EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE A+B » Data: 29/06/2018 Código da prova: **2906201801**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $e^x - \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique um intervalo de amplitude igual a 1 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e negativa. Justifique a sua resposta!

[0.5] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[0.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.

[1.5] **(d)** Complete a função seguinte e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
 k=_________; x(k)=_________;
 while(__________)
     x(k+1)=_____________________________;
     if(_________________________________)  return;  end
     k=__________;
end
```

```
% Script01 de interface do MTangentes
Clear;clc;
strF='exp(x)-ln(x)';
f=@(x) vectorize(eval(strF));

while(1)
    a=str2num(input('a=','s'));   b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&&isreal(a))&&(isscalar(b)&&isreal(b))&& b>a) continue end;
    if (f(a)*f(b)>0) break; end
end
df     = diff(f('x')); % Derivada simbólica
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

while(1)
    x0 = str2num(input('x0=','s'));
    if ~(isscalar(x0)&& isreal(x0)) continue; end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max='); tol  = str2num(input('tol=','s'));

xT = MTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol) % Chamada do método das tangentes
```

2. Na serenata da Queima das Fitas a guitarra de Coimbra é rainha!

Na figura seguinte o tampo da guitarra é limitado pelas funções f e g, a boca por um círculo de raio $1/2$, o braço por segmentos de reta e a cabeça por segmentos de reta e um arco de circunferência de raio 1.

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 0 < x \le 2 \\ \text{então} \;\; y = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \\ \text{senão se} \quad -\pi \le x \le 0 \\ \qquad \text{então} \;\; y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = -f(x)$$

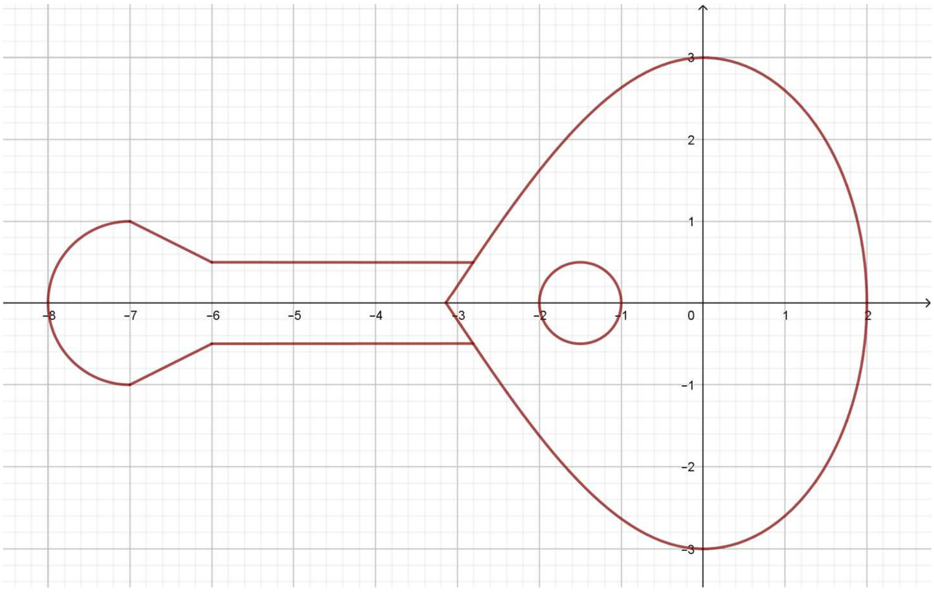

Figura 1 – Gráfico e desenho de uma guitarra de Coimbra

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[-\pi, 0\right]$ e a equação do segmento de reta com declive negativo da parte da cabeça da guitarra.

[2.5] **(b)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_0^2 f(x)\,dx$ e $I_2 = \int_{-\pi}^0 -g(x)\,dx$, utilizando respetivamente a regra de Simpson simples $(n = 2)$ e a dos trapézios simples $(n = 1)$.

Recorrendo à figura 1 interprete os resultados obtidos.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial $y' = y - yt^2, \;\; y(0) = 6, \quad t \in \left[0, 2\right]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = 6 \times \exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI.

Apresente a instrução em Matlab através da qual, utilizando uma função da *Symbolic Math Toolbox*, se obtém a solução exata do PVI dado.

[2.0] **(b)** Relativamente ao PVI da alínea anterior, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações				Erros			
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i EulerM	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ EulerM	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0	6					0	0	0	0
1					9	11.5938		2.6864		
2	2	3.0805		-4.5					7.5805	1.2086

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f\left(x,y\right) = -x^2 - y^2\,; \qquad g\left(x,y\right) = \sqrt{1 + f(x,y)}\,; \qquad h\left(x,y\right) := \left|\begin{array}{ll} \text{se} & 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \\ \text{então} & z = f(x,y) + 1 \end{array}\right. ; \quad j\left(x,y\right) = \begin{cases} g(x,y) \\ h(x,y) \end{cases}$$

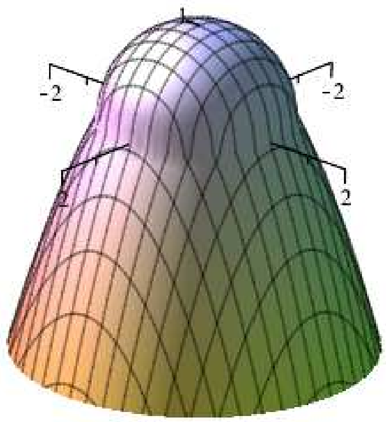

Figura 2

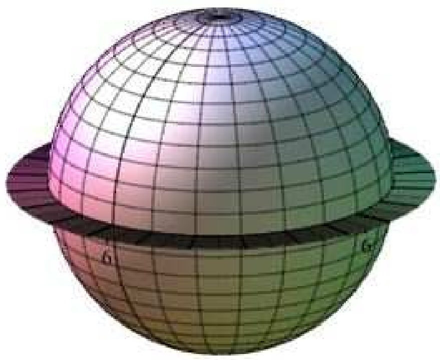

Figura 3

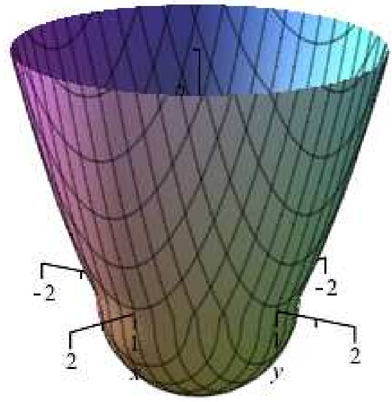

Figura 4

[0.5] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.5] **(b)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço da superfície de equação $z = j(x,y)$.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **<u>duas</u>** das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? <u>Justifique a sua resposta</u>.

i) As figuras 2, 3 e 4 são gráficos 3D de funções reais de duas variáveis reais e as figuras 2 e 4 representam funções simétricas.

ii) O vetor $\left[0 \quad y \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z = j\left(x,y\right)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $P(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

iii) A função j não é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por:
$C = \left\{\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.

iv) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x,y)->piecewise(x^2+y^2<=1,sqrt(1-x^2-y^2),1<x^2+y^2<=4,-x^2-y^2+1)
```

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

i) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dada por $V = -f(x,y)$, a taxa de variação máxima do potencial no ponto $P\left(1,1\right)$ ocorre na direção e sentido do vetor $\vec{w} = \left\langle -1,-1\right\rangle$?

Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação do potencial em P segundo o vetor $\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Utilizando diferenciais e supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dado por $T = \sqrt{-f(x,y)}$, obtenha uma aproximação da diferença da temperatura entre os pontos $(1,1)$ e $(1.12,1.12)$.

iii) Mostre que se $z = f(x,y) - (x + y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$,

então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin(\theta) - \cos(\theta)$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por

$z = 1 - f(x-1, y-1)$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$, no ponto $P(1,1,1)$. Represente a superfície e o plano tangente.

5. As figuras 5 e 6 representam um molde de uma taça de espumante, composto por quatro partes: segmento de um paraboloide de raio 2 e altura 4; calote esférica de raio 1; cone de raio e altura 2; cilindro de raio 2 e altura 0.25

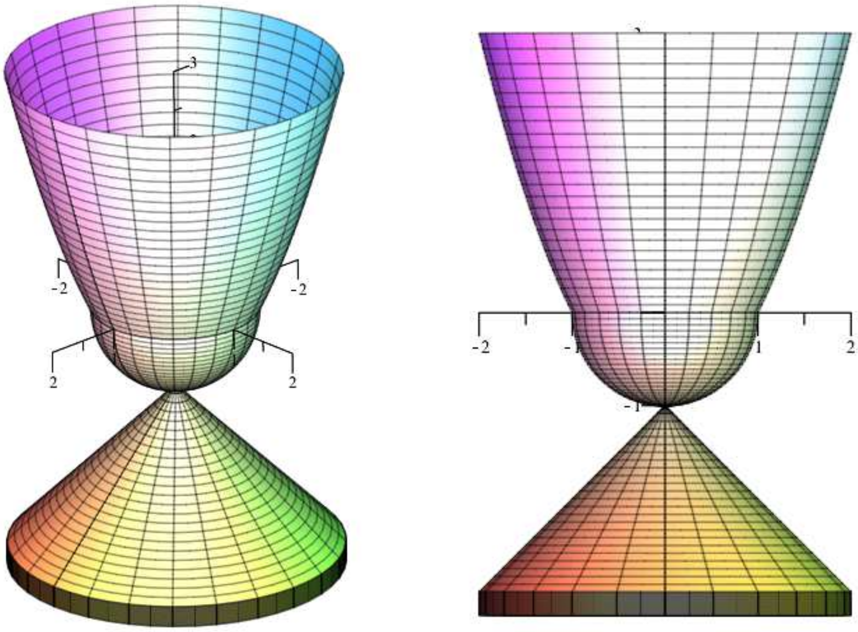

Figura 5 Figura 6

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde:

$S_1 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge z = \rho^2 - 1\right\}$; $S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : R = 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right\}$

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3 \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} - 1\right\}$

$S_4 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -3.25 \leq z \leq -3\right\}$

[2.0] **(b)** Determine o volume que "ocupa" o **espumante Terras do Demo** dentro desta taça (capacidade da taça) e a massa da base da taça ($S_3 \cup S_4$) sabendo que a sua densidade é 3.

Nota: por uma questão de simplificação dos cálculos para o cálculo do volume do espumante, considere que a espessura da taça é desprezável.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Usando o integral triplo deduza as fórmulas do volume de um cone e de um cilindro de raio r e altura h.

ii) Determine a área da superfície parabólica do cálice.

iii) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
    local x, y;
    x := ________________________;
```

```
    y := ____________________________;
    return [__,__];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- [ ] Licenciatura em Eng. Informática
- [ ] Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- [ ] Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- [ ] Sim
- [ ] Não

Frequência às aulas de AM2

- [ ] Regime diurno
- [ ] Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- [ ] Sim
- [ ] Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- [ ] Não
- [ ] Sim
  - [ ] At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - [ ] At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - [ ] At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - [ ] At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - [ ] Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- [ ] Sim
- [ ] Não