1.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = 2x + 1$;
   (b) $y' = \log x$;
   (c) $y'' = x^3 + x$;
   (d) $\frac{dy}{dx} = xe^x$;
   (e) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \sin x$;
   (f) $y''' = \frac{1}{x^3}$.

2. Determine a solução dos seguintes problemas de condição inicial:

   (a) $y' = \log x$, $y(1) = 0$;
   (b) $y' = \sin 3x$, $y(\pi) = 4$;
   (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$;
   (d) $y' = x \log x$, $y(1) = 0$;
   (e) $y' = x^2 e^x$, $y(0) = 3$;
   (f) $y'' = x^2 + 3x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

3. Verifique se as seguintes funções são soluções das equações diferenciais indicadas:

   (a) $y = e^{x^2} \to y' = 2xy$;
   (b) $y = 4e^x + 3e^{2x} \to y'' - 3y' + 2y = 0$;
   (c) $y = 4 \sin x + 5 \to y''' + y' = 0$;
   (d) $y = x \cos x \to y'' + y = -2 \sin x$.

4. As vendas de um novo produto são representadas pela função $y(x)$, onde x representa o número de meses a que o produto foi introduzido no mercado.

   Suponha que $y(x)$ verifica a relação
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x(x+1)}.$$

   (a) Mostre que, sendo c uma constante arbitrária, a solução geral da equação diferencial dada é
   $$y(x) = \frac{cx^2}{(x+1)^2}.$$

   (b) Se as vendas, um mês após a introdução do produto no mercado, forem de 1000 unidades, qual o valor de c?

5. Para um novo produto introduzido no mercado e que é divulgado pelos meios de comunicação, a variação da percentagem da população que toma conhecimento do produto é proporcional à percentagem da população que ainda o desconhece.

   Escreva uma equação diferencial que traduza esta situação, e determine a sua solução geral.

6. Uma gripe propaga-se numa comunidade estudantil a uma taxa proporcional à proporção de estudantes infectados e não infectados. Determine a proporção, $P(t)$, de estudantes infectados ao fim de t dias, supondo que inicialmente estavam infectados 10% dos alunos e que ao fim de três dias essa proporção era já de 30%.

7. Resolva as seguintes equações de variáveis separáveis:

   (a) $\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 1)$;
   (b) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$;
   (c) $xy' - y = y^2$;
   (d) $(1 + x^2)y' = 2\sqrt{y}$;
   (e) $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$;
   (f) $\frac{dy}{dx} = cy$ (c constante);
   (g) $(1 + x^2)y' + 2y = 4xy$;
   (h) $\frac{dy}{dx} = ax - bx^2$ (equação logística);
   (i) $3e^x \tan y + (1 - e^x) \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0$.

8. Resolva as seguintes equações homogéneas:

   (a) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$;
   (b) $y' = \frac{y}{x} - 1$;
   (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$;

(d) $xyy' = 2y^2 - x^2$;

(e) $xy' = y + (x^2 + y^2)^{1/2}$;

(f) $y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$;

(g) $x^2dy + (y^2 - 4xy)dx = 0$.

9. Determine o integral das seguintes equações lineares de primeira ordem:

(a) $y' + y = e^{-x}$;

(b) $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$;

(c) $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 4$;

(d) $y' - 2y = 3x$, $y(0) = 1$;

(e) $y' + xy = x^3$;

(f) $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$;

(g) $x \log xy' + y = 2 \log x$;

(h) $(1 + x^2)y' + 2xy = (1 + x^2)e^{2x}$.

10. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

(a) $y' + y = xy^2$;

(b) $y' + xy = x^3y^3$;

(c) $3xy^2y' - 3y^3 = x^4 \cos x$;

(d) $\frac{dy}{dx} = y^2 \sec x - y \tan x$;

(e) $y' + xy = xy^{-1}$.

11. Determine o integral geral das seguintes equações de primeira ordem:

(a) $y' + y \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$;

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$;

(c) $-y'x = x + y$;

(d) $y\frac{dy}{dx} + (1 + y^2) \sin x = 0$;

(e) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$;

(f) $x^2y' = y^2 + 2xy$;

(g) $(2xy - x^2)dy - (2x^2 + y^2)dx = 0$;

(h) $y' + y \sin x = \sin x$;

(i) $L\left(\frac{dI}{dt} + RI\right) = \frac{V}{T}te^{-t}$.

12. Verifique se as seguintes funções são soluções das equações diferenciais indicadas:

(a) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} \to y'' - y = 0$;

(b) $y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x \to y'' - y = 0$;

(c) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \to y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

13. Escreva cada uma das seguintes equações diferenciais na forma $P(D)y = 0$:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

(b) $y''' - 3y'' - y' + y = 0$;

(c) $y^{(4)} - y'' + y = 0$.

14. Determine uma equação diferencial da forma $P(D)y = 0$ cujo polinómio característico admita as seguintes raízes:

(a) $r_1 = 2$, $r_2 = -1$;

(b) $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = 0$;

(c) $r_1 = 2i$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$;

(d) $r_1 = r_2 = 1 + i$, $r_3 = r_4 = 1 - i$.

15. Suponha que os seguintes conjuntos de n funções constituem sistemas de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n:

(1) $\{1, e^x\}$;

(2) $\{1, x, e^x\}$;

(3) $\{5, \sin^2 t, \cos 2t\}$;

(4) $\{e^{2t}, \sin t, \cos t\}$.

(a) Calcule o Wronskiano de cada um dos sistemas.

(b) Indique quais dos sistemas constituem sistemas fundamentais de soluções.

(c) Para cada um dos sistemas fundamentais de soluções encontrados na alínea anterior, escreva a equação diferencial linear homogénea correspondente, e o respectivo integral geral.

16. Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

(b) $y'' - 9y = 0$;

(c) $y''' - y'' = 0$;

(d) $y'' + 4y = 0$;

(e) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

(f) $y'' - 4y' + 2y = 0$;

(g) $y'' + 2y' + y = 0$;

(h) $y''' - 3y'' + y' + 5y = 0$;

(i) $y^{(4)} + 4y'' = 0$;

(j) $(D-2)^2(D^2+2)y = 0$;

(k) $(D+2)(D^2+3)^2y = 0$;

(l) $\frac{d^2Q}{dt^2} - 5\frac{dQ}{dt} + 7Q = 0$.

17. Determine o integral particular de cada uma das seguintes equações diferenciais:

(a) $y''-4y'+3y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;

(c) $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$;

(d) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

18. Sejam y_1 e y_2 soluções particulares das equações lineares completas

$$P(D)y = b_1(x)$$

e

$$P(D)y = b_2(x).$$

Sejam ainda $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer. Mostre que, nestas condições,

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

é solução particular da equação

$$P(D)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x).$$

19. Resolva as seguintes equações diferenciais usando o método da variação das constantes:

(a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^x$;

(b) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$;

(c) $y'' - 2y' - 3y = 3e^x - 3xe^{-x}$;

(d) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x$;

(e) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$;

(f) $y'' - y = x$.

20. Determine a solução geral de cada um dos seguintes problemas de condição inicial:

(a) $(1+x^2)y'-2xy = e^x(1+x^2)^2$, $y(0) = 2$;

(b) $xy' + xy = 1 - y$, $y(0) = 2$;

(c) $L\frac{di}{dt} + Ri = V$, $i(0) = 0$, sendo L, R e V constantes;

(d) $4y''' + y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

21. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) "*A equação $y'+e^y = 0$ é de variáveis separáveis*";

(b) "*O problema de condição inicial $y' = y^2+1$, $y(0) = 1$, tem solução única, dada por $y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$*".

(c) "*A equação $y' = t^2\sqrt{y}$ é linear*";

22. Sabendo que $y = e^{2t}$ é solução da equação diferencial $y''' - 5y'' + ky' = 0$, $k \in \mathbb{R}$, determine k e escreva o integral geral da equação diferencial.

Soluções

No que se segue, c e c_i representam constantes arbitrárias.

(1a) $y = x^2+x+c$; (1c) $y = \frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2$; (1e) $y = -4\sin x + c_1x + c_2$.

(2a) $y = x\log x - x + 1$; (2c) $y = -\log|x|$; (2e) $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + 1$.

(4b) $c = 4000$.

(5) $\frac{dy}{dt} = k(100 - y),\ y(t) = 100 - ce^{-kt}$.

(6) $\frac{P}{100-P} = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{7}}\right)^t$.

(7a) $\log|y+1| = \frac{x^2}{2}+2x+c$; (7c) $\frac{y}{y+1} = cx$; (7e) $\frac{y^2}{2}-y+\log|y+1| = -\frac{x^2}{2}-x-\log|x-1|+c$; (7g) $\log|y| = 2\log|x^2+1| - 4\arctan x + c$; (7i) $\tan y = c(1-e^x)^3$.

(8a) $\frac{y-2x}{y+x} = cx^3$; (8c) $-\frac{x}{y} - \log|y/x| = \log|x| + c$; (8e) $\frac{y}{x} + \sqrt{1+(y/x)^2} = cx$; (8g) $\frac{y}{3x-y} = cx^3$.

(9a) $y = xe^{-x}+ce^{-x}$; (9c) $y = x^2+\frac{3}{x^2}$; (9e) $y = x^2-2+ce^{-x^2/2}$; (9g) $y\log x = 2(\log x)^2+c$.

(10a) $\frac{1}{y} = x+1+ce^x$; (10c) $y^3 = x^3\sin x + cx^3$; (10e) $y^2 = 1+ce^{-x^2}$.

(11a) $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$; (11c) $y = c - \frac{x}{2}$; (11e) $y = (1+x^2)(c+\arctan x)$; (11g) $\frac{x^2}{-y^2+xy+2x^2} = cx$; (11i) $I = \left(\frac{t}{R-1} - \frac{1}{(R-1)^2}\right)\frac{V}{LT}e^{-t}+ce^{-Rt}$.

(13a) $(D^2-3D+2)y = 0$; (13c) $(D^4-D^2+1)y = 0$.

(14a) $y'' - y' - 2y = 0$; (14c) $y^{(iv)} - y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$.

(15a) (1) $W = e^x$; (2) $W = e^x$; (3) $W = 0$; (4) $W = -5e^{2t}$; (15b) (1) $D(D-1)y = 0$; $y = c_1 + c_2e^x$; (2) $D^2(D-1)y = 0$; $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$; (4) $(D-2)(D^2+1)y = 0$, $y = c_1e^{2t} + c_2\sin t + c_3\cos t$.

(16a) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$; (16c) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$; (16e) $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$; (16g) $y = e^{-x}(c_1+c_2x)$; (16i) $y = c_1 + c_2x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$; (16k) $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x)\cos(\sqrt{3}x) + (c_4+c_5x)\sin(\sqrt{3}x)$.

(17a) $y = 2e^{3x} - 3e^x$; (17c) $y = 3 - e^{-x}$.

(19a) $y = -\frac{3}{4}e^x + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$; (19c) $y = \frac{e^{-x}}{64}(3 - 48e^{2x} + 12x + 24x^2 + 64c_1 + 64c_2e^{4x})$; (19e) $y = e^{-2x}(4x^2 + c_1 + c_2x)$.

(20a) $y = (1+x^2)(e^x+1)$; (20c) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

(21a) Verdadeiro; (21c) Falso.

(22) $k = 6$; $y = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$.