

A Álgebra do Crescimento

Módulo I – Crescimento exponencial

O crescimento exponencial está, regra geral, associado a um comportamento incontrollável. No final deste módulo os formandos terão apreendido e associado o crescimento exponencial a fenómenos do nosso quotidiano. Pretende-se ainda, estabelecer os princípios elementares da modelação matemática desses fenómenos, isto é, introduzir as definições e propriedades da exponencial.

Unidade 1 – Enquadramento/Motivação sobre a Exponencial

Imaginemos que temos uma bactéria a crescer numa caixa de Petri, isto é, num meio no qual se pode alimentar e reproduzir. Após vinte minutos, esta bactéria terá dado lugar a outra bactéria. Em cada ciclo de vinte minutos repetir-se-á esta operação, de forma que quando tenham passado 40 minutos haverá 4 bactérias e após uma hora já serão 8 as bactérias que coabitam na placa. Cada uma destas bactérias pesa realmente pouco, mais ou menos uma bilionésima de grama ($0,000.000.000.001$ g), ou seja, é necessário um bilião de bactérias para que pesem uma grama. Então, a pergunta que se coloca é a seguinte:

Qual será o peso da cultura de bactérias ao fim de 48 horas?

Lembremos que o processo começa com uma bactéria que se reproduz a cada vinte minutos. Se fizer esta pergunta a alguém pode-se ficar plenamente seguro que ganhará uma aposta, já que o erro na resposta, inclusive entre gente entendida em números costuma ser monumental. O peso final do cultivo seria o equivalente a umas 4000 vezes o peso da Terra. Isto não vai acontecer na pequena caixa de Petri, porque no cultivo chega-se a uma etapa estacionária, na qual os excedentes contaminam o ambiente de

nutrientes a as bactérias deixam de se reproduzir. Pensemos que quando isto não é assim, as bactérias nocivas podem disseminar doenças que infectariam a uma extensa parte da população do planeta em relativamente pouco tempo.

Estes resultados, que sempre nos surpreendem pelas suas desmesuradas proporções, correspondem a um tipo de comportamento que em matemática recebe o nome de **crescimento exponencial**. A maioria dos crescimentos populacionais são deste tipo e os números que se manipulam nunca deixam de nos surpreender. Por exemplo, um par de ratazanas que em cada estação do Ano se reproduzisse dando lugar a outras quatro, encheriam rapidamente toda a superfície da Terra em apenas 60 gerações.

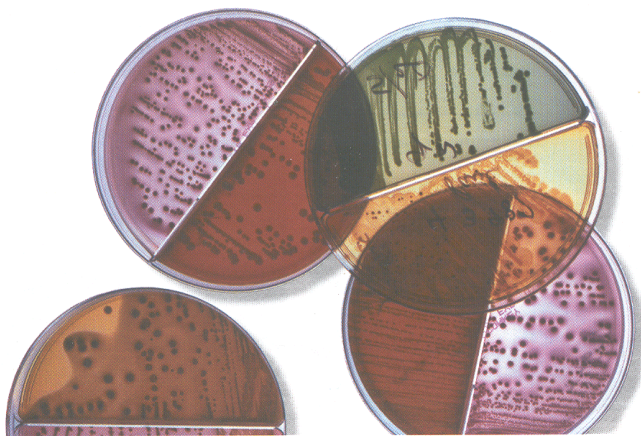


Figura 1

O crescimento de Bactérias numa caixa de Petri, em intervalos iguais, é exponencial e só se estabiliza por causa dos limitados recursos alimentares da caixa. Fora dela, na natureza, a reprodução bacteriana pode ser devastadora.

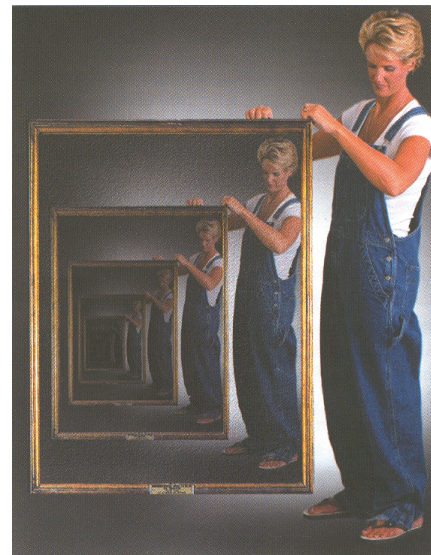


Figura 2

Uma imagem reflectida até ao infinito, num espelho, é um exemplo perfeito da álgebra exponencial.

Os reflexos diminuem o seu tamanho em escala descendente e formam uma sucessão decrescente que em matemática se qualifica de progressão geométrica.