Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Teste intercalar A**

[1.5] **1.** Determine um valor aproximado de $\cos 61^{\mathrm{o}}$ utilizando o polinómio de Taylor de grau 2. Indique um majorante para o erro cometido.

2. Considere a equação não linear

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}}+\cos x = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$$

[0.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a 1, no qual a equação dada tem uma raiz real positiva.

[1.0] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bissecção duas vezes. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Recorrendo à figura 1, aproxime a raiz x_r efectuando uma iteração. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

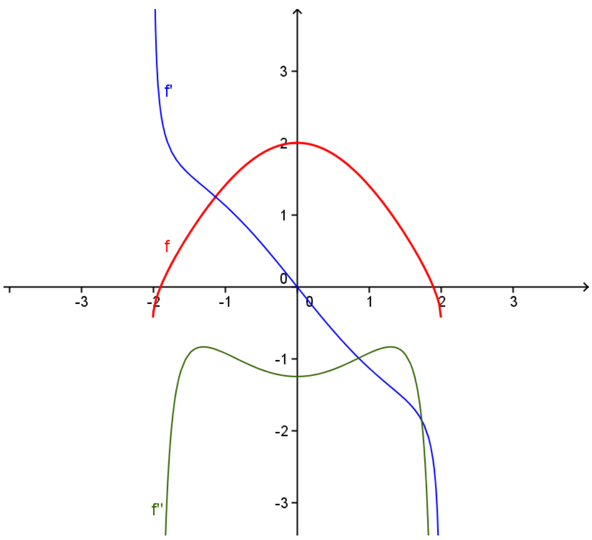

Figura 1 - Gráficos de f, f' e f''

[1.5] **(d)** Qual das seguintes funções em Matlab traduz correctamente o método de Newton-Raphson ou das tangentes? Justifique.

```
function x = NR_v1(f,df_dx,x0,kmax,tol)
k=1;
x(k)=x0;
while(k<=kmax),
   x(k+1)=x(k)- ...
   feval(f,x(k))/feval(df_dx,x(k));
   if (abs(x(k+1)-x(k))<tol)
       return;
   end
   k=k+1;
end
```

```
function x = NR_v2(f,df_dx,x0,kmax,tol)
k=1;
x(k)=0;
while(k<=kmax),
   x(k+1)=x(k)- ...
   feval(df_dx,x(k))/feval(f,x(k));
   if (abs(x(k+1)-x(k))<tol)
       break;
   end
   k=k+1;
end
```

3. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} & \text{, se -2} \leq x \leq 0 \\ \cos x & \text{, se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = -f(x)$$

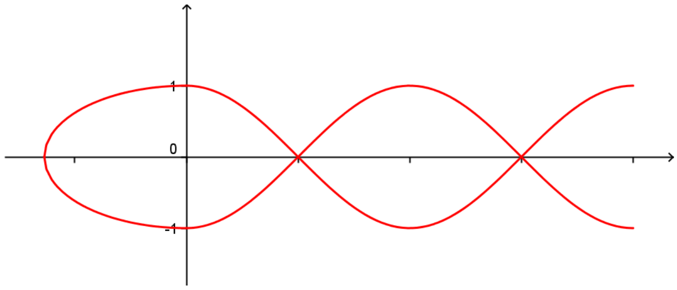

Figura 2 - Gráficos de f e g

[1.0] **(a)** Defina polinómio interpolador.

[3.0] **(b)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Redesenhe a figura 2, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in [-2,0]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

[3.5] **(c)** Utilize as regras dos Trapézios e de Simpson simples para aproximar respectivamente o valor dos integrais $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ e $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\,dx$. Recorrendo à figura 2, interprete os resultados obtidos.

4. Considere o problema de valor inicial $y' + ty^2 = 0, \quad y(1) = 2, \quad t \in [1,2]$

[1.5] **(a)** Obtenha uma aproximação para $y(2)$ usando o método de Euler com um passo $h = 0.5$.

[2.0] **(b)** Mostre que $y(t) = 2t^{-2}$ é a solução exacta do problema. Complete a tabela seguinte, compare a precisão do resultado obtido na alínea anterior com o valor exacto de $y(2)$ e interprete os resultados da tabela.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	1					0	0	0
1				1		0.8889		0.0299
2	2	0.5			0.4916	0.5	0.0938	

[1.5] **(c)** Complete as funções e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regras que lhes estão associadas.

```
function y = N_Euler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/___;
t(1)=a;
y(1)=y0;
for i=1:n,
    y(i+1)=___+__*feval(f,t(i),y(i));
    t(i+1)=t(i)+___;
end
```

```
function y = N_RK4(f,a,b,n,y0)
h=______;
t(1)=___;
y(1)=___;
for i=___:___,
    k1=____________;
    k2=____________;
    k3=____________;
    k4=____________;
    y(i+1)=y(i)+_______________;
    t(i+1)=_________;
end
```

[0.5] **(d)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

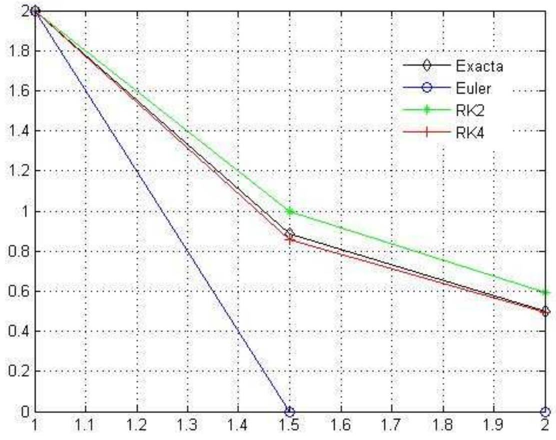

Figura 3

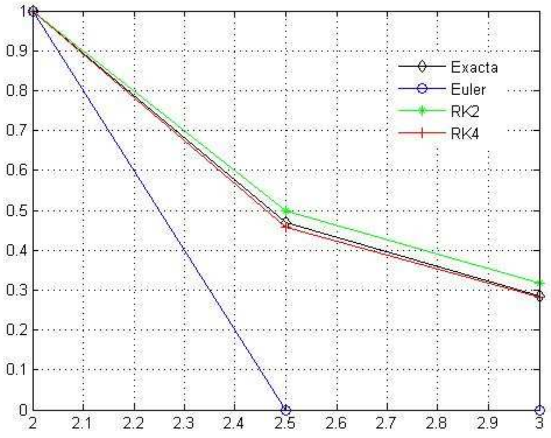

Figura 4

[1.0] **(e)** A script seguinte traduz correctamente a resolução em Matlab do PVI dado? Justifique a sua resposta.

```
clear;
clc;

strF = 't/y^2'
f    = @(t,y) eval(vectorize(strF));

a  = 2;
b  = 3;
n  = 2;
y0 = 1;

yEuler = N_euler(f,a,b,n,y0);
yRK2   = N_rk2(f,a,b,n,y0);
yRK4   = N_rk4(f,a,b,n,y0);

t = a:(a+b)/n:b;

sExacta = dsolve(['Dy=',strF],['y(' num2str(b),')=',num2str(y0)]);
yExacta = eval(vectorize(char(sExacta)));

plot(t,yExacta,'-kd')
hold on
plot(t,yEuler,'-bo')
plot(t,yRK2,'-g*')
plot(t,yRK4,'-r+')
shg
grid on
legend('Exacta','Euler','RK2','RK4')
hold off

erroEuler = abs(yExacta-yEuler)
erroRK2   = abs(yExacta-yRK2)
erroRK4   = abs(yExacta-yRK4)
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome utilizado no LVM:____

Curso:

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Frequência às aulas de AM2:

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Actividades de aprendizagem e avaliação:

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ Act00_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ Act01_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ Act02_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ Act03_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 1 vez)