Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste B**

1. Considere as funções $f(x,y) = -x^2 - y^2$, $g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)}$ e h definida em forma de algoritmo por:

$h(x,y) =$

Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z := g(x,y)$
Senão Se $16 < x^2 + y^2 \leq 32$
Então $z := \sqrt{32 + f(x,y)}$
Senão Se $x^2 + y^2 > 32 \wedge -6 \leq x \leq 6 \wedge -6 \leq y \leq 6$
Então $z := 0$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[2.0] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **três**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$ é uma curva de nível comum às três funções.

(ii) O vetor $[5, y, \sqrt{7}]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de interseção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 5$ no ponto $P(5,0,\sqrt{7})$.

(iii) A função f tem um ponto crítico em $(0,0)$ e a função h não tem extremos.

(iv) A função h é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16 \right\}$.

(v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função h.

```
j:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2 <= 16, -sqrt(x^2+y^2),
                     x^2+y^2 <= 32, -sqrt(32-x^2-y^2),
                     -6 <= x <= 6 and -6 <= y <= 6, 0,undefined)
```

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

(i) Mostre que, se a temperatura em qualquer ponto do plano xOy for dada por $T = g(x,y)$ (distância de qualquer ponto à origem), então a taxa de variação da temperatura em $P(2,2)$ segundo a direção e sentido do vetor $\vec{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ é negativa, sendo máxima na direção e sentido do vetor $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dado por $T = g(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de temperatura entre os pontos $(2,2)$ e $(2.33, 2.33)$.

(iii) Mostre que, se $z = f(x-1, y-1) \wedge x = 1 + \cos\theta \wedge y = 1 + \sin\theta$ então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{dz}{d\theta} - 2$.

(iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = f(x, y-2) + 4$ se $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$, no ponto $P(0,2,4)$. Represente a superfície e o plano tangente.

[2.0] **(e)** Resolva apenas **uma** das alíneas seguintes

(i) Mostre, utilizando o integral duplo, que a área da superfície cónica $z = g(x,y)$ se $x^2 + y^2 \leq 16$ é igual a $A(S) = 16\sqrt{2}\pi$.

(ii) Determine o valor de $I = \int_4^{\sqrt{32}} \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \, d\rho$ e interprete geometricamente o resultado obtido. Invertendo a ordem de integração, estabeleça I como a diferença de dois integrais.

2. Numa das tendas da *Feira de Artesanato 2012* existiam candeeiros com a forma da figura 1, de densidade constante $\rho(x,y,z)=2$, compostos por três partes:

- Calote esférica de raio $\sqrt{32}$ seccionada por um cone de raio e altura 4; • Cone de raio $r=4$ e altura $h=4$;
- Cilindro de raio $r=4$ e altura $h=1$.

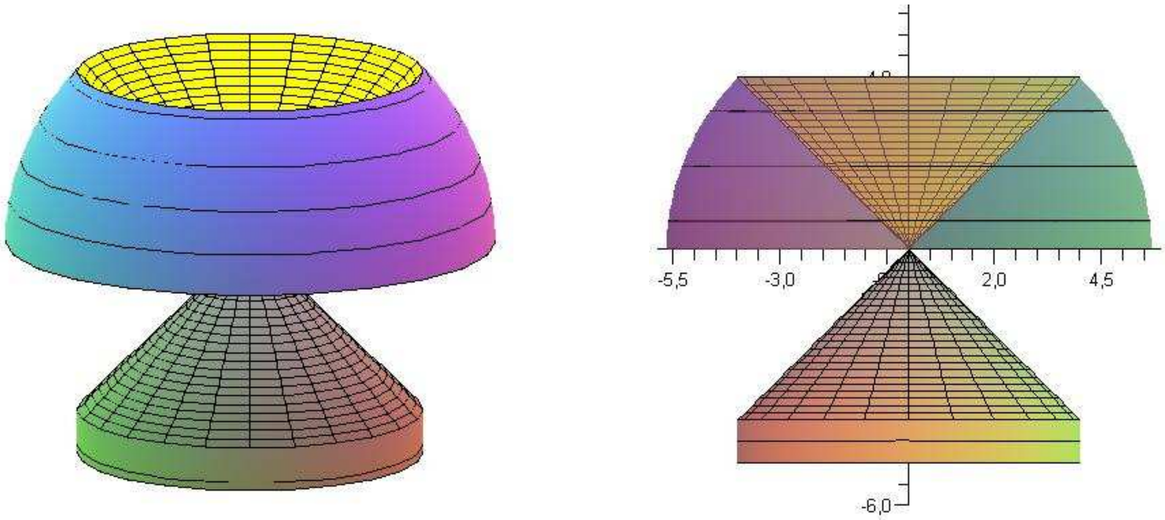

Figura 1

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S=S_1\cup S_2\cup S_3$, onde:

$$S_1=\left\{(R,\theta,\varphi): 0\le R\le\sqrt{32}\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$S_2=\left\{(\rho,\theta,z): 0\le\rho\le 4\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge -4\le z\le-\rho\right\}$$

$$S_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\le 16\wedge -5\le z\le -4\right\}$$

[1.0] **(b)** A instrução `> plot3d(4, theta=0..2*Pi, z=-5..-4, coords=cylindrical)`

permite-lhe esboçar em Maple a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_3? Justifique.

[2.5] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[2.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre, que em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à do candeeiro é definido por:

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3$$

$$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(16<x^2+y^2\le 32\wedge 0\le z\le\sqrt{32-x^2-y^2}\right)\vee\left(x^2+y^2\le 16\wedge 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}$$

$$S_2\cup S_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(x^2+y^2\le 16\wedge -4\le z\le-\sqrt{x^2+y^2}\right)\vee\left(x^2+y^2\le 16\wedge -5\le z\le -4\right)\right\}$$

(iii) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
Cartesianas2Esfericas := proc(x, y, z)
 local R, theta, phi;
 R := sqrt(--?--);
 if (x ≠ 0) then theta := arctan(--?--);
 elif (y = 0) then theta := 0;
 elif (y > 0) then theta := --?--; else theta := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then phi := --?--; else phi:=arccos(--?--); end if;
 return [R, theta, phi];
 end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At00_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At01_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At02_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At03_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At04_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não