ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº8 Data limite de entrega: 24/Nov/2015 (23h59m)

DOMÍNIOS DE FUNÇÕES [**Exercícios de aplicação**]

Determine os domínios das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$; d) $f(x) = \sqrt{e^{2x}-1}$; g) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$; i) $f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$;

INTEGRAL IMPRÓPRIO

D. Análise

Analise cada uma das expressões apresentadas e identifique qual (quais) representa(m) um integral impróprio, justificando convenientemente a sua resposta, e determine o valor dos integrais, no caso de ser possível o seu cálculo.

iii) a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$; b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$; d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

E. Síntese

1. Justifique convenientemente que os seguintes integrais impróprios são mistos e determine a sua natureza.

   d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Sugestão de resolução:

DOMÍNIOS DE FUNÇÕES [**Exercícios de aplicação**]

a) Tem-se

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x-1>0 \ \wedge\ \ln(x-1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x>1 \ \wedge\ x-1 \neq \underbrace{e^0}_{=1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x>1 \ \wedge\ x \neq 2\} =]1, +\infty[\setminus \{2\} \end{aligned}$$

d) Tem-se

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : e^{2x}-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x \geq \underbrace{\ln(1)}_{=0}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[\end{aligned}$$

g) Tem-se $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2-4 \geq 0\}$. Uma vez que

$$x^2-4=0 \ \Leftrightarrow\ x^2=4 \ \Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{4} \ \Leftrightarrow\ x=\pm 2$$

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

então

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2-4 \geq 0\} =]-\infty, 2] \ \cup\ [2, +\infty[$$

i) Tem-se

$$D = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \underbrace{\ln(1)}_{=0}\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

D. Análise

Comecemos por determinar o domínio da função integranda, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$:

$$\begin{aligned} D &= \left\{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x+1} \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \ \wedge \ x+1 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \ \wedge \ x \neq -1\right\} =]-1, +\infty[\end{aligned}$$

Notamos ainda que a função $f(x)$ é contínua no seu domínio, por ser definida pelo quociente de funções contínuas (uma função constante e um radical).

Observamos agora que a primitiva de $f(x)$ é dada por

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x+1} + c, \ c \in \mathbb{R}\,.$$

a) A função $f(x)$ não está definida no intervalo $I = [-2, -1]$ pelo que o integral $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$ não está definido.

b) O intervalo de integração $I = [1, 3]$ é limitado e está contido no domínio de $f(x)$ pelo que a função está definida e é contínua em I. Logo o integral é um integral definido. Neste caso, tem-se

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_1^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}$$

c) O intervalo de integração $I = [-1, 3]$ é limitado mas não está completamente contido no domínio de $f(x)$, pois $x = -1$ não pertence ao domínio de $f(x)$. Note-se agora que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty\,,$$

pelo que $f(x)$ está definida e é contínua em $]-1, 3]$, mas é ilimitada em $x = -1$. Logo o integral é impróprio de segunda espécie. Neste caso, tem-se

$$\int_A^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_A^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{A+1} = 4 - 2\sqrt{A+1}$$

pelo que

$$\lim_{A \to -1^+} \int_A^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{A \to -1^+} \left(4 - 2\sqrt{A+1}\right) = 4$$

Logo o integral é convergente e tem valor 4.

d) O intervalo de integração $I = [1, +\infty[$ está contido no domínio de $f(x)$ pelo que a função está definida e é contínua em I. No entanto o intervalo é ilimitado, pelo que o integral é impróprio de primeira espécie. Neste caso, tem-se

$$\int_1^B \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_1^B = 2\sqrt{B+1} - 2\sqrt{2}$$

pelo que

$$\lim_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \left(2\sqrt{B+1} - 2\sqrt{2}\right) = +\infty$$

Logo o integral é divergente.

E. Síntese

1. d) Comecemos por determinar o domínio da função integranda, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$:

$$D \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} :\ \sqrt[3]{x} \neq 0\right\} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 0\right\} \;=\; \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Notamos ainda que a função $f(x)$ é contínua no seu domínio, por ser definida pelo quociente de funções contínuas (uma função constante e um radical).

Observamos agora que a primitiva de $f(x)$ é dada por

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \;=\; \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx \;=\; \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c \;=\; \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{x^2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

O intervalo de integração $I = [0, +\infty[$ não é limitado e não está completamente contido no domínio de $f(x)$, pois $x = 0$ não pertence ao domínio de $f(x)$. Note-se agora que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \;=\; +\infty\,,$$

pelo que $f(x)$ está definida e é contínua em $]1, +\infty[$, mas é ilimitada em $x = 0$. Logo o integral é impróprio de 2ª espécie. Além disso, como o intervalo de integração é ilimitado então o integral é também é impróprio de 1ª espécie e portanto é um integral misto.

Uma vez que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \;=\; \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx}_{\text{integral imp. de 2ª espécie}} \;+\; \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx}_{\text{integral imp. de 1ª espécie}}\,,$$

então a natureza do integral depende da natureza dos integrais impróprios de 2ª e de 1ª espécie anteriores. Uma vez que

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \;=\; \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{x^2}\right]_1^B \;=\; \lim_{B\to+\infty} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{B^2} - 1\right) \;=\; +\infty$$

então o integral impróprio de primeira espécie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ é divergente e, consequentemente, o integral impróprio misto $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ também é divergente.