Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste A+B**

1. Considere a equação não linear $e^x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a $\pi/2$ no qual a equação dada tem uma única raiz real positiva.

[1.5] **(b)** Mostre que $x_0 = \pi/2$ é uma é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Aplicando o método uma vez, obtenha uma aproximação da raiz positiva. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

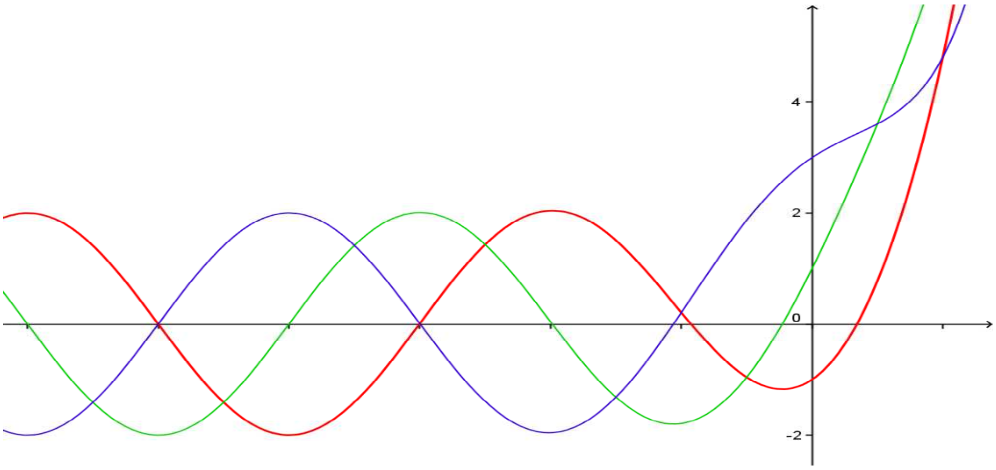

Figura 1: Gráficos de f, f' e f''

2. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{, se } -2\pi \le x < 0 \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} & \text{, se } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$g(x) = -f(x)$

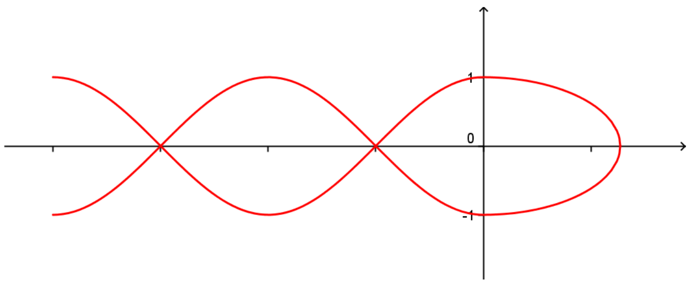

Figura 2 - Gráficos de f e g

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$. Redesenhe a figura 2, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in [0,2]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$.

[2.0] **(b)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} g(x)\,dx$ e $I_2 = \int_0^2 g(x)\,dx$, utilizando as regras simples de Simpson e dos trapézios respetivamente. Recorrendo à figura 2 interprete os resultados obtidos.

3. Considere o problema de valor inicial $y' = y - yt^2, \quad y(0) = 5, \quad t \in [0{,}2]$

[2.0] **(a)** Sabendo que $y(t) = 5\exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0	5				0	0	0
1				7.5000				0.0772
2	2	2.5671			1.5599		6.3171	1.0072

[1.0] **(b)** Alguma das funções seguintes, implementadas em Matlab, traduz corretamente o método de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2) para a resolução de um PVI? Justifique a sua resposta, efetuando as correções que achar convenientes e necessárias.

```
function y = RK2_v1(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=y0;
for i=1:n
    k1=h*f(t(1),y(i));
    k2=f(t(i+1),y(i));
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

```
function y = RK2_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
t(1)=a;
y(1)=0;
for i=1:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1=f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+k1+k2*0.5;
end
```

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2;$

$g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}; \qquad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 16 \\ \text{então} \;\; z = g(x,y) \end{array} \right. ; \qquad j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{32 - f(x,y)}, & \text{se } 16 < x^2 + y^2 \le 32 \\ h(x,y) \end{cases}$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função $j(x,y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.5] **(b)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **uma** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O vetor $\begin{bmatrix} x & 5 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$ define vectorialmente a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $y = 5$ no ponto de coordenadas $P(0, 5, \sqrt{7})$.

ii) A função $j(x,y)$ é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Se o potencial elétrico em qualquer ponto do plano xOy for dada por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação mínima e máxima do potencial no ponto $P(1,1)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 2,2 \rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2,-2 \rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

ii) Mostre que se $z = f(x,y)$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ e $x = r\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

5. A figura 4 representa um sólido, de densidade igual a 1, composto por três partes:

- cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$
- cilindro de raio $r = 4$ e altura $h = 4$
- segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$

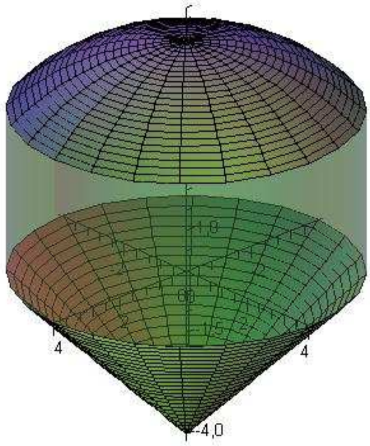

Figura 3

[2.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \wedge \tfrac{4}{\cos\varphi} \le R \le \sqrt{32}\right\}$$

$$S_2 = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 4 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le z \le 4\}$$

$$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 16 \wedge \sqrt{x^2+y^2} - 4 \le z \le 0\right\}$$

[2.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cilindro de raio r e altura h é $\pi r^2 h$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 16\sqrt{2}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

Sugestão: A área de uma superfície de equação $z = g(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$, com g_x e g_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 16 \wedge \sqrt{x^2+y^2} - 4 \le z \le \sqrt{32 - x^2 - y^2}\right\}$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
Cartesianas2Esfericas := proc(x, y, z)
 local R, theta, phi;
 R := sqrt(--?--);
 if (x ≠ 0) then theta := arctan(--?--);
 elif (y = 0) then theta := 0;
 elif (y > 0) then theta := --?--; else theta := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then phi := --?--; else phi:=arccos(--?--); end if;
 return [R, theta, phi];
 end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
    - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
    - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
    - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
    - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
    - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
    - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não