Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Teste intercalar A**

[1.5] **1.** Determine um valor aproximado de $\ln(1.5)$ utilizando o polinómio de Taylor de grau três e indique um majorante para o erro cometido. Apresente os resultados com 3 casas decimais.

2. Considere a equação não linear $e^x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a $\pi/2$ no qual a equação dada tem uma única raiz real positiva.

[1.0] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Recorrendo à figura 1, aproxime a raiz x^* efetuando uma iteração. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

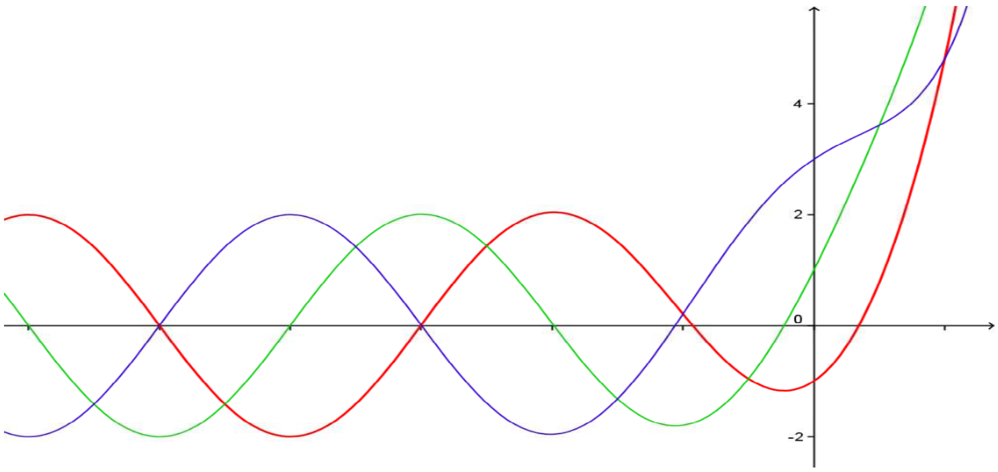

Figura 1: Gráficos de f, f' e f''

[1.0] **(d)** Qual das seguintes funções em Matlab traduz corretamente o método da bisseção? Justifique a sua resposta assinalando os erros na função incorreta.

```
function x = Biss_v1(f,a,b,kmax,tol)
k=1;
while(k<=kmax),
   x(k)=(a+b)/2;
   if (abs(b-a)/2<tol) return; end
   if (f(a)*f(x(k))<0) b=x(k);
   else a=x(k);
   end
   k=k+1;
 end
```

```
function x = Biss_v2(f,a,b,kmax,tol)
 k=1;
 while(k<=kmax),
   x(k)=(b-a)/2;
   if (abs(a-b)<2*tol) return; end
   if (f(a)*f(x(k))<0) a=x(k);
   else b=x(k);
   end
   k=k+1;
 end
```

3. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \text{ se } -2\pi \leq x < 0 \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} & , \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = -f(x)$$

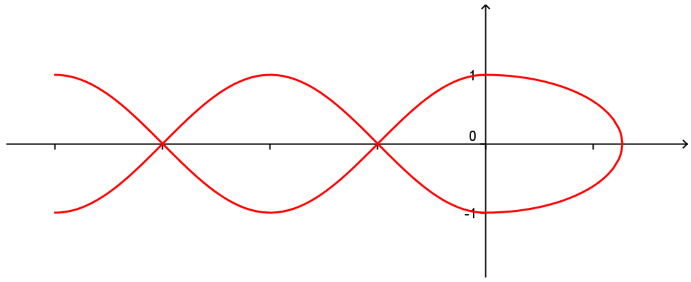

Figura 2 - Gráficos de f e g

[3.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$. Redesenhe a figura 2, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in [0,2]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$.

[3.5] **(b)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} g(x)\, dx$ e $I_2 = \int_0^2 g(x)\, dx$, utilizando as regras simples de Simpson e dos trapézios respetivamente. Recorrendo à figura 2 interprete os resultados obtidos.

[1.0] **(c)** Qual das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique.

```
function S = RSimpson(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if ~mod(i,2)
      s=s+2*f(x);
    else
      s=s+4*f(x);
    end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)
      s=s+2*feval(f,x);
    else
      s=s+4*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*feval(f,a)+s+feval(f,b);
```

4. Considere o problema de valor inicial $y' = y - yt^2, \quad y(0) = 5, \quad t \in [0,2]$

[1.5] **(a)** Obtenha uma aproximação para $y(2)$ usando o método de Euler com um passo $h = 1$.

[2.0] **(b)** Mostre que $y(t) = 5\exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do problema. Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0	5				0	0	0
1				7.5000				0.0772
2	2	2.5671			1.5599		6.3171	1.0072

[1.00] **(c)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

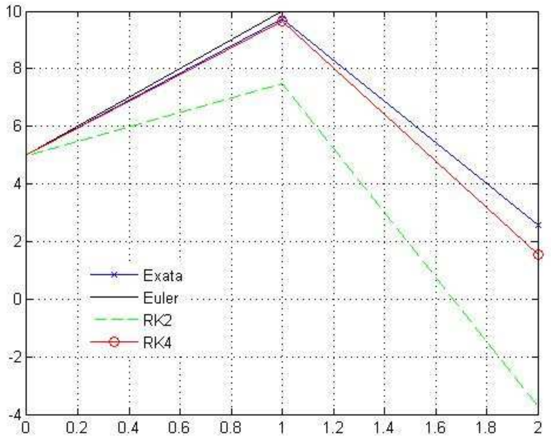

Figura 3

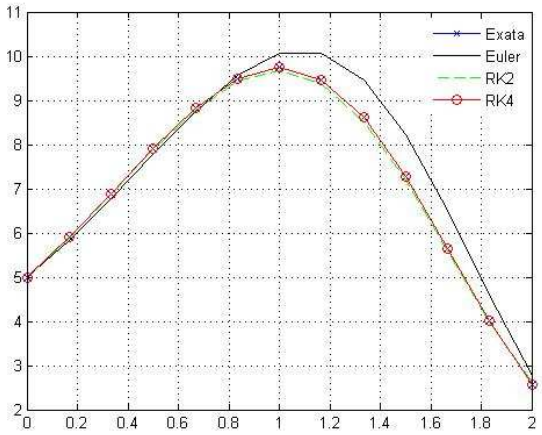

Figura 4

[1.0] **(d)** Alguma das funções seguintes, implementadas em Matlab, traduz corretamente o método de Euler explícito? Justifique a sua resposta, efetuando as correções que achar convenientes e necessárias.

```
function y = N_Euler01(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y(1)=y0;
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
end
```

```
function y = N_Euler02(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a;
y=y0;
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+f(t(i),y(i));
    t(i+1)=t(i)+h;
end
```

[1.0] **(e)** A *script* seguinte traduz corretamente a resolução em Matlab do PVI dado? Justifique a sua resposta, assinalando e corrigindo erros que possam existir.

```
clear; clc;

strF = 'y*(1-t)*(1+t)'
f    = @(t,y) eval(vectorize(strF));

a = 0; b = 2;   y0 = 0;
n = 2; h = b-a/n; t= h:a:b;

yEuler = N_Euler(f,a,b,n,y0);
yRK2   = N_RK2(f,a,b,n,y0);   yRK4 = N_RK4(f,a,b,n,y0);

sExacta = dsolve(['Dy=',strF],['y(',num2str(b),')=',num2str(0)]);
yExacta = eval(vectorize(char(sExacta)));

erroEuler = abs(yExacta-yEuler); erroRK2 = abs(yExacta-yRK2);
erroRK4   = abs(yExacta-yRK4);
y = [t.',yExata.',yEuler.',yRK2.',yRK4.',ErroEuler.',ErroRK2.',ErroRK4.']
```

```
plot(t,yExacta,'-ob')
hold on
plot(t,yEuler,'-k')
plot(t,yRK2,'--g')
plot(t,yRK4,'-or')
legend('Exacta','Euler','RK2','RK4')
grid on
hold off
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:______________________________

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Métodos do PtoFixo, Secante e Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)
  - ☐ Atividades colaborativas (Glossário, wiki, outras)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não