EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE B » Data: 27/06/2016 Código da prova: **2706201601**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f\left(x,y\right) = -x^2 - y^2$;

$g\left(x,y\right) = \sqrt{-f(x,y)}$; $\quad h\left(x,y\right) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 9 \\ \text{então } z = \frac{\sqrt{27}}{3} g(x,y) \end{array} \right.$; $\quad j\left(x,y\right) = \begin{cases} \sqrt{36 + f(x,y)} & \text{, se } 9 < x^2 + y^2 \le 36 \\ h(x,y) \end{cases}$

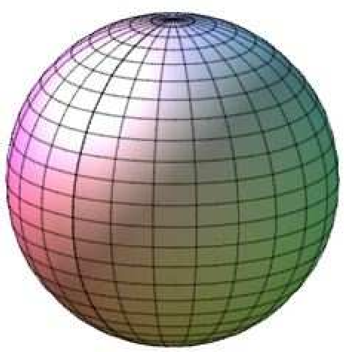

Figura 1

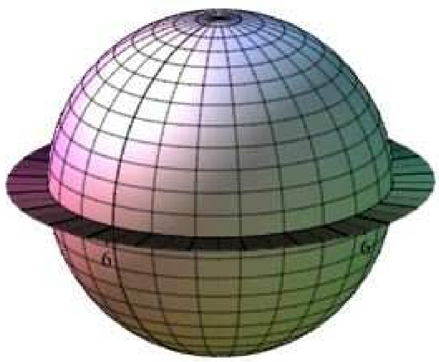

Figura 2

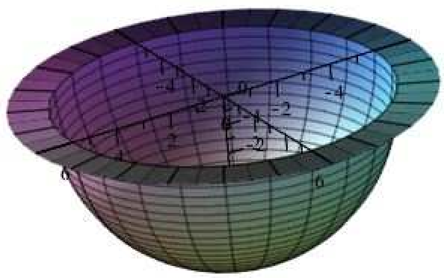

Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.0] **(b)** Defina a função j em forma de algoritmo e mostre que $C = \left\{\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$ é uma curva de nível comum a todas as funções.

[2.0] **(c)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[3.0] **(d)** Resolva apenas **<u>três</u>** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras 1, 2 e 3, apenas a figura 2 representa o gráfico de uma função real de duas variáveis.

ii) O vetor $\left[4 \quad y \quad -\sqrt{20}\right]$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j\left(x,y\right)$ com o plano $x = 4$ no ponto de coordenadas $P(4,0,2\sqrt{5})$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

iv) As funções *f*, g e h têm um mínimo absoluto em $(0,0)$ e a função j não tem extremos.

v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2 <= 9, sqrt(27(x^2+y^2))/3, 9 < x^2+y^2 <= 36,
                     sqrt(36-x^2-y^2), undefined)
```

[3.0] **(e)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>duas</u>**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = g(x,y)$, a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $P\left(2,2\right)$ ocorrem na direção e sentido do vetor $\vec{w} = \left\langle -1,-1 \right\rangle$?
Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação da temperatura em P segundo o vetor $\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dado por $V = g(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença do potencial entre os pontos $(1.75,1.75)$ e $(2,2)$.

iii) Mostre que se $z = -f(x,y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 4 + f(x, y-1)$ se $x^2 + (y-1)^2 \leq 4$, no ponto $P\left(0,1,4\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. A figura 5 representa um sólido, de densidade igual a 5, composto por três partes:

- Cone de raio $r = 3$ e altura $h = 2$;
- Cilindro de raio $r = 3$ e altura $h = \sqrt{27} - 2$;
- Segmento de esfera de raio $r = 6$.

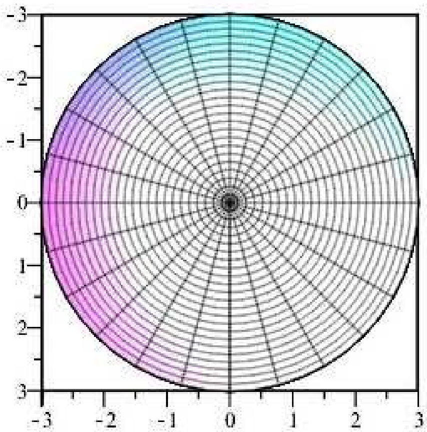

Figura 4

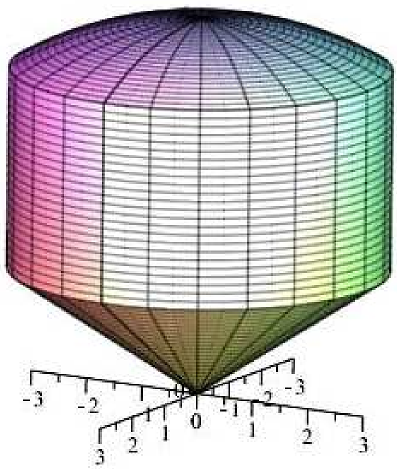

Figura 5

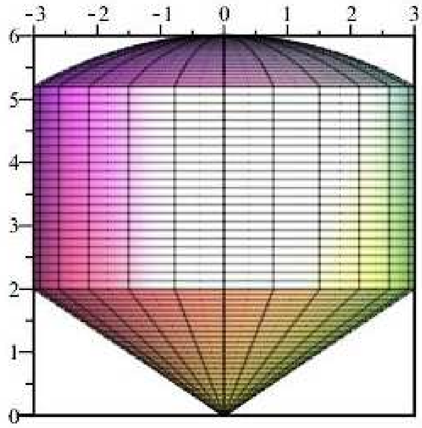

Figura 6

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq z \leq \sqrt{27}\right\}$$

$$S_3 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \arctan\tfrac{3}{\sqrt{27}} \wedge \tfrac{\sqrt{27}}{\cos\varphi} \leq R \leq 6\right\}$$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_1? Justifique.

```
> addcoords(z_cylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(2/3*r, r=0..3, theta=0..2*Pi, coords=z_cylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>três</u>**

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o bico do lápis é igual a $A(S) = \pi r m = 3\sqrt{13}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

<u>Sugestão</u>: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\; dydx$, com f_x e f_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right\}$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := ________________________;
   y := ________________________;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- [ ] Licenciatura em Eng. Informática
- [ ] Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- [ ] Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- [ ] Sim
- [ ] Não

Frequência às aulas de AM2

- [ ] Regime diurno
- [ ] Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- [ ] Não
- [ ] Sim
    - [ ] At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
    - [ ] At02_Matlab – MNEDO_PVI
    - [ ] At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
    - [ ] At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
    - [ ] Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- [ ] Sim
- [ ] Não