TESTE INTERCALAR A » Data: 27/04/2018 Código da prova: **2704201801**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h00+30m

Nome do aluno: **Número:**

1.

[1.00] **(a)** Utilizando um polinómio de Taylor de grau 2, determine um valor aproximado de $\sin\left(61^{\mathrm{o}}\right)+\sin(0^{\mathrm{o}})$ com 2 casas decimais e um majorante para o erro cometido.

Sugestão: $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}\left(x-a\right)^i$ e $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1},\quad c\in\left(a,x\right)$

[0.50] **(b)** Complete as instruções seguintes em GeoGebra que lhe permitiriam resolver a questão anterior.

f(x)=		a=	
n=		x_0=	

```
P(x)= PolinómioTaylor[______,______,______]
seno_x0= P(_____)
```

[0.25] **(c)** Qual das figuras seguintes ilustra corretamente os dados e resultados da alínea anterior? Justifique.

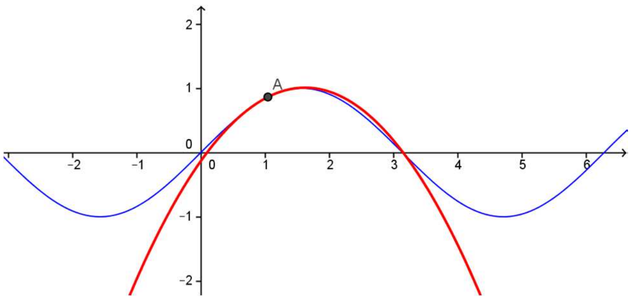

Figura 1

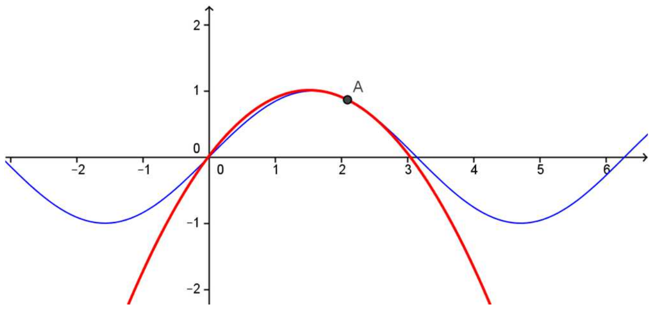

Figura 2

2. Considere a equação não linear $\sin x+\sqrt{4-x^2}=0\Leftrightarrow f(x)=0$

[1.00] **(a)** Indique um intervalo de amplitude igual a 2 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e negativa. Justifique a sua resposta!

[0.75] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.25] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson?
Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.
Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

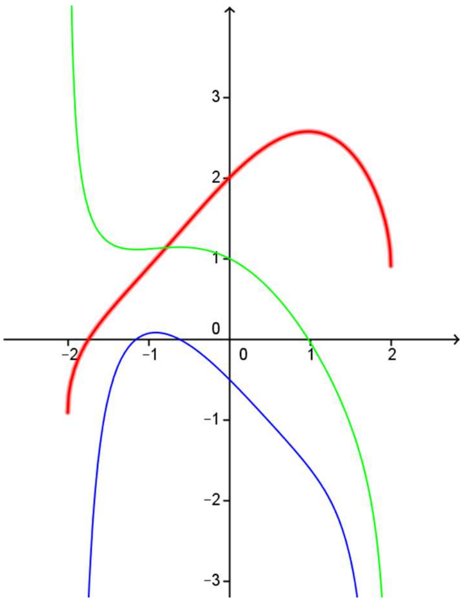

Figura 3 - Gráficos de f, f' e f''

[2.50] **(d)** Deduza a fórmula (equação de iteração) do método de Newton-Raphson ou das tangentes.

Complete a função seguinte e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
 k=_________;
 x(k)=______;
 while(______________)
     x(k+1)=______________________________;
     if(_________________________________) break; end;
     k=____________;
end
```

Script01

```
%INTERFACE01_MTangentes
% 27/04/2018 - ArménioCorreia .: armenioc@isec.pt

CLEAR; clc;
fprintf('-------MÉTODO DAS TANGENTES para f(x)=0-------\n')
strF='exp(-x)-log(x)';
f=@(x) vectorize(eval(strF));
while(1)
    a=str2num(input('a=','s'));
    b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&&isreal(a))&&(isscalar(b)&&isreal(b))&& b>a)
        continue
    end
    if (f(a)*f(b)>=0)
        break;
    end
end

% 1ª e 2ª derivada da função
df     = diff(f(syms('x'))); % Derivada simbólica
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

% aproximação inicial
while(1)
    x0 = num2str(input('s','x0='));
    if ~(isscalar(x0)&& isreal(x0))
        continue;
    end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max=');
tol  = str2num(input('tol=','s'));
% chamada do método das tangentes
xT = MTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol);
disp(xT.');
```

3. Na serenata da Queima das Fitas a guitarra de Coimbra é rainha!

Na figura seguinte o tampo da guitarra é limitado pelas funções f e g, a boca por um círculo de raio $1/2$, o braço por segmentos de reta e a cabeça por segmentos de reta e um arco de circunferência de raio 1.

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ \text{então} \;\; y = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \\ \text{senão se} \;\; 0 \leq x \leq \pi \\ \qquad \text{então} \;\; y = 3\cos(\frac{1}{2}x) \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = -f(x)$$

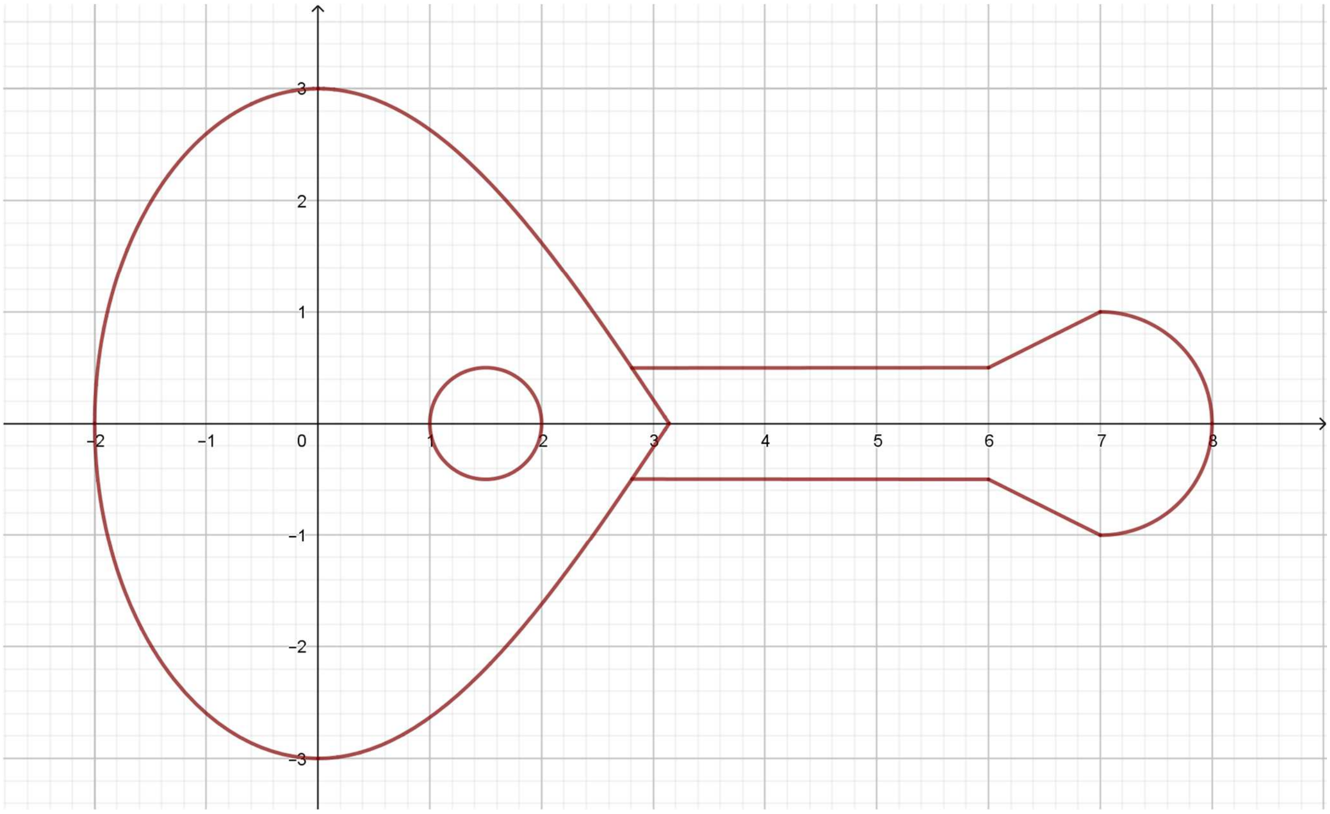

Figura 4 – Gráfico e desenho de uma guitarra de Coimbra

[0.25] **(a)** Defina polinómio interpolador.

[2.00] **(b)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in [0, \pi]$ e a equação do segmento de reta com declive positivo da parte da cabeça da guitarra.

[0.25] **(c)** Redesenhe a figura 4, aproximando as funções e linhas que definem o tampo da guitarra por interpolações quadráticas e as restantes linhas do braço e cabeça da guitarra por interpolações lineares.

[3.00] **(d)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ e $I_2 = \int_{0}^{\pi} -g(x)\,dx$, utilizando respetivamente a regra de Simpson simples $(n = 2)$ e a dos trapézios simples $(n = 1)$.
Recorrendo à figura 4 interprete os resultados obtidos.

[0.50] **(e)** Aplicando as regras de Simpson e a dos trapézios com $n = 2$, qual delas lhe permite obter uma melhor aproximação à medida de área de um semicírculo de raio r? Justifique

[1.00] **(f)** Qual das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique a sua resposta.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0
        s=s+2*f(x);
    else
        s=s+4*f(x);
    end
end
S=(h*f(b)+h*s+h*f(a))/3;
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,h)
n=(b-a)/h;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)
        s=s+4*f(x);
    else
        s=s+2*f(x);
    end
end
S=h/3*f(a)+s+f(b);
```

4.

[0.50] **(a)** A equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times \exp(x - \frac{1}{3}x^3)$ como integral geral é dada por $y' = y - yx^2$, cujo campo direcional é dado pela figura 6.

O gráfico da solução geral é dado pela figura 7? Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

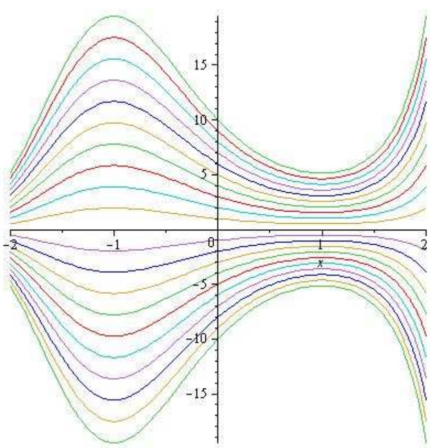

Figura 5

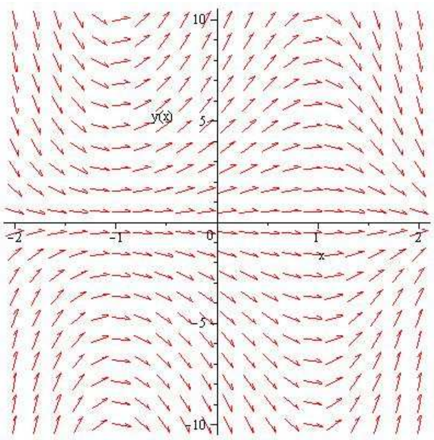

Figura 6

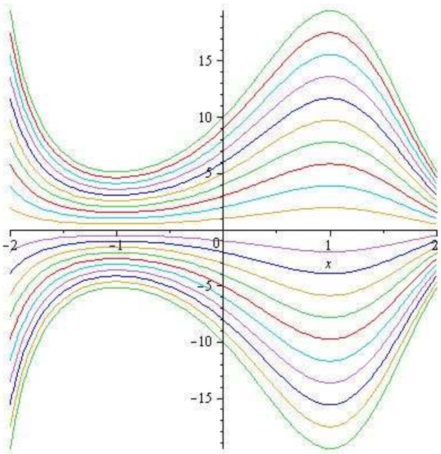

Figura 7

[0.75] **(b)** Considere o problema de valor inicial (PVI) seguinte: $y' = y(1 - t^2)$, $y(0) = 6$, $t \in [0,2]$.

Qual das funções $y(t) = 6 \times \exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ ou $y(t) = 5\exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI?

Justifique a sua resposta.

Apresente a instrução em Matlab através da qual, utilizando uma função da *Symbolic Math Toolbox*, se obtém a solução exata do PVI dado.

[2.00] **(c)** Relativamente ao PVI da alínea anterior, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos..

			Aproximações				Erros			
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i EulerM	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ EulerM	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ RK4
0	0	6					0	0	0	0
1					9	11.5938		2.6864		
2	2	3.0805		-4.5					7.5805	1.2086

[0.25] **(d)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

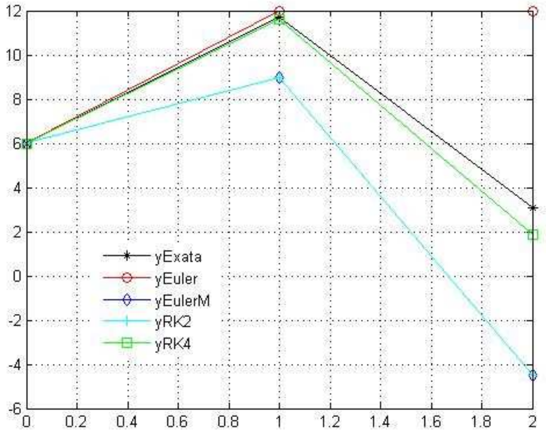

Figura 8

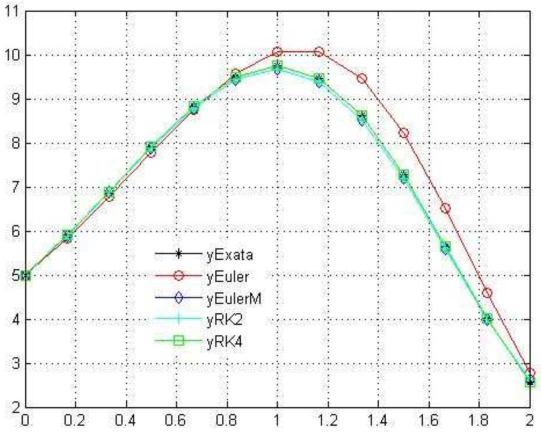

Figura 9

[0.25] **(e)** Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincide com a figura que excluiu na alínea anterior.

[1.00] **(f)** Complete as funções seguintes e acrescente comentários para explicar o algoritmo e métodos numéricos associados. O resultado obtido por estas duas funções é igual?

Sugestão: Fórmula do método de Euler Melhorado

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\big),\ i = 0,1,...,n-1$$

```
function y = EulerMelhorado(f,a,b,n,y0)
h=_________________;
t=_________________;
y=zeros(_____,_____);
y(1)=_____________ ;
for i=1:n
    y(i+1)=_______________________________;
    y(___)=_______________________________;
end
```

```
function y = RK2(f,a,b,n,y0)
h=_________________;
t=_________________;
y=zeros(_____,_____);
y(1)=______________;
for i=1:n
    k1=_________________________________;
    k2=_________________________________;
    y(___)=_____________________________;
end
```

[1.00] **(g)** A *script* seguinte traduz corretamente a resolução em Matlab de um PVI? Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

Script02

```
%INTERFACE01_MNEDO
% y'= f(t,y) com t=[a, b] e y(a)=y0 condição inicial
%CHAMADA FUNÇÕES: N_Euler; N_EulerModificado; N_RK2; N_RK4;dsolve
% 27/04/2018 - ArménioCorreia .: armenioc@isec.pt

clc
clear

disp('--- Parâmetros de entrada do PVI ---');
strF=input('f(t,y)= ','s');
f   =@(t,y) vectorize(eval(strF));
a   = str2num(input('a= ','s'));
b   = str2num(input('b= ','s'));
n   = str2double(input('n= ','s'));
y0  = num2str(input('y0= ','s'));

try
    yEuler  = N_Euler(f,a,b,n,y0);
    yEulerM = N_EulerMelhorado(f,a,b,n,y0);
    yRK2    = N_RK2(f,a,b,n,y0);
    yRK4    = N_RK4(f,a,b,n,y0);
    sExata  = dsolve(['Dy=',strF],['y(',num2str(b),')=',num2str(0)]);
    t=b:(a-b)/n:a;
    yExata  = eval(vectorize(char(sExata)));

    erroEuler  = abs(yRK4-yEuler);
    erroEulerM = abs(yRK4-yEulerM);
    erroRK2    = abs(yRK4-yRK2);
    erroRK4    = abs(yRK4-yExata);

    disp('---- Tabela de Resultados----');
    tabela=[t.',yExata.',yEuler.',yEulerM.',yRK2.',yRK4.',...
            erroEuler,erroEulerM,erroRK2,erroRK4];
    disp(tabela);

    plot(t,yExata,'-*k');
    hold on
    plot(t,yEuler,'-or');
    plot(t,yEulerM,'-db');
    plot(t,yRK2,'-+c');
    plot(t,yRK4,'-sg');
    hold off
    grid on
    legend('yExata','yEuler','yEulerM','yRK2','yRK4');
    shg
catch Me
    errordlg('Ocorreu um erro nos pârametros do PVI ou...','Erro','modal');
end
```