Licenciaturas em Engenharia Informática
Ano Letivo 2017/18

Métodos Estatísticos

Apontamentos de apoio às aulas

Maria do Céu Marques

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Departamento de Física e Matemática

1 Probabilidades

1.1 Experiência aleatória, espaço de resultados, acontecimentos

Uma experiência aleatória é um qualquer processo ou conjunto de circunstâncias capaz de produzir pelo menos dois resultados, com incerteza quanto ao que ocorrerá.

ξ_1: lançamento de um dado e registo do n^o de pontos na face que fica voltada para cima;
ξ_2: medição dos tempos de execução de um algoritmo em C.
(...)

O espaço de resultados ou espaço fundamental associado a uma experiência aleatória é o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência. Denota-se, em geral, por Ω.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\Omega_2 =]0, +\infty[$.

Um acontecimento (ou evento) é um subconjunto de Ω.

$A(\xi_1) = \{$saída de n^o par de pontos na face voltada para cima$\}=\{2, 4, 6\}$
$A(\xi_2) = \{$tempo de execução do algoritmo varia entre 0.5 e 2.53 seg $\}$

- Ω é denominado acontecimento certo (realiza-se sempre);
- $\emptyset$ é denominado acontecimento impossível;
- $\overline{A}$ é denominado acontecimento complementar de A.

Operações e relações entre acontecimentos (conjuntos)

1. $A \subset B$: a realização de A implica a realização de B;
2. $A = B$: $A \subset B$ e $B \subset A$; (A e B dizem-se idênticos)
3. $A \cap B$ (Acontecimento Intersecção): A e B realizam-se conjuntamente;
   - Se $A \cap B = \emptyset$ então A e B dizem-se **mutuamente exclusivos**, **disjuntos** ou **incompatíveis**.
4. $A \cup B$ (Acontecimento Reunião): A ou B se realizam (o resultado da experiência aleatória pertence a pelo menos um dos conjuntos);
5. $A \setminus B$ (Acontecimento Diferença): A realiza-se e B não se realiza;
   - $\overline{A} = \Omega \setminus A$
   - $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Propriedades

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$

2. $A \cup \overline{A} = \Omega$

3. Comutativa

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

4. Associativa

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

5. Distributiva

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

6. $A \cap \Omega = A; \quad A \cup \emptyset = A$

7. $A \cup \Omega = \Omega; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

8. $A \subset B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$ e $A \cap B = A$

9. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

1.2 Probabilidades

Definição Clássica[a]

Admita que Ω é um espaço finito, e que todos os acontecimentos elementares são *equipossíveis*. A probabilidade de um acontecimento $A \subseteq \Omega$ se realizar é dada por

$$P(A) = \frac{\sharp\, A}{\sharp\, \Omega}.$$

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1.$

[a]Esta definição de probabilidade é das mais conhecidas, e utilizada, embora seja bastante *limitada*. Sugere-se ao aluno a consulta de outras definições de probabilidade (na bibliografia recomendada na FUC, por exemplo).

Algumas propriedades de uma probabilidade

1. $P(\emptyset) = 0$

2. Se $A_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Caso particular:

Se A e $B \in \Omega$ e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Se A e $B \in \Omega$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

4. Se A e $B \in \Omega$ e $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

5. $A \in \Omega$, $P(\overline{A}\,) = 1 - P(A)$

6. A, $B \in \Omega$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7. Se $A_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Probabilidade condicionada

Sejam A e B acontecimentos de Ω, com $P(B) > 0$. A **probabilidade de A condicionada por B**, representada por $P(A/B)$ ou por $P(A|B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- Se A e B são acontecimentos de Ω tais que $P(A)P(B) > 0$, então

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A). \qquad [\textbf{probabilidade composta}]$$

- Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são acontecimentos de Ω, tais que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) > 0$, então

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Acontecimentos independentes

Os acontecimentos A **e** B **dizem-se independentes** se e só se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Consequência: Sejam A e B acontecimentos de Ω tais que $P(A)P(B) > 0$. A e B são independentes se e só se $P(A/B) = P(A)$.

Nota: Não confundir acontecimentos **disjuntos** com acontecimentos **independentes**.

Probabilidade total. Bayes

Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que:

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset, \ i \neq j, && (disjuntos) \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega. && (exaustivos) \end{aligned}$$

Seja B um acontecimento qualquer. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i). \quad [\textbf{probabilidade total}]$$

Para $B \neq \emptyset$, tem-se

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)}, \ i = 2, ..., n. \quad [\textbf{Bayes}]$$

Exercícios

1. (**Exercício resolvido**) Uma companhia de seguros classifica os seus segurados em três categorias: baixo risco, risco médio ou risco elevado. Os seus registos indicam que a probabilidade de um segurado se envolver em pelo menos um acidente, por ano, é 0.01, 0.10, e 0.25 se o segurado pertence à categoria de baixo, médio ou risco elevado, respetivamente. Admita que a probabilidade de um segurado ser classificado na categoria de baixo risco é de 0.1 enquanto que na de risco médio é 0.6.

   (a) Qual a probabilidade de, num ano, um dos segurados tenha pelo menos um acidente?

   (b) Sabendo que um dos segurados teve pelo menos um acidente no último ano, qual a probabilidade de pertencer à categoria de risco elevado?

   (c) Sabendo que um dos segurados não teve acidentes no último ano, qual a probabilidade dele pertencer à categoria de risco médio?

   Definição dos acontecimentos: $A = \{$segurado envolve-se em pelo menos um <u>acidente</u> por ano$\}$; $B = \{$segurado de <u>baixo</u> risco$\}$; $M = \{$segurado de <u>médio</u> risco$\}$; $E = \{$segurado de <u>elevado</u> risco$\}$.

   Probabilidades dadas: $P(A/B) = 0.01$; $P(A/M) = 0.1$; $P(A/E) = 0.25$; $P(B) = 0.1$; $P(M) = 0.6$.

   Observações: $\Omega = B \cup M \cup E$; $B \cap M = B \cap E = M \cap E = \emptyset$; $P(E) = 1 - (P(B) + P(M)) = 0.3$.

   (a) $P(A) = P(A \cap (B \cup M \cup E)) = P(A \cap B) + P(A \cap M) + P(A \cap E) = P(A/B)P(B) + P(A/M)P(M) + P(A/E)P(E) = ... = 0.136$

   (b) $P(E/A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/E)P(E)}{P(A)} = 0.5515$

   (c) $P(M/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}/M)P(M)}{P(\overline{A})} = 0.625$ (note que $P(M/\overline{A}) \neq 1 - P(M/A)$ (porquê?))

2. (**Exercício ao cuidado do aluno**) Para saber se uma porta está aberta, um robot emite um feixe radiante na sua direção e mede a intensidade I do feixe refletido. O robot foi programado para considerar que a porta está aberta quando $I < I_0$, tendo-se apurado, na fase de treino do robot, que:

$$P(I < I_0 \,/\, \text{porta aberta}) = 0.6 \quad \text{e} \quad P(I < I_0 \,/\, \text{porta fechada}) = 0.3.$$

   Suponha que o robot se encontra diante de uma porta e obtém uma medição $I < I_0$. Se a probabilidade de a porta estar aberta é de 0.6, então a probabilidade de o robot embater contra uma porta fechada é igual a:

   (A) 0.12 **(B)** 0.25 **(C)** 0.4 **(D)** 0.48