Primitivas

Noção de primitiva

A primitivação é a operação inversa da derivação.

Definição: *Seja f uma função definida num intervalo I.*

Qualquer função F definida e diferenciável em I tal que

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo o } x \in I,$$

diz-se uma ***primitiva*** *de f em I.*

Diz-se que f é primitivável em I se f admitir uma primitiva em I.

Naturalmente, se F for uma primitiva de f, também $F + C$ (em que C é uma constante real) é uma primitiva de f.

Mais, num intervalo, todas as primitivas de uma dada função diferem de uma constante:

Proposição: S*e F e G são duas primitivas de f* no intervalo *I,* e*ntão F e G diferem de uma constante, isto é, existe C* $\in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) - G(x) = C, \text{ para todo o } x \in I.$$

Notação: $P_x f(x)$, $Pf(x)$ e $\int f(x)dx$ representam (em geral) todas as primitivas de f.

Questões:

- $[P_x f(x)]' = ?$
- $P_x\left[f'(x)\right] = ?$

Propriedades das Primitivas

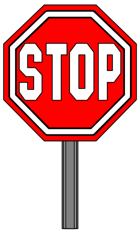
Proposição: Seja f uma função diferenciável no intervalo $[a, b]$. Então, no intervalo $[a, b]$,

$$P_x f'(x) = f(x) + C.$$

Proposição: S*ejam f e g funções primitiváveis no intervalo I e $\alpha \in R$. Então, nesse intervalo, tem-se que:*

1. $P(f(x) + g(x)) = Pf(x) + Pg(x)$;

2. $P(\alpha f(x)) = \alpha Pf(x)$.



Atenção: a primitiva do produto não é o produto das primitivas!!!

Proposição: *Se f é uma função* contínua *num intervalo*, *então f é primitivável nesse intervalo.*

Mais:

Proposição: *Se f é uma função* contínua no intervalo *I*, *para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$*, existe uma e uma só *primitiva F de f em I tal que*

$$F(x_0) = y_0.$$

$F(x_0) = y_0 \rightarrow$ **condição inicial do problema**

A esta questão, de determinar a (única!) primitiva que verifica uma certa condição inicial, chama-se **Problema de valores iniciais** ou **Problema de Cauchy**.

Algumas primitivas imediatas

Função	**Primitiva**
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$x^\alpha, (\alpha \neq -1, x > 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x + C$

Uma tabela de primitivas básicas é uma tabela de derivadas apresentada ao contrário!

Nota: Pela regra de derivação da função composta,

$$(F(\varphi(x)))' = \varphi'(x)F'(\varphi(x)).$$

Portanto, se F é uma primitiva de f, então $F(\varphi(x))$ é uma primitiva de $\varphi'(x)f(\varphi(x))$.

Assim, temos uma versão mais geral da tabela anterior:

Função	**Primitiva**
$\varphi'(x)\operatorname{sen}(\varphi(x))$	$-\cos(\varphi(x)) + C$
$\varphi'(x)\cos(\varphi(x))$	$\operatorname{sen}(\varphi(x)) + C$
$\varphi'(x)[\varphi(x)]^\alpha, (\alpha \neq -1, \varphi(x) > 0)$	$\frac{[\varphi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$\ln\lvert\varphi(x)\rvert + C$
$\frac{\varphi'(x)}{1+[\varphi(x)]^2}$	$\operatorname{arctg}(\varphi(x)) + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}$	$\operatorname{arcsen}(\varphi(x)) + C$

Primitivas imediatas FUNDAMENTAIS:

Sendo u função derivável e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $P(u'u^{\alpha}) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{se } \alpha \neq -1;$
- $P(u'e^{u}) = e^{u} + C;$
- $P(u'a^{u}) = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, \text{ c/ } a > 0;$
- $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + C;$
- $P(u' \operatorname{sen} u) = -\cos u + C;$
- $P(u' \cos u) = \operatorname{sen} u + C;$
- $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg} u + C;$
- $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsen} u + C;$
- $P(u' \sec^2 u) = \operatorname{tg} u + C;$
- $P(u' \operatorname{cosec}^2 u) = -\operatorname{cotg} u + C.$

Técnicas de Primitivação

Primitivação por partes

Proposição: *Sejam f e g são funções com derivada contínua no intervalo* $[a,b]$.

Então, neste mesmo intervalo,

$$P\big[f'(x)g(x)\big] = f(x)g(x) - P[f(x)g'(x)].$$

Primitivação por mudança de variável (ou substituição)

Notação: para representar $f(g(t))$ usa-se também a notação:

$$f(g(t)) = f(x)|_{x=g(t)}.$$

Proposição: *Seja f uma função contínua no intervalo I e* $\varphi : J \to I$ *uma aplicação cuja derivada é contínua e não se anula em J.*

Então,

$$P_x f(x) = P_t[f(\varphi(t))\varphi'(t)]|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Observação 1: prova-se que uma função definida num intervalo com derivada não nula é invertível.

Observação 2: existem versões da primitivação por substituição com hipóteses ligeiramente diferentes, por ex.- "*f uma função primitivável no intervalo I e* $\varphi : J \to I$ *uma aplicação bijectiva com derivada contínua*".

A principal dificuldade na primitivação por substituição reside na escolha da mudança de variável adequada!

Algumas substituições aconselhadas

Seja f uma função racional dos argumentos indicados:

Primitiva	**Substituição**
$Pf(e^x)$	$x = \ln t$
$Pf\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$x = t^m,\ m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
$Pf\left(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$ax + b = t^m,\ m = \text{m.m.c.}(q, s, \dots)$
$P\sqrt{1 - a^2x^2}$	$x = \frac{1}{a}\operatorname{sen} t$

- **função racional de** $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ → **substituição**: $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

então:	$x = 2\operatorname{arctg} t$	$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Nota: Há casos particulares em que funcionam melhor outras substituições.

Por exemplo:

- com **funções rac**. **de** $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ e $\operatorname{tg} x$, a **substituição** $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$ normalmente funciona melhor.

  Neste caso:

$x = \operatorname{arctg} t$	$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$	$\operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

- com **funções rac**. **de** $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$, em que se pode colocar em evidência $\operatorname{sen} x$, pode ser útil a **substituição** $t = \cos x$.

(analogamente, quando se pode colocar em evidência $\cos x$).

Primitivação de funções racionais

Definição: Chama-se **função racional** a qualquer função que se possa escrever na forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com P e Q polinómios de coeficientes reais.

A **função racional** diz-se **própria** se $gr(P(x)) < gr(Q(x))$ e diz-se **imprópria** caso contrário.

Ao primitivar trabalhar-se sempre com funções racionais próprias!

Passo 1:

Ver se a função racional é própria; caso não seja, escre- ve-se como soma de um polinómio e uma f. racional própria.

- Qualquer função racional imprópria $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode escrever-se na forma

$$\boxed{\text{polinómio + f. rac. própria.}}$$

Basta fazer a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

Proposição (**Regra da divisão**):

Sendo $P(x)$ um polinómio e $Q(x)$ um polinómio de grau ≥ 1, existem sempre polinómios $C(x)$ e $R(x)$, univocamente determinados, tais que

$$P(x) = Q(x).\underbrace{C(x)}_{\text{cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto da div.}} \quad \text{, com } gr(R(x)) < gr(Q(x)).$$

Então

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{poli.}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{f. rac. própria}}}$$

Resta-nos ver como primitivar funções racionais próprias.

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional própria.

Passo 2:

Decompõem-se $Q(x)$ tanto quanto possível como produto de parcelas mais simples, isto é, de:

- constantes,

- parcelas da forma $(x-r)^l$, c/ $l \in \mathbb{N} \rightarrow$ $\boxed{\text{parcelas corresp. às raízes reais}}$

- parc. da forma $\underbrace{(x^2+bx+c)}_{\text{sem raízes reais}}{}^k$, c/ $k \in \mathbb{N} \rightarrow$ $\boxed{\text{parcelas corresp. a pares de raízes compl. conjugadas}}$

aglomerando as parcelas correspondentes às mesmas raízes.

l é a **multiplicidade da raíz real** r e k a **multiplicidade das raízes complexas de** x^2+bx+c (2 complexos conjugados).

Então $Q(x)$ fica escrito na forma

$$\boxed{Q(x) = \underbrace{a}_{\text{constante}} \times \underbrace{(x-r_1)^{l_1} \times \cdots}_{\text{parcelas corresp. às raízes reais}} \times \underbrace{\left(x^2+b_1\,x+c_1\right)^{k_1} \times \cdots}_{\text{parcelas corresp. a pares de raízes compl. conjugadas}}}$$

Passo 3:

- Para cada factor $(x-r)^l$, determina-se uma expressão da forma

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_l}{(x-r)^l} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{nº de parcelas } = l = \\ = \text{ multipl. da raíz real } r\end{array}}$$

- Para cada factor $(x^2+bx+c)^k$, determina-se expressão da forma

$$\frac{D_1+E_1x}{x^2+bx+c}+\frac{D_2+E_2x}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{D_k+E_k\,x}{(x^2+bx+c)^k}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{nº de parc. } = k = \text{ multip. das raízes complexas} \\ \text{associadas a } x^2+bx+c\end{array}}$$

de tal modo que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{seja soma destas parcelas.}$$

- Chamam-se **fracções elementares** (ou fracções simples) às funções racionais da forma

$$\frac{A}{(x-r)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{D+Ex}{\underbrace{(x^2+bx+c)}_{\textbf{sem raízes reais}}{}^m}.$$

Proposição: Toda a f. rac. própria pode ser decomposta numa soma de fracções elementares nas condições acima indicadas.

A decomposição pode ser feita pelo **método dos coeficientes indeterminados**.

Passo 4 (**e último**!): Determinam-se as primitivas das fracções elementares.

- $$P\left[\frac{A}{(x-r)^k}\right] = \begin{cases} A\ln|x-r| + C, \ \underline{\underline{\text{se } k = 1}} \\ \\ P\left[A(x-r)^{-k}\right] = A\frac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + C, \text{ se } k > 1 \end{cases}$$

  com C constante real.

- Parcelas da forma $\frac{D+Ex}{x^2+bx+c}$:

Um polinómio $x^2 + bx + c$, sem zeros reais, pode sempre escrever-se na forma

$$(x+p)^2 + q^2, \qquad \text{com } p \text{ e } q \text{ reais.}$$

A decomposição pode fazer-se:

- formando directamente o quadrado;

- a partir dos zeros do polinómio - são iguais a $-p \pm qi$.

Fazendo directamente as contas (*que dão sempre situações de logaritmo e/ou arcotangente*), ou com a mudança de variável

$$\boxed{x + p = qt,}$$

conclui-se que

$$\boxed{P\left[\frac{D+Ex}{\left[(x+p)^2+q^2\right]}\right] = \frac{E}{2}\ln\left((x+p)^2 + q^2\right) + \frac{(D-Ep)}{q}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p}{q}\right) + C}$$

Nota: Se $E = 0$ obtém-se uma função arctg; se $E \neq 0$, obtém-se uma função logaritmo ou uma soma de um logaritmo e um arctg.

- Parcelas da forma $\frac{D+Ex}{(x^2+bx+c)^k}$, c/ $k > 1$:

Decompondo o polinómio como no caso anterior, e com a mesma mudança de variável, reduz-se esta situação ao cálculo de uma primitiva imediata e da seguinte primitiva:

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^k}\right].$$

Esta primitiva (c/ $k > 1$) determina-se por partes, fazendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+t^2)^k} &= \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k}\\ &= \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2}\underbrace{t}_{f}.\underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^k}}_{g'}\end{aligned}$$

e baixando sucessivamente o grau do denominador.

Assim, por exemplo:

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^2}\right] = P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{1}{2}P(\underbrace{t}_{f}.\underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}_{g'}) =$$

$$\underset{g=-(1+t^2)^{-1}}{\text{pois}} \quad = P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{1}{2}\left[-t\frac{1}{1+t^2} + P\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$$

O Integral de Riemann

Partições de intervalos

Definições: Seja $[a,b]$ um intervalo, com $b > a$.

Chama-se **partição** (ou **decomposição**) de $[a,b]$ a qualquer conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, de nºs reais, tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Chama-se **norma** (ou **diâmetro**) da partição P a

$$\|P\| = \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1}).$$

Um **refinamento da partição** P é uma partição Q de $[a,b]$ tal que $P \subseteq Q$.

Nesta situação, diz-se que Q **é uma partição mais fina do que** P.

Proposição: *Sendo P e Q partições de $[a,b]$ tais que $P \subseteq Q$, então $\|P\| \ge \|Q\|$.*

Observação: Dado um intervalo $[a,b]$, é sempre possível definir sucessões de partições do intervalo cujas normas tendam para 0 (por exemplo, considerando, *convenientemente,* partições sucessivamente mais finas, ou considerando, para cada $n \in \mathbb{N}$, a partição formada pelos pontos que dividem o intervalo em n subintervalos do mesmo tamanho).

Soma de Riemann e Integral de Riemman

O integral de Riemann em $[a, b]$ de uma função positiva pode interpretar-se geometricamente como a área da região do plano limitada pelo gráfico de *f*, pelo eixo dos *xx* e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Definição: Sejam $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $t_1, \ldots, t_n$ uma sequência de nºs reais tais que $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, para qualquer $1 \leq j \leq n$.

Chama-se **soma de Riemann de *f* relativamente à partição** P (e à escolha de nºs reais nos subintervalos) a

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Definição: Seja $[a, b]$ um intervalo, com $b > a$.

Diz-se que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada em $[a, b]$, é **integrável à Riemann em** $[a, b]$ se existe $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = I.$$

Notação:

$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$ → **integral definido de *f* entre a e b**

Terminologia:

$f \to$ **função integranda**

$[a,b] \to$ **intervalo de integração**

a e $b \to$ **limites de integração**

$x \to$ **variável de integração**

$dx \to$ **acréscimo infinitésimal**

$\int \to$ **símbolo de integral**

Nota: Se nada for dito em contrário, por "função integrável" deverá entender-se "função integrável à **Riemann**".

No entanto, há outras noções de integrabilidade, nem sempre equivalentes a esta.

A definição anterior, rigorosamente, é dada por:

Definição: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

Diz-se que f **é integrável à Riemann em** $[a,b]$, se existe um nº real I para o qual se verifica que:

$$\text{para todo } \delta > 0, \quad \text{existe } \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad |S(f,P) - I| < \delta$$

para toda a partição P de $[a,b]$, com $\|P\| < \varepsilon$, e qualquer que seja a escolha de pontos nos subintervalos da partição.

Nestas condições, diz-se que **as somas de Riemann de** f **em** $[a,b]$ **convergem para** I, quando o diâmetro da partição tende para 0, e escreve-se

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f,P) = I.$$

Observação: Por definição, se f é integrável à Riemann em $[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.

No entanto, a afirmação recíproca não é verdadeira.

Proposição: *Uma função contínua num intervalo fechado e limitado $[a,b]$ é integrável à Riemann.*

Observação: No entanto, há funções que são integráveis à Riemann num intervalo e não são contínuas nesse intervalo. Por exemplo, pode provar-se que:

- Qualquer função **seccionalmente contínua** em $[a,b]$ (intervalo fechado e limitado) é integrável à Riemann.

  Definição: Diz-se que uma função f, definida em $[a,b]$, é **seccionalmente contínua em** $[a,b]$, se f é contínua em $[a,b]$, excepto num número finito de pontos, e nesses pontos de descontinuidade ambos os limites laterais de f existem e são finitos.

Até este momento, $\int_a^b f(x)dx$ só está definido no caso $a < b$.

A definição que se segue atribui-lhe significado nos casos em que $a = b$ e $a > b$.

Definição: Se f é integrável em $[a,b]$, com $a < b$, então:

- $\int_c^c f(x)dx = 0, \quad$ para todo o $c \in [a,b]$;
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Propriedades elementares do Integral de Riemman

Proposição (Propriedade aditiva do integral):

Se f é integrável num intervalo I que contenha a, b e *c, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposição: *Uma função constante em $[a,b]$ é integrável em* $[a,b]$ e, sendo k essa constante,

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

Proposição: Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então tem-se que:

1. *$f+g$ é integrável em $[a,b]$* e

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

2. *αf é integrável em $[a,b]$* e

$$\int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx;$$

3. se, *para todo* $x \in [a,b], f(x) \geq 0,$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0;$

4. se, *para todo* $x \in [a,b], f(x) \leq g(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Observações e advertências:

1. Se *f é integrável em* $[a,b]$ e $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a,b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2. *Se f é integrável num intervalo* $[a,b]$, então $|f(x)|$ *é integrável em* $[a,b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \underset{\uparrow\uparrow\uparrow}{\leq} \int_a^b |f(x)|dx.$$

No entanto, **não é verdade** que

$$|f(x)| \text{ integrável em } [a,b] \Rightarrow f(x) \text{ integrável em } [a,b].$$

3. Pode-se provar que, s*endo f e g integráveis em* $[a,b]$, *então fg é integrável em* $[a,b]$.

Mas **não é verdade** que o integral do produto seja o produto dos integrais.

4. As propriedades do integral relativamente à soma e ao produto por um escalar também são válidas se $b \leq a$.

Mas as propriedades dadas que envolvem desigualdades (alíneas 3. e 4. da proposição e observações 1. e 2.) **não são válidas** no caso $b < a$.

Nesta situação, a desigualdade entre os integrais é trocada.

Teoremas Fundamentais

Valor médio e Teorema da Média

Dado um número finito de valores, a média desses valores obtem-se dividindo a sua soma pelo número de valores em causa.

A definição que se segue, generaliza a noção de média ao caso em que temos infinitos valores, *a variar continuamente num intervalo*, ou seja, permite obter a média dos valores de uma função num intervalo $[a,b]$ (com $a < b$).

Definição: Seja f uma função integrável no intervalo $[a,b]$ (com $a < b$).

O **valor médio da função f no intervalo** $[a,b]$ é dado por

$$f_{VM\,[a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Proposição (**Teorema da Média para funções contínuas**):

Seja f uma função contínua em $[a,b]$.

Então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Ou seja, se f é contínua em $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = f_{VM\,[a,b]}.$$

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Definição: Seja f uma função integrável em $[a, b]$.
À função definida em $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

chama-se **integral indefinido de f com origem no ponto** a.

Observação: É óbvio que, se f é não negativa, F é crescente.

Proposição: *Seja f uma função integrável no intervalo* $[a, b]$.
Então a função integral indefinido de f,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

é contínua em $[a, b]$.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

- **Teorema Fundamental do Cálculo**:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$.
E*ntão a função integral indefinido de f,* $\quad F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad$ *tem derivada em* $[a, b]$ *e*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = F'(x) = f(x).$$

- **Fórmula de Barrow**: *Se f é contínua em $[a, b]$ e F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Corolário (**do T.F.C.I.**): *Qualquer função f, contínua num intervalo I, é primitivável nesse intevalo.*

Mais, sendo $a \in I$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{é a primitiva de } f \text{ que se anula para } x = a.$$

Observações: Sejam f uma função contínua em $[a,b]$, g e h funções diferenciáveis em $]a,b[$.

1. Do T.F.C.I. e da derivação da função composta, conclui-se que a função

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

é diferenciável e

$$(H(x))' = f(g(x))g'(x).$$

2. Do caso anterior, conclui-se que a função

$$L(x) = \int_{h(x)}^a f(t)dt = -\int_a^{h(x)} f(t)dt$$

é diferenciável e obtém-se a sua derivada.

3. Caso ambos os extremos de integração variem, basta ter em conta os casos anteriores e que, para qualquer $c \in [a,b]$,

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = \int_{h(x)}^{c} f(t)dt + \int_c^{g(x)} f(t)dt.$$

Observação: Um integral indefinido de uma função integrável f, F, é sempre uma função "um pouco mais bem comportada" do que f:

- se f é integrável, F é contínua;

- se f é contínua, F é diferenciável;

- se f é diferenciável, F tem derivada contínua; etc ...

Integração por partes

Proposição: *Sejam f e g funções com derivada contínua em* $[a,b]$.

Então

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Integração por mudança de variável (ou substituição)

Proposição: *Sejam I e J intervalos, f uma função contínua em I e* φ *uma função com derivada contínua em* J, *tal que* $\varphi(J) \subseteq I$ *e* α, β *elementos de J tais que* $\varphi(\alpha) = a$ *e* $\varphi(\beta) = b$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Nota: A mudança de variável efectuada é $x = \varphi(t)$.

Observação: Tal como para a primitivação, existem versões da integração por substituição com hipóteses diferentes.

Da integração por substituição, resulta que:

Proposição: Seja *f* uma função integrável no intervalo $[-a,a]$.

Então:

- se *f* for uma função ímpar, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;
- se *f* for uma função par, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Algumas aplicações do integral definido

Cálculo de áreas

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e A a área da região plana limitada pelos gráficos de f e g e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

Então

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e V o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelos gráficos de f e g e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

Então

$$V = \int_a^b \pi|f^2(x) - g^2(x)|dx.$$

Cálculo do comprimento de linha

Seja f uma função com derivada contínua em $[a, b]$ e l o comprimento da linha associada ao gráfico da função f entre $x = a$ e $x = b$ (isto é, entre os pontos $(a, f(a))$ e $b, f(b))$.

Então

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$