3.º Teste – Parte 3 » Data: 10/02/2016 Código da prova: **1002201601**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 45 minutos

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação diferencial (ED) $\dfrac{dy}{dx} + A(x,y) = -y$

Das alíneas seguintes, <u>resolva apenas uma</u>:

[5.00] **(a)** Para $A(x,y) = -yx^2$, mostre que a ED é de variáveis separáveis e determine a sua solução geral.

[5.00] **(b)** Para $A(x,y) = -x^2 y\cos(y)$ a ED é de variáveis separadas ou separáveis? Justifique.
Se não for, elimine a parte do cosseno em A e determine a solução particular da ED que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

2. Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

Das alíneas seguintes, <u>resolva apenas uma</u>:

[5.00] **(a)** A equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times \exp(-x^2)$ como integral geral é dada por $y' + 2xy = 0$ cujo campo direcional é dado pela figura 2 e o gráfico da solução geral pela figura 1. Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

[5.00] **(b)** A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i, resistência $R = 10\,\Omega$ (ohms) e indutância $L = 0.5\ h$ (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $L\dfrac{di}{dt}$. Assim, a intensidade de corrente i, no instante t, se $e = 3\sin(2t)$ (em volts) e $i = 6$ quando $t = 0$ é dada pela solução particular $i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t$. À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve e^{-20t} perde influência no valor da intensidade da corrente. Diz-se que este termo é o termo do *estado transitório* e o outro é o termo do *estado permanente.*

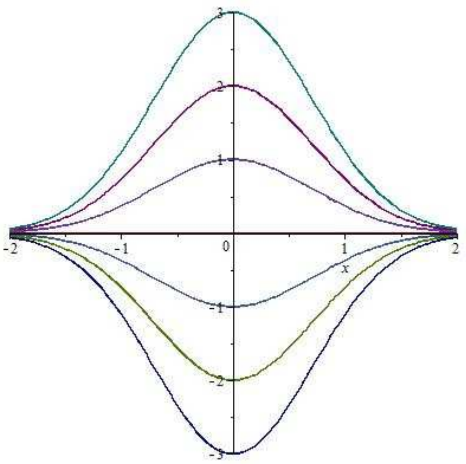

Figura 1

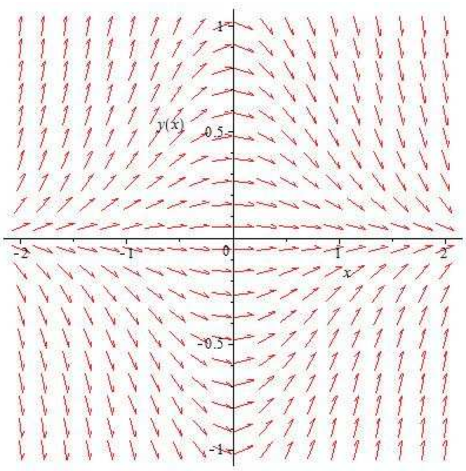

Figura 2

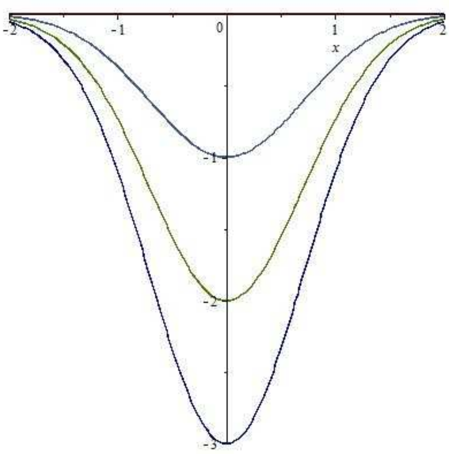

Figura 3

3. Considere o problema de valor inicial $y' = -2ty, \; y(0) = 2, \quad t \in [0, 1.5]$

[2.50] **(a)** Verifique que $y(t) = 2\exp(-t^2)$ é a solução exata do problema.

[5.00] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos. Para o preenchimento da coluna das aproximações de Euler, deve apresentar os cálculos das iterações da aplicação da fórmula do método de Euler.

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2
0	0	2			0	0
1		1.5576		1.5000		0.0576
2	1					0.0142
3	1.5	0.2108		0.3750		

[0.50] **(c)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

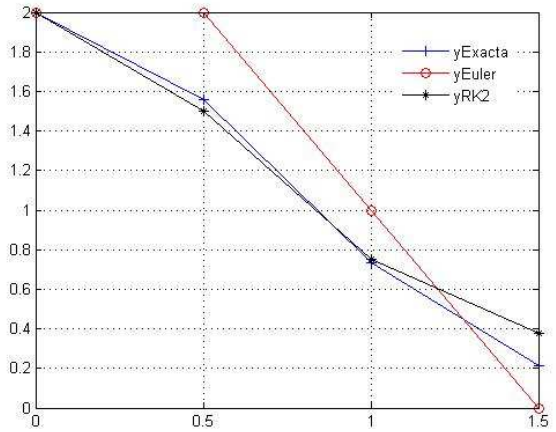

Figura 4

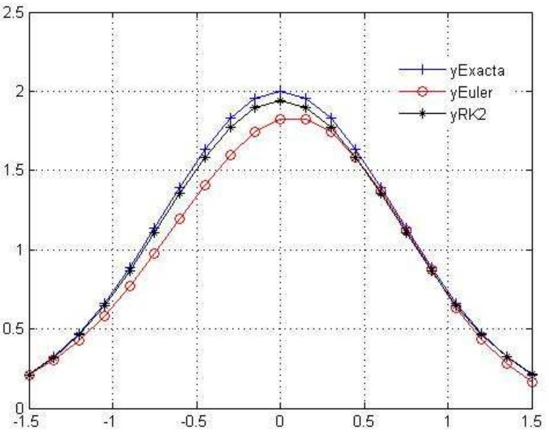

Figura 5

[1.00] **(d)** Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincide com a figura que excluiu na alínea anterior.

[1.00] **(e)** Quais dos comandos seguintes em GeoGebra lhe permitiriam determinar a solução exata do PVI e a solução aproximada do mesmo.

(A)	`SolveODE[-2xy,(0,2)]`	**(B)**	`SolveODE[-2xy,(-1.5,0.2108)]`
(C)	`NSolveODE[{-2xy}, 0, {2}, 1.5]`	**(D)**	`NSolveODE[{-2xy}, -1.5, {0.2108}, 1.5]`

FORMULÁRIO

PVI	**Método de Euler**	**Método de Runge-Kutta (RK2)**
$(P)\begin{cases} y' = f(t,y) \\ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$	$y_{i+1} = y_i + h \times f(t_i, y_i) \quad , i = 0,1,2,\ldots,n-1$	$k1 = h \times f(t_i, y_i)$ $k2 = h \times f(t_{i+1}, y_i + k1)$ $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k1 + k2), \; i = 0,1,2,\ldots,n-1$