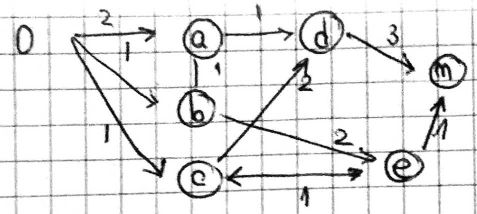
$x_{ob} = x_{be} - x_{ab}$ $x_{be} + x_{ce} = x_{dn}$

$x_{oc} = x_{cd} + x_{ce}$

Obs. Problema nu este sub formă standard.

$x_{oa}' = x_{oa} + 3$, $x_{oa}' \ge 0$, $x_{oa}' \le 6$

Sol:



EX 2: Problema de transport

m depozite, n beneficiari

a_i - cant. de marfă din dep. i, $i = \overline{1,m}$

b_j - cant. de marfă cerută de beneficiarul j, $j = \overline{1,n}$

c_{ij} - costul de transp. al unei unit. de marfă de la depozitul i la benef. j

x_{ij} - cantitatea de marfă transp. de la dep. i la beneficiarul j

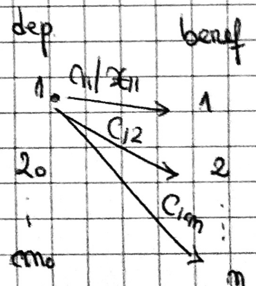
Probl. de transport:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall\, i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \forall\, j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \forall\, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$$



Obs: Pr. este scrisă în forma standard

alg. simplex adaptat s.n. alg. de transport

EX 3: Problema dietei

Mâncare	Morcovi	Varză albă	Porumb	
vit A [mg/kg]	35	0,5	0,5	0,5 mg
vit C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
fibre [g/kg]	30	20	10	4 g

Preț (în euro)	0,75	0,5	0,15

Pr. de optimizare

Var.
x_1 - cant. de morcovi
x_2 - cant. de varză | la o masă
x_3 - cant. de porumb

$$
\begin{cases}
\inf \; 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3 \\
35x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \geq 0,5 \\
60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

25. Februarie 2019

Cursul 2

GEOMETRIA PROGRAMĂRII LINIARE

1) Hiperplane, semispații, poliedre

Pr. $\inf(\sup) \; c^T x$ (forma standard)
$Ax = b$
$x \geq 0$

$x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ Mulțimea sol. admisibile

$f: P \to \mathbb{R} \quad f(x) = c^T x, \; x \in P$

$i = \overline{1,m}$ a_i - linia i a matricei A

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x = b_i \; i = \overline{1,m}, x \geq 0\}$