LICENCIATURAS EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Unidade Curricular: **ANÁLISE MATEMÁTICA II**

Ano Letivo: **2018/2019**

**EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE B** » Data: 27/06/2019 — Código da prova: **2706201901**

**Nota:** A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. — **Duração:** 2h30+30m

**Nome do aluno:** — **Número:**

**1.** Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad g(x,y):=\left|\begin{array}{l}\text{se}\quad x^2+y^2\le 16\\ \text{então}\ \ z=f(x,y)\end{array}\right. ; \qquad h(x,y)=\begin{cases} g(x,y) \\ \text{sqrt}(32-f^2(x,y)),\ \text{se } 16<x^2+y^2\le 32\end{cases}$$

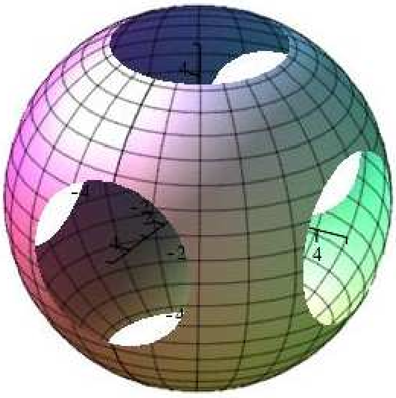

Figura 1

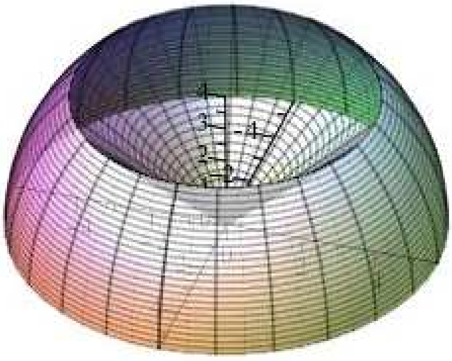

Figura 2

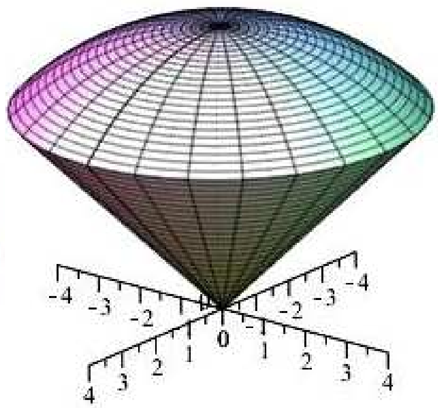

Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio das funções e represente-os geometricamente. O domínio da função $h$ é aberto? Justifique.

[0.5] **(b)** Defina a função $h$ em forma de algoritmo.

[0.5] **(c)** Defina curva de nível.

A curva de nível $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4^2\right\}$ é comum a todas as funções? Justifique a sua resposta.

[2.0] **(d)** Caracterize as superfícies associadas às funções e trace um esboço da superfície de equação $z=h(x,y)$.

[3.0] **(e)** Resolva apenas <u>**três**</u> das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? <u>Justifique a sua resposta</u>.

**i)** Das figuras 1, 2 e 3, apenas a figura 3 representa o gráfico de uma função real de duas variáveis reais.

**ii)** Por definição, a derivada parcial da função $h$ em ordem a $y$ no ponto $(0,5)$ é dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(5,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{h(\Delta y,0)-h(5,0)}{\Delta y}=0$$

**iii)** O vetor $\begin{bmatrix}5 & y & \sqrt{7}\end{bmatrix}$ define parametricamente a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z=h(x,y)$ com o plano $x=5$ no ponto de coordenadas $P(5,0,\sqrt{7})$.

**iv)** A função $h$ não é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por:

$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=16\right\}$.

**v)** As funções $f$, $g$ e $h$ não têm extremos.

**vi)** A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função $h$

```
M:=(x,y)->piecewise(x^2+y^2>16,sqrt(32-x^2-y^2),sqrt(x^2+y^2))
```

[3.0] **(f)** Seja $j$ um campo escalar definido por $j\left(x,y\right) = \sin(f^2(x,y) - (x^2 - x) - (y^2 + y))$

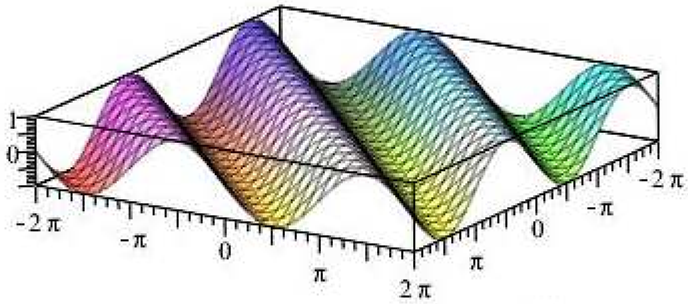


Figura 4 – gráfico de $z = j(x,y)$

Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

**i)** Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano $xOy$ é dada por $V = j(x,y)$, determine a taxa de variação do potencial no ponto $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ na direção do vetor que faz um ângulo de 90º com a direção positiva do eixo dos x e interprete o resultado obtido.

**ii)** Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ e . $Q\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$.

**iii)** Mostre que se $z = \arcsin(j((x-1)^2,(y-1)^2))$, $x = 1+\cos(\theta)$ e $y = 1+\sin(\theta)$, então $\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{d\theta} = -\sin(2\theta)$.

**iv)** Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = j(x,y)$, no ponto $P\left(0,-\frac{\pi}{2},1\right)$.

**2.** No **convívio de São João em Cidadelhe (Vale do Côa, Pinhel) o largo de São Sebastião "das orelhas grandes"** foi enfeitado com balões cujo formato é igual ao da figura seguinte, isto é, sólido composto por duas partes:

- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$ seccionado por um cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$
- Cilindro de raio $r = \sqrt{32}$ e altura $h = \sqrt{32}$

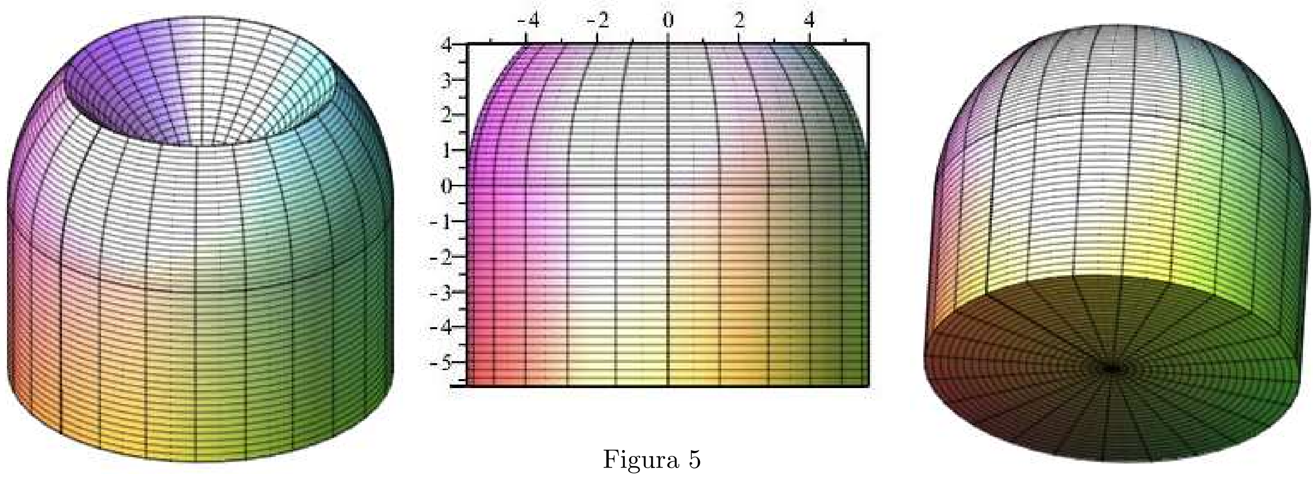


Figura 5

[3.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$

$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -\sqrt{32} \le z \le 0\right\}$

[0.5] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita inferiormente o sólido definido na alínea anterior por $S_2$? Justifique.

```
> addcoords(Zcylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(-sqrt(32), r=0..4, theta=0..Pi, coords=Zcylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido supondo que a sua densidade é constante e igual a 2.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **três**

**i)** Usando o integral triplo deduza as fórmulas do volume de um cone e de um cilindro de raio $r$ e altura $h$.

**ii)** Determine a área da superfície cónica do sólido da figura 5.

**iii)** Mostre que se a função densidade de um sólido é constante, então a sua massa é diretamente proporcional ao seu volume.

**iv)** Deduza a fórmula da transformação de coordenadas cilíndricas para cartesianas e o respetivo jacobiano.

**v)** Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Cilindricas2Cartesianas := proc(rho, theta, z)
    local x, y, z;
    x := ________________________;
    y := ________________________;
    z := ________________________;
    return [__,__,__];
end proc;
```

Nome Completo:______________________________________________________________

Número:_____________________________________________________________________

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- ☐ Sim
- ☐ Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não