CAPÍTULO

4

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

4.1 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

4.1.1 DEFINIÇÃO DE POLINÓMIO INTERPOLADOR. INTERPOLADORA DE LAGRANGE

Definição 4.1

Seja $f \in C([a,b])$ e $x_i \in [a,b], i = 0,1,\ldots,n$. Um polinómio P que assume os mesmos valores de f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é, que satisfaz

$$f(x_i) = P(x_i) \ , \ i = 0, \ 1, \ \ldots, n$$

chama-se ***polinómio interpolador*** de f nos pontos de interpolação $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Interpoladora de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \quad \text{em que} \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

1. Considere os valores de $f(x)$ que se apresentam na tabela seguinte :

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

a) Usando a ***definição*** determine o polinómio de grau menor ou igual a 2 que interpole $f(x)$ nos pontos -1, 0 e 2.

b) Determine o polinómio de ***Lagrange*** de grau 2 que interpole $f(x)$ nos pontos -1, 0 e 2.

2. Seja a tabela :

x	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x)$	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27

Usando um ***polinómio interpolador de Lagrange*** de grau 2, dê o valor estimado de x para o qual $f(x) = 0.23$. Dê se possível uma estimativa do erro cometido.

3. Considere a função $f(x) = \sin x$ no intervalo [0, 0.4].

a) Determine a interpoladora quadrática de Lagrange, utilizando os nodos $x = 0.4$, $x = 0.7$ e $x = 1.0$

b) Determine a interpoladora cúbica Lagrange, utilizando os nodos $x = 0.4$, $x = 0.6$ e $x = 1.0$

c) Calcule o valor dos dois polinómios nos pontos $x = 0.5$, $x = 0.9$ com o valor de $f(x)$.

d) Compare os limites superiores para os erros das aproximações dadas por $P_2(x)$ e por $P_3(x)$.

4. Considere a função $f(x) = \cos x$, com $x \in [0, \pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 5×10^{-2}.

5. Dada a função definida pela seguinte tabela :

x	0.00	0.10	0.30	0.40
$f(x)$	1.000	0.761	0.067	-0.376

a) Calcule o valor aproximado de $f(0.32)$, utilizando a fórmula interpoladora de Lagrange

i) do 2º grau; **ii)** do 3º grau.

b) Sabendo que $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, calcule $f(0.32)$.

c) Calcule o erro das duas aproximações e compare os resultados obtidos.

Obs.: Utilize quatro casas decimais.

6. A população de determinada cidade portuguesa registada nos últimos censos foi a que consta na tabela seguinte :

ano	1930	1940	1950	1960	1970	1980
pop.	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505

Utilize um polinómio interpolador de Lagrange apropriado para calcular um valor aproximado da população :

a) No ano de 1945;

b) No ano de 1975;

c) No ano de 1990.

7. Na tabela seguinte são apresentados os valores do calor específico da água ,C(θ), á temperatura θ, de θ=0º até θ=100º .

θ^o	0	20	40	60	80	100
C(θ)	999.9	998.2	992.3	983.2	971.8	958.4

a) Calcular um valor aproximado do calor específico da água à temperatura, θ=30ºC e θ=70ºC, utilizando um polinómio interpolador que lhe pareça adequado.

b) A que temperatura é que o calor específico atinge a valor 965.0 ? Utilize apenas os três últimos valores da tabela para obter a estimativa de θ .

8. A velocidade do som na água varia com a temperatura. Utilizando a tabela de valores seguinte, calcule o valor aproximado da velocidade do som na água a 100ºC.

t (º C)	86.0	93.3	98.9	104.4	110.0
v (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

4.1.2 Fórmula de Newton das Diferenças Divididas

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$f(x) \approx P_n(x)$

$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x - x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$

9. Usando a forma de Newton para interpolação, obtenha o polinómio de grau 2, que interpola $f(x)$ nos pontos dados na tabela:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	1

10. Dada a tabela

x_i	1	-1	-2
$f(x_i)$	0	-3	-4

determine uma aproximação para $f(0)$, usando interpolação quadrática.

11. Dada a tabela

x	0	0.1	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.13499	1.4918	1.6497

Obtenha o valor de x, tal que $e^x = 1.3165$.

12. Considere a função $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$.

Determine o polinómio interpolador, de grau 2 para $f(x)$ com $x \in [1,2]$, utilizando o método de Newton das diferenças divididas.

4.1.3 EXERCÍCIOS DE EXAME

13. Usando a teoria da Interpolação Polinomial, determine a equação $f(x)$ da parábola que passa pelos pontos (254, 11), (257, 14) e (258, 19).

14. Utilizando o método de Newton das diferenças divididas, determine a equação da parábola que passa nos pontos: (81, 3) (83, 5) (87, 13).

a) Qual a ordenada do ponto da parábola com abcissa $x = 82$.

b) Qual a ordenada do ponto da parábola com abcissa $x = 89$.

c) Nas alíneas anteriores, cometeu erros? Justifique.

15. Considere a tabela de diferenças divididas de uma função $f(x)$

x	f	f [,]	f [,,]	f [,,,]
-2	1			
		0		
0	1		—	
		—		—
1	—		4	
		9		
2	11			

a) Complete a tabela.

b) Calcule um valor aproximado de $f(-1)$, utilizando uma interpoladora quadrática. Obtenha uma estimativa para o erro da aproximação.

c) Determine a expressão analítica do polinómio interpolador de $f(x)$, do 3º grau, e escreva-o usando o método de Horner para polinómios.

16. Considere a tabela de diferenças divididas de uma função $f(x)$:

x	f	$f\,[,]$	$f\,[,,]$	$f\,[,,,]$
-2	1			
		0		
0	1		—	
		—		—
1	—		4	
		9		
2	11			

a) Complete a tabela.

b) Calcule um valor aproximado de f(-1), utilizando uma interpoladora quadrática. Obtenha uma estimativa para o erro da aproximação.

c) Determine a expressão analítica do polinómio interpolador de $f(x)$, do 3º grau, e escreva-o usando o método de Horner para polinómios.

d) Sobre as diferenças divididas, <u>resolva em alternativa</u> uma das seguintes alíneas:

i) Mostre que: $f\left[x_i, x_{i+1}\right] = f\left[x_{i+1}, x_i\right]$.

ii) Escreva o pseudo-código, correspondente à implementação do algoritmo que permite obter a tabela de diferenças divididas, numa linguagem estruturada.

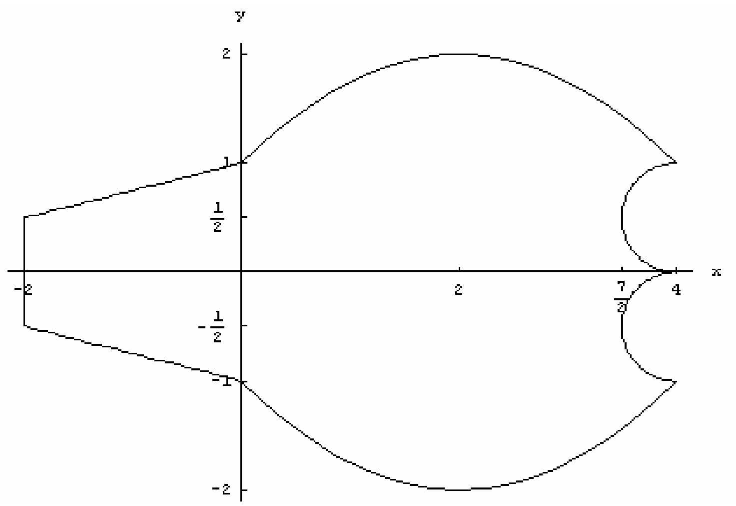
17. Considere a função $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$

a) Determine o polinómio interpolador, de grau 2 para $f(x)$ com $x \in [1,2]$.

b) Calcule, usando uma interpolação linear, um valor aproximado de $f(5/4)$. Obtenha uma estimativa para o erro cometido.

18. A figura, ao lado, representa um peixe seco vendido na *Feira Medieval de Coimbra 2001/2002*. As linhas que contornam a figura são:

- Arcos de circunferência de raio 1/2;
- Parábolas de eixo vertical com vértice de abcissa 2;
- Segmentos de recta.



Determine, usando a teoria da Interpolação Polinomial, as equações da parábola e do segmento de recta que se intersectam no ponto de coordenadas (0, 1)

19. Nas festas *2002 da Cidade de Coimbra - Rainha Santa Isabel*, a iluminação de algumas ruas da Cidade é feita por fios semelhantes às linhas que representam graficamente as funções:

$f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ e $g(x) = -f(x)$

a) Determine, o polinómio interpolador de grau 2 para $f(x)$ com $x \in [1,2]$

b) Qual o valor lógico da seguinte afirmação? Justifique.

Atendendo a que $h(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,2$ para $x_i \in [1,2]$, então $h(x)$ é uma interpoladora quadrática da função $f(x)$.