Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Departamento de Física e Matemática

Exame de Análise Matemática II

29/06/11 » Duração: 2h30+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste A+B**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ se $x^2 + y^2 \le 25$, $g(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{f(x,y)+25}$ e h dada sob a forma do algoritmo seguinte:

$h(x,y) :=$
- Se $x^2 + y^2 \le 9$
- Então $z := g(x,y)$
- Senão $z := \sqrt{-f(x,y)}$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[0, y, -25]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto $P(0,0,-25)$.

(ii) A função h é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Mostre que, se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P(1,1)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ é negativa, sendo máxima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Mostre que, se $z = g(x+1, y-1) \wedge x = -1 + \cos\theta \wedge y = 1 + \sin\theta$ então $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

2. A figura 1 representa um sólido com a forma de uma *bolota das terras de Riba-Côa*, formado por duas partes:

- Calote esférica de raio $r = 5$ seccionada por um cone de raio $r = 3$ e altura $h = 4$;
- Parabolóide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$.

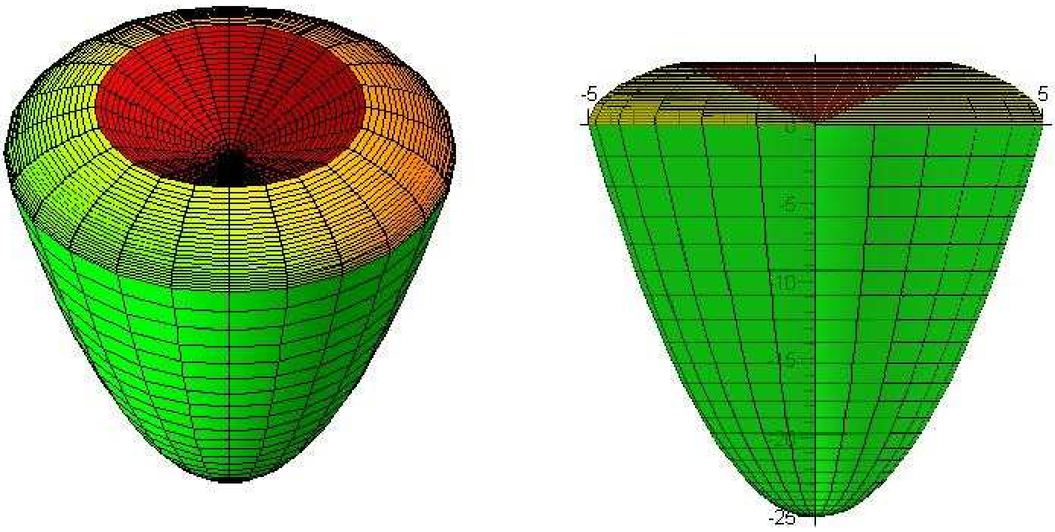

Figura 1

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\tfrac{3}{4}) \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}\right\}$

$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \rho^2 - 25 \le z \le 0\right\}$

[2.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido de densidade constante e igual a 2.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre que em coordenadas cartesianas o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(9 < x^2 + y^2 \le 25 \wedge 0 \le z \le \sqrt{25 - x^2 - y^2}\right) \vee \left(x^2 + y^2 \le 9 \wedge 0 \le z \le \tfrac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right\}$

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 25 \wedge x^2 + y^2 - 25 \le z \le 0\right\}$

(iii) Complete as funções seguintes, implementadas em Maple, e associe-as a duas transformações/mudança de variáveis.

```
transformaCoords01 := proc(ρ, θ, z)
 local x, y;
 if --?--
 then x := --?--;
      y := --?--;
      return [x, y, z];
 else --?--;
 end if
 end proc
```

```
transformaCoords02 := proc(ρ, θ)
 local x, y;
 if --?--
 then x := --?--;
      y := --?--;
      return [x, y];
 else --?--;
 end if
 end proc
```

3. Considere a equação não linear $x - \cos x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[2.5] **(a)** Mostre que $x_0 = 1$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes. Aplique o método uma vez e obtenha uma aproximação da raiz real x_r da equação.

[1.0] **(b)** Das seguintes funções em Matlab, qual é a que traduz correctamente o método de Newton-Raphson ou das tangentes? Justifique.

```
function x = NR_v1(f,df_dx,x0,kmax,tol)
k=1;
x(k)=x0;
while(k<=kmax),
   k=k+1;
    x(k)=x(k-1)- ...
   feval(f,x(k-1))/feval(df_dx,x(k-1));
   if (abs(x(k)-x(k-1)))<tol)
        return;
   end
 end
```

```
function x = NR_v2(f,df_dx,x0,kmax,tol)
k=1;
x(k)=0;
while(k<=kmax),
   x(k+1)=x(k)- ...
   feval(df_dx,x(k))/feval(f,x(k));
   if (abs(x(k+1)-x(k))<tol)
        break;
   end
   k=k+1;
end
```

4. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \text{ se } -2\pi \le x < 0 \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} & , \text{ se } 0 \le x \le 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = -f(x)$$

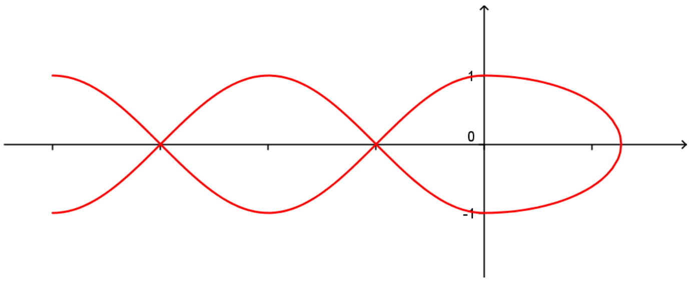

Figura 2 - Gráficos de f e g

[1.5] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$. Redesenhe a figura 2, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in [0,2]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$.

[1.5] **(b)** Utilize a regra de Simpson simples $(n = 2)$ para obter um valor aproximado do integral $\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} g(x)\, dx$.

Recorrendo à figura 2, interprete o resultado obtido.

5. Considere o problema de valor inicial $y' = yt^2 - y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 0.5]$

[2.0] **(a)** Sabendo que $y(t) = e^{\frac{t^3}{3} - t}$ é a solução exacta do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0					0	0	0
1				0.7871				0.4638*1.0e-005
2	0.5	0.6323			0.6323		0.0060	0.4360*1.0e-005

[0.5] **(b)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

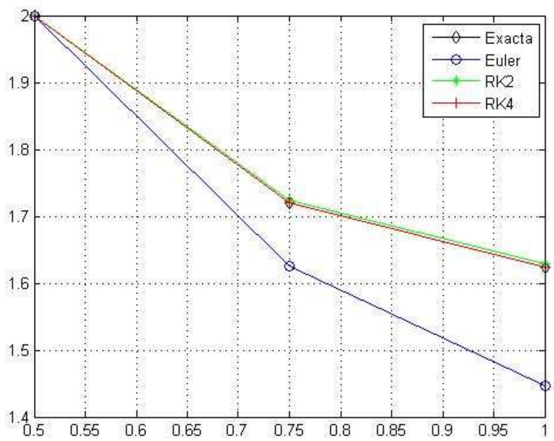

Figura 3

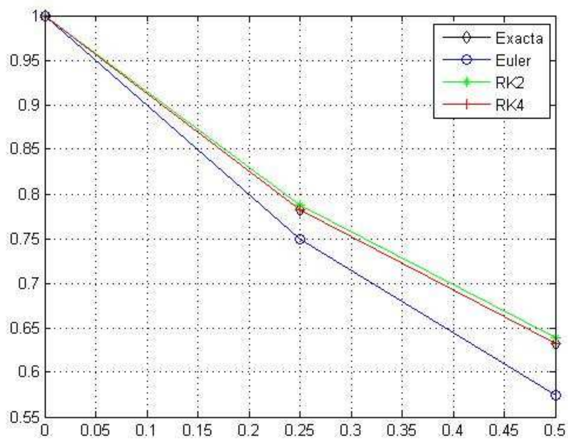

Figura 4

Nome Completo:____

Número:____

Nome utilizado ou login no LVM:____

Curso:

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Frequência às aulas de AM2:

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Actividades de aprendizagem e avaliação:

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ Act00_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ Act01_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ Act02_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ Act03_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ Act04_Maple – Resolução ficha exercícios TP com ou sem Maple
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)