Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática**

TPC nº12 Data limite de entrega: 5/Jan/2016 (23h59m)

---

1. Classifique e resolva as seguintes equações diferencias ordinárias (EDO) de primeira ordem:

   (a) $y' = -\frac{1}{x}\left(y + \frac{1}{x^2}\right)$; (b) $x\,y' = e^y$.

2. Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{3+x}{9+x^2}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int e^x\cos(e^x)\sin(2e^x)\,dx$;

   (d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$.

Sugestão de resolução:

---

1. (a) Ignorando as eventuais alterações de domínios, tem-se

$$
\begin{aligned}
y' = -\frac{1}{x}\left(y+\frac{1}{x^2}\right) &\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x}y + \frac{1}{x^3}\\
&\Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^3}, \quad \text{EDO linear de primeira ordem}\\
&\qquad \text{F.I. } e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x|\\
&\overset{\times x}{\Leftrightarrow} y'x + y = \frac{1}{x^2}\\
&\Leftrightarrow \left(y\,x\right)' = \frac{1}{x^2}\\
&\Leftrightarrow y\,x = \int x^{-2}\,dx\\
&\Leftrightarrow y\,x = \frac{x^{-1}}{-1} + c\\
&\Leftrightarrow y\,x = -\frac{1}{x} + c, \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

   (b) Ignorando as eventuais alterações de domínios, tem-se

$$
\begin{aligned}
x\,y' = e^y &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^y\,\frac{1}{x}, \quad \text{EDO de variáveis separáveis}\\
&\Leftrightarrow e^{-y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx\\
&\Leftrightarrow -\int -e^{-y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx\\
&\Leftrightarrow -e^{-y} = \ln|x| + c, \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2. (a) A primitiva é imediata:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3+x}{9+x^2}\,dx &= \int \frac{3}{9+x^2}\,dx + \int \frac{x}{9+x^2}\,dx \\
&= \int \frac{3}{9(1+\frac{x^2}{9})}\,dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{9+x^2}}_{R5}\,dx \\
&= \int \frac{3}{9}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\,dx + \frac{1}{2}\,\ln|9+x^2| \\
&= \int \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}\,dx + \frac{1}{2}\,\ln(9+x^2) \\
&= \int \underbrace{\frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{x}{3})^2}}_{R19}\,dx + \frac{1}{2}\,\ln(9+x^2) \\
&= \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}\,\ln(9+x^2) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x\ln(x+1)\,dx = \int \underbrace{x}_{p}\,\underbrace{\ln(x+1)}_{d}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{R2}\,dx &= \tfrac{x^2}{2} \\ \big(\ln(x+1)\big)' &= \tfrac{1}{x+1} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PP}{=} \frac{x^2}{2}\,\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx\,.
\end{aligned}$$

A primitiva resultante envolve uma fracção racional imprópria (grau do numerador $= 2 > 1 =$ grau do denominador), pelo que é necessário efectuar a divisão dos polinómios:

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & & & x+1 \\ \cline{4-4}
-(\cancel{x^2} & +x &) & x-1 \\ \cline{1-3}
 & \cancel{-x} & & \\
 & -(\cancel{-x} & -1\ ) & \\ \cline{1-3}
 & & 1 &
\end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^2}{x+1}}_{\text{fracção imprópria}} = x - 1 + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{fracção própria}}\,.$$

Agora, tem-se

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+1)\,dx &\overset{PP}{=} \frac{x^2}{2}\,\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{R2}\,dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{1}_{R1}\,dx - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(x+1) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,\ln|x+1| + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Nenhuma das regras de primitivação imediata é aplicável, porque as funções seno e cosseno têm argumentos diferentes. Nesse caso o cálculo da primitiva pode ser realizado recorrendo à técnica descrita no caso III da página 7 das Tabelas. Assim,

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos(e^x) \sin(2e^x)\, dx &= \int e^x \sin(2e^x) \cos(e^x)\, dx \\
&= \int e^x \frac{1}{2} \big(\sin(3e^x) + \sin(e^x)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \Big(e^x \sin(3e^x) + e^x \sin(e^x)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^x \sin(3e^x)\, dx + \int \underbrace{e^x \sin(e^x)}_{R7}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} \int \underbrace{3e^x \sin(3e^x)}_{R7}\, dx + \big(-\cos(e^x)\big) \\
&= \frac{1}{6}\big(-\cos(3e^x)\big) - \cos(e^x) + c \\
&= -\frac{1}{6}\cos(3e^x) - \cos(e^x) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(d) A função é uma fracção racional própria que não é primitivável de forma imediata, pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples. Comecemos por determinar a factorização do denominador:

$$\begin{aligned}
x^3 + x^2 = 0 \ &\Leftrightarrow\ x^2\,(x+1) = 0 \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ x^2 = 0 \ \vee\ x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \underbrace{x = 0 \ \vee\ x = 0}_{\text{multiplicidade } 2} \ \vee\ x = -1
\end{aligned}$$

Então

$$x^3 + x^2 \ = \ (x - 0)(x - 0)\big(x - (-1)\big) \ = \ x^2(x+1)\,.$$

A raiz $x = 0$ tem multiplicidade dois e portanto determina dois elementos simples da decomposição, enquanto a raiz $x = -1$ é simples e portanto determina apenas um elemento simples da mesma. Assim,

$$\frac{x-1}{x^3+x^2} \ = \ \underbrace{\frac{A}{x}}_{\cdot x(x+1)} + \underbrace{\frac{B}{x^2}}_{\cdot (x+1)} + \underbrace{\frac{C}{x+1}}_{\cdot x^2} \ = \ \frac{A\,x(x+1) + B\,(x+1) + C\,x^2}{x^2(x+1)}\,.$$

Considerando a igualdade entre os numeradores da primeira e da última fracções, tem-se

$$\begin{array}{r|rcl}
 & x-1 & = & A\,x(x+1) + B\,(x+1) + C\,x^2 \\
\hline
x = 0 & -1 & = & 0 + B + 0 \\
x = -1 & -2 & = & 0 + 0 + C \\
x = 1 & 0 & = & 2A + 2B + C
\end{array}
\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} B = -1 \\ C = -2 \\ A = 2 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{x-1}{x^3+x^2} \ = \ \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1}\,,$$

e a primitiva pode agora ser calculada recorrendo à decomposição determinada e às regras de primitivação imediata.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\, dx \ &= \ \int \Big(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1}\Big)\, dx \ = \ 2\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\, dx - \int \underbrace{x^{-2}}_{R2}\, dx - 2\int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\, dx \\
&= \ 2\ \ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} - 2\ln|x+1| + c \\
&= \ 2\ \ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x+1| + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$