Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº10 | Data limite de entrega: 9/Dez/2015 (23h59m)

Aviso: Atendendo ao feriado de 8 de Dezembro, a entrega deste TPC poderá ser efectuada até dia 9 de Dezembro, quarta feira.

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

C. Aplicação

Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções racionais.

3) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{2x^3-6x^2+4x}\,dx\,;$

4) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{(x-1)^3}\,dx\,;$

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

B. Compreensão

Para cada uma das seguintes primitivas, explique a aplicação das regras de primitivação de funções trigonométricas **e calcule a respectiva primitiva**.

2) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\sec x}}\,dx\,;$

3) $\displaystyle\int \tan^3(3x)\cot(3x)\,dx\,;$

4) $\displaystyle\int x\cos^2(x^2)\,dx\,;$

5) $\displaystyle\int x\sin(3x^2)\cos(-2x^2)\,dx\,;$

Sugestão de resolução:

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

C. Aplicação

3) A fracção é imprópria (grau do numerador = 3 = grau do denominador) pelo que a primitivação da fracção é realizada recorrendo à sua decomposição numa soma de elementos simples e o cálculo dessa decomposição começa pela divisão dos polinómios:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & -1 & 2x^3-6x^2+4x \\ \hline -(x^3 & -3x^2 & +2x &) & \frac{1}{2} \\ \hline & +3x^2 & -2x & -1 & \end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^3-1}{2x^3-6x^2+4x}}_{\text{fracção imprópria}} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-6x^2+4x}}_{\text{fracção própria}}\,.$$

A fracção própria resultante da divisão ainda não é primitivável de forma imediata, pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples. Comecemos por determinar a factorização do denominador:

$$\begin{aligned} 2x^3-6x^2+4x=0 \;&\Leftrightarrow\; x\,(2x^2-6x+4)=0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x=0 \;\vee\; 2x^2-6x+4=0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x=0 \;\vee\; x=\tfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{4} \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x=0 \;\vee\; x=1 \;\vee\; x=2 \end{aligned}$$

Então

$$2\,x^3 - 6x^2 + 4x \;=\; 2\,(x-0)(x-1)(x-2)\,.$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

Cada raiz (simples) do denominador determina um elemento simples da decomposição, pelo que

$$\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-6x^2+4x} = \underbrace{\frac{A}{x-0}}_{\cdot 2(x-1)(x-2)} + \underbrace{\frac{B}{x-1}}_{\cdot 2x(x-2)} + \underbrace{\frac{C}{x-2}}_{\cdot 2x(x-1)} = \frac{2A(x-1)(x-2)+2B\,x\,(x-2)+2C\,x\,(x-1)}{2\,x\,(x-1)(x-2)}\,.$$

Substituindo, na igualdade entre os numeradores, x pelas raízes do denominador obtém-se um sistema possível e determinado de **três equações** que permite determinar os valores das **três incógnitas** pretendidas:

$$\begin{array}{c|rcl}
 & 3x^2-2x-1 & = & 2A(x-1)(x-2)+2B\,x\,(x-2)+2C\,x\,(x-1) \\ \hline
x=0 & -1 & = & 4A+0+0 \\
x=1 & 0 & = & 0-2B+0 \\
x=2 & 7 & = & 0+0+4C
\end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\frac{1}{4} \\ B=0 \\ C=\frac{7}{4}\end{array}\right.$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-6x^2+4x} = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{x-2}\,,$$

e consequentemente a fracção racional imprópria tem decomposição definida por

$$\underbrace{\frac{x^3-1}{2x^3-6x^2+4x}}_{\text{fracção imprópria}} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-6x^2+4x}}_{\text{fracção própria}} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{x-2}\,.$$

A primitiva pode agora ser calculada recorrendo à decomposição determinada e às regras de primitivação imediata.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3-1}{2x^3-6x^2+4x}\,dx &= \int\left(\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{7}{4}}{x-2}\right)dx = \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{R1}\,dx - \frac{1}{4}\int\underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\,dx + \frac{7}{4}\int\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{R5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{7}{4}\ln|x-2| + c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4) A fracção é imprópria (grau do numerador $= 3 =$ grau do denominador) pelo que a primitivação da fracção é realizada recorrendo à sua decomposição numa soma de elementos simples e o cálculo dessa decomposição começa pela divisão dos polinómios. Uma vez que

$$\frac{x^3-1}{(x-1)^3} = \frac{x^3-1}{(x-1)(x^2-2x+1)} = \frac{x^3-1}{x^3-3x^2+3x-1}$$

então

$$\begin{array}{rrrrl|l}
 & x^3 & & & -1 & x^3-3x^2+3x-1 \\ \cline{6-6}
-(& x^3 & -3x^2 & +3x & -1\ ) & 1 \\ \cline{1-5}
 & & 3x^2 & -3x & &
\end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^3-1}{(x-1)^3}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{3x^2-3x}{(x-1)^2}}_{\text{fracção própria}}\,.$$

A fracção própria resultante da divisão ainda não é primitivável de forma imediata, pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples. Uma vez que a factorização do denominador já é dada, então

$$\frac{3x^2-3x}{(x-1)^3} = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x-1)^2} + \underbrace{\frac{B}{(x-1)^2}}_{\cdot(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}\,,$$

pois a raiz $x = 1$ tem multiplicidade três e portanto determina três elementos simples.

Substituindo, na igualdade entre os numeradores, x pela raiz $x = 1$ e por outros dois valores reais ($x = 0$ e $x = -1$, por exemplo), obtém-se um sistema possível e determinado de **três equações** que permite determinar os valores das **três incógnitas** pretendidas:

$$
\begin{array}{r|rcl}
 & 3x^2 - 3x & = & A(x-1)^2 + B(x-1) + C \\
\hline
x = 1 & 0 & = & 0 + 0 + C \\
x = 0 & 0 & = & A - B + C \\
x = -1 & 6 & = & 4A - 2B + C
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ A = B \\ 4A - 2A = 6 \end{array} \right.
\quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ B = 3 \\ A = 3 \end{array} \right.
$$

A decomposição da fracção numa soma de elementos simples é assim definida por

$$\frac{3x^2 - 3x}{(x-1)^3} = \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2},$$

e consequentemente a fracção racional imprópria tem decomposição definida por

$$\underbrace{\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{3x^2 - 3x}{(x-1)^3}}_{\text{fracção própria}} = 1 + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

pelo que a primitiva pode agora ser calculada recorrendo a essa decomposição e às regras de primitivação imediata.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 1}{(x-1)^3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) dx \\
&= \int \underbrace{1}_{R1}\,dx + 3\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx + 3\int \underbrace{(x-1)^{-2}}_{R2}\,dx \\
&= x + 3\,\ln|x-1| + 3\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c \\
&= x + 3\,\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Observação: Uma vez que

$$\frac{x^3 - 1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

(sem alteração de domínios!), o cálculo da primitiva também pode ser realizado a partir desta última forma, começando pela divisão dos polinómios e seguindo-se pela decomposição numa soma de elementos simples (apenas dois elementos, uma vez que é esse o grau do denominador). É isso que justifica que $C = 0$ no cálculo da decomposição em elementos simples anteriormente realizado.

Primitivação de funções trigonométricas

B. Compreensão

2) Nenhuma das regras de primitivação imediata (em particular R2 e R5) é aplicável. Porém, atendendo à definição de secante, a função pode ser interpretada como um produto de potências de seno e cosseno:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\sec x}}\,dx &= \int \sin^3 x \sqrt[4]{\cos x}\,dx \\
&= \int \sin^3 x \cos^{\frac{1}{4}} x\,dx.
\end{aligned}
$$

Uma vez que a potência de seno tem expoente ímpar, podemos aplicar a técnica descrita no caso II-1 da página 7 das Tabelas de Matemática. Então, destaca-se $\sin x$ e passa-se o factor resultante

($\sin^2 x$) à co-função (cosseno), recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\sec x}}\,dx &= \int \sin^3 x \cos^{\frac{1}{4}} x\,dx \\
&= \int \sin x \sin^2 x \cos^{\frac{1}{4}} x\,dx \\
&= \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\cos^{\frac{1}{4}} x\,dx \\
&= \int \sin x\,\big(\cos^{\frac{1}{4}} x - \cos^{\frac{9}{4}} x\big)\,dx \\
&= \int \sin x \cos^{\frac{1}{4}} x\,dx - \int \cos^{\frac{9}{4}} x\,dx \\
&= -\int \underbrace{-\sin x \cos^{\frac{1}{4}} x}_{R2}\,dx - (-1)\int \underbrace{-\sin x \cos^{\frac{9}{4}} x}_{R2}\,dx \\
&= -\frac{\cos^{\frac{5}{4}} x}{\frac{5}{4}} + \frac{\cos^{\frac{13}{4}} x}{\frac{13}{4}} + c \\
&= -\frac{4}{5}\sqrt[4]{\cos^5 x} + \frac{4}{13}\sqrt[4]{\cos^{13} x} + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3) Nenhuma das regras de primitivação imediata (em particular R2 e R5) é aplicável. No entanto, atendendo às definições de tangente e de cotangente, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(3x)\cot(3x)\,dx &= \int \frac{\sin^3(3x)}{\cos^3(3x)}\,\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\,dx \\
&= \int \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}\,dx \\
&= \int \tan^2(3x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

pelo que a função pode ser interpretada como uma potência de expoente natural (par) de tangente. Assim, seguindo o descrito no caso I-3 da página 6 da Tabelas de Matemática, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(3x)\cot(3x)\,dx &= \int \tan^2(3x) \\
&= \int \Big(\sec^2(3x) - 1\Big)\,dx \\
&= \int \sec^2(3x)\,dx - \int \underbrace{1}_{R1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \underbrace{3\sec^2(3x)}_{R8}\,dx - dx \\
&= \frac{1}{3}\tan(3x) - x + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4) Nenhuma das regras de primitivação imediata (em particular R2 e R6) é aplicável, mas atendendo à potência de expoente par de cosseno, podemos aplicar a técnica descrita no caso I-2 da página 7 da Tabelas de Matemática. Note-se que o factor x é fundamental para se poder aplicar a regra R6 no final dos cálculos. Então

$$\begin{aligned}
\int x\cos^2(x^2)\,dx &= \int x\,\frac{1}{2}\Big(1+\cos(2x^2)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{R2}\,dx + \frac{1}{2}\int x\cos(2x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2x\cos(2x^2)}_{R6}\,dx \\
&= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\sin(2x^2) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

5) A regra R2 da primitivação imediata não é aplicável porque as funções seno e cosseno têm argumentos diferentes. Nesse caso o cálculo da primitiva pode ser realizado recorrendo à técnica descrita no caso III da página 7 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$
\begin{aligned}
\int x\sin(3x^2)\cos(-2x^2)\,dx &= \int x\,\frac{1}{2}\Big(\sin(x^2)+\sin(5x^2)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int x\sin(x^2)\,dx + \frac{1}{2}\int x\sin(5x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2x\sin(x^2)}_{R7}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10}\int \underbrace{10x\sin(5x^2)}_{R7}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\Big(-\cos(x^2)\Big) + \frac{1}{20}\Big(-\cos(5x^2)\Big) + c \\
&= -\frac{1}{4}\cos(x^2) - \frac{1}{20}\cos(5x^2) + c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$