27. Februarie 2018

Seminar 1

$v_1, \dots, v_n \in Var(\varphi)$

$e: \{v_1, \dots, v_n\} \to \{0, 1\}$

2^n evaluări posibile

$v_1 \dots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_n)$	$f_{e_1}(\varphi)$
$\vdots$		$\vdots$
$e_{2^n}(v_1) \dots$	$e_{2^n}(v_n)$	$f_{e_{2^n}}(\varphi)$

Exercițiul 1:

$$\underbrace{((v_1 \vee v_2) \to v_3)}_{A} \leftrightarrow \underbrace{(v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)}_{B}$$

	v_1	v_2	v_3	$v_1 \vee v_2$	A	$v_1 \to v_3$	$v_2 \to v_3$	B
1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	1	1	1
5	1	0	0	1	0	0	1	0
6	1	0	1	1	1	1	1	1
7	1	1	0	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1

$A \leftrightarrow B$

1	1	5	1
2	1	6	1
3	1	7	1
4	1	8	1

$\Rightarrow$ expresia este tautologie ($\forall v_1, v_2, v_3$, $\Rightarrow$ evaluarea adevărată)

Axiome:

A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

A3) $(\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi)$

MP: $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$

T. deducție:

$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow$

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Γ - demonstrație $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a.î. $\begin{cases} \varphi_i \in \Gamma, \ \varphi_i \text{ axiomă} \\ \varphi_i \text{ se obț. prin MP din } \{\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}\} \end{cases}$

$\Gamma \vdash \varphi$

Exercițiul 2:

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

(1) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ A1

(2) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ ipoteză

(3) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi)$ MP 1,2

(4) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ A3

(5) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ MP 3,4

(6) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$ ipoteză

(7) $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ MP 5,6

(8) $\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$ T.D. 7

(9) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ T.D. 8.

Literal: Variabilă / Negația unei variabile

FND: $(l_1 \wedge \dots l_n) \vee \dots \vee (l_1' \wedge \dots \wedge l_n')$

FNC: $(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge \dots \wedge (l_1' \vee \dots \vee l_n')$

① $\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$

② De Morgan

$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$

(3) $\neg\neg\varphi \sim \varphi$

(4) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \sim (\psi \cdot \varphi) \cdot (\chi \cdot \varphi)$

(5) $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$

$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$

Exercițiul 3:

$\varphi := (p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow p$

$\varphi \sim ((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg q \vee p)) \rightarrow p$

$\sim \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)) \vee p$

$\sim \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)) \vee p$

$\sim (\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(q \vee p)) \vee p$

$\sim ((\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \vee p$

$\sim ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \vee p$

$\sim \underbrace{(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee p}_{FND}$

$\sim \underline{p \vee (p \wedge q)} \vee (\neg q \wedge \neg p)$

$\sim p \vee (\neg q \wedge \neg p)$

$\sim \underbrace{(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p)}_{FNC}$

$\sim p \vee \neg q$

Metoda 2:

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	φ	$\neg\varphi$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0

$\underline{FND}$ φ $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\underline{FND}(\neg\varphi)$: $\neg p \wedge q$

$\underline{FNC}$ φ $p \vee \neg q$

Clauză $C = \{L_1, \ldots, L_m\}$ satisfiabilă dacă $L_1 \vee \ldots \vee L_m$ sat.

$\square$ - clauza vidă

$S = \{C_1, \ldots, C_m\}$ sat. dacă $\exists$ $e: Var \to \{0,1\}$ a.î. $e(C_i) =$

Rezoluție: $\dfrac{C_1 \cup \{p\},\ C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$

derivare $\begin{cases} C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{cases}$ a.i. $C_i \in S$ sau C_i se obț. prin Rez.

dc. $C_m = \square$, S e nesat.

Exercițiul 4:

$\varphi = (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge ((v_3 \to \neg v_2) \vee v_1) \wedge (v_1 \to v_2) \wedge (v_2 \wedge v_3))$

$S = ?$ se obț. din FNC

$\varphi \sim (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_2 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge \{v_2 \wedge v_3\}$

$S = \{(\neg v_1, \neg v_2), (\neg v_3, \neg v_2, v_1), (\neg v_1, v_2), (v_2, \cancel{v_3})\}, (\ldots$

$C_1 = \{\neg v_1, v_2\}$

$C_2 = \{\neg v_3, \neg v_2, v_1\}$

$C_3 = \{\neg v_1, v_2\}$

$C_4 = \{v_2, \cancel{v_3}\}$

$C_5 = \{ v_3 \}$

$C_6 = \{ \neg v_2, v_1 \}$, Rez C_2 C_5

$C_7 = \{ v_1 \}$ Rez C_6, C_4

$C_8 = \{ \neg v_2 \}$ Rez C_6 C_7

$C_9 = \square$ Rez C_8 C_4

$\Rightarrow$ nu e sat.

13. Martie 2018

Seminar 2

- $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \land \psi}$ $(\land i)$ $\dfrac{\varphi \land \psi}{\varphi}$ $(\land e_1)$ $\dfrac{\varphi \land \psi}{\psi}$ $(\land e_2)$

- $\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}}{\varphi \to \psi}$ $(\to i)$ $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ $(\to e)$

- $\dfrac{\varphi}{\varphi \lor \psi}$ $(\lor i_1)$ $\dfrac{\varphi}{\psi \lor \varphi}$ $(\lor i_2)$ $\dfrac{\varphi \lor \psi \quad \boxed{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}}{\chi}$ $(\lor e)$

- $\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\neg \varphi}$ $(\neg i)$ $\dfrac{\varphi \quad \neg \varphi}{\bot}$ $(\neg e)$

$\bot$ - falsul

- $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$ $(\neg\neg i)$ $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$ $(\neg\neg e)$

- $\dfrac{}{\varphi \lor \neg \varphi}$ (TND) $\dfrac{\bot}{\varphi}$ $(\bot e)$

$\vdash \varphi$ teoremă

$\Gamma \vdash \varphi$ Γ- teoremă

Scanned with CamScanner

1) i) $\underbrace{(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t}_{\text{formule}} \vdash q \wedge s$ este valid?

(1) $(p \wedge q) \wedge r$ ipoteză

(2) $s \wedge t$ ipoteză

(3) $p \wedge q$ $(\wedge e_1)$ (1)

(4) q $(\wedge e_2)$ (3)

(5) s $(\wedge e_1)$ (2)

(6) $q \wedge s$ $(\wedge i)$ 4-5

ii) $p,\ \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

(1) p premisă

(2) $\neg\neg(q \wedge r)$ premisă

(3) $q \wedge r$ $(\neg\neg e)$ (2)

(4) $\neg\neg p$ $(\neg\neg i)$ (1)

(5) r $(\wedge e_2)$ (3)

(6) $\neg\neg p \wedge r$ $(\wedge i)$ (4-5)

iii) $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$

(1) $(p \wedge q) \to r$ premisă

(2) p premisă

(3) q premisă

(4) $p \wedge q$ $(\wedge i)$ 2, 3

(5) r $(\to e)$ 1, 4

(6) $q \to r$ $(\to i)$ 3, 5

(7) $p \to (q \to r)$ $(\to)$ 2, 6

iv) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(1) $p \wedge (q \vee r)$ premisă

(2) p $(\wedge e_1)$ (1)

(3) $q \vee r$ $(\wedge e_2)$ (1)

(4) q

(5) $p \wedge q$ $(\wedge i)$ 2, 4

(6) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(\vee i_2)$ 5

(7) r

(8) $p \wedge r$ $(\wedge i)$ 2, 7

(9) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(\vee i_1)$ 8

(10) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(\vee e)$ 3, 4-6, 7-9

v) $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

(1) $p \to q$ premisă

(2) $p \to \neg q$ premisă

(3) p

(4) q (MP) (1, 3)

(5) $\neg q$ (MP) (2, 3)

(6) $\bot$ $(\neg e)$ (4, 5)

(7) $\neg p$ $(\neg i)$ 3-6

2) $\dfrac{\varphi \to \psi \quad \neg \psi}{\neg \varphi}$ (MT)

$$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\varphi}\ \text{RAA}$$

(i) $\varphi \to \psi,\ \neg \psi \vdash \neg \varphi$

(1) $\varphi \to \psi$ premisă

(2) $\neg \psi$ premisă

(3) φ premisă

(4) ψ $(\to e)$ 1, 3

(5) $\bot$ $(\neg e)$ 2, 4

(6) $\neg \varphi$ $(\neg i)$ 3-5

(ii) $\neg \varphi \to \bot \vdash \varphi$

(1) $\neg \varphi \to \bot$ ipoteză

(2) $\neg \varphi$ —

(3) $\bot$ $(\to e)$ 1, 2

(4) $\neg\neg\varphi$ $(\neg i)$ 2-3

(5) φ $(\neg\neg e)$ 4

3) Fie $n \geq 1$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ formule. Demonstrați că dacă $\vdash \underbrace{\varphi_1 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi)..)}_{\varphi}$ este valid atunci $\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_n}_{ip.} \vdash \varphi$ este valid.

(1) φ_1
(2) φ_2
$\vdots$
(n) φ_n

} ipoteze

(n+1) $\varphi_1 \to (\dots \to (\varphi_n \to \varphi) \dots)$ - ipoteză

(n+2) $\varphi_2 \to (\dots (\varphi_n \to \varphi) \dots)$ $(e_\to)$ 1, n+1

$\vdots$

(2n) $\varphi_n \to \varphi$ $(e_\to)$ n-1, 2n-1

(2n+1) φ $(\to e)$ n, 2n

4) $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

Găsiți regulile de $\leftrightarrow$ i,e.

$$\varphi \to \psi \quad \dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \varphi\end{array}}}{\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)} \ (\leftrightarrow i) \quad \psi \to \varphi$$

$$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \ (\leftrightarrow e_2)$$

$$\dfrac{\psi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi} \ (\leftrightarrow e_1)$$

<u>Teorie</u>: φ este Γ-tautologie ($\Gamma \vDash \varphi$) dacă orice model al lui Γ este model pt. φ.

$e: Var \to \{0,1\}$ este model pt. Γ dacă $e^+(\varphi) = 1, \forall \varphi \in \Gamma$

5) Dacă $\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_m}_{\Gamma} \vDash \varphi$, atunci $\vDash \varphi_1 \to (\dots \to (\varphi_m \to \varphi)..)$

$\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \vDash \varphi \Rightarrow$ pt $\forall e_1: Var \to \{0,1\}$, $e_1^+(\Gamma) = 1 \Rightarrow e_1^+(\varphi) = 1$

Presupunem că $\exists\ e_2: Var \to \{0,1\}$ a.î. $e_2^+(\varphi_1 \to (.. \to (\varphi_m \to \varphi)..)) = 0$
$\Rightarrow e_2^+(\varphi_1) = 1$ și $e_2^+(\varphi_2 \to \dots (\varphi_m \to \varphi)..) = 0 \Rightarrow$
$\dots e_2^+(\varphi_3 \to \dots (\varphi_m \to \varphi)) = 0$ și $e_2^+(\varphi_1) = 1 \Rightarrow$
$\dots\dots \Rightarrow e_2^+(\varphi_1) = 1 = e_2^+(\varphi_2) = \dots = e_2^+(\varphi_m)$

și

$e_2^+(\varphi) = 0$; $\alpha\varphi$

6) i) Arătați că regula ($\vee i$) este corectă, adică $\Gamma \vDash \varphi$ implică $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$ pt. orice Γ

$\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow$ orice $e: Var \to \{0,1\}$ cu $e^+(\Gamma) = 1 \Rightarrow e^+(\varphi) = 1$

$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi) = 1 \vee e^+(\psi) = 1$

ii) ($\neg i$) este corectă. $\Gamma \vDash \varphi \to \perp \Rightarrow \Gamma \vDash \neg\varphi$

Fie $e: Var \to \{0,1\}$ a.î. $e^+(\Gamma) = 1 \Rightarrow e^+(\varphi \to \perp) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^+(\varphi) \to 0 = 1 \Rightarrow e^+(\varphi) = 0 \Rightarrow e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi) = 1$

14. Martie 2018

Curs 4:

Limbajul $\mathcal{L}$: $V = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ - mț. de variabile

$R = \{P, R\}$ - relații

$F = \{f\}$ - funcții

$C = \{c\}$ - constante

$ari(P) = 1$

$ari(R) = 2$

$ari(f) = 2$

Termeni: $\begin{cases} \text{variabile, constante} \\ f(c,c),\ f(x_1,c), \ldots \end{cases}$

Formula atomică: $P(x_2)$, $R(f(c,c))$

(relații ~~cu~~ + doar termeni)

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, s^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$$

$I : V \to \mathbb{N}$ - interpretarea variabilelor

ex: $I(x_1) = 0$, $I(x_2) = 1$

$$+(s(x_1), 0) = +^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(x_1)_I^{\mathcal{A}}, 0_I^{\mathcal{A}}) = +^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(x_{1I}^{\mathcal{A}}), 0) =$$

$$= +^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(0), 0) = +^{\mathcal{A}}(1, 0) = 1$$

// Orice simbol de ct. e de fapt un simbol de funcție de aritate 0.

Seminar 3 27. Martie 2018

- $(M, \leq)$ - mulțime parțial ordonată (mpo), $\leq \subseteq M \times M$, $\leq$ rel. de ordine
- $(C, \leq)$ - mpo completă dc. ex. $\perp$ prim elem. adică $\forall$ $x \in C$, $\perp \leq x$
- $(C, \leq)$ și $f : C \to C$, a este pct. fix dc. $f(a) = a$
- Cel mai mic pct. fix $lfp \in C$ dc. $f(lfp) = lfp$ și pt. $\forall$ a pct. fix avem $lfp \leq a$.

1) 1) $f_1 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$

$f_1(X) = X$

$X \cup \{1\} = X$

Pct. fixe: $\underbrace{\{1\}}_{\text{cel mai mic}}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$

2) $f_2 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$,

$f_2(Y) = \begin{cases} \{1\}, & \text{dc. } 1 \in Y \\ \emptyset, & \text{altfel} \end{cases}$

pct. fixe: $\underline{\emptyset}, \{1\}$

3) $f_3 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset, & \text{dc. } 1 \in Y \\ \{1\}, & \text{altfel} \end{cases}$

nu are pct. fixe

- $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ și $f : A \to B$ f este monotonă dc.: $a_1 \leq_A a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2)$
- O clauză def. propozițional $\begin{cases} q \text{ (unitate) // fapte din Prolog} \\ p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to q \text{ // regulă din prolog} \end{cases}$

$q, p_1, \ldots, p_n$ sunt var. prop.

- S - mț. de clauze def. propozițional
- A = mț. de var. prop.

- Baza = mț. de clauze unitate
- $f_S : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \{a \mid a \in A$ și $s_1 \wedge \ldots \wedge s_m \to a \in S$ și $s_1, \ldots, s_m \in Y\}$

2) Arătați f_S monotonă.

Fie $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(A)$, $Y_1 \subseteq Y_2 \implies$

$Y_1 \cup Baza \subseteq Y_2 \cup Baza$

Notăm $Z_1 = \{a \mid a \in A, s_1 \wedge \ldots \wedge s_m \to a \in S, s_1, \ldots, s_m \in Y_1\}$

Fie $\underbrace{s_1, \ldots, s_m}_{\in Y_2, \text{ pt. că } Y_1 \subseteq Y_2} \in Y_1$ și $s_1 \wedge \ldots \wedge s_m \to a \in S \Rightarrow a \in Z_1$

$\Rightarrow a \in Z_2$

Analog Z_2 pt. Y_2.

$\Rightarrow Z_1 \subseteq Z_2$

- $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$, $f : A \to B$ continuă dc. $f(\bigvee_n a_n) = \bigvee f(a_n)$ pt. orice $a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ $\bigvee_n a_n$

$f \quad f \quad \underbrace{f(\bigvee_n a_n)}_{\text{supremumul}}$

- f_S este continuă

Teorema 1: $(C, \leq)$ mpo completă, $F : C \to C$
$a = \bigvee_n F^n(\perp)$ este cel mai mic pct. fix

$F(\perp) \leq F(F(\perp)) \leq \ldots \leq \underbrace{F(F(\ldots(F(\perp))\ldots))}_{\text{de } n \text{ ori}}$

3) lfp pt. f_S

1) $S = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3, x_4 \wedge x_2 \to x_5, x_2, x_6, x_6 \to x_1\}$

$a = \bigvee_n f_S^n(\emptyset)$

$f_S(\emptyset) = Baza \cup \emptyset = \{x_2, x_6\}$

$f_S(\{x_2, x_6\}) = \{x_2, x_6\} \cup \{x_1\} \to$ pt. că $x_6 \to x_1$

$\}$ Baza $= \{x_2, x_6\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$f(\{x_1, x_2, x_6\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$

$f(\{x_1, x_2, x_3, x_6\}) = \underbrace{\{x_1, x_2, x_3, x_6\}}_{\text{cel mai mic pct. fix}}$

2) $S = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3;\ x_4 \to x_1;\ x_5 \to x_2;\ x_2 \to x_5;\ x_4\}$

Baza $= \{x_4\}$

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$f_S(\emptyset) = \{x_4\}$

$f_S(\{x_4\}) = \{x_1, x_4\}$

$f_S(\{x_1, x_4\}) = \underbrace{\{x_1, x_4\}}$

cel mai mic pct. fix
(supremumul lui f_S)

3) $S = \{x_1 \to x_2,\ x_1 \wedge x_3 \Rightarrow x_1,\ x_3\}$

Baza $= \{x_3\}$

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$

$f_S(\emptyset) = \{x_3\}$

$f_S(\{x_3\}) = \{x_3\}$

- $\nabla : V \to \underbrace{Trm_{\mathcal{L}}}$ ~ substituție

  mț. termenilor ce se pot forma cu var. din V

- θ unificator pt. t_1 și t_2 dc. $\theta(t_1) = \theta(t_2)$

ex: $t_1 = x + 2$

$t_2 = 3 * y + 2$

$x = 3 * z$ $\qquad \theta(t_1) = 3 * z + 2$

$y = z$ $\qquad \theta(t_2) = 3 * z + 2$

ν este cel mai general unificator dc. pt. $\forall$ unificator ν' există μ subst. a.î. $\nu' = \nu ; \mu$

↓ compus

Algoritmul de unificare:

	S:	R:
INIȚIAL	$\emptyset$	$t_1 \doteq t_1', t_2 \doteq t_2', \dots$
SCOATE	S_k	$R_k, t \doteq t$
	S_{k+1}	R_{k+1}
DESCOMPUNE	S_k	$R_k, f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t_1', \dots, t_n')$
	S_{k+1}	$R_{k+1}, t_1 \doteq t_1', \dots$
REZOLVA	S_k	$R_k, x \doteq t$ sau $t \doteq x$, $x \notin Var(t)$
	~~S_{k+1}~~, $x \doteq t$ $S[x \leftarrow t]$	$R_k[x \leftarrow t]$

$S[x \leftarrow t]$ - peste tot unde apare x, se înlocuiește cu t

FINAL	S_f	$\emptyset$	(se întâmplă dacă alg. fct. corect: $\exists$ cel mai general unificator).

Alg. se oprește cu eșec dc:

1) $f(t_1, \dots, t_n) = g(t_1', \dots, t_n')$, $f \neq g$

2) $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ și $x \in Var(t)$ } ex: $x = f(x)$

- x, y, z, u, v - variabile
- a, b, c - constante // fct. cu 0 param.
- $h, g, (-)^{-1}$ - simb. de funcții de ar 1
- $f, *, +$ - — " — 2
- p - — " — 3

4) 1) $p(a, x, h(g(y)))$ și $p(z, h(z), h(u))$

S	R	
$\emptyset$	$p(a, x, h(g(y))) = p(z, h(z), h(u))$	Desc
$\emptyset$	$a \doteq z$, $x \doteq h(z)$, $h(g(y)) \doteq h(u)$	Rez.
$z \doteq a$	$x \doteq h(a)$, $h(g(y)) \doteq h(u)$	Rez.

$z \doteq a,\ x = h(a)$ $\quad h(g(y)) \doteq h(u)$ Desc

$z \doteq a,\ x = h(a)$ $\quad g(y) = u$ Rez.

$u = g(y),\ z \doteq a,\ x = h(a)$ $\quad \emptyset$

$\theta = \{ u / g(y),\ z / a,\ x / h(a) \}$ CGU

16) $f(x, y)$, $f(h(x), x)$ și $f(x, b)$

S	R	
$\emptyset$	$f(x,y) = \cancel{f(x,b)}\ f(h(x), x)$ $f(h(x), x) = f(x, b)$	Desc.
$\emptyset$	$x = h(x),\ x = b,$ $y = x,\ h(x) = x$	

$\nexists$ CGU pt. că $h(x) = x$.

15) $p(x, b, x)$ și $p(y, y, c)$

S	R	
$\emptyset$	$p(x,b,x) = p(y,y,c)$	Desc.
$\emptyset$	$x = y,\ b = y,\ c = x$	Rez
$x = y$ $x = \cancel{y}\ b,\ y = b$	$b = y,\ y = c$ $b = c$ $\rightarrow$ eșec $\underbrace{\ }_{\text{2 fcții cu zero param.}}$ $b \neq c$	Rez

14) $f(x, f(b, x))$ și $f(f(y, a), f(b, f(z, z)))$

S	R	
$\emptyset$	$f(x, f(b, x)) = f(f(y, a), f(b, f(z, z)))$	I D
$\emptyset$	$x = f(y, a)$ $f(b, x) = f(b, f(z, z))$	
$\emptyset$	$x = f(y, a)$ $b = b$ $x = f(z, z)$	S

$\emptyset$ $\quad x = f(y, a) \quad$ R

$\quad x = f(z, z)$

$x = f(y, a) \quad f(y,a) = f(z,z) \quad$ D

$x = f(y, a) \quad y = z \quad$ R

$\quad a = z$

$z = a$, $\cancel{y=z}$, $x = f(y,a) \quad y = a \quad$ R

$y = a$, $z = a$, $x = f(y,a) \quad \emptyset$

$\theta = \{ y/a, z/a, x / f(y, a)$

21) $f(f(g(x), h(y)), h(z))$, $f(f(u, h(h(x))), h(y))$

și $f(v, w)$

S $\quad$ R

$\emptyset \quad f(f(g(x), h(y)), h(z)) = f(f(u, h(h(x))), h(y))$ $\quad$ D

$\quad f(f(u, h(h(x))), h(y)) = f(v, w)$

$\emptyset \quad f(g(x), h(y)) = f(u, h(h(x)))$ $\quad$ Desc.

$\quad h(z) = h(y)$

$\quad f(u, h(h(x))) = v$

$\quad h(y) = w$

$\emptyset \quad \underline{g(x) = u}$ $\quad$ <u>Rez</u>

$\quad h(y) = h(h(x))$

$\quad h(z) = h(y)$

$\quad f(u, h(h(x))) = v$

$\quad h(y) = w$

$u = g(x)$

$h(y) = h(h(x))$

$h(z) = h(y)$

$f(g(x), h(h(x))) = v$

$h(y) = w$

Dex

$u = g(x)$

$h(y) = h(h(x))$

$z = y$

$f(g(x), h(h(x))) = v$

$h(y) = w$

Dex

$u = g(x)$

$y = h(x)$

$z = y$

$f(g(x), h(h(x))) = v$

$h(y) = w$

Rez.

$u = g(x)$

$y = h(x)$

$z = h(x)$

$f(g(x), h(h(x))) = v$

$h(h(x)) = w$

~~Dex~~ Rez

$u = g(x)$

$y = h(x)$

$z = h(x)$

$\cancel{z = h(x)}$

$f(g(x), h(h(x))) = v$

$h(h(x)) = w$

Rez

$u = g(x)$

$y = h(x)$

$z = h(x)$

$v = f(g(x), h(h(x)))$,

$w = h(h(x))$;

$\emptyset$

$\Theta = \{$

$\}$

Seminar 4

φ: Forma rectificată $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bullet \text{ var care apar în } \varphi \text{ nu sunt și libere și legate} \\ \bullet \text{ cuantificatori dif. leagă var. dif} \end{cases}$

Formulă prenex: $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$

$Q_i \in \{\forall, \exists\}$

$x_1, \dots, x_n$ var. diferite și φ este liberă de cuantificatori

• Se înlocuiesc $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ $\begin{cases} \varphi \rightarrow \psi \;\; \vDash\!\!\!\!\dashv \;\; \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi \;\; \vDash\!\!\!\!\dashv \;\; (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \end{cases}$

① 1) $\forall x \exists y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \rightarrow \exists x R(x,x)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \forall x \exists y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \rightarrow \exists z R(z,z)$ redenumire

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \neg(\forall x \exists y (\neg R(x,y) \vee R(y,x))) \vee \exists z R(z,z)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \exists x \forall y (\neg\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee \exists z R(z,z)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \exists x \forall y \exists z \, (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z)$

2) $\neg P(x) \rightarrow \neg\forall y \exists x R(x,y)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \neg\neg P(x) \vee \neg\forall y \exists x R(x,y)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \neg\neg P(x) \vee \neg\forall y \exists z R(z,y)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; P(x) \vee \exists y \forall z R(z,y)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; P(x) \vee \exists y \forall z R(z,y)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \exists y \forall z \; P(x) \vee R(z,y)$

3) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; \exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall w Q(z,w)$

$\vDash\!\!\!\!\dashv \; (\neg\exists x R(x,y) \vee \forall w Q(z,w)) \wedge (\neg\forall w Q(z,w)$

$\vee \exists x R(x,y))$

$\models (\forall x \neg R(x,y) \vee \forall w Q(z,w)) \wedge (\exists w_1 \neg Q(z_1,w_1)$
$\vee \exists x_1 R(x_1,y_1)))$

$\models (\forall x \forall w \ \neg R(x,y) \vee Q(z,w)) \wedge (\exists w_1 \exists x_1 \ \neg Q(z_1,w_1)$
$\vee R_1(x_1,y_1)))$

$\models \forall x \forall w \exists x_1 \exists w_1 \ (\neg R(x,y) \vee Q(z,w)) \wedge$
$(\neg Q(z_1,w_1) \vee R_1(x_1,y_1)))$

φ - în forma prenex ;

φ^{SK} - forma Skolem a lui φ :

- dacă φ este liberă de cuantificatori
  $\varphi^{SK} = \varphi$; $\mathcal{L}^{SK} = \mathcal{L}$
- dacă φ este universală at. $\varphi^{SK} = \varphi$,
  $\mathcal{L}^{SK} = \mathcal{L}$
- dacă $\varphi = \exists x \psi$ at. alegem o ct c, $c \notin \mathcal{L}$ și
  și $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$
- dacă $\varphi = \forall x_1 \ \forall x_n \exists x \psi$ at. alegem un simbol
  de funcție f, $f \notin \mathcal{L}$ și
  $\varphi^1 = \forall x_1 \ \forall x_n \psi[x / f(x_1, \dots, x_n)]$,
  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f\}$

Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală
$\varphi^{SK} = \varphi^1$, $\mathcal{L}^{SK} = \mathcal{L}$. Altfel definim φ^2, φ^3
până găsim φ^{SK}

② $C = \{b\}$, $R = \{P, R, Q\}$

1) $\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x,y) \wedge (R(y,z) \to (R(z,w) \wedge R(w,w))))$

$\varphi^1 = \forall x \forall z \exists w (R(x, f(x)) \wedge (R(f(z), z) \to (R(z,w) \wedge R(w,w))))$
$y \to f(x)$

$\varphi^2 = \forall x \forall z (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \to (R(z, g(x,z)) \wedge$
$\wedge R(g(x,z), g(x,z))))$
$w \to g(x,z)$

2) $\forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \exists x_2 ((\neg R(x_1, y_2) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, y_2) \vee R(x_2, b)))$

$\varphi^1 = \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 ((\neg R(x_1, f(x_1, y_1)) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, f(x_1, y_1)) \vee R(x_2, b)))$

$\varphi^2 = \forall x_1 \forall y_1 ((\neg R(x_1, f(x_1, y_1)) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, f(x_1, y_1)) \vee R(g(x_1, y_1), b)))$

3) $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(x_1, x_2))$

$x \leftarrow a$

$\varphi^1 = \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(a, x_2))$

$\varphi^2 = \forall y_1 (P(y_1) \vee R(a, f(y_1)))$

③ $\mathcal{L}$: $\mathcal{F} = \{f, g\}$

ari $(f) = 2$, ari $(g) = 1$

$C = \{b, c\}$, $R = \{P, Q\}$

ari $(P) = 2$, ari $(Q) = 2$

$T(\varphi)$ și $H(\varphi)$

1) $\varphi := \forall x \forall y\, P(c, f(x, b), g(y))$

$T(\varphi) = \{ c, b, f(c, c), f(b, b), f(c, b), f(f(c, c), b) \dots$
$g(c), g(b), \dots, g(f(c, c)), \dots \}$

$H = \{P(c, f(c, b), g(c)), P(c, f(b, b), g(c)), \dots$

2) $\psi := \forall x \forall y \left(Q(x,b) \vee Q(x, g(y)) \right)$

$T(\psi) = \{ b, g(b), g(g(b))$

$H_{(\psi)} = \{ Q(b,b) \vee Q(b, g(b)),\ Q(b,b) \vee Q(b, g(g(b)))$

$\dots \}$

02. Mai 2018

Seminar 5

- Literal - o variabilă sau negația ei
- clauză $\bigvee l_i$
- mulțime de clauze (FNC) $\bigwedge \bigvee l_{ij}$
- rezoluție :

$$\frac{C_1 \cup \{p\},\ C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

C_1, C_2 sunt clauze

p var. prop. a.î. $p, \neg p \notin C_1, C_2$

Algoritmul Davis - Putnam

- se repetă pașii:
  - se alege o var. prop. (p) care apare în mț. de clauze
  - se adaugă la mț. de clauze toți rezolvenții obținuți prin aplicarea rez. pt p
  - se elimină toate clauzele triviale (conțin q și $\neg q$)
  - se elimină toate clauzele în care apare p
- dacă se obț. clauza vidă $\square \Rightarrow$ nesatisfiabilă
- dacă se ajunge la $\{ \}$ $\Rightarrow$ satisfiabilă

S5. 1 Folosind DP, cercetați satisf. mț. de clauze:

$\mathcal{C} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \iff v_0 \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \ldots$

Soluție: Alegem v_0 și avem

$\mathcal{C}_0^{v_0} = \{\{v_0\}\}$

$\mathcal{C}_0^{\neg v_0} = \{\{\neg v_0, v_1\}\}$

Mulțimea de rezolvenți pt. v_0:

$\mathcal{R}_0 = \{\{v_1\}\}$. Se adaugă $\mathcal{R}_0$ la $\mathcal{C}$

Eliminăm clauzele triviale.

$\Rightarrow \mathcal{C}_1 = \{\{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{v_1\}\}$

Alegem v_1 și avem

$\mathcal{C}_1^{v_1} = \{\{v_1\}\}$

$\mathcal{C}_1^{\neg v_1} = \{\{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$

$\mathcal{R}_1 = \{\{v_2, v_3\}\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_2 = \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$

Alegem v_2 și avem

$\mathcal{C}_2^{v_2} = \{\{v_2, v_3\}\}$

$\mathcal{C}_2^{\neg v_2} = \{\{\neg v_2\}\}$

$\mathcal{R}_2 = \{\{v_3\}\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_3 = \{\{v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}\}$

Alegem v_3 și avem

$\mathcal{C}_3^{v_3} = \{\{v_3\}\}$

$\mathcal{C}_3^{\neg v_3} = \{\{\neg v_3, v_4\}\}$

$\mathcal{R}_3 = \{\{v_4\}\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_4 = \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$

Alegem v_4 și avem

$\mathcal{C}_4^{v_4} = \{\{v_4\}\}$

$\mathcal{C}_4^{\neg v_4} = \{\{\neg v_4\}\}$

$R_4 = \square$

$\Rightarrow \mathcal{C}_5 = \square \Rightarrow$ mulț. de clauze nu e satisfiabilă

În logica de ord I:

Literal: formulă atomică sau negația ei

$P(t_1, \dots, t_n)$, $\neg P(t_1, \dots, t_n)$

Forma clauzală: $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ $\boxed{FNC}$

Fie C o clauză:

- C' este o instanță a lui C dacă $\exists$ o subst. $\theta : Var \to Trm_{\mathcal{L}}$ (oarecare) a.î. $\theta(C) = C'$
- C' este o instanță închisă a lui C dacă există $\theta : Var \to T_{\mathcal{L}}$ a.î. $\theta(C) = C'$
  - termeni fără variabile
- pt. o clauză C, mulț. instanțelor închise ale lui C
  $\mathcal{H}(C) = \{\theta(C) \mid$ oricare $\theta : Var \to T_{\mathcal{L}}\}$
  - C este nesatisfiabilă $\Leftrightarrow$ ex. o subm. finită a lui $\mathcal{H}(C)$ nesatisfiabilă

S5.2 Fie mulț. de clauze în FCL:

$\mathcal{C} = \{\{\neg P(f(a)), Q(y)\}, \{P(y)\}, \{\neg Q(b)\}\}$

Arătați că $\mathcal{C}$ nu este satisf. prin urm. metode:

a) Găsiți o submulț. finită nesatisf. a lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$

- sb. de const.: a, b
- sb. de fct: f, $ar(f) = 1$

- sb. de relație : P, Q, $ar(P) = ar(Q) = 1$

$\begin{cases} a, f(a), f(f(a)) \ldots \\ b, f(b), \ldots \end{cases}$ termeni

$\mathcal{H}(C) = \{ \{\neg Q(b)\}, \{P(a)\}, \{P(b)\}, \{P(f(a))\}, \{P(f(b))\},$
$\{\neg P(f(a)), Q(a)\}, \ldots \}$

$$\boxed{\{\{\neg Q(b)\}, \{P(f(a))\}, \{\neg P(f(a)), Q(b)\}\}}$$

b) Găsiți o derivare pt. $\square$ folosind rezoluția pt. clauze închise.

Rez. pt. clauze închise

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2}$$

C_1, C_2 clauze închise (fără var.)

L formulă atomică închisă a.î. $L, \neg L \notin$

$C_1 = \{\neg P(f(a)), Q(b)\}$

$C_2 = \{P(f(a))\}$

$C_3 = \{Q(b)\}$ Rez. pt. C_1 și C_2

$C_4 = \{\neg Q(b)\}$

$C_5 = \square$ Rez. pt. C_3 și C_4

Rez. pt. clauze arbitrare

$$\frac{C_1 \qquad C_2}{(\nabla C_1 \setminus \nabla Lit_1) \cup (\nabla C_2 \setminus \nabla Lit_2)} (Rez)$$

- C_1, C_2 clauze fără var. comune
- $Lit_1 \subseteq C_1$ și $Lit_2 \subseteq C_2$ mulț. de literali
- ∇ este cgu pt Lit_1 și Lit_2^c (complementul lui Lit_1)

Scanned with CamScanner

S 5.3 Găsiți 2 rezolvenți pt. clauzele:

$C_1 = \{P(x), P(g(y)), Q(x)\}$

$C_2 = \{\neg P(x), R(f(x), a)\}$

Redenumim var. în C_2 : $C_2' = \{\neg P(z), R(f(z), a)\}$

- Alegem $Lit_1 = \{P(x)\}$, $Lit_2 = \{\neg P(z)\}$

  Căutăm cgu pt. $P(x)$ și $P(z)$ $\Rightarrow$ $\sigma(x) = z$

  Obținem rezolventul : $\{P(g(y)), Q(z), R(f(z), a)\}$

- Alegem $Lit_1 = \{P(x), P(g(y))\}$ și $Lit_2 = \{\neg P(z)\}$

// în principiu, ai Lit_1 termeni pozitivi, Lit_2 negativi sau invers; nu amestecăm termeni cu negați de termeni

Alg. de unif. $P(x) \doteq P(g(y))$,

$P(g(y)) = P(z)$

$\Rightarrow$ cgu $\sigma(x) = g(y)$ și

$\sigma(z) = g(y)$

Obținem rezolventul: $\{Q(g(y)), R(f(g(y)), a)\}$

- Alegem $Lit_1 = \{P(g(y))\}$ și $Lit_2 = \{\neg P(z)\}$

  $\Rightarrow$ cgu $\sigma(z) = g(y)$

  Obținem rezolventul: $\{P(x), Q(x),$

  $R(f(g(y)), a)\}$

S 5.4. Găsiți o derivare a clauzei vide $\square$ pt. mulț. de clauze arbitrare :

$$C_1 = \{ \neg P(x), R(x, f(x)) \}$$
$$C_2 = \{ \neg R(a, x), Q(x) \}$$
$$C_3 = \{ P(a) \}$$
$$C_4 = \{ \neg Q(f(x)) \}$$

Facem Rezoluție pt. C_1 și C_3

$Lit_1 = \{ \neg P(x) \}$

$Lit_2 = \{ P(a) \}$ $\Rightarrow$ c.g.u $\sigma(x) = a$ pt. Lit_1 și Lit_2

$\Rightarrow C_5 = \{ R(a, f(a)) \}$

Facem rezoluție pt. C_2 și C_4

~~$Lit_1 = \{$~~

Redenumim în C_4 $\Rightarrow C_4' = \{ \neg Q(f(z)) \}$

$Lit_1 = \{ Q(x) \}$

$Lit_2 = \{ \neg Q(f(z)) \}$ $\Rightarrow$ c.g.u $\sigma(x) = f(z)$

$\Rightarrow C_6 = \{ \neg R(a, f(z)) \}$

Facem rezoluție pentru C_5 și C_6

$Lit_1 = \{ R(a, f(a)) \}$

$Lit_2 = \{ \neg R(a, f(z)) \}$ $\Rightarrow$ c.g.u $\sigma(z) = a$

$C_7 = \square$

S 5.5. Folosind rezoluția, arătați că formula φ este validă în FOL, unde

$$\varphi = (\forall x(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)))$$

Indicație: se caută o derivare a $\square$ din forma clauzală a lui $\neg\varphi$.

φ validă

$\Longleftrightarrow$

$\neg\varphi$ este nesatisfiabilă

$$\neg\varphi = \neg((\forall x(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)))$$

$$\varphi_1 = \neg((\forall x(P(x) \to Q(x))) \to ((\exists P(y)) \to (\exists z Q(z)))$$

$$\varphi_2 = \neg(\neg(\forall x(\neg P(x) \vee Q(x))) \vee (\neg(\exists y P(y)$$

$y \leftarrow f(x)$

$$\varphi^{fc} = \forall x \forall z((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(f(x)) \wedge \neg Q(z))$$

$C = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(f(x))\}, \{\neg Q(z)\}\}$

$C_1 = \{\neg P(x), Q(x)\}$

$C_2 = \{P(f(x))\}$

$C_3 = \{\neg Q(z)\}$

$C_2' = \{P(f(y))\}$ $\Rightarrow$ am redenumit $\theta(x) = f(y)$

$C_4 = \{ Q(f(y)) \}$ Rez C_1, C_2'

$C_5 = \square$ $\quad \theta(z) = f(y)$

Rez C_2, C_4

6) „Există elevi cărora le plac toate lecturile. Nici unui elev nu îi plac lucrurile plictisitoare. În consecință, nicio lectură nu e plictisitoare.

$E(x) \to$ x este elev

$L(x) \to$ x este lectură

$P(x) \to$ x este plictisitoare

$R(x,y) \to$ x place y

$\varphi_1 : \exists x \forall y \; E(x) \wedge L(y) \to R(x,y)$

$\varphi_2 : \forall x \; E(x) \to \forall y \, (P(y) \to \neg R(x,y))$

$\varphi_3 : \cancel{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \forall x \, \neg P(x)}$