Exame Época Normal 26/02/2016

1 - $dy + (x^2-1)\, y\, dx = 0 \quad (1)$

Estamos perante uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis, pois é do tipo:

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$$

$$(x^2-1)y\, dx + dy = 0$$

Se $\boxed{y \neq 0}$

$$(x^2-1)\, y\, dx = -dy$$

$$(x^2-1)\, dx = -\frac{1}{y}\, dy$$

$$(x^2-1)\, dx + \frac{1}{y}\, dy = 0$$

2° passo

$$\int (x^2-1)\, dx + \int \frac{1}{y}\, dy = \int 0$$

$$\frac{x^3}{3} - x + C_1 + \ln|y| + C_2 = C$$

$$\boxed{\frac{x^3}{3} - x + \ln|y| = C}$$

↳ solução geral de (1) na forma implícita

$$\ln|y| = -\frac{x^3}{3} + x + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{C - \frac{x^3}{3} + x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{C} \cdot e^{-\frac{x^3}{3} + x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|y| = C \cdot e^{-\frac{x^3}{3} + x}, \; C \in \mathbb{R}}$$

↳ solução geral de (1) na forma explícita

b) É a figura 3, porque fazendo a sobreposição da figura 3 com a figura 1 a sobreposição é total e o ajuste é completo e perfeito.

c)

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK_2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK_2
0	0	5	5	5	0	0
1	1	9,73867	10	7,5000	0,26133	2,23867
2	2	2,5671	10	-3,75	7,4321	6,3171

Solução Exata

$t = 1$ / $y(1) = 5 \cdot \exp\left(1 - \frac{1^3}{3}\right)$

$= 5 \cdot \exp\left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right)$

$= 5 \times \exp\left(\frac{2}{3}\right)$

$y(1) = 9,73867$

Aproximações

Euler

$i = 0$ $\quad t \in [0,2]$

$h = \frac{b-a}{n}$ $\quad y_0 = 5$ ↳ pq a solução exata é 5 e o erro de Euler é 0.

$h = \frac{2-0}{2} = 1$

$y_{i+1} = y_0 + h \times f(t_i, y_i)$

$y_{0+1} = 5 + 1 \times f(t_0, y_0)$

$y_1 = 5 + 1 \times 5 = 10$

*Calc. Aux.

$f(t, y) = y' \Leftrightarrow f(t,y) = y - yt^2$

$f(t_0, y_0) = y_0 - y_0 t^2$

$= 5 - 5 \times 0^2 = 5$

RK2

$i = 0$ $\quad t \in [0,2]$

$h = \frac{2-0}{2} = 1$

$y_0 = 5$ pq o erro de RK_2 é 0 e a solução exata é 5

$K_1 = 1 \times f(t_0, y_0)$

$= 1 \times 5 = 5$

$\boxed{K_1 = 5}$

$K_2 = h \times f(t_{0+1}, y_0 + K_1)$

$= 1 \times f(t_1, 5+5)$

$= 1 \times f(t_1, 10)$

$= 1 \times 0 = 0$

$\boxed{K_2 = 0}$

Calc. Aux.

$y' = 5 - 5 \times 0^2$

$= 5$

$y' = 10 - 10 \times 1^2$

$= 10 - 10 = 0$

$\underline{i=1}$

Aux.
$t_1 = t_0 + h$
$= 0 + 1$
$= 1$

$y_1 = 10$

$y_{1+1} = y_1 + h \times (t_1, y_1)$

$y_2 = 10 + 1 \times f(t_1, y_1)$
$= 10 + 1 \times 0 = 10$

$y_2 = 10$

$f(t_1, y_1) = y'$

$y' = y_1 - y_1 \times t_1^2$
$= 10 - 10 \times 1^2$
$= 0$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

$y_{0+1} = y_0 + \frac{1}{2}(5+0)$

$y_1 = 5 + \frac{1}{2}(5+0)$

$y_1 = 5 + \frac{5}{2}$

$y_1 = \frac{10}{2} + \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

$y_1 = 7,5$

$\underline{i=1}$

$k_1 = h \times f(t_i, y_1)$

$k_1 = 1 \times f(t_1, y_1)$
$= 0$

<u>Cal Aux</u>

$t_2 = t_1 + h$
$= 1 + 1$
$= 2$

$f(t_1, y_1) = y'$

$f(t_2, y_1) = 7,5 - 7,5 \times 1^2 = 0$

$k_2 = h \times f(t_{i+1}, y_1 + k_1)$
$= 1 \times f(t_2, 7,5)$
$= -22,5$

Aux

$f(t_2, 7,5) = y'$

$y' = 7,5 - 7,5 \times 2^2$
$= -22,5$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

$y_2 = 7,5 + \frac{1}{2}(-22,5)$
$= 7,5 + \frac{-22,5}{2}$

$= \frac{15}{2} + \frac{-22,5}{2}$

$= -3,75$

Erros

Euler

$i = 1$

$|y(t_i) - y(i)|$

$= |9{,}73867 - 10| =$

$= |-0{,}26133| = 0{,}26133$

$i = 2$

$|y(t_i) - y(i)|$

$= |2{,}5671 - 10|$

$= |-7{,}4329| = 7{,}4329$

RK 2

$i = 1$

$|y(t_i) - y(i)|$

$= |9{,}73867 - 7{,}5|$

$= 2{,}23867$

$i = 2$

$|y(t_i) - y(i)|$

$= |2{,}5671 - (-3{,}75)|$

$= 6{,}3171$