Capítulo 1

Cálculo Diferencial em IR^n

1.1 Noções Topológicas em IR^n

(1.1) **Definição**

Seja n um número natural. O **Espaço Eucledeano** n-dimensional é o produto cartesiano de n factores iguais a $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

- Considere-se, assim o conjunto $\mathbb{R}^n$ constituído por todas as sucessões ordenadas de n números reais. Os seus elementos

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

com $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, são denominados pontos de $\mathbb{R}^n$ e os números reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dizem-se coordenadas de x.

- Dois elementos de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dizem-se iguais se e só se as coordenadas correspondentes forem iguais, isto é,

$$x_i = y_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

- **Operações Algébricas**

Adição

$+ \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Multiplicação por um escalar

$\cdot \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

(1.2) **Definição**

O conjunto $\mathbb{R}^n$ com as duas operações anteriores, é um **Espaço Vectorial Real**. Por isso, os elementos de $\mathbb{R}^n$ dizem-se **vectores** e os números reais **escalares**.

- Os vectores de $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0,\ldots,0)\\
e_2 &= (0,1,0,\ldots,0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_n &= (0,0,0,\ldots,1)
\end{aligned}
$$

são linearmente independentes e qualquer vector $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ exprime-se, de forma única, como combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Consequentemente, os vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ constituem uma **base** do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, também denominada **base canónica**, e $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial de dimensão *n*.

(1.3) **Definição**

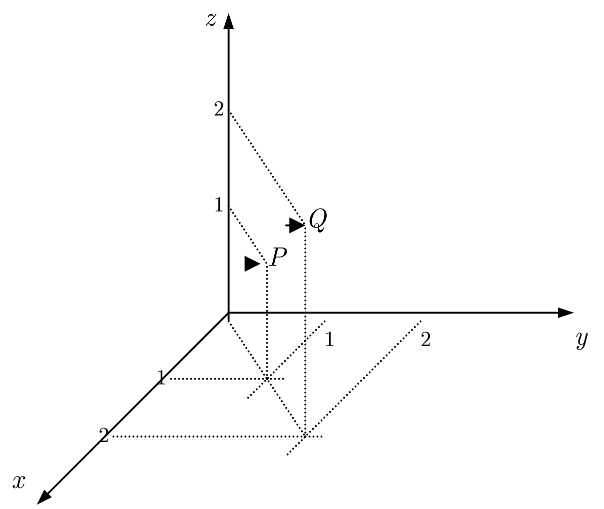
Sejam $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Define-se distância de P a Q e representa-se por $d(P,Q)$ ou $\|P - Q\|$ por:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \qquad (1.1)$$

(1.4) **Exemplo**

Sejam $P(1,1,1)$ e $Q(2,2,2) \in \mathbb{R}^3$. A distância de P a Q é igual a

$$d(P,Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$$



(1.5) **Definição**

Fixando um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ao conjunto de pontos que distam de x_0 menos de ε, chama-se **bola** (aberta) de raio ε e centro x_0 e representa-se por

$B(x_0;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$.

O conceito de **vizinhança** ε de x_0 está ligado ao conceito de bola aberta, isto é,

$V_\varepsilon(x_0) \equiv B(x_0;\varepsilon)$.

Seja ***S*** um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(1.6) **Definição**

Um ponto x_0 diz-se **interior** de S sse existir uma bola de centro em x_0, contida em S, isto é: $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \subset S$.

(1.7) **Definição**

Um ponto x_0 diz-se **exterior** de S sse existir uma bola de centro em x_0, contida no complementar de S, isto é: $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \subset (\mathbb{R}^n \setminus S)$.

(1.8) **Definição**

Um ponto x_0 diz-se **fronteiro** a S sse qualquer bola de centro em x_0, contiver pelo menos um ponto de S e do complementar de S.

(1.9) **Definição**

O conjunto dos pontos interiores, exteriores e fronteiros designa-se respectivamente por interior - ***int(S)***, exterior - ***ext(S)*** e fronteira - ***fr(S)***

$\operatorname{int}(S) \cup ext(S) \cup fr(S) = \mathbb{R}^n$.

(1.10) **Definição**

O conjunto S diz-se **aberto** sse for igual ao seu interior, $S = \operatorname{int}(S)$.

(1.11) **Definição**

Chama-se **fecho** ou **aderência** de S à união do interior de S com a sua fronteira e representa-se por $\overline{S}$, isto é, $\overline{S} = \operatorname{int}(S) \cup fr(S)$.

Prova-se que um ponto x_0 é **aderente** a S sse $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap S \neq \varnothing$.

(1.12) **Definição**

O conjunto S diz-se **fechado** sse for igual ao seu fecho, $S = \overline{S} \Leftrightarrow fr(S) \subset S$.

(1.13) **Definição**

Um ponto x_0 diz-se **ponto de acumulação** de S sse $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap S \neq \varnothing$.

O conjunto dos pontos de acumulação representa-se por $S' \equiv \textit{Derivado}$.

(1.14) **Definição**

Um ponto x_0 diz-se **isolado** de S sse $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap S = \varnothing$.

Exercícios

1. Determine para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o interior e a fronteira:

a) $B((1,1),\frac{1}{2}) \cup \overline{B}((3,1),\frac{1}{2})$; **b)** $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pi\right\}$;

2. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, determine o interior, o exterior, a fronteira, o derivado e diga se é aberto ou fechado:

a) $\{(x,y) : x = 1\}$; **b)** $\{(x,y) : y \leq 3\}$;

c) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad -1 < y < 1\}$;

d) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad -1 < y < 1\}$; **e)** $\{(x,y) : 3 < \|(x,y)\| < 5\}$; **f)** $\left\{(x,y) : x = y^2 + 1\right\}$.

1.2 Funções reais de n Variáveis Reais

1.2.1 Definições, Propriedades e Aplicações

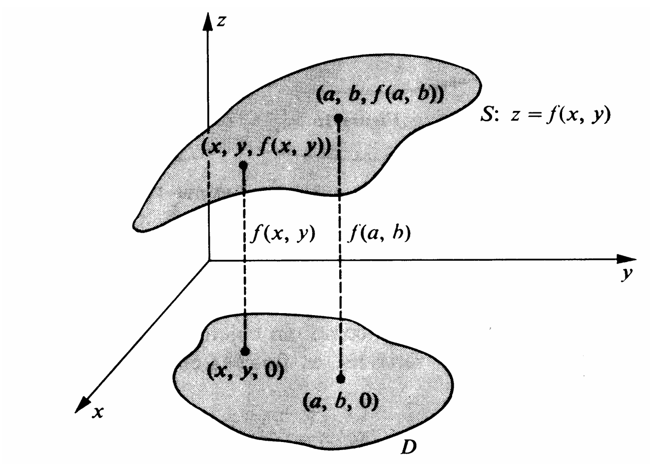
Uma função f é uma correspondência que, a cada elemento de um conjunto X, associa um único elemento de um conjunto Y.

(1.15) **Definição**

Seja D um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma **função** f que a cada par (x,y) de D associa um único número real, denotado por $f(x,y)$, é uma função real de duas variáveis. D é o **domínio**. O **contradomínio** de f consiste em todos os números reais $z = f(x,y)$, imagens de $(x,y) \in D$.

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto z = f(x,y)$$

O gráfico de f é uma **superfície**.



(1.16) **Definição**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, chamamos **curva de nível** respeitante à cota k ao conjunto $C_k = \{(x,y) \in D : f(x,y) = k\}$.

Algoritmo - esboço do gráfico de uma função:

1º passo: Determinação do domínio;

2º passo: Dedução de algumas curvas de nível;

3º passo: Intersecções com os planos coordenados;

4º passo: Montagem dos resultados anteriores num sistema de eixos cartesianos 3D:

wireframe -» modelo em arame -» revestimento -» superfície.

Exercícios

3. Considere as funções reais $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Determine o domínio D e represente-o graficamente. Diga, justificando, se D é aberto, fechado ou nem aberto nem fechado

a) $f(x,y) = \ln(x - y)$;

b) $f(x,y) = 1 - \sqrt{2x^2 + y}$ **;**

c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ **;**

d) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 - 2x)}{x + y}$ **;**

e) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + x - y}$ **;**

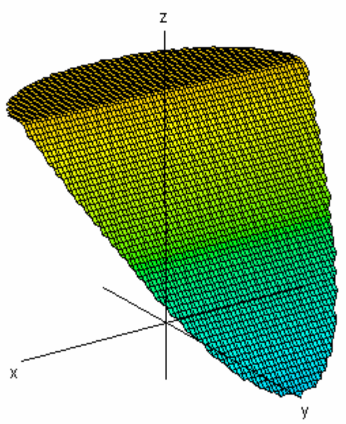
f) $f(x,y) = 3 + \ln(\dfrac{x + y}{y})$ **.**

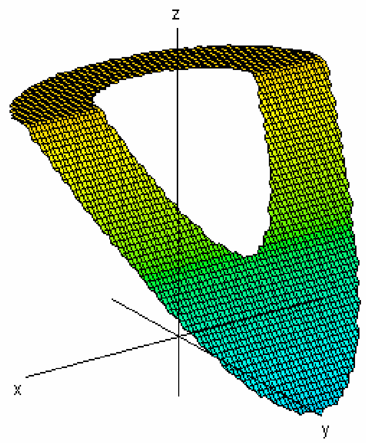
4. Considere as funções reais f e g definidas por:

$$f(x,y) = \ln(4 - y) \qquad g(x,y) = \begin{cases} e^{f(x,y)} & , 0 \le y \le -x^2 + 4 \\ 4 & , x^2 + y^2 \le 4 \wedge y < 0 \end{cases}$$

a) Determine o domínio das duas funções e represente-os geometricamente.

b) As figuras seguintes são estruturas metálicas utilizadas na *Capital Nacional da Cultura – Coimbra 2003*. Qual delas coincide com o gráfico da superfície $z = g(x,y)$? Justifique a sua escolha.





5. Seja $f(x,y) = \sqrt{34 - x^2 - y^2}$,

e as funções g e h , reais de duas variáveis, dadas sob a forma dos algoritmos seguintes:

$g(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 9$
Então $z \leftarrow 5$
Senão Se $9 < x^2 + y^2 \leq 34$
Então $z \leftarrow f(x,y)$

$h(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 9$
Então $z \leftarrow 5$
Senão $z \leftarrow f(x,y)$

a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente. O domínio é aberto ou fechado? Justifique.

b) Estabeleça a expressão analítica da função $g(x,y)$.

c) Trace um esboço do gráfico $z = g(x,y)$.

d) Qual o valor lógico da seguinte afirmação?. Justifique a sua resposta.

Atendendo a que os domínios das funções h e g são iguais, então os seus gráficos também são iguais.

6. Considere as funnções reais f , g e h definidas por:

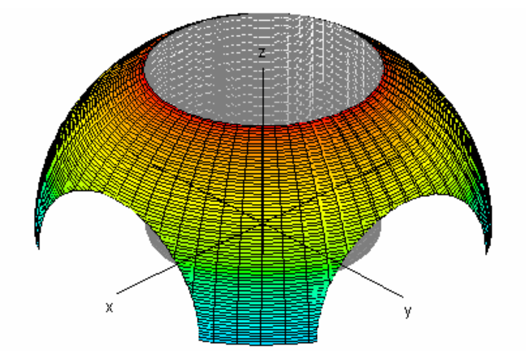
$$f(x,y) = \sqrt{34 - x^2 - y^2} \qquad g(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 9 \\ \text{então } z = 5 \\ \text{senão } z = f(x,y) \end{array} \right. \qquad h(x,y) = \begin{cases} 5 & , \quad x^2 + y^2 \leq 9 \\ f(x,y) & , \; 9 < x^2 + y^2 \leq 34 \end{cases}$$

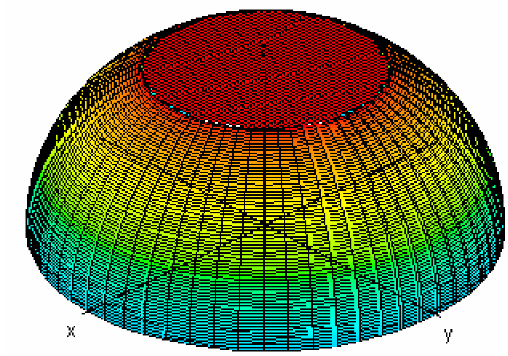
a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

b) Qual o valor lógico da seguinte afirmação? Justifique a sua resposta

Atendendo a que os domínios das funções g e h são iguais, então os seus gráficos também são iguais.

b) Qual das figuras seguintes coincide com o gráfico da superfície $z = h(x,y)$? Justifique a sua escolha.

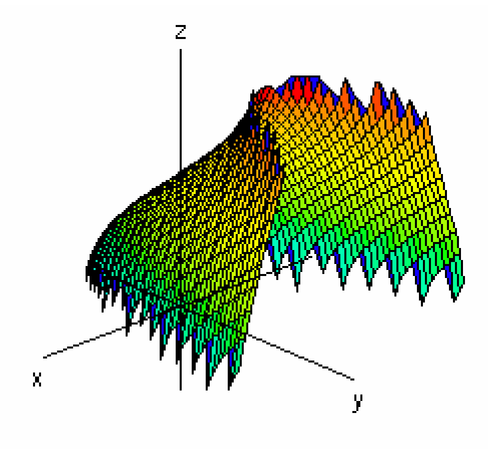


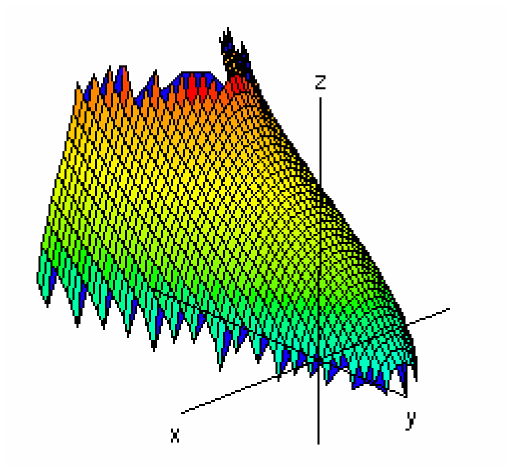


7. Considere a função real $f(x,y) = \arccos(x^2 - y)$

a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.

b) Qual das figuras/esboços representa o gráfico da superfície $z = f(x,y)$? Justifique.





1.2.2 Limites

A definição e propriedades dos limites tratados no cálculo diferencial em $\mathbb{R}$, são herdadas e ajustadas no cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$.

(1.17) **Definição**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D'$ um ponto de acumulação.

Diz-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

se $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : (x,y) \in D \wedge \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - L| < \delta$

😐 Visto que, nem sempre será fácil provar a existência do limite pela definição, deverá ter-se em atenção os seguintes conceitos:

Limites iterados

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ ?$$

se $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \neq \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \ \Rightarrow$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe

Limites Direccionais

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ ?$$

se $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) \ \Rightarrow$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe

Exercícios

8. Prove, usando a definição, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ sendo:

a) $f(x,y) = 3x$; **b)** $f(x,y) = xy$; **c)** $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$; **d)** $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{x^4+1}$.

9. Mostre que o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

existe segundo todas as rectas que passam pela origem, mas que aquele limite não existe.

10. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = -\sqrt{f(x,y)} + 1$ se $x^2 + y^2 \leq 9$.

Mostre, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

1.2.3 Continuidade

(1.18) **Definição**

Seja f é uma função de duas variáveis, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e (x_0, y_0) um ponto de $\mathbb{R}^2$. A função f é contínua em (x_0, y_0) sse as três condições seguintes forem satisfeitas:

i. $f(x_0,y_0)$ existir; **ii.** $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existir; **iii.** $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

⌦ O subconjunto de D formado pelos pontos onde f é contínua, designa-se por domínio de **continuidade** de *f*. Diremos que f é **contínua** em *D*, se f é contínua em todos os pontos (x_0, y_0) de *D*.

(1.19) **Proposição**

Sejam f e g funções reais de variável real contínuas em x_0 e y_0 , respectivamente. Então, a função de duas variáveis definida por $h(x,y) = f(x)g(y)$ é contínua em (x_0, y_0) .

⌦ Da proposição anterior decorre que uma **função polinomial de duas variáveis** – soma finita de parcelas do tipo kx^ny^m – é uma função contínua. Uma **função racional**, quociente de funções polinomiais, é uma função contínua no seu domínio.

(1.20) **Proposição**

Se f é contínua em (x_0, y_0) e g é uma função de uma só variável, contínua em $f(x_0, y_0)$, então a função composta $h = gof$, definida por $h(x,y) = g(f(x,y))$ é contínua em (x_0, y_0) .

(1.21) **Exemplo**

A função $h(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ é uma função contínua.

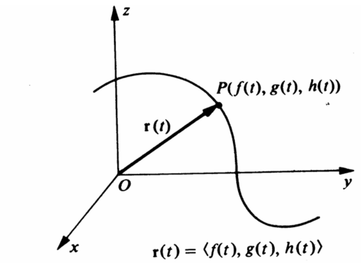
Uma vez que para $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ e $g(t) = \ln(t)$, tem-se $h = gof$. Como f e g são funções contínuas, pela proposição (1.20) podemos concluir que h é uma função contínua.

⌦ Todos os resultados apresentados podem estender-se, a funções com mais de duas variáveis $(n \geq 3)$ $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Chamam-se **campos escalares** às funções reais $(m = 1)$ de variável vectorial, ou seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que representam uma função de várias variáveis num espaço real de duas ou três dimensões, de algumas quantidades físicas tais como áreas, volumes, temperatura, potencial eléctrico, etc.

Chamam-se **campos vectoriais** às funções vectoriais de variável vectorial, ou seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que representam funções cujos valores são vectores e não escalares, como é o caso da velocidade dum ponto num fluido em movimento, as forças gravíticas ou magnéticas.

Na figura ao lado é representada uma função vectorial $\mathbf{r}$ ou $\vec{r}$, onde $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. Se $\overrightarrow{OP}$ é o vector posição correspondente a $\mathbf{r}(t)$, então, ao variar t, o ponto terminal P descreve a curva de equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$.



Exercícios

11. Considere as funções reais $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas por:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{2x^4 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 3 \\ -1, & x^2 + y^2 > 3 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ **d)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

Estude $f(x,y)$ quanto à sua continuidade.

12. Considere as funções reais $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$, dadas pelas expressões seguintes:

$$f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2) \qquad g(x,y) = \begin{cases} e^{f(x,y)} & \text{se } x^2 + y^2 < 4 \\ 0 & \text{se } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

a) Determine, o domínio D de $f(x,y)$ e, represente-o geometricamente.

b) Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O domínio da função f é aberto.

ii) A curva de nível $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é o resultado da intersecção de $z = g(x,y)$ com $z = 4$.

iii) Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} g(x,y)$ existe, então $g(x,y)$ é contínua em (2, 0).

13. Considere as funções reais de duas variáveis reais f, g, e h dadas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z = \sqrt{f(x,y)}$

$h(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z = \sqrt{32 - f(x,y)}$

a) Determine o domínio das funções, represente-os geometricamente e verifique se são abertos ou fechados.

b) Estabeleça a expressão analítica das funções $g(x,y)$ e $h(x,y)$. Mostre, que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$ é uma curva de nível comum às duas funções.

c) Identifique as superfícies associadas às três funções e trace um esboço das mesmas.

d) Resolva **apenas uma** das alíneas seguintes ✂

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$

ii) A função $j(x,y) = \begin{cases} 4 - g(x,y) & \\ 0 & se \;\; x^2 + y^2 > 16 \end{cases}$

é contínua em todos os pontos do *cordão de soldadura* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$.

1.2.4 Derivadas Parciais

(1.22) **Definição**

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então as **derivadas parciais** de f em relação a x e a y são funções f_x e f_y definidas por:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (1.2)$$

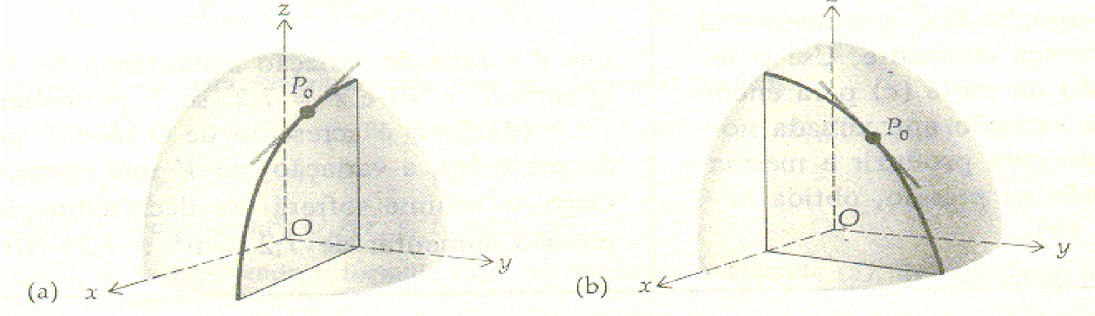
desde que os limites existam.

Interpretação geométrica

O gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície de equação $z = f(x,y)$. Se considerarmos y constante ($y = y_0$), então $z = f(x,y_0)$ é a equação da curva C que se obtém da intersecção da equação da superfície com o plano de equação $y = y_0$.

A derivada parcial em ordem a x, $f_x(x_0,y_0)$, fornece o declive da recta tangente à curva C no ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ($z_0 = f(x_0,y_0)$), no plano $y = y_0$.

De modo análogo, $f_y(x_0,y_0)$ fornece o declive da recta tangente à curva, tendo equações $x = x_0$ e $z = f(x,y)$, no ponto P_0 no plano $x = x_0$.



As equações das rectas tangentes à curva em (a) e em (b) são dadas respectivamente por:

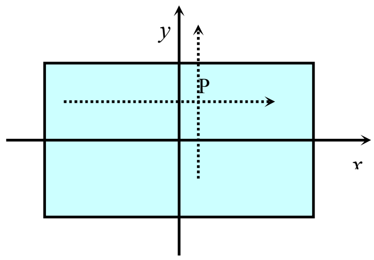
$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \ \wedge \ y = y_0 \qquad z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \ \wedge \ x = x_0$$

Interpretação Física

A razão $\dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$
representa a **variação média** de uma entidade física representada por $f(x,y)$.
As derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ medem a **taxa de variação** de f em relação à variação de x e y numa *direcção horizontal* e *vertical* respectivamente.

(1.23) **Exemplo**

Uma placa de metal aquecida, está situada no plano XY de tal modo que a temperatura T no ponto (x, y) é dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$.
Determine a taxa de variação de T em relação à distância no ponto $P(1,2)$ na direcção:
a) do eixo dos XX;
b) do eixo dos YY.



Resolução

A figura ao lado, representa uma hipotética placa de metal.

a) A taxa de variação na direcção do eixo dos XX, é dada por:

Como

$$T_x(x,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(10(x^2 + y^2)^2) = 10\frac{\partial}{\partial x}((x^2 + y^2)^2)$$
$$= 10 * 2(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 20(x^2 + y^2)(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2)) = 20(x^2 + y^2)(2x + 0)$$
$$= 40x(x^2 + y^2)$$

logo $T_x(1,2) = 40 * 1(1^2 + 2^2) = 200$

b) De modo análogo ao resultado anterior, a taxa de variação na direcção do eixo dos YY é dada por: $T_y(1,2) = 40 * 2(1^2 + 2^2) = 400$.

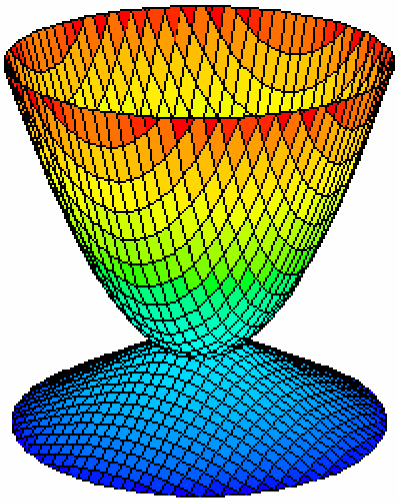
Notações

Existem várias notações alternativas para as derivadas parciais. Algumas delas são as seguintes, onde $z = f(x,y)$

$$f_x(x,y) \equiv f'_x(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv D_x f(x,y) \qquad f_y(x,y) \equiv f'_y(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv D_y f(x,y)$$

Quando derivamos parcialmente f em ordem a x, o y "funciona" como constante e vice-versa, tal é justificado pela definição (1.22). Sempre que possível, devem usar-se por "herança" e ajuste as regras de derivação deduzidas no cálculo diferencial em $\mathbb{R}$ – conforme a Tabela 2.

Exercícios



14. A figura, ao lado, representa o molde de um copo usado na *Queima das Fitas*, cuja matriz de pontos 3D é formatada pelas funções f e g, dadas pelas expressões seguinte:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) = -\sqrt{f(x,y)} + 1$ se $x^2 + y^2 \leq 9$

a) Determine, o domínio das funções e represente-o geometricamente.

b) Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O domínio de restrição da função g é fechado.

ii) A curva de nível $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ é comum às duas funções.

iii) A derivada parcial de g em ordem a y no ponto $(1,1)$, por definição, é igual a

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(1+\Delta y, 1) - g(1,1)}{\Delta y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Recorrendo à figura, assinale a superfície correspondente ao gráfico de cada função. Justifique a sua escolha.

d) Mostre, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

e) Mostre, que a equação da recta tangente á curva de intersecção da superfície $z = f(x,y) + 1$ com o plano $y = 1$, no ponto $P = (1,1,3)$, é dada por $z = 2x + 1 \ \wedge \ y = 1$.

15. Seja $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , x^2 + y^2 \geq 1 \\ 0 & , x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Mostre que não existe $f'_x(1,0)$.

c) Calcule $f'_x(1,1)$.

16. Considere as funções reais $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$, dadas pelas expressões seguintes:

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\sqrt{4 - x^2 - y^2} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(f(x,y)) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{se } 4 < x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

a) Determine o domínio D de $f(x,y)$ e represente-o geometricamente.

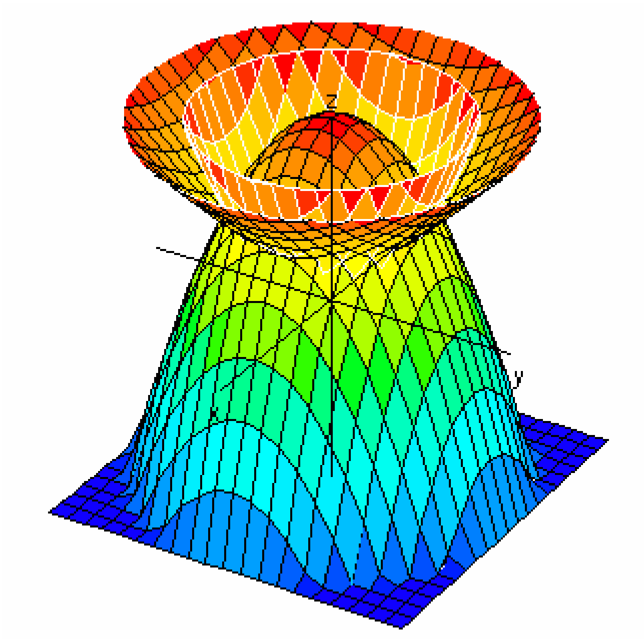
b) Trace um esboço do gráfico de $z = g(x,y)$.

c) Comente, justificando, a seguinte afirmação:

Como o $\lim_{(x,y)\to(2,0)} g(x,y)$ existe, então $g(x,y)$ é contínua em $(2, 0)$.

d) Determine, a equação da recta tangente, á curva de intersecção da superfície $z = g(x,y)$ com o plano $x = 1$, no ponto $P = (1,1,\sqrt{2})$.

17. Considere as funções reais $f(x,y)$, $g(x,y)$ e $h(x,y)$ definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$, dadas pelas expressões seguinte:



$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$g(x,y) = f^2(x,y)$

$$h(x,y) = \begin{cases} 2 - g(x,y) & se \quad x^2 + y^2 \leq 4 \\ -2 & se \quad x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

a) Determine o domínio das funções e represente-o geometricamente.

b) Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O domínio das funções dadas é aberto, fechado e ilimitado.

ii) A curva de nível $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ é comum às três funções.

iii) Os gráficos/superfícies das três funções não se intersectam.

iv) As funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ têm (0,0,0) como mínimo absoluto, enquanto que $h(x,y)$ tem um máximo absoluto em (0,0,2).

c) Recorrendo à figura, assinale a superfície correspondente ao gráfico de cada função. Justifique a sua escolha.

d) Resolva apenas uma das alíneas seguintes ✂

i) Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} h(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} g(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$.

ii) Estude as funções quanto à continuidade.

18. Considere as funções reais $f(x,y)$, $g(x,y)$ e $h(x,y)$ definidas em $D \subset \mathbb{R}^2$, dadas pelas expressões seguinte:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad g(x,y) = \sqrt{f(x,y)} \qquad h(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4 - f(x,y)} & , \quad x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & , \quad 4 < x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

a) Determine o domínio das funções.

b) Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) A curva de nível $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ é comum a duas funções.

ii) A derivada parcial de h em ordem a y no ponto $(1,1)$, por definição, é igual a :

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(1+\Delta y,1) - h(1,1)}{\Delta y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Represente gráficamente as três funções e identifique-as.

d) Mostre, que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} g(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} h(x,y)$.

e) Determine, a equação da recta tangente á curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 1$, no ponto $P = (1,1,\sqrt{2})$. Trace um esboço da recta obtida.

19. Calcular as primeiras derivadas parciais das funções seguintes, nos pontos onde existem:

a) $z = x^2 + xy + y^2$; **b)** $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; **c)** $z = ye^{y/x}$;

d) $z = \ln(\sin(x/y))$; **e)** $r = e^{-\theta}\cos(\theta + \varphi)$; **f)** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

g) $z = e^{xy}\sin(xy + 4y)$.

20. Mostre que se $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, então verifica-se a seguinte igualdade:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad \text{se}(x,y) \neq (0,0)\,.$$

21. Mostre que se $z(x,y) = xy + xe^{y/x}$, então verifica-se a seguinte igualdade:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z(x,y)$$

22. Seja $w = \log(\frac{x^2 - y^2}{z^2})$ em que $x = \mathrm{ch}(t)$, $y = \mathrm{sh}(t)$ e $z = t$. Calcular $\frac{dw}{dt}$.

23. Seja $z = x^2 \ln y$ com $x = \frac{u}{v}$ e $y = 3u - 2v$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

24. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{du}{dx}$ sendo:

a) $u(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ com $y = x^3$.

b) $u(x,y) = \arcsin(\frac{x}{y})$ com $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

25. Seja $w = -y + F\left(x^2 + y^2, ze^{-x}\right)$ em que F é uma função diferenciável.

Prove que se verifica a seguinte identidade: $y\frac{\partial w}{\partial x} - x\frac{\partial w}{\partial y} + yz\frac{\partial w}{\partial z} = x$.

26. seja $z = \frac{y^2}{2} + f(\frac{1}{x} + \ln(y))$ em que f é uma função duas vezes diferenciável no seu domínio.

Prove que: $\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{2}{xy}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

27. Calcular as derivadas das *funções implícitas* dadas pelas equações:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; **b)** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; **c)** $y^x = x^y$;

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; **e)** u-v$tg(\alpha$w)=0 ; **f)** $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$.

Nota:

Outros exercícios são apresentados em **Anexo**, de acordo com o programa da disciplina.

1.2.4.1 Derivadas parciais de ordem superior à primeira

1.2.4.2 Teorema de Schwartz

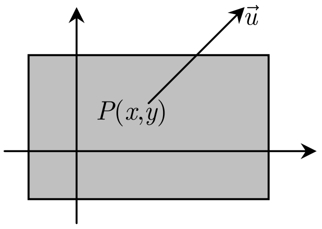
1.2.4.3 Equação de Laplace

1.2.5 Acréscimos e Diferenciais

1.2.6 Derivada da Função Composta

1.2.7 Derivada Direccional

Motivação:



a) Determine a taxa de variação da temperatura em (3, 4) na direcção que faz um $\measuredangle$ de 60º em $\overrightarrow{ox}$

b) Determine a direcção para a qual a variação da temperatura é máxima no ponto (-3, 1).

A generalização da definição de derivada parcial para obter a **Taxa de Variação** de uma função em relação á distância em **qualquer direcção** $\Rightarrow$ **Derivada Direccional**

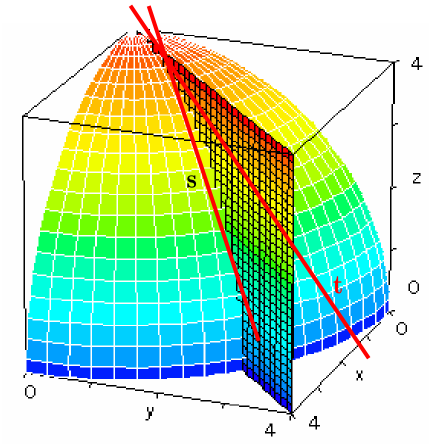
(1.24) **Definição**

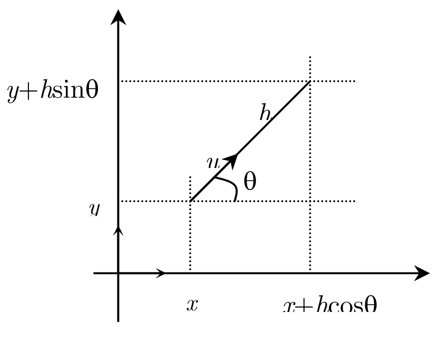
Seja $z = f(x,y)$ e $\vec{\mathbf{u}}$ um vector unitário, $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$, dado por $\vec{\mathbf{u}} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}$, a **derivada direccional** de f na direcção de $\vec{\mathbf{u}}$ é dada por:

$$f_{\mathbf{u}}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x,y)}{h} \tag{1.3}$$

se o limite existir.

Interpretação Geométrica





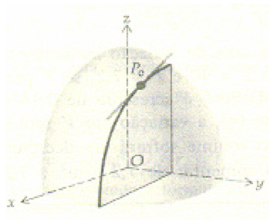
$$m_s = \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x,y)}{h}$$

$$m_t = f_u(x,y)$$

Observações:

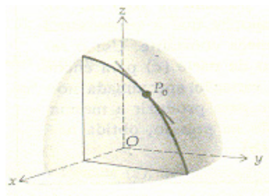
i. A derivada direccional fornece a taxa de variação do valor da função $z = f(x,y)$ em relação á distância h ao plano XY na direcção e sentido do vector $\vec{u}$.

ii. A derivada $f_u(x,y)$ calculada em P, dá o declive da recta tangente á curva C no plano $PP'Q$.



iii. Se $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{i} \Rightarrow \cos\theta = 1 \wedge \sin\theta = 0$, donde

$$f_{\mathbf{u}}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_x(x,y)$$



iv. Se $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{j} \Rightarrow \cos\theta = 0 \wedge \sin\theta = 1$, donde

$$f_{\mathbf{u}}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,h+h) - f(x,y)}{h} = f_y(x,y)$$

v. As primeiras derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ são casos particulares de $f_{\mathbf{u}}(x,y)$.

(1.25) **Teorema**

Se $z = f(x,y)$ é diferenciável ($f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ são continuas) e $\vec{u} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}$ $\left(\vec{u} = \langle\cos\theta,\sin\theta\rangle \text{ ou } \vec{u} = \langle u_1, u_2\rangle\right)$, então a **derivada direccional** é dada por:

$$f_{\mathbf{u}}(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta \tag{1.4}$$

Observação: Podemos rescrever (1.4) como produto interno (escalar) de dois vectores:

$$f_{\mathbf{u}}(x,y) = (f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j})\cdot(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{1.5}$$

(1.26) **Definição**

Seja f uma função de duas variáveis. O **gradiente de f** é uma função vectorial dada por:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j} \tag{1.6}$$

Do que foi exposto, podendo concluir então que, para calcular a derivada direccional de f na direcção do vector unitário $\vec{\mathbf{u}}$, formamos o produto escalar do gradiente de f por $\vec{\mathbf{u}}$, ou seja:

$$f_u(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u} \tag{1.7}$$

(1.27) **Exemplo**

Dada a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$, determine:

a) Gradiente da função no ponto de coordenadas (3, 2)

b) A taxa de variação da função na direcção $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ no ponto de coordenadas (3, 2)

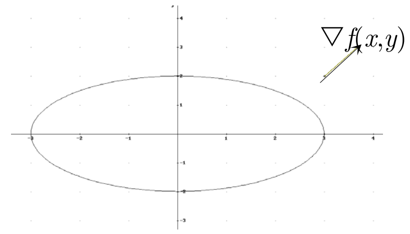
Resolução

a) $\nabla f(3,2) = ?$

1º Passo: Calcular as derivadas parciais

i) $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}) = \dfrac{2}{9}x$

ii) $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}) = \dfrac{1}{2}y$



2º Passo: Estabelecer *grad* $f(x,y) \equiv \nabla f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2}{9}x\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}y\right)\mathbf{j}$$

3º Passo: Calcular $\nabla f(3,2)$

$$\nabla f(3,2) = \frac{2}{9}3\mathbf{i} + \frac{1}{2}2\mathbf{j} \Leftrightarrow \nabla f(3,2) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} \Leftrightarrow \nabla f(3,2) = < \frac{2}{3}, 1 >$$

b) Taxa de Variação $\equiv$ $f_{\vec{u}}(3,2) = ?$ $\equiv$ Derivada Direccional

1º Passo:

$$f_u(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \vec{u}$$

2º Passo:

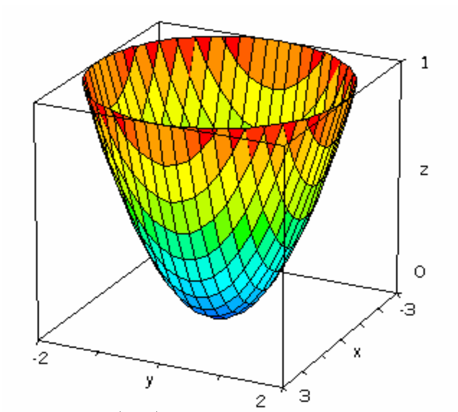
$$\nabla f(3,2) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

3º Passo:

$$\vec{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ vem

$$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \sin\frac{\pi}{4}\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

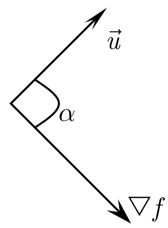


$z = f(x,y)$ paraboloide eliptico

4º Passo:

$$f_{\mathbf{u}}(3,2) = (\frac{2}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

⌦ Num determinado ponto $P(x,y)$ fixo, dado um vector unitário $\vec{u}$, a derivada direccional pode ser positiva e, então $f(x,y)$ aumenta quando nos deslocamos nesta direcção, ou então pode ser negativa e, então $f(x,y)$ diminuiu quando nos deslocamos nessa direcção. Em muitas situações, é importante achar a direcção em que $f(x,y)$ aumenta mais rapidamente, bem como o máximo da taxa de variação $\rightarrow$ **Teorema do Gradiente**

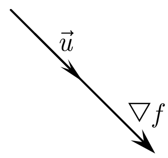


- Se α é o ângulo entre os vectores $\vec{u}$ e ∇f , então:

  $\vec{u} \cdot \nabla f = \|\vec{u}\| \|\nabla f\| \cos\alpha$ (definição de produto escalar)

  como $f_u(x,y) = \vec{u} \cdot \nabla f$ vem:

  $$f_u(x,y) = \|\vec{u}\| \|\nabla f\| \cos\alpha \tag{1.8}$$



😐 **Questão:** Quando é que $f_u(x,y)$ é máxima?

☺ **Resposta:**

De (1.8) como $\|\vec{u}\| = 1$, e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, então valor máximo ocorre para $\alpha = 0^{\circ}$, donde o vector $\vec{u}$ tem que estar na mesma direcção e sentido do vector gradiente.

(1.28) **Teorema:** Teorema do Gradiente

Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x,y)$

i) O valor máximo de $f_u(x,y)$ em $P(x,y)$ é $\|\nabla f(x,y)\|$

ii) O máximo da taxa de crescimento de $f_u(x,y)$ em $P(x,y)$, ocorre na direcção de $\nabla f(x,y)$.

(1.29) **Corolário:**

Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x,y)$.

i) O mínimo de $f_u(x,y)$ em $P(x,y)$ é $-\|\nabla f(x,y)\|$

ii) O mínimo da taxa de crescimento de $f(x,y)$ em $P(x,y)$, ocorre na direcção de $-\nabla f(x,y)$.

(1.30) **Exemplo**

Seja $f(x,y) = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$

a) Determine a direcção segundo a qual $f(x,y)$ cresce mais rapidamente no ponto (1, 2) e determine a taxa máxima de crescimento de f em P.

b) Interprete a alínea anterior usando para tal o gráfico de f.

Resolução

A direcção segundo a qual f cresce mais rapidamente é a direcção do gradiente de f.

Temos então:

$$\nabla f(x,y) = f_u(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j} \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = 2x\mathbf{i} + \frac{1}{2}y\mathbf{j}$$

em $P(1,2) \to \nabla f(1,2) = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$.

Logo, a direcção segundo a qual f cresce mais rapidamente é a do vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. A taxa máxima de crescimento de f em $f(1,2)$ é dada por

$$\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \cong 2.2$$

$\sphericalangle = ?$

Atendendo a que $\nabla f(1,2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tem-se:

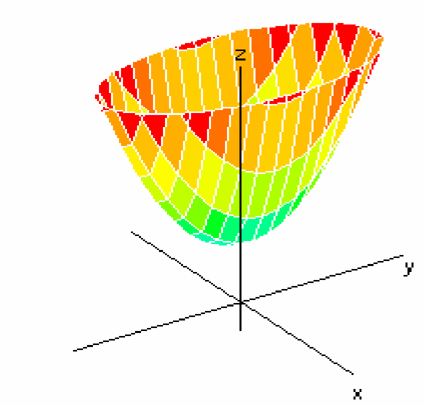
normalizando o vector gradiente

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$$

cossenos directores $\vec{v} = < \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} >$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \arctan(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \theta \cong 26{,}5^\circ$$

Graficamente



Parabolóide elíptico.

O ponto da superfície S corresponde a P(1,2) é Q(1,2,4).

Quando um ponto no plano XY se move passando por P na direcção de $\nabla f(1,2)$, o ponto correspondente do gráfico descreve uma curva C de máximo declive no paraboloide.

Exercícios

28. A densidade em qualquer ponto (x, y) de uma chapa rectangular no plano XY é dada por $\rho = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + 3}$.

a) Determine a taxa de variação da densidade no ponto (3,2) na direcção do vector unitário $\cos\frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \sin\frac{2}{3}\pi\mathbf{j}$.

b) Encontre a direcção e magnitude da taxa de variação máxima de ρ em (3,2).

29. A temperatura em qualquer ponto (x, y) é dada por $T = e^{-2xy}\cos 2y$.

a) Calcule a taxa de variação do potencial no ponto de coordenada $(0, \frac{\pi}{4})$ e a direcção do vector $\vec{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

b) Determine a direcção em que a taxa de variação é máxima no ponto $P(0, \frac{\pi}{4})$. Calcule o valor máximo dessa taxa de variação.

Resolução:

29.

a) Taxa variação $\rightarrow T_u(0, \frac{\pi}{4}) = ?$

1º Passo: $\vec{u}$ é unitário?

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \neq 1 \qquad \Rightarrow$ normalização do vector $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j} = < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2} >$

2º Passo:

i. $T_v(x, y) = \nabla T(x, y) \cdot \vec{v}$

ii. $$\begin{aligned}\nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j}\\ &= (-2ye^{-2xy}\cos 2y)\mathbf{i} + (-2xe^{-2xy}\cos 2y - 2e^{-2xy}\sin 2y)\mathbf{j}\end{aligned} \qquad \nabla T(0, \frac{\pi}{4}) = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

iii. $T_V(0, \frac{\pi}{4}) = (0\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}) = -1$

b) Atendendo ao teorema do gradiente ($T_v(x, y)$ é máxima na direcção do vector gradiente $\rightarrow \nabla T(0, \frac{\pi}{4})$)

Como: $\nabla T(0, \frac{\pi}{4}) = 0i - 2j$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \arctan\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \arctan(\dfrac{-1}{0}) \Rightarrow \alpha = \tfrac{3}{2}\pi$

Valor máximo $= \left\|\nabla T(0, \frac{\pi}{4})\right\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

⌧ Sendo f uma função de duas variáveis x e y, a derivada direccional $\left(D_{\vec{u}}f\right) \equiv f_u(x,y)$ de f segundo a direcção do vector $\vec{u}$ é também uma função de x e y. Podemos então calcular a sua derivada direccional $D_{\vec{u}}(D_{\vec{u}}f)$, segundo a direcção de $\vec{u}$. A $D_{\vec{u}}(D_{\vec{u}}f(x,y))$ chamamos **segunda derivada direccional** de f segundo a direcção de $\vec{u}$ e escrevemos:

$$D_{\vec{u}}^2 f(x,y) = D_{\vec{u}}(D_{\vec{u}}f(x,y)) \tag{1.9}$$

Atendendo a $D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$, e supondo que f admite derivadas parciais mistas continuas, tem-se

$$D_{\vec{u}}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)u_2^2 \tag{1.10}$$

Exemplo

Determine $D_{\vec{u}}^2 f$, sendo $\hat{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $f(x,y) = xy$,

Atendendo a que: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$

vem $D_{\vec{u}}^2 f(x,y) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Generalizando

$$\begin{aligned}
&D_{\vec{u}}^m f(x,y) = D_{\vec{u}}(D_{\vec{u}}^{m-1} f(x,y)) \\
&D_{\vec{u}}^m f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} u_1^{m-k} u_2^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(x,y) \\
&\left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^{(m)}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

(1.31) **Teorema**

Seja f uma função diferenciável de três variáveis e $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ um vector unitário. Então: $f_u(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u} = f_x(x,y,z)u_1 + f_y(x,y,z)u_2 + f_z(x,y,z)u_3$

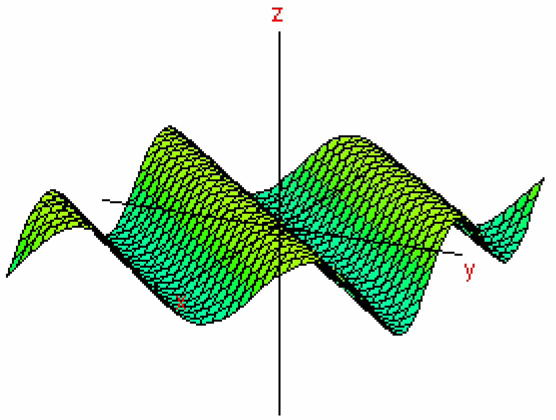
De todas as derivadas direccionais possíveis $f_u(x,y,z)$ no ponto $P(x,y,z)$, a derivada na direcção do gradiente é a que tem maior valor, esse valor máximo é $\|\nabla f(x,y,z)\|$

Exercícios

30. Seja h um campo escalar definido por:

$h(x,y) = \sin(x-y)$.

O potencial eléctrico em qualquer ponto (x,y) no plano XY, é dada por $V = h(x,y)$.



a) Determine, a taxa de variação do potencial no ponto $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$, na direcção do vector que faz um ângulo de 90° com a direcção positiva do eixo dos XX.

Interprete o resultado obtido.

b) Resolva apenas uma das alíneas seguintes ✂

i) Determine, a direcção e magnitude da taxa de variação máxima do potencial em $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

ii) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$.

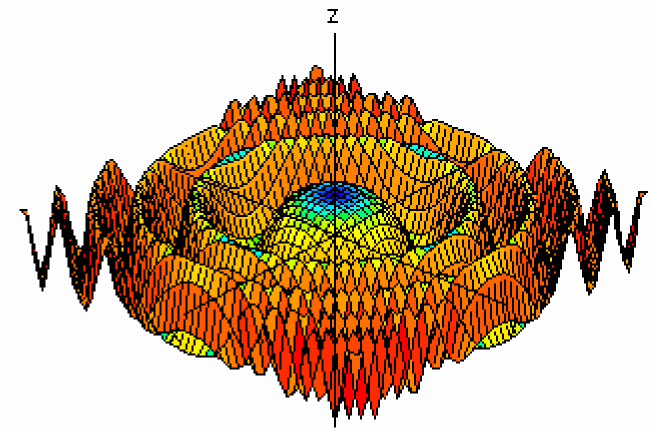
c) Resolva apenas uma das alíneas seguintes ✂

i) Mostre, se $z = \arcsin\left[h\left((x-1)^2,(y-1)^2\right)\right] \wedge x = 1+\cos\theta \wedge \mathrm{y} = 1+\sin\theta$, então verifica-se a seguinte identidade: $\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{d\theta} = -\sin(2\theta)$.

ii) Mostre, que o gráfico/superfície de $z = 1 + h(x,y)$ é limitado pelos planos $z=0$ e $z=2$.

31. Seja f um campo escalar definido por $g(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$

O potencial eléctrico em qualquer ponto $(x,\ y)$ é dada por $V = g(x,y)$



a) A taxa de variação máxima do potencial no ponto $P\left(0,\sqrt{\pi}/2\right)$ ocorre na direcção do vector $\vec{\mathbf{u}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathbf{j}$? Justifique.

b) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $\left(0,\sqrt{\pi}/2\right)$ e $(0,\sqrt{\pi})$.

c) Resolva **apenas duas** das alíneas seguintes ✂

i) Mostre, se $z = \arccos[g((x-1),(y+1))]$, $x = 1+\cos\theta$ e $y = -1+\sin\theta$, então verifica-se a seguinte identidade: $\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \dfrac{dz}{d\theta} = \sin 2\theta$.

ii) Mostre, que o gráfico/superfície de $z = 1 + g(x,y)$ é limitado pelos planos $z=0$ e $z=2$.

iii) Determine o plano tangente à superfície $z = g(x,y)$ no ponto $P(0,0,1)$., sabendo que uma equação do plano tangente à superfície no ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ é dada por $z - z_0 = g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

1.2.8 Extremos de Funções de Várias Variáveis

(1.31) **Definição**

Seja f uma função real de duas variáveis x e y $\left(f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right)$. Dizemos que f tem em (x_0, y_0) um **mínimo local** (**máximo local**) se existe uma bola aberta B centrada em (x_0, y_0) :

$$\forall (x,y) \in B \cap D, \quad f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \quad \leftarrow \quad m \tag{1.12}$$

$$\forall (x,y) \in B \cap D, \quad f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \leftarrow \quad M \tag{1.13}$$

Considerações

- Se a desigualdade (1.12), (respectivamente (1.13)) se verifica para todo o par $(x,y) \in D$ então f tem em (x_0, y_0) um **mínimo absoluto** (respectivamente **máximo absoluto**).
- Ao máximo e ao mínimo dá-se o nome genérico de **extremos** de $f(x,y)$ e aos pontos $P(x_0, y_0)$ onde eles são atingidos chama-se **extremantes**.
- Geometricamente, se uma superfície S é o gráfico de f, então os máximos locais correspondem aos pontos mais altos de S, e os mínimos locais aos mais baixos.

(1.32) **Teorema**

Se $f(x,y)$ admite derivadas parciais de 1ª ordem em (x_0, y_0) e tem extremo nesse ponto, então

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \tag{1.14}$$

Demonstração

A equação (1.14) designa-se condição de estacionaridade. É um condição necessária mas não suficiente.

Seja $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$ um ponto onde f tem um extremo local. Consideremos as funções g e h, reais de uma variável real, definidas por:

$$g(x) = f(x, y_0) \quad \text{e} \quad h(y) = f(x_0, y)$$

As funções g e h têm, respectivamente em x_0 e y_0 , um extremo local, consequentemente,

$$g'(x_0) = h'(y_0) = 0 \quad (*)$$

Atendendo a que $g'(x) = f_x(x, y_0)$ e $h'(y) = f_y(x_0, y)$, (*) é equivalente a

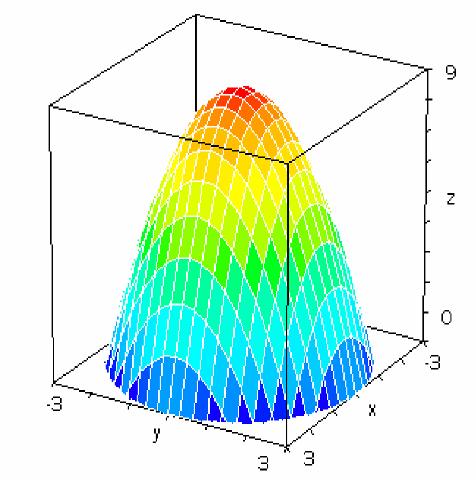
$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

(1.33) **Definição**

Um ponto (x_0, y_0) para o qual $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ é designado **ponto crítico**.

Exemplo

Dada a função $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, verifique se f tem algum extremo relativo.



1º Passo: Determinação de pontos críticos

i. $f_x(x,y) = -2x$ $\qquad$ $f_y(x,y) = -2y$

ii. $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

iii. Ponto crítico $(x_0, y_0) = (0,0)$

2º Passo:

i. Pela figura $\forall (x,y) \in D : f(x,y) < f(0,0)$.

ii. $f(0,0) = 9$ é um máximo absoluto.

(1.34) **Definição**

Seja f uma função de classe $C^P, p \leq 2$. Á matriz

$$H(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

chamamos **Matriz Hessiana** da função f em (x_0, y_0)

e ao seu determinante, $\Delta(x_0,y_0) = |H(x_0,y_0)|$, damos o nome de **Hessiano** de f em (x_0, y_0).

O Teorema seguinte mostra a relação existente entre o Hessiano de f num ponto crítico e a natureza desse ponto crítico.

(1.34) **Teorema** Teste de Extremos

Seja f uma função real de duas variáveis, com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas numa bola aberta $B((x_0,y_0),\delta)$ centrada em $(x_0,y_0) \in D$ - ponto crítico de f

Seja

$$\Delta = \Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2$$

i. Se $\Delta > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ então $f(x_0,y_0)$ é um mínimo local;

ii. Se $\Delta > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ então $f(x_0,y_0)$ é um máximo local;

iii. Se $\Delta < 0$ então $f(x_0,y_0)$ é um ponto sela;

iv. Se $\Delta = 0$ o teste é inconclusivo.

Demonstração

Uma vez em que estamos nas condições do teorema de Schwarz, tem-se $f_{xy} = f_{yx}$, pelo que,

$$D_{\vec{u}}^2 f = f_{xx}u_1^2 + 2f_{xy}u_1u_2 + f_{yy}u_2^2$$

Sendo $\vec{u}$ um vector unitário de componentes u_1 e u_2, podemos rescrever a equação anterior na forma:

$$D_{\vec{u}}^2 f = f_{xx}(u_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}u_2)^2 + \frac{u_2^2}{f_{xx}}\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) \ ^{(*)}$$

Suponhamos que $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ e $\Delta(x_0, y_0) > 0$. A continuidade das funções

f_{xx} e $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ garante a existência de

$B\left((x_0, y_0), \delta\right) : f_{xx}(y, y) > 0$ e $\Delta(x, y) > 0 \ \ \forall (x, y) \in B$

Atendendo a $^{(*)}$, $\forall (x, y) \in B : D_{\vec{u}}^2 f(x, y) > 0 \ ^{(**)}$

Interpretação geométrica de $^{(**)}$

Designemos por C a curva obtida pela intersecção do grafo de f com o plano (vertical) de vectores directores $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_2$, que passa por $P_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A desigualdade $^{(**)}$ permite-nos concluir que a curva C tem concavidade voltada para cima ($\cup$) numa vizinhança de P_0. Este resultado é válido qualquer que seja o vector $\vec{u}$ que se considere.

Podemos pois concluir que o grafo de f numa vizinhança de P_0 se situa acima do plano horizontal, tangente ao grafo de f em P_0. Isto é, $f(x_0, y_0)$ é um mínimo local.

A "prova" feita para i) pode ser adaptada para os outros casos.

Exemplos

a) Determine os extremos da função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

1º Passo: Determinação dos pontos críticos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \\ ---------- \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \\ ---------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y^2)^2 - 5y^2 + 4 = 0 \\ ---------- \end{cases} \text{fazendo } u = y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 5u + 4 = 0 \\ ---------- \end{cases} \Leftrightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Leftrightarrow u = 4 \ \wedge \ u = 1$$

donde $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2 \quad \wedge \quad y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

os pontos críticos são: $P_0(1, 2)$; $P_1(-1, -2)$; $P_2(2, 1)$ e $P_3(-2, -1)$

2º Passo: Determinação do valor das derivadas de 2ª ordem nos pontos anteriores

	$P_0(1,2)$	$P_1(-1,-2)$	$P_2(2,1)$	$P_3(-2,-1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$	6	-6	12	-12
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$	12	-12	6	-6
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$	6	-6	12	-12

3º Passo: Determinação Hessiano + Teste extremos

i. $\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 12^2 < 0 \quad \rightarrow \quad P_0$ não é extremo

ii. $\Delta(P_1) = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - (-12)^2 < 0 \quad \rightarrow \quad P_1$ não é extremo

iii. $\Delta(P_2) = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 36 > 0 \wedge f_{xx}(P_2) > 0 \quad \rightarrow \quad P_2$ é um mínimo

iv. $\Delta(P_3) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = (-12)^2 - 36 > 0 \wedge f_{xx}(P_3) < 0 \quad \rightarrow \quad P_3$ é um máximo

b) Determine 3 números reais positivos cuja soma seja 10 e cujo produto seja máximo.

1º Passo:

Sejam x, y e z os três números reais positivos a determinar e, $P = xyz$
com $x + y + z = 10 \Leftrightarrow z = 10 - x - y$.
Assim, pretendemos determinar $Q = (x,y)$ tal que $P(x,y) = xy(10 - x - y)$ tenha em Q o seu valor máximo.

2º Passo: Determinação dos pontos críticos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 10y - 2xy - y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 10x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ positivos}$$

3º Passo: Hessiano + Teste de Extremos

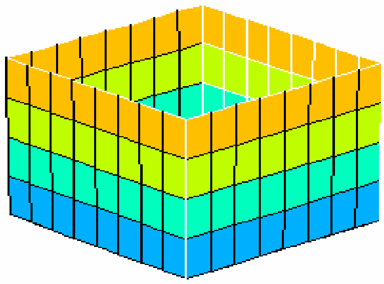
$$\Delta\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{20}{3} & -\dfrac{10}{3} \\ -\dfrac{10}{3} & -\dfrac{20}{3} \end{vmatrix} = \frac{100}{3} > 0 \ \wedge \ P_{xx}\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) < 0 \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ é um máximo,}$$

donde $(x,y,z) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$

c) Determinar as dimensões relativas de uma caixa rectangular, sem tampa, tendo um volume especifico, usando a menor quantidade de material na sua confecção.

1º Passo:

Seja :



$x \equiv$ n.º de unidades no comprimento da base da caixa

$y \equiv$ n.º de unidades na largura da base da caixa

$z \equiv$ n.º de unidades na altura da caixa

(1) $S = xy + 2xy + 2yz$ área da superfície

(2) $V = xyz$ n.º de unidades cúbicas do volume da caixa (V é constante)

De (2) vem: $z = V/_{xy}$ (3)

Substituindo (3) em (1), vem: $S = xy + \dfrac{2v}{y} + \dfrac{2v}{x}$ (4) função a minimizar.

2º Passo: Determinação de pontos críticos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial x} = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y - 2V = 0 \\ xy^2 - 2V = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V} \end{cases}$$

3º Passo: Determinação do sinal do Hessiano + Teste de Extremos

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{4v}{(\sqrt[3]{2v})^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{4v}{(\sqrt[3]{2v})^3} \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \wedge \quad S_{xx} = 2 > 0 \quad \rightarrow \quad S \text{ tem um mínimo absoluto}$$

$m = (x, y, z) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}/_{2})$.

Conclusão: A caixa tem uma base quadrada e a altura á metade do comprimento de um lado da base.

1.2.8.1 Extremos Ligados ou Condicionados

Por vezes, surge ainda outro problema relativo á determinação dos extremos de uma função em que as variáveis independentes estão sujeitas a certas condições dadas. É o denominado problema da determinação de **extremos condicionados** ou **extremos ligados**.

Por exemplo, para determinar os pontos do plano:

$x+y+z=4$, mais próximos do ponto $P(1,1,1)$, ter-se-á de obter os mínimos da função

(1) $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \longleftarrow \quad w=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$

(w será mínimo quando w^2 for um mínimo)

sujeito à condição:

(2) $x+y+z-4=0 \Leftrightarrow g(x,y,z)=0$ com $g(x,y,z)=x+y+z-4$ também dita equação de ligação.

Um processo consistirá em resolver esta última equação (2) relativamente a z e então determinar os mínimos de função $h(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2+(4-x-y-1)^2$.

Contudo, por vezes, não é fácil ou não é possível resolver as equações que condicionam o problema.

☺ Um método usado que evita tal resolução, é o denominado **Método dos multiplicadores de Lagrange**

Qualquer ponto onde f (funções de n variáveis, ex: $n=3$) tem extremo sujeito á restrição $g(x,y,z)=0$, é um ponto crítico da função auxiliar

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

para algum valor de λ (multiplicador de Lagrange)

Os valores de x, y e z que serão os extremos de f, estão entre os pontos críticos de F:

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda)=0 \end{cases}$$

(1.35) **Teorema:** Teorema de Lagrange

Sejam, f e $g \in C^1$. Se $f(x,y)$ tem um extremo no ponto (x_0, y_0) sujeito á restrição $g(x,y) = k$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, então $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

Estratégia:

1º Passo:

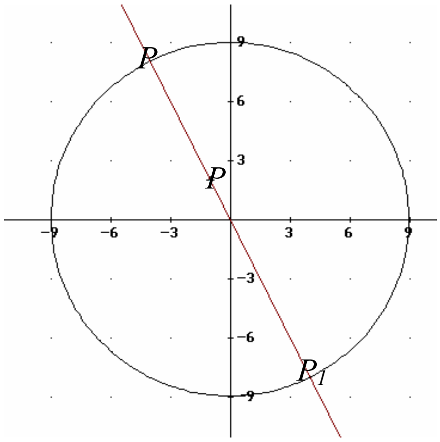
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

2º Passo: Calcular o valor de f nos pontos obtidos no 1º Passo.

O maior valor será o máximo e, o menor será um mínimo.

Exemplo

Determinar os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 81$, que estão mais próximos e mais afastados do ponto de coordenadas $(-1,2)$



Resolução

1º Passo

Atendendo a que a distância de $P(-1,2)$ a um ponto (x,y) da circunferência é

$d = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$.

Como a distância d será mínima ou máxima quando d^2 for um mínimo ou um máximo, geramos a função f para a qual

$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-2)^2$ (1)

pretendemos encontrar um valor mínimo e máximo de f sujeitos á restrição

$x^2 + y^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = 0$ com $g(x,y) = x^2 + y^2 = 81$ (2)

2º Passo

Na hipótese de existir um valor mínimo e máximo, ele ocorrerá num ponto crítico de F:

$F = f + \lambda g \Leftrightarrow F(x,y,\lambda) = (x+1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 81)$ (3)

Os pontos críticos de F satisfazem as equações

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)+2\lambda x=0 \\ 2(y-2)+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-81=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+\lambda x=0 \\ y-2+\lambda y=0 \\ -------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\lambda x=-1 \\ y+\lambda x=2 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(1+\lambda)=-1 \\ y(1+\lambda)=2 \\ ------ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/1+\lambda \\ y=2/1+\lambda \\ --------- \end{cases} \quad \lambda\neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} ---------------- \\ ---------------- \\ \left(\dfrac{-1}{1+\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{2}{1+\lambda}\right)^2-81=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ---------------- \\ ---------------- \\ \dfrac{1}{(1+\lambda)^2}+\dfrac{4}{(1+\lambda)^2}-81=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---------- \\ ---------- \\ \dfrac{5-81(1+\lambda)^2}{(1+\lambda)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---------- \\ ---------- \\ 5-81(1+\lambda)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ------- \\ ------- \\ (1+\lambda)^2=\dfrac{5}{81} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------- \\ ------- \\ 1+\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{9}} \vee x=-\dfrac{1}{\frac{-\sqrt{5}}{9}} \\ y=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{5}}{9}} \vee y=\dfrac{2}{\frac{-\sqrt{5}}{9}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{9}{\sqrt{5}} \vee x=\dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{18}{\sqrt{5}} \vee y=-\dfrac{18}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Os pontos críticos são: $P_0(-\frac{9}{\sqrt{5}},\frac{18}{\sqrt{5}})$; $P_1(\frac{9}{\sqrt{5}},-\frac{18}{\sqrt{5}})$

Como $f(P_0)=86-18\sqrt{5}$ e $f(P_1)=18\sqrt{5}+86\approx 126.249$ conclui-se que P_0 é o ponto da circunferência mais próximo de P e P_1 o mais afastado.

Exercícios

a) Determine dois números reais positivos cuja soma seja igual a 10 e cujo produto seja máximo.

b) Um disco circular tem a forma da região limitada pela circunferência $x^2+y^2=1$. Se T graus é a temperatura em qualquer ponto (x, y) do disco e $T(x,y)=2x^2+y^2-y$, encontre o ponto mais quente e mais frio do disco.

c) Determine o rectângulo de área máxima que pode inscrever-se na elipse $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

1.2.9 Exercícios de Exame

1. Considere as funções reais $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definidas em $D \subset \mathrm{IR}^2$, dadas pelas expressões seguintes:

$$f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2) \qquad\qquad g(x,y) = \begin{cases} e^{f(x,y)} & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 3 & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

a) Determine o domínio D de $f(x,y)$ e represente-o geometricamente.

b) Determine o $\mathrm{int}(D)$, $\mathrm{ext}(D)$ e $\mathrm{fr}(D)$. Diga, justificando, se D é aberto.

c) Trace um esboço do gráfico de $z = g(x,y)$.

d) Mostre que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} g(x,y)$.

e) Estude $g(x,y)$ quanto à continuidade nos domínios de restrição indicados.

<u>Resolva apenas uma das alíneas seguintes</u>: ✂

f) Determine, a inclinação da recta tangente á curva de intersecção da superfície $z = e^{f(x,y)}$ com o plano $x = 1$, no ponto $P = (1,1,2)$.

g) Determine os pontos nos quais $g(x, y)$ tem extremos locais.

2. Seja $f : D \subset \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$, definida por $f(x,y) = 5(x+y)^2$

Uma *placa de metal* aquecida está situada no plano XY.

A temperatura T em qualquer ponto (x,y) da placa é dada por: $T(x,y) = f(x,y)$.

a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2,2)$, na direcção:

i) do eixo dos XX; **ii)** do eixo dos YY;

iii) do vector que faz um ângulo de $\pi/6$ com a direcção positiva do eixo dos XX.

b) Determine, a direcção em que a variação da temperatura, é máxima no ponto $P(2,2)$. Calcule o valor máximo dessa taxa de variação.

c) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de temperatura entre os pontos (2,2) e (2.3, 2.1).

Resolva apenas uma das alíneas seguintes: ✂

d) Mostre que f não é *harmónica*, isto é, não satisfaz a equação de Laplace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

e) Se $z = \sqrt{f(x,y)}$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, mostre que: $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \sqrt{20}\cos\theta$.

3. Considere a função real $f(x,y)$ definida em $D \subset \mathrm{IR}^2$, dada pela expressão seguinte

$$f(x,y) = \ln(x^2 - y)$$

a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.

b) Mostre que se $z = f(x,y)$, então verifica-se a seguinte identidade: $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} e^{f(x,y)} = 0$

c) A temperatura T em (x,y) é dada por $T = f(x,y)$.

Determine a taxa de variação de T em (-1, -1) segundo a direcção $\pi/2$.

4. Considere a função real $f(x,y)$ definida em $D \subset \text{IR}^2$, dada pela expressão seguinte

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$$

a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.

b) Mostre que se $z = f(x,y)$, então verifica-se a seguinte identidade: $\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

c) A temperatura T em (x,y) é dada por $T = f(x,y)$.

Determine a taxa de variação de T em (2, 0) segundo a direcção $\pi/4$.

5. Considere as funções reais $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definidas em $D \subset \text{IR}^2$, dadas pelas expressões seguintes:

$$f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2) \qquad g(x,y) = \begin{cases} e^{f(x,y)} & \text{se } x^2 + y^2 < 9 \\ 0 & \text{se } 9 \le x^2 + y^2 \le 16 \end{cases}$$

a) Determine o domínio D de $f(x,y)$ e represente-o geometricamente.

b) Trace um esboço do gráfico de $z = g(x,y)$, mostrando as curvas de nível de 0, 5 e 9.

c) Comente, justificando, a seguinte afirmação:

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} g(x,y)$ existe, então $g(x,y)$ é contínua em (3, 0).

d) Determine, a equação da recta tangente, á curva de intersecção da superfície $z = g(x,y)$ com o plano $y = 2$, no ponto $P = (2,2,1)$.

e) Determine, o ponto da superfície $z = g(x, y)$ mais próximo do ponto de coordenadas (0, 0, 4).

f) O potencial eléctrico em qualquer ponto do plano XY á dado for $V = f(x,y)$. Determine, a taxa de variação do potencial no ponto P = (2, 2), na direcção do vector $\vec{u}$ cuja inclinação é de 45º.

6. Considere as funções reais $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definidas em $D \subset \text{IR}^2$, dadas pelas expressões seguintes:

$$f(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2) \qquad g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } 1 \le x^2 + y^2 \le 16 \\ 0 & \text{se } \quad x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

a) Determine o domínio D de $f(x,y)$ e, represente-o geometricamente.

b) Determine o int(D), ext(D) e fr(D) do domínio de f. Diga, justificando, se D é fechado.

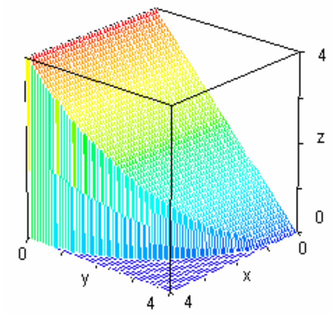
c) Trace um esboço do gráfico de $z = g(x,y)$, mostrando as curvas de nível de g em 1, 2, 3 e 4.

d) Mostre que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y)$.

e) Estude $g(x,y)$ quanto à continuidade nos domínios de restrição indicados.

Resolva apenas uma das alíneas seguintes: ✂

f) Determine, a equação da recta tangente á curva de intersecção da superfície $z = 4 - \sin(f(x,y))$ com o plano $x = 1$, no ponto $P = (1,1,2)$. Trace um esboço da recta obtida.



g) A temperatura em qualquer ponto $(x,\ y)$ de um disco circular, limitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$, é dada por $T = \sin(f(x,y)) + x^2 - y$. Determine o ponto mais quente e o ponto mais frio do disco.

h) Defina analiticamente o sólido representado pela figura.

O volume do sólido limitado por $g(x,\ y)$ é igual ao volume do sólido da figura? Justifique a sua resposta.

7. Seja $f : D \subset \mathrm{IR}^2 \rightarrow \mathrm{IR}$, definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

A densidade ρ em qualquer ponto $(x,\ y)$ de uma *chapa rectangular* no plano XY, é dada por $\rho = f(x,y)$

a) Determine a taxa de variação da densidade no ponto $P(1,\ 1)$, na direcção:

i) do eixo dos XX; **ii)** do eixo dos YY;

iii) do vector que faz um ângulo de 120^{o} com a direcção positiva do eixo dos XX.

b) Determine, a direcção e magnitude da taxa de variação máxima da densidade em (1,1).

c) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de densidade entre os pontos (1, 1) e (1.3, 1.2).

d) Mostre que f não é *harmónica*, isto é, não satisfaz a equação de Laplace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

e) Se $z = \ln(f(x,y))$, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, mostre que: $(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial z}{\partial y})^2 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}$.

8. Considere a função real $f(x,y)$ definida em $D \subset \mathrm{IR}^2$, dada pela expressão seguinte

$$f(x,y) = \arccos(x^2 - y)$$

a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.

b) Qual das figuras/esboços representa o gráfico da superfície $z = f(x,y)$? Justifique.

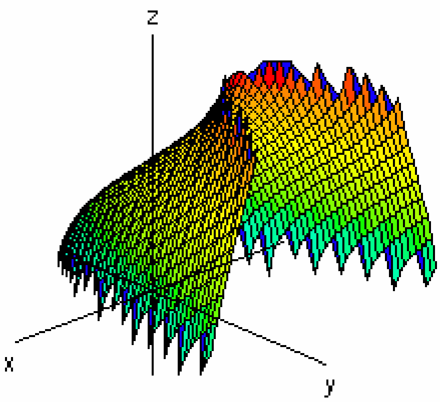


Figura 1

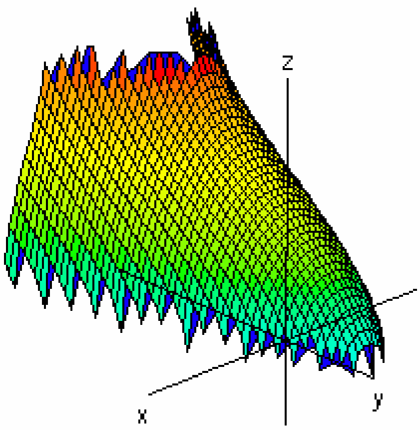


Figura 2

c) Mostre que se $z = f(x,y) \ \wedge \ \mathrm{x} \neq 0$, então verifica-se a seguinte identidade:

$$\frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

d) A temperatura T em (x,y) é dada por $T = \cos(f(x,y))$.

i) Calcule a taxa de variação de T em $(1/2, 1)$ segundo a direcção $\pi/4$.

ii) Determine, a direcção e magnitude da taxa de variação máxima da temperatura em $(1/2, 1)$

9. Considere as funções reais $f(x,y)$, $g(x,y)$ e $h(x,y)$ definidas em $D \subset \mathrm{IR}^2$, dadas pelas expressões seguinte

$$f(x,y) = 3 + x^2 + y^2 \qquad g(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{4} \qquad h(x,y) = \frac{12\cos(g(x,y))}{f(x,y)}$$

a) Determine o domínio de $h(x,y)$ e, represente-o geometricamente.

b) Qual das figuras representa o gráfico da superfície $z = h(x,y)$? Justifique.

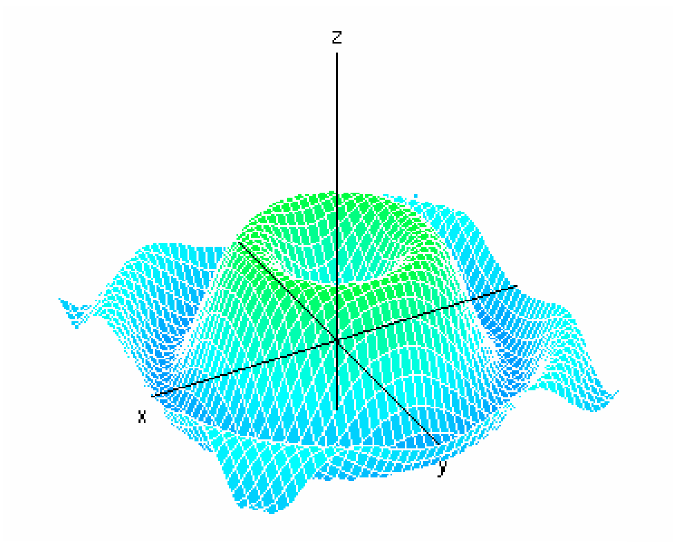


Figura 1

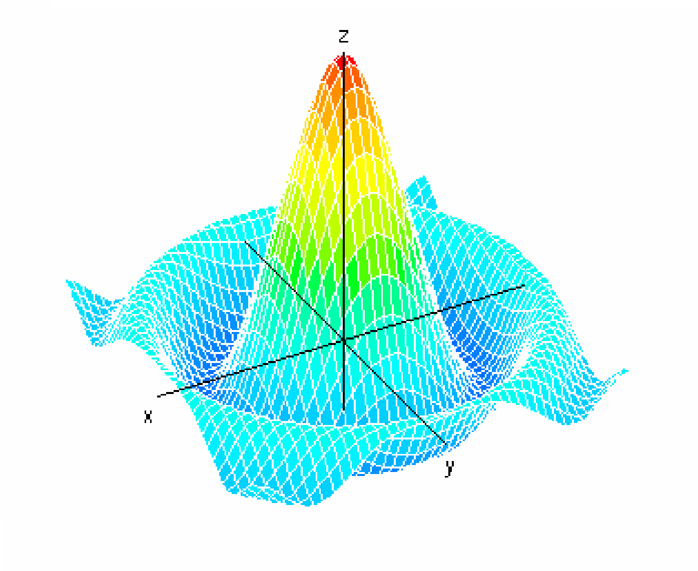


Figura 2

c) Os gráficos de $z = f(x,y)$ e $z = g(x,y)$ intersectam-se? Justifique.

d) A temperatura T em (x, y) é dada por $T = f(x,y))$.

i) Calcule a taxa de variação de T em $(1, 1)$ segundo a direcção $-\pi/4$.

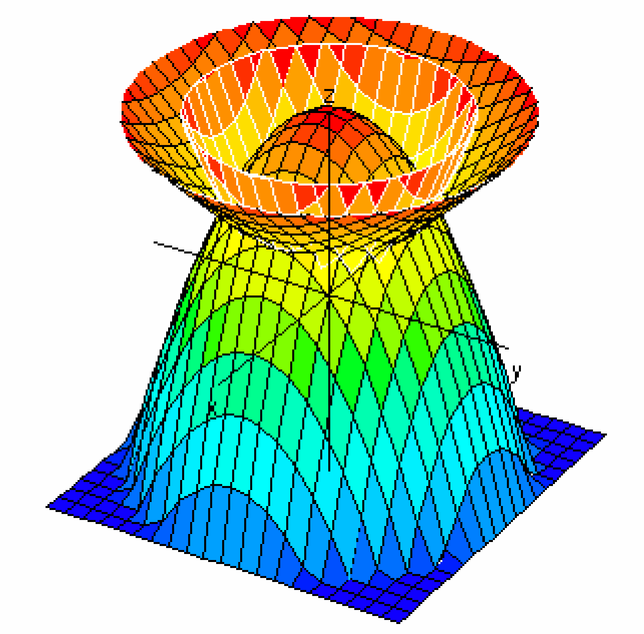
ii) Determine, a direcção e magnitude da taxa de variação máxima da temperatura em $(1, 1)$

e) Resolva apenas uma das alíneas seguintes

i) Mostre, se $z = g(x,y) \wedge x = 2\cos\theta \wedge \mathrm{y} = 2\sin\theta$, então verifica-se a seguinte identidade: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{dz}{d\theta} = 1$.

ii) Mostre, que a equação da recta tangente á curva de intersecção da superfície $z = g(x,y)$ com o plano $y = 2$, no ponto $P = (2,2,2)$, é dada por $z = x \ \wedge \ y = 2$.

10. Considere as funções reais $f(x,y)$, $g(x,y)$ e $h(x,y)$ definidas em $D \subset \mathrm{IR}^2$, dadas pelas expressões seguinte:



$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$g(x,y) = f^2(x,y)$$
$$h(x,y) = \begin{cases} 2 - g(x,y) & se \quad x^2 + y^2 \leq 4 \\ -2 & se \quad x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

a) Determine o domínio das funções e represente-o geometricamente.

b) Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O domínio das funções dadas é aberto, fechado e ilimitado.

ii) A curva de nível $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ é comum às três funções.

iii) Os gráficos/superfícies das três funções não se intersectam.

iv) As funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ têm (0,0,0) como mínimo absoluto, enquanto que $h(x,y)$ tem um máximo absoluto em (0,0,2).

c) Recorrendo à figura, assinale a superfície correspondente ao gráfico de cada função. Justifique a sua escolha.

d) Resolva apenas uma das alíneas seguintes ✂

i) Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} h(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} g(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$.

ii) Estude as funções quanto à continuidade.

11. Seja f um campo escalar definido por: $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) Resolva apenas uma das alíneas seguintes ✂

i) Mostre, se $z = \sqrt{f(x-1, y+1)} \ \wedge \ x = 1 + \cos\theta \ \wedge \ \mathrm{y} = -1 + \sin\theta$, então verifica-se a seguinte identidade: $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{d\theta}\right)^2 = 1$.

ii) Mostre, que a equação da recta tangente á curva de intersecção da superfície de equação $z = \sqrt{f(x-1, y+1)}$ com o plano $y = 0$, no ponto $P = (1,0,1)$, é dada por $z = 1 \ \wedge \ y = 0$.

12. Considere as funções reais $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definidas em $D \subset \mathrm{IR}^2$, dadas pelas expressões seguintes

$$f(x,y) = -x + 3 \qquad\qquad g(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \wedge x < 0 \\ f(x,y) & \text{se} \quad 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \wedge x \ge 0 \end{cases}$$

a) Determine o domínio(s) de g e represente-o(s) geometricamente.

b) Trace um esboço do gráfico $z = g(x,y)$.

c) Resolva apenas duas das alíneas seguintes ✂

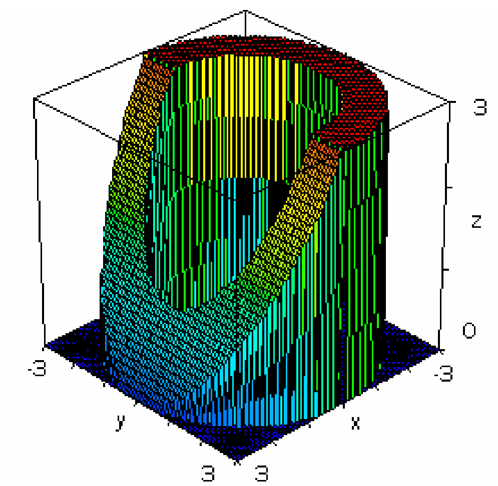
i) Determine, a equação da recta tangente, á curva de intersecção da superfície $z = g(x,y)$ com o plano $x = 2$, no ponto $P(2,0,1)$.

ii) O potencial eléctrico em qualquer ponto do plano XY á dado for $V = y - f(x,y)$. Determine a taxa de variação do potencial no ponto $P(0,0)$, na direcção do vector $\vec{u} = \langle 1,1 \rangle$

iii) Qual dos algoritmos traduz correctamente a definição da função $g(x,y)$? Justifique.

Algoritmo 1	Algoritmo 2
$g(x,y) :=$ Se $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ e $x < 0$ Então $z \leftarrow 3$ Senão $z \leftarrow -x + 3$	$g(x,y) :=$ Se $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ e $x < 0$ Então $z \leftarrow 3$ Senão Se $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ e $x \ge 0$ Então $z \leftarrow -x + 3$

Algoritmo 3
$g(x,y) :=$ Se $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ e $x < 0$ e $y > 0$ Então $z \leftarrow 3$ Senão Se $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ e $y \ge 0$ Então $z \leftarrow -x + 3$



13. Considere as funções reais de duas variáveis reais f, g, e h dadas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z = \sqrt{f(x,y)}$

$h(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z = \sqrt{32 - f(x,y)}$

a) Determine o domínio das funções, represente-os geometricamente e verifique se são abertos ou fechados.

b) Estabeleça a expressão analítica das funções $g(x,y)$ e $h(x,y)$. Mostre, que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$ é uma curva de nível comum às duas funções.

c) Identifique as superfícies associadas às três funções e trace um esboço das mesmas.

d) Resolva **apenas três** das alíneas seguintes ✂

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Por definição, a derivada parcial de h em ordem a x, no ponto (2, 2), é igual a
$$\frac{\partial h}{\partial x}(2,2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(\Delta x,2) - h(2,2)}{\Delta x} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

ii) A equação $z - 2\sqrt{6} = -\sqrt{6}/6\,(x-2) \wedge y = 2$ coincide com a recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $y = 2$ no ponto $P(2,2,2\sqrt{6})$.

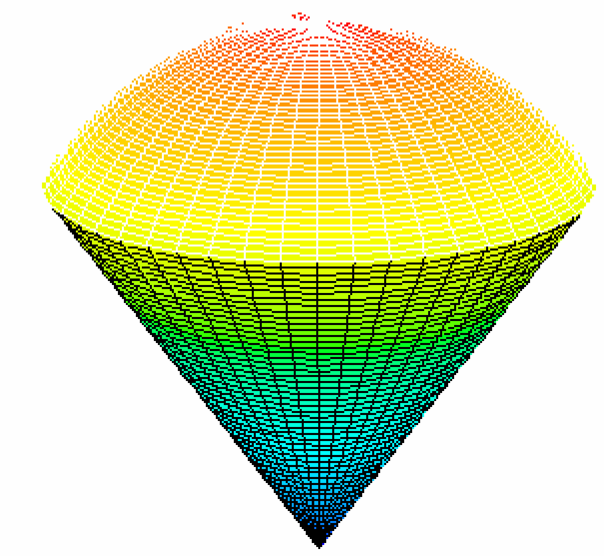
iii) O $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$

iv) As funções f e g têm um máximo absoluto em $(0,0)$, enquanto que a função h não tem extremos.

v) A função $j(x,y) = \begin{cases} 4 - g(x,y) & \\ 0 & se\ x^2 + y^2 > 16 \end{cases}$

é contínua em todos os pontos do *cordão de soldadura* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$.

e) Para o Natal de 2002, no *Laboratório de Estágio Oficinal* do *DEM* irá maquinar-se uma peça/molde, para uma empresa de panificação, com a forma da figura, isto é, o sólido é limitado superiormente por uma superfície esférica de raio $\sqrt{32}$ e inferiormente por uma superfície cónica de raio $r = 4$ e altura $h = 4$.

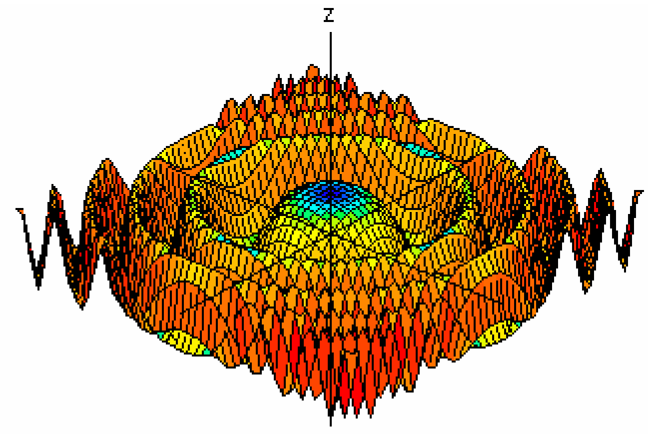


i) Mostre, que num sistema de coordenadas esféricas, coordenadas paramétricas em 3D, as equações $r = \sqrt{32}$ e $\varphi = \pi/4$ são as equações das superfícies que limitam o sólido.

ii) Analiticamente, usando coordenadas cartesianas, o sólido poderá ser definido por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$? Justifique.

14. Seja f um campo escalar definido por $g(x,y) = \cos\left(x^2 + y^2\right)$

O potencial eléctrico em qualquer ponto $(x,\, y)$ é dada por $V = g(x,y)$



a) A taxa de variação máxima do potencial no ponto $P\left(0, \sqrt{\pi}/2\right)$ ocorre na direcção do vector $\vec{\mathbf{u}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,\mathbf{j}$? Justifique.

b) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $\left(0, \sqrt{\pi}/2\right)$ e $(0, \sqrt{\pi})$.

c) Resolva **apenas duas** das alíneas seguintes ✂

i) Mostre, se $z = \arcos[g((x-1),(y+1))]$, $x = 1 + \cos\theta$ e $y = -1 + \sin\theta$, então verifica-se a seguinte identidade: $\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{dz}{d\theta} = \sin 2\theta$.

ii) Mostre, que o gráfico/superfície de $z = 1 + g(x,y)$ é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.

iii) Determine o plano tangente à superfície $z = g(x,y)$ no ponto $P(0,0,1)$., sabendo que uma equação do plano tangente à superfície no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por $z - z_0 = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

15. Considere as funções reais f , g e h definidas por:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g(x,y) := \left|\begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 16 \\ \text{então } z = f(x,y) \end{array}\right.$$

$$h(x,y) = \begin{cases} g(x,y) \\ \sqrt{32 - f^2(x,y)} & \text{,se } 16 < x^2 + y^2 \leq 32 \end{cases}$$

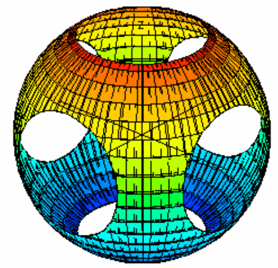


Figura 1

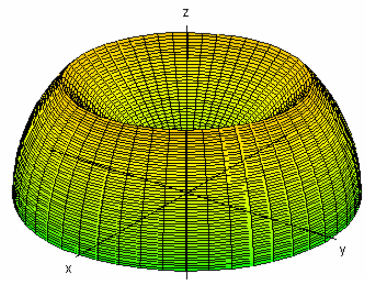


*Figura*2

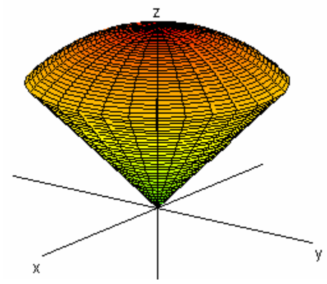


Figura 3

(a) Determine o domínio das funções e represente-o geometricamente. O domínio de h é aberto? Justifique.

(b) Estabeleça a expressão analítica da função $g(x,y)$.

Mostre, que $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\right\}$ é uma curva de nível comum às três funções.

(c) Identifique as superfícies associadas às três funções e trace um esboço das mesmas.

(d) Resolva **apenas duas** das alíneas seguintes

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras apresentadas, apenas a *figura 2* representa o gráfico de uma função real de duas variáveis.

ii) O vector $\left[5 \quad y \quad \sqrt{7}\right]$ define parametricamente a recta tangente à curva, de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 5$, no ponto $P(5,0,\sqrt{7})$.

iii) As funções f e g têm um máximo absoluto em $(0,0)$, enquanto que a função h não tem extremos.

iv) Se a temperatura em qualquer ponto do plano XOY for dada por $T = g(x,y)$, então a taxa de variação da temperatura no ponto $P(1,1)$, na direcção do vector $\vec{\mathbf{w}} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ é positiva.