Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época de Recurso**

1. Considere a equação não linear $\cos x + x^2 - 4 = 0$

[0.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a $\frac{\pi}{2}$ no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e positiva.

[1.5] **(b)** Mostre que $x_0 = \pi$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson e obtenha um valor aproximado da raiz positiva efetuando uma iteração.

2. Nas Festas 2014 da Cidade de Coimbra e da Rainha Santa Isabel, algumas ruas estão iluminadas com fios modelados matematicamente pelas funções representadas na figura 1

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x} \text{ e } g(x) = -f(x).$$

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função f para $x \in [-2, -1]$

[2.0] **(b)** Utilize a regra de Simpson simples para determinar um valor aproximado para $I = \int_{-2}^{-1} g(x)\,dx$ e interprete o resultado obtido.

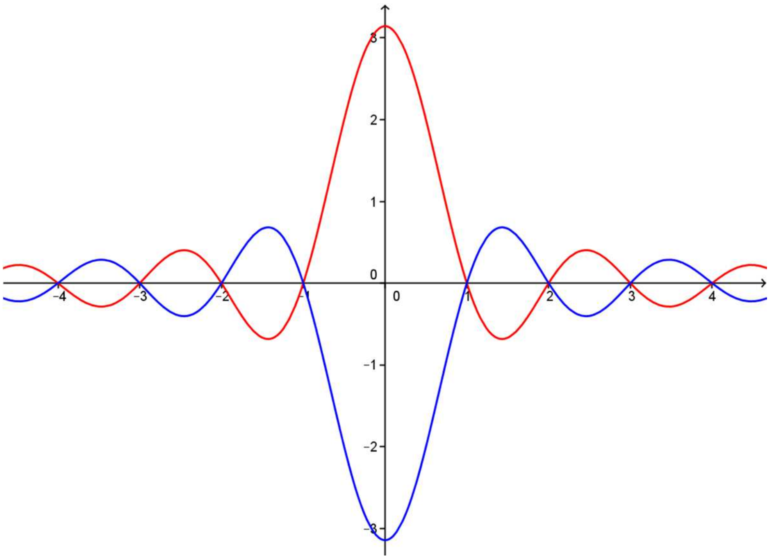

Figura 1: Gráficos de f e g

3. Considere o problema de valor inicial $y' + ty = 0$, $y(0) = 1$, $t \in [0, 2]$

[2.0] **(a)** Sabendo que $y(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ é a solução exata do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK4
0	0							
1		0.6065					0.1065	0.0024
2	2			0.25	0.151			

[1.5] **(b)** Complete a função seguinte e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regra que lhes está associada.

```
function y = NRK4(f,a,b,n,y0)
h=_______________;
t=_______________;
y=zeros(__,____);
y(1)=___;
for i=___:___
    k1=________________________;     k2=________________________;
    k3=________________________;     k4=________________________;
    y(i+1)=___________________;
end
```

4. Seja $f(x,y) = -\sqrt{29 - x^2 - y^2}$,

e os campos escalares g e h dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$g(x,y) :=$ Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := -5$
Senão Se $4 < x^2 + y^2 \leq 29$
Então $z := f(x,y)$

$h(x,y) :=$ Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := 5$
Senão $z := -f(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função g e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = g(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vetor $[1, y, -5]$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1,1,5)$.

(ii) Supondo que o potencial qualquer ponto do plano cartesiano xOy for dado por $V = f^2(x,y)$, as taxa de variação mínima e máxima do potencial no ponto $P(-1,-1)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{u} = \langle -2,-2 \rangle$ e $\vec{v} = \langle 2,2 \rangle$ respetivamente.

(iii) A função h é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Mostre que se e $z = f^2(x,y)$, $y = r\sin\theta$ e $x = r\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \theta} + 2 \times \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

(ii) A rotina seguinte, implementada em Maple, traduz corretamente a avaliação se uma função é harmónica, isto é, se satisfaz a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$? Justifique.

```
isHarmonica:= proc(f)
   if diff(f, x, x)= - diff(f, y)
   then printf("A função não é harmónica\n")
   else printf("A função é harmónica\n")
   end if
end proc;
```

5. A figura 2 representa um sólido, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 2$, composto por duas partes:

- Cilindro de raio $r = \sqrt{29}$ e altura $h = 5$
- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{29}$ seccionado por um cone de raio $r = 2$ e altura $h = 5$

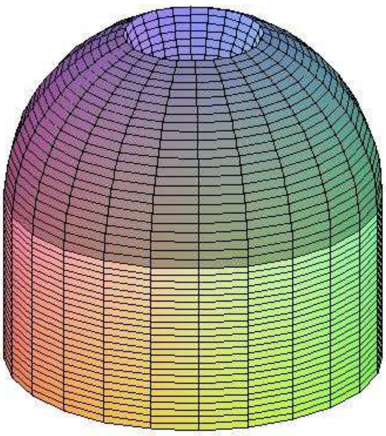

Figura 2

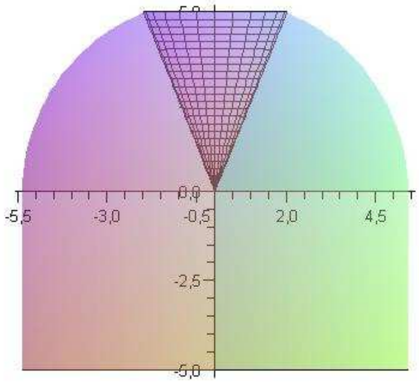

Figura 3

[2.0] **(a)** Justifique, associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq \sqrt{29} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \arctan(\frac{2}{5}) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{29} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -5 \leq z \leq 0\right\}$$

[1.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de uma cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = 2\sqrt{29}\pi$.

(iii) Mostre que em coordenadas cartesianas o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(4 < x^2 + y^2 \leq 29 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{29 - x^2 - y^2}\right) \vee \left(x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq \tfrac{5}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 29 \wedge -5 \leq z \leq 0\right\}$$

(iv) Complete a rotina seguinte e apresente uma 2ª versão, em Maple ou Matlab, com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Cilindricas2Cartesianas := proc(rho, theta, z)
   local x, y;
   x := _______________ ;
   y := _______________ ;
   return [x, y, z];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não