Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época de Recurso » teste A**

1. Considere as funções $f(x,y) = 29 - x^2 - y^2$, $g(x,y) = -\sqrt{f(x,y)}$,

$h(x,y)$ e $L(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$h(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := -5$
Senão Se $4 < x^2 + y^2 \leq 29$
Então $z := g(x,y)$

$L(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := 5$
Senão $z := -g(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função $h(x,y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[-1, y, 5]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = L(x,y)$ com o plano $x = -1$ no ponto $P(-1,-1,5)$.

(ii) Se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ é positiva, sendo mínima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(iii) As funções f e g têm um ponto critico em $(0,0)$ e a função L não tem extremos.

(iv) Se $z = f(x,y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, então $\dfrac{\partial z}{\partial\theta} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial\rho^2} \neq \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. A *figura 1* representa um sólido, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 1$, composto por duas partes:

- Cilindro de raio $r = \sqrt{29}$ e altura $h = 5$
- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{29}$ seccionado por um cone de raio $r = 2$ e altura $h = 5$

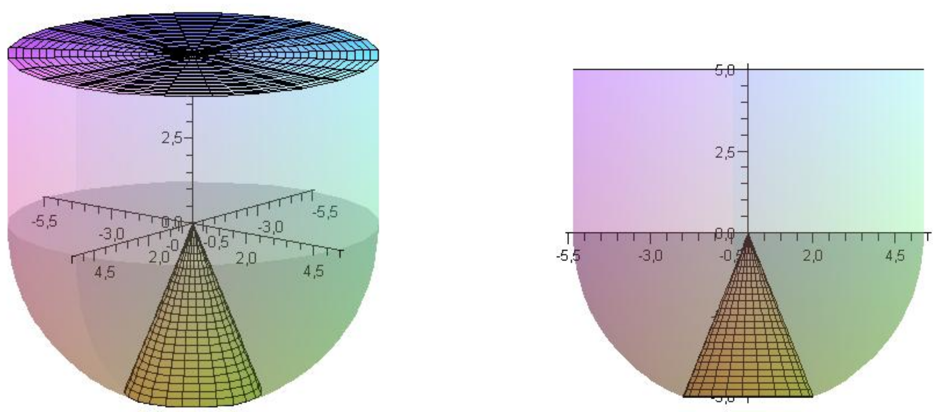

Figura 1

[2.0] **(a)** Justifique, associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le z \le 5\}$

$S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi - \arctan(\frac{2}{5})\right\}$

[2.5] **(b)** Calcule o volume, a massa e o centro de massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 2\sqrt{29}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projecção da superfície no plano yOz.

iii) Complete os dois procedimentos seguintes e associe-os a duas transformações/mudança de variáveis em 2D e 3D respectivamente.

```
Transforma01:=proc(rho, theta)
  local x, y;
  if (rho < ?) then printf('Erro')
    else x := ?`;`
         y := ?`;`
         return [x, y]
  end if;
end proc
```

```
Transforma02:=proc(x, y, z)
  local rho, theta;
  rho := sqrt(?);
  if (x ≠ 0) then theta := arctan(?);
     elif (y > 0) then theta := Pi/2;
     else theta := -Pi/2 ;
  end if;
  return [rho, theta, z]
end proc
```

3. Considere a equação não linear $e^x - 3x^2 + 3 = 0$

[1.0] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude não superior a 1 no qual a equação dada tem uma única raiz real x_r negativa.

[1.5] **(b)** Utilizando o método da bissecção, uma vez, obtenha uma aproximação x_0 para a raiz negativa da equação e, mostre que x_0 seria uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton/Raphson ou das tangentes.

4. Na figura 2, protótipo de um copo, a região sombreada é limitada pela exponencial de equação $y = e^x$, por uma parábola e por segmentos de recta.

[1.0] **(a)** Determine, usando a interpoladora de Newton das Diferenças Divididas, a equação da parábola.

[2.0] **(b)** Aplicando a regra de Simpson simples $(n = 2)$, obtenha um valor aproximado, com duas casas decimais, do integral $I = \int_{-1.05}^{0}\int_{3x^2-3}^{e^x} 1\,dy\,dx$ e interprete o resultado obtido. <u>Sugestão</u>: Comece por transformar o integral duplo num integral simples.

[0.5] **(c)** Calcule um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação obtida na alínea anterior

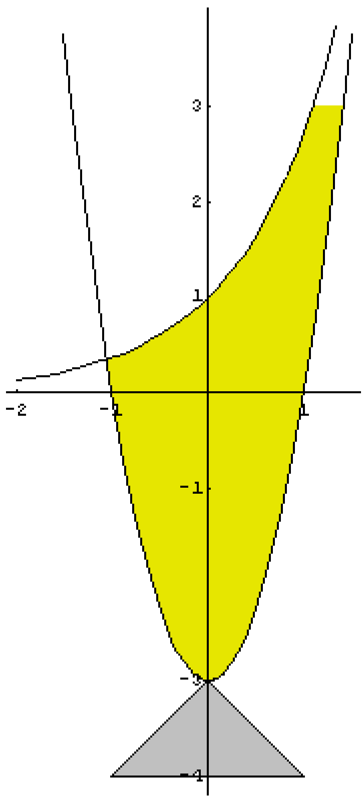

Figura 2

5. Considere o problema de condição inicial $y' + ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0,2]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ é a solução exacta do problema.

[1.5] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações				Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0						0	0
1		0.6065					0.1065	0.0024
2	2			0.2500	0.1510			

[1.0] **6.** Complete as funções seguintes e acrescente comentários para explicar os algoritmos associados a métodos numéricos específicos. Nota: a sintaxe usada é a da programação em *Matlab*.

```
function y = funcao1(f,a,b,n,y0)
h= ? ;
t(1)= ?;
y(1)= ?;
for i=1:n,
    k1=h*feval(f, ? , ? );
    k2=h*feval(f, ? , ? );
    k3=h*feval(f, ? , ? );
    k4=h*feval(f, ? , ? );
    y(i+1)= ? +1/6*( ? );
    t(i+1)= ? ;
end
```

```
function out = funcao2(f,a,b,n)
h= ?;
x= ?;
s= ?;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    s= ? +feval(f,x);
end
out=h/2*(feval(f,a)+ ? +feval(f,b));
```