Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

03/07/09 » Duração: 2h30+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal » teste A**

1. Seja $f(x,y) = (29 - x^2 - y^2)^{1/2}$,

$g(x,y)$ e $h(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$g(x,y) ::=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := 5$
Senão Se $4 < x^2 + y^2 \leq 29$
Então $z := f(x,y)$

$h(x,y) ::=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := -5$
Senão $z := -f(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função $g(x,y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = g(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[1, y, -5]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1,1,-5)$.

(ii) Se a temperatura em qualquer ponto do plano xOy for dado por $T = f^2(x,y)$, então a taxa de variação mínima e máxima da temperatura no ponto $P(-1,-1)$ ocorrem na direcção e sentido dos vectores $\vec{w} = \langle -2,-2 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 2,2 \rangle$ respectivamente.

(iii) A função $h(x,y)$ é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \right\}$.

(iv) Se $z = f^2(x,y)$, $y = r\sin\theta$ e $x = r\cos\theta$, então $2 \times \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

2. A *figura 1* representa um sólido, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 2$, composto por duas partes:

- cilindro de raio $r = \sqrt{29}$ e altura $h = 5$
- segmento de esfera de raio $r = \sqrt{29}$ seccionado por um cone de raio $r = 2$ e altura $h = 5$

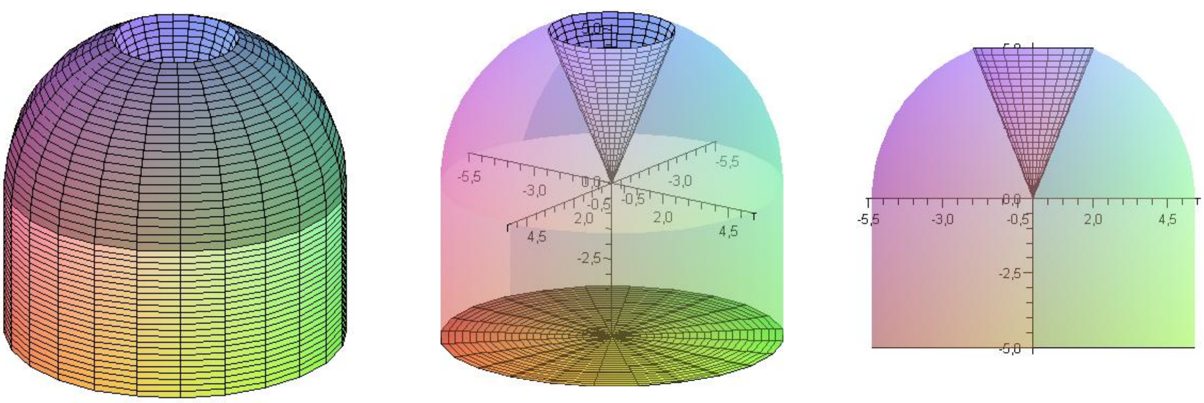

Figura 1

[2.0] **(a)** Justifique, associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \{(\rho, \theta, z) : 0 \le \rho \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -5 \le z \le 0\}$$

$$S_2 = \left\{(R, \theta, \varphi) : 0 \le R \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\frac{2}{5}) \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

[2.5] **(b)** Calcule o volume, a massa e o centro de massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cilindro de raio r e altura h é $\pi r^2 h$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 2\sqrt{29}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projecção da superfície no plano yOz.

iii) Complete as duas funções e associe-as a duas transformações/mudança de variáveis em 2D e 3D respectivamente

```
Transforma01(x, y) ≔
  Prog
    ρ ≔ SQRT( ? )
    θ ≔ ATAN( ? )
    RETURN [ρ, θ]
```

```
Transforma02( ρ , θ, z) ≔
  Prog
    If ( ? )
      RETURN "erro"
    x ≔ ?
    y ≔ ?
    z ≔ ?
    RETURN [x, y, z]
```

3. Considere a equação não linear $e^{-x} - 2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] **(a)** Determine, um intervalo de amplitude igual a 1, onde a equação dada tem uma única raiz real x_r positiva.

[1.5] **(b)** Utilizando o método da bissecção, uma vez, obtenha uma aproximação x_0 para a raiz da equação e, mostre que x_0 seria uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton/Raphson ou das tangentes.

4. Na figura 2, protótipo de um copo, a região sombreada é limitada pela exponencial de equação $y = e^{-x}$, por uma parábola e por segmentos de recta.

[1.0] **(a)** Determine, usando a interpoladora de Newton das Diferenças Divididas, a equação da parábola.

[2.0] **(b)** Aplicando a regra de Simpson simples $(n = 2)$, obtenha um valor aproximado, com duas casas decimais, do integral $I = \int_0^{1.08} \int_{2x^2-2}^{e^{-x}} 1 dy dx$ e interprete o resultado obtido. <u>Sugestão</u>: Comece por transformar o integral duplo num integral simples.

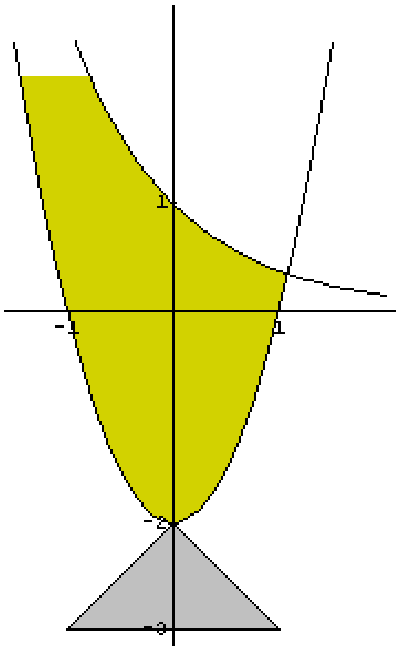

Figura 2

[0.5] **(c)** Calcule um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação obtida na alínea anterior

5. Considere o problema de condição inicial $y' = -ty,\ \ y(0) = 1,\ \ t \in [0,2]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ é a solução exacta do problema.

[1.5] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0						0	0
1		0.6065					0.1065	0.0024
2	2			0.2500	0.1510			

[1.0] **6.** Complete as funções seguintes e acrescente comentários para explicar os algoritmos associados a métodos numéricos específicos. Nota: a sintaxe usada é a da programação em *Matlab*.

```
function y = funcao1(f,a,b,n,y0)
h= ? ;
t(1)= ?;
y(1)= ?;
for i=1:n,
    k1=h*feval(f, ? , ? );
    k2=h*feval(f, ? , ? );
    y(i+1)= ? +1/2*( ? );
    t(i+1)= ? ;
end
```

```
function out = funcao2(f,a,b,n)
h= ?;
x= ?;
s= ?;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0,
        s= ? +2*feval(f,x);
    else
        s= ? ;
    end
end
out=h/3*(feval(f,a)+ ? +feval(f,b));
```