Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época de Recurso**

[0.5] **1.** Determine um valor aproximado de $\sqrt{e}$ utilizando o polinómio de Taylor de grau 3.

2. Considere a equação não linear $e^{-x} - 2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] **(a)** Determine um intervalo de amplitude igual a 1, onde a equação dada tem uma única raiz real x_r positiva.

[1.5] **(b)** Utilizando o método da bissecção, uma vez, obtenha uma aproximação x_0 para a raiz da equação. A aproximação obtida é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Justifique.

3. Na figura 1, protótipo de um copo, a região sombreada é limitada pela exponencial de equação $y = e^{-x}$, por uma parábola e por segmentos de reta.

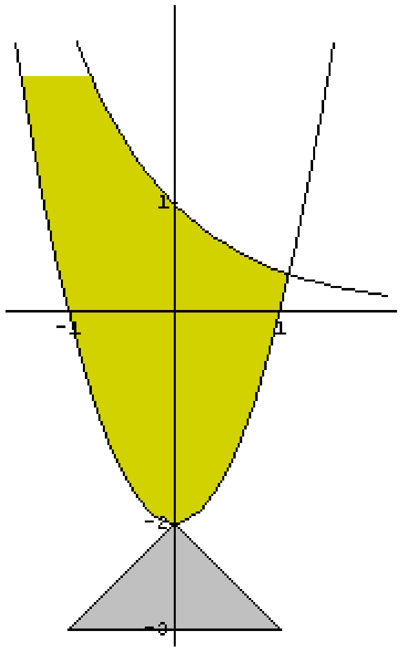

Figura 1

[1.0] **(a)** Usando a interpoladora de Newton das Diferenças Divididas, determine a equação da parábola.

[1.5] **(b)** Aplicando a regra de Simpson simples $(n = 2)$, obtenha um valor aproximado, com duas casas decimais, do integral $I = \int_0^{1.08}\int_{2x^2-2}^{e^{-x}} 1dydx$ e interprete o resultado obtido. Sugestão: Comece por transformar o integral duplo num integral simples.

[0.5] **(c)** Calcule um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação obtida na alínea anterior

[1.0] **(d)** Alguma das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a+h:h:b-h;
s=0;
for i=1:n-1,
  if ~mod(i,2)
      s=s+2*f(x(i));
  else
      s=s+4*f(x(i));
  end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)
      s=s+2*feval(f,x);
    else
      s=s+4*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*feval(f,a)+s+feval(f,b);
```

4. Considere o problema de valor inicial $y' = yt^2 - y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 0.5]$

[2.0] **(a)** Sabendo que $y(t) = \exp(\frac{t^3}{3} - t)$ é a solução exata do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0					0	0	0
1				0.7871				0.4638*1.0e-005
2	0.5	0.6323			0.6323		0.0060	0.4360*1.0e-005

[0.5] **(b)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

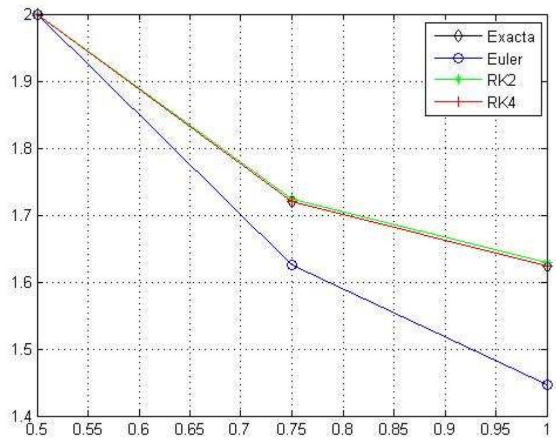

Figura 2

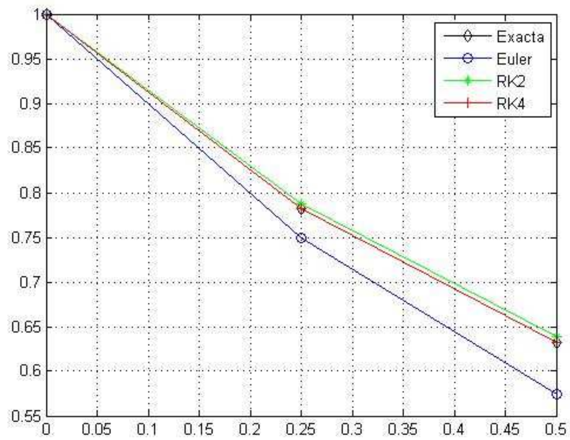

Figura 3

5. Seja $f(x,y) = \sqrt{29 - x^2 - y^2}$,

e os campos escalares g e h dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$g(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := 5$
Senão Se $4 < x^2 + y^2 \leq 29$
Então $z := f(x,y)$

$h(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := -5$
Senão $z := -f(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função $g(x,y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = g(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>três</u>**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vetor $[1, y, -5]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1,1,-5)$.

(ii) Se a temperatura em qualquer ponto do plano cartesiano xOy for dado por $T = f^2(x,y)$, então a taxa de variação mínima e máxima da temperatura no ponto $P(-1,-1)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle -2,-2 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 2,2 \rangle$ respetivamente.

(iii) A função h é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

(iv) Se $z = f^2(x,y)$, $y = r\sin\theta$ e $x = r\cos\theta$, então $2\times\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{\partial z}{\partial\theta}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(v) Qual das rotinas seguintes, implementadas em Maple, traduz corretamente a avaliação se uma função é harmónica, isto é, se satisfaz a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$?

```
Harmonica_v1 := proc(f)
   if diff(f, x, x)= - diff(f, y, y)
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;

Harmonica_v2 := proc(f)
   if diff(f, x) + diff(f, y) = 0
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;
```

6. A figura 4 representa um sólido, de densidade constante $\rho(x,y,z)=2$, composto por duas partes:

- cilindro de raio $r=\sqrt{29}$ e altura $h=5$
- segmento de esfera de raio $r=\sqrt{29}$ seccionado por um cone de raio $r=2$ e altura $h=5$

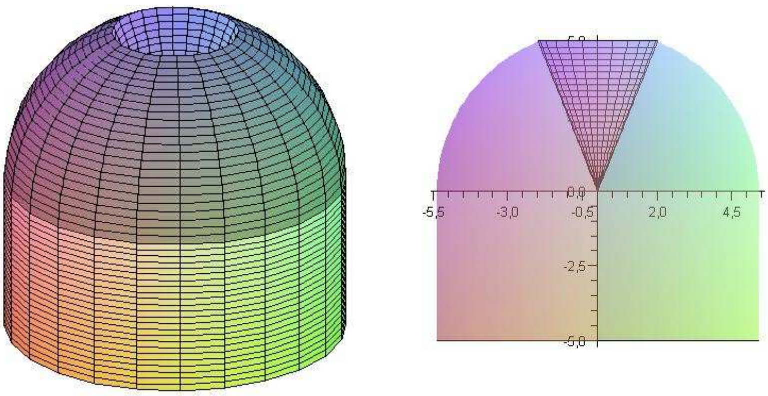

Figura 4

[2.0] **(a)** Justifique, associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -5 \le z \le 0\}$

$S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\frac{2}{5}) \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$

[1.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de diâmetro d é igual a $\frac{1}{6}\pi d^3$.

(ii) Mostre que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = 2\sqrt{29}\pi$.

(iii) Mostre que em coordenadas cartesianas o sólido é definido por $S = S_1 \bigcup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 29 \wedge -5 \le z \le 0\right\}$

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(4 < x^2 + y^2 \le 29 \wedge 0 \le z \le \sqrt{29 - x^2 - y^2}\right) \vee \left(x^2 + y^2 \le 4 \wedge 0 \le z \le \frac{5}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right\}$

(iv) Complete a rotina seguinte e apresente uma 2ª versão, em Maple ou Matlab, com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := --?-- ;
   y := --?-- ;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo:______________________________

Número:______________________________

Nome/login utilizado no LVM:______________________________

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At00_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At01_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At02_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At03_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At04_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não