O Problema da Chapa Quinada

$f(x,y) = ln(4-y)$ $\qquad$ $g(x,y) = \begin{cases} e^{f(x,y)} & , 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4 \\ 4 & , x^2+y^2 \leqslant 4 \ \wedge y < 0 \end{cases}$

Resolução:

a) Determine o domínio das duas funções e represente-os geometricamente.

$$g(x,y) = \begin{cases} e^{ln(4-y)} & , 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4 \\ 4 & , x^2+y^2 \leqslant 4 \ \wedge y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-y & , 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4 \\ 4 & , x^2+y^2 \leqslant 4 \ \wedge y < 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = ln(4-y)$ $\rightarrow$ Só existem logaritmos de números positivos

$$Df = \left\{(x,y) \in IR^2 : 4-y > 0\right\} \Leftrightarrow -y > -4 \Leftrightarrow y < 4$$

$$g(x,y) = \begin{cases} g1\ (\ 4-y & , 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4 \ \wedge \ y < 4\ ) \\ g2\ (\quad 4 & , x^2+y^2 \leqslant 4 \ \wedge y < 0\ ) \end{cases}$$

$Dg = Dg1 \cup Dg2$ com, $g(x,y) = 4-y \ \ se \ \ 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4 \ \wedge \ y < 4$

$$Dg1 = \left\{(x,y) \in IR^2 : 0 \leqslant y \leqslant -x^2+4 \ \wedge \ y < 4\right\}$$

$$Dg2 = \left\{(x,y) \in IR^2 : x^2+y^2 \leqslant 4 \ \wedge y < 0\right\}$$

Grafico de Dg1

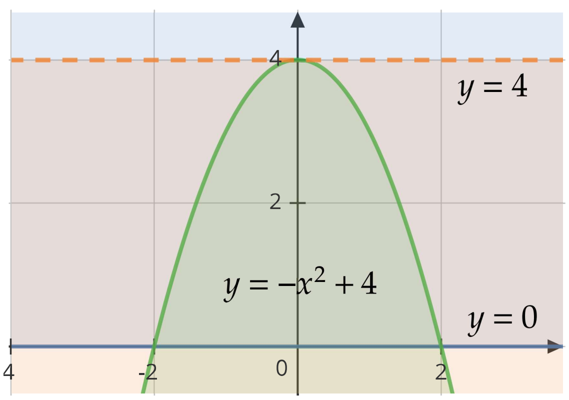
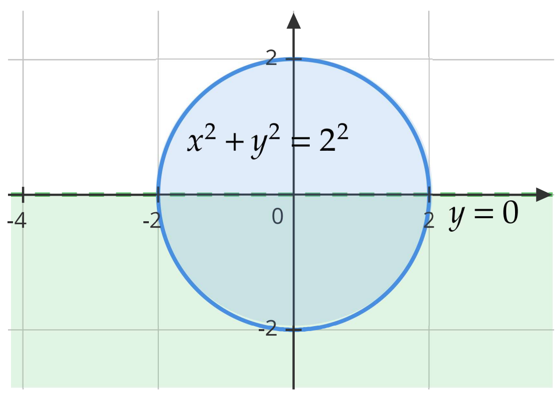


Grafico de Dg2



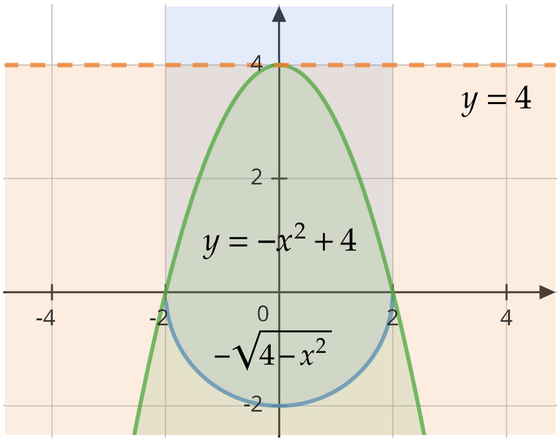
$Dg = Dg1 \cup Dg2$

$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{4 - x^2}$

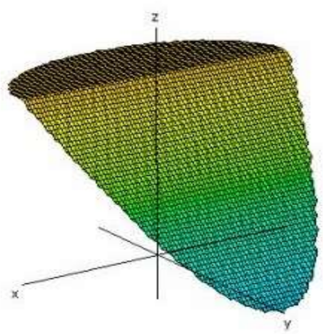
A area a considerar é a da semicircunferência negativa $-\sqrt{4 - x^2}$

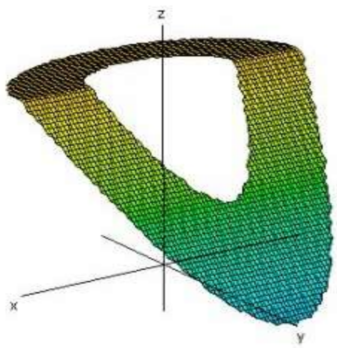
$$Dg = \left\{(x, y) \in IR^2 : -\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant -x^2 + 4 \ \wedge \ y < 4\right\}$$

Grafico de Dg



b) Qual das estraturas metálicas coincide com o gráfico da superfíce $z = g(x, y)$? Justifique a sua escolha.





Resposta:
É a estrutura metálica da esquerda, porque a projeção da superfíce $z = g(x, y)$ no plano xOy coinside com a figura da esquerda.

c) Determine a expressão analítica, defina o seu algoritmo e construa o gráfico de $z = g(x, y)$ (figura da esquerda da alinea b)) no Maple .

A expressao anlítica já tinha sido determinada anteriormente.
A expressao anlítica:

$$g(x, y) = \begin{cases} 4 - y & , 0 \leqslant y \leqslant -x^2 + 4 \ \wedge \ y < 4 \\ 4 & , x^2 + y^2 \leqslant 4 \ \wedge y < 0 \end{cases}$$

Algoritmo:

$g(x,y) =\ SE\ \ 0 \leqslant y \leqslant -x^2 + 4 \wedge\ y < 4$

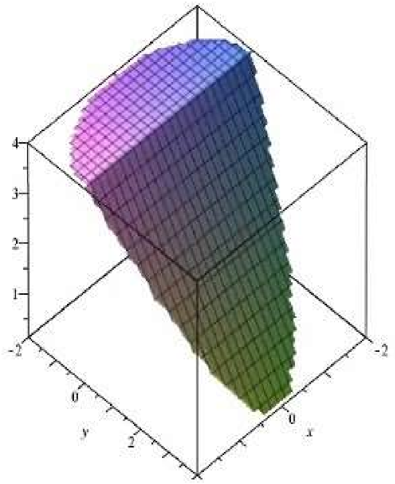
$\quad\quad\quad ENTÃO\ \ z = 4 - y$

$\quad\quad SENÃO\ \ x^2 + y^2 \leqslant 4\ \wedge y < 0$

$\quad\quad\quad ENTÃO\ z = 4$

Código e Gráfico no Maple:

```
> g := (x, y) → piecewise(0 ≤ y ≤ -x^2 + 4 and y < 4, 4 - y, x^2 + y^2 ≤ 4 and y < 0, 4, undefined)
g := (x, y) → piecewise(0 ≤ y and y ≤ -x^2 + 4 and y < 4, 4 - y, x^2 + y^2 ≤ 4 and y < 0, 4, undefined)
> plot3d(g(x, y), x=-2..2, y=-2..4)
```




```
>
```

d) Determine a expressão analítica, defina o seu algoritmo e construa o gráfico de $z = h(x,y)$ (figura da direita da alinea b)) no Maple . Cosidere que a circunferência interior tem raio um (1) e a parábola o seu vertice no ponto (0,3) .

A expressão anlítica:

1) Verificar o achatamento da parábola interior.

$y = -x^2 + 3\ \ ??$

$k = ?$ no ponto (1,0)

$y = -kx^2 + 3\ \Leftrightarrow 0 = -1x^2 + 3\ \Leftrightarrow k = 3$

A parábola de dentro vai ser $-3x^2 + 3$ e a exterior $y = -x^2 + 4$.

2) Limitar a circunferência.

$1 \leqslant\ x^2 + y^2 \leqslant 4$

3) Expressão anlítica:

$$h(x,y) = \begin{cases} 4 - y & , -3x^2 + 3\ \leqslant y \leqslant -x^2 + 4\ \wedge\ y > 0 \\ 4 & , 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\ \wedge\ y < 0 \end{cases}$$

Algoritmo:

$h(x,y) = \ SE \ \ -3x^2+3 \ \leqslant y \leqslant -x^2+4 \ \ \wedge \ y>0$

$\qquad\qquad ENTÃO \ \ z = \ 4-y$

$\qquad SENÃO \ \ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4 \ \wedge \ y<0$

$\qquad\qquad ENTÃO \ z = 4$

Código e Gráfico no Maple:

```
> h := (x, y) → piecewise(-3x^2 + 3 ≤ y ≤ -x^2 + 4 and y > 0, 4 - y, 1 ≤ x^2 + y^2 ≤ 4 and y < 0, 4,
  undefined)
```

$h := (x,y) \rightarrow piecewise(-3x^2+3 \leq y \text{ and } y \leq -x^2+4 \text{ and } 0<y, 4-y, 1 \leq x^2+y^2 \text{ and } x^2+y^2 \leq 4 \text{ and } y<0, 4, undefined)$

```
> plot3d(h(x, y), x = -2 ..2, y = -2 ..4, grid = [100, 100])
```