DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA II

21/04/10 - Duração:2h

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Teste intercalar A**

[1.0] **1.** Determine um valor aproximado de $\operatorname{sen} 47^{o}$ utilizando o polinómio de Taylor de grau 2. Indique um majorante para o erro cometido.

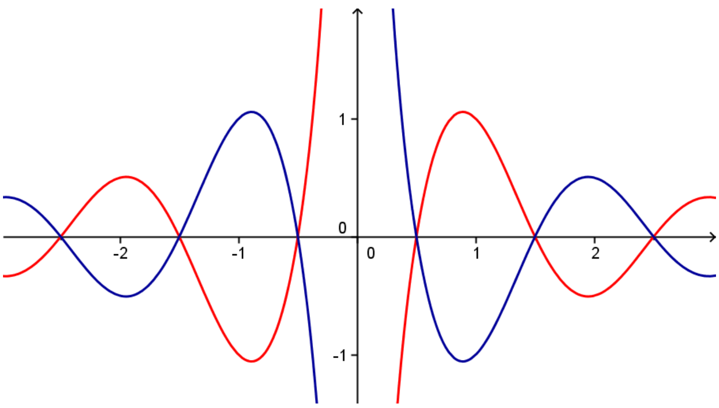
2. Considere a equação não linear $e^{-x} - 2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.5] **(a)** Determine, um intervalo de amplitude igual a 1 onde a equação dada tem uma única raiz real x_r positiva.

[2.5] **(b)** Utilizando o método da bissecção, uma vez, obtenha uma aproximação x_0 para a raiz da equação e verifique se x_0 seria uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes.

3. Na "Festa da Flor 2010" da Madeira um tapete de flores preenchia as regiões limitadas pelas linhas da figura, que representam graficamente as funções:

$$f(x) = \frac{-\cos(\pi x)}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = -f(x)$$



[1.0] **(a)** Defina polinómio interpolador.

[3.0] **(b)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

[3.5] **(c)** Utilize as regras dos Trapézios e de Simpson, com $n = 2$, para aproximar o valor do integral $\int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx$. Recorrendo à figura, interprete os resultados obtidos.

[1.5] **(d)** Qual das funções seguintes traduz correctamente a regra de Simpson? Justifique.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if ~mod(i,2),
        s=s+4*feval(f,x);
    else
        s= s+2*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*feval(f,a)+s+feval(f,b);
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0,
        s=s+2*feval(f,x);
    else
        s= s+4*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*(feval(f,a)+s+feval(f,b));
```

4. Considere o problema de condição inicial $y' = t + y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0,3]$

[1.5] **(a)** Obtenha uma aproximação para $y(3)$ usando o método de Euler com um passo $h = 3/2$.

[2.0] **(b)** Qual das funções $y(t) = 2e^t - t - 1$ ou $y(t) = -t - 1$ é a solução exacta do problema? Complete a tabela seguinte, compare a precisão do resultado obtido na alínea anterior com o valor exacto de $y(3)$ e interprete os resultados da tabela.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0	1		1	1	0		
1				4.7500		3.9634		0.1665
2	3	36.1711			34.6925	27.6711	13.8898	

[1.5] **(c)** Complete as funções e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regras que lhes estão associadas.
Nota: a sintaxe usada é a da programação em *Matlab*.

```
function y = Euler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/_?_;
t(1)=a;
y(1)=y0;
for i=1:n,
    y(i+1)=?_+?_*feval(f,t(i),y(i));
    t(i+1)=t(i)+_?_;
end
```

```
function y = RK2(f,a,b,n,y0)
h=_?_;
t(1)=_?_;
y(1)=_?_;
for i=_?_:_?_,
    k1=_?_;
    k2=_?_;
    y(i+1)=y(i)+_?_;
    t(i+1)=_?_;
end
```

[1.0] **(d)** Qual das figuras seguintes representa graficamente a solução do problema da alínea (b)? Justifique a sua resposta. De que modo relaciona a figura que excluiu com o problema em causa.

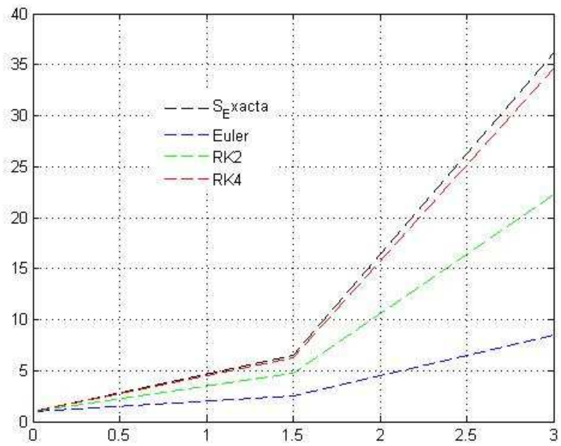


Figura 2

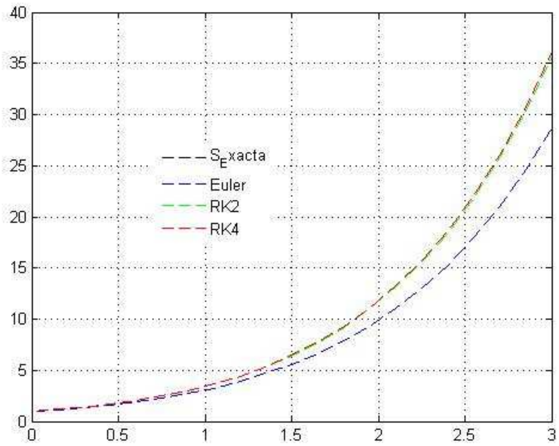


Figura 3