

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Introdução

A análise numérica é a disciplina da matemática que se ocupa da elaboração e estudo de métodos que permitem obter, *de forma efectiva*, soluções numéricas para problemas matemáticos, quando por uma qualquer razão não podemos ou não desejamos usar métodos analíticos.

Para perceber melhor o que se pretende dizer por *de forma efectiva*, consideremos o problema do cálculo do determinante. Como é sabido (será?), o determinante de uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  é dado pela expressão

$$\det(A) = \sum \pm a_{1i_1} \cdots a_{ni_n},$$

onde a soma é efectuada sobre todas as  $n!$  permutações  $(i_1, \dots, i_n)$  dos números  $1, 2, \dots, n$ . Esta fórmula teórica só permite o cálculo *efectivo* do determinante se a dimensão da matriz for muito pequena. Por exemplo, se  $n = 25$  o número de permutações possíveis é superior a 15 quadrilhões (como é que se escreve este número?! Se possuírmos uma máquina que calcule cada termo da expressão anterior num bilionésimo de segundo (coisa que nem remotamente os actuais computadores conseguem fazer), para calcular todas as parcelas necessitamos de 15 biliões (como é que se escreve este número?) de segundos, ou seja 400.000 anos!

Os problemas que a análise numérica pretende dar solução são geralmente originários das ciências naturais e sociais, da engenharia, das finanças, e, como foi dito, não podem, geralmente, ser resolvidos por processos analíticos.

**Exemplo 1.1 (Lei da gravitação universal)** Um dos primeiros e mais importantes modelos matemáticos para problemas da física foi dado por Newton para descrever o efeito da gravidade. De acordo com esse modelo, a força da gravidade exercida pela Terra num corpo de massa  $m$  tem a magnitude

$$F = G \frac{m \times m_t}{d^2},$$

onde  $m_t$  é a massa da Terra,  $d$  a distância entre os centros dos dois corpos e  $G$  a constante de gravitação universal.

O modelo de Newton para a gravitação universal conduziu a ciência à formulação de muitos problemas cuja solução só pode ser obtida de forma aproximada, usualmente envolvendo a solução numérica de equações diferenciais.

**Exemplo 1.2 (Problema dos três corpos)** O problema dos três corpos consiste em determinar quais são os comportamentos possíveis de um sistema constituído por três corpos que interagem entre si através de uma força gravitacional newtoniana. Este problema não é difícil de pôr em equação e os espectaculares êxitos da Mecânica Clássica sugeriam que a sua resolução, de interesse aparentemente académico, fosse uma questão de tempo; o facto de não ser possível realizar os cálculos podia passar de mero detalhe técnico. Afinal de contas, o problema dos dois corpos (isto é, dois corpos que interagem por via da força gravitacional, como a Terra e o Sol) tinha uma solução muito simples, que era estudada no primeiro ano da Universidade. O facto é que a solução analítica deste problema é impossível de obter! Resta-nos assim recorrer à solução numérica.

O estabelecimento das várias leis da física permitiu aos matemáticos e aos físicos obter modelos para a mecânica dos sólidos e dos fluídos. As engenharias mecânica e civil usam esses modelos como sendo a base para os mais modernos trabalhos em dinâmica dos fluídos e em estruturas sólidas, e a análise numérica tornou-se uma ferramenta essencial para todos aqueles que pretendem efectuar investigação nessas áreas da engenharia. Por exemplo, a construção de estruturas modernas faz uso do chamado método dos elementos finitos para resolver as equações com derivadas parciais associadas ao modelo; a dinâmica dos fluídos computacional é actualmente uma ferramenta fundamental para, por exemplo, desenhar aviões; a elaboração de novos materiais é outro assunto que recorre, de forma intensa, a algoritmos numéricos. A análise numérica é pois uma área que tem assumido crescente importância no contexto das ciências da engenharia.

No processo de resolução de um problema matemático podemos distinguir várias fases:

1. **Formulação de um modelo matemático que descreve uma situação real.** Tal formulação pode ser feita recorrendo a (sistemas de) equações algébricas, transcendentais, integrais, diferenciais, etc. É necessário ter muito cuidado nesta fase uma vez que a grande complexidade dos problemas físicos pode-nos obrigar a fazer simplificações no modelo, simplificações essas que não devem alterar grandemente o comportamento da solução.
2. **Obtenção de um método numérico que permite construir uma solução aproximada para o problema.** Um método numérico que possa ser usado para resolver o problema é traduzido por algoritmo que não é mais do que um completo e não ambíguo conjunto de passos que conduzem à solução do problema. Esta fase constitui o cerne da análise numérica. Assim, dado um determinado método numérico, temos necessidade de saber em que condições as soluções por ele obtidas convergem para a solução exacta; em que medida pequenos erros de arredondamento (e outros) poderão afectar a solução final; qual o grau de precisão da solução aproximada obtida, etc.<sup>1</sup>
3. **Programação automática do algoritmo.** Nesta fase teremos necessidade de recorrer a uma linguagem de programação como o FORTRAN, o PASCAL, o C++, entre outras. Mais recentemente é usual o recurso a programas como o MATHEMATICA ou o MATLAB.

---

<sup>1</sup>Neste curso, uma vez que é destinado a alunos de engenharia, não iremos dar grande ênfase a estas questões. Discutiremos as condições de aplicabilidade dos métodos quando for caso disso, provaremos a existência destas condições e faremos uma breve análise de erros, ou seja, faremos alguma análise numérica simples.

**Exercício 1.1.1** A equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  é usualmente resolvida pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.1)$$

1. Prove que uma solução alternativa é dada por

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (1.2)$$

2. Escreva um programa de computador que resolva equações de segundo grau de duas maneiras distintas: (i) usando as fórmulas (1.1); (ii) calculando uma raiz pela fórmula de (1.1) em que não se subtraem números do mesmo sinal e a outra raiz pela fórmula de (1.2) adequada.
3. Execute o programa construído em 2. quando: (i)  $a = 1.0$ ,  $b = -5.0$ ,  $c = 6.0$ ; (ii)  $a = 1.0$ ,  $b = 12345678.03$ ,  $c = 0.92$ .

## 1.2 Breve referência histórica

Os algoritmos numéricos são quase tão antigos quanto a civilização humana. Os babilônios, vinte séculos antes de Cristo, já possuíam tabelas de quadrados de todos os inteiros entre 1 e 60. Os egípcios, que já usavam frações, inventaram o chamado 'método da falsa posição' para aproximar as raízes de uma equação. Esse método encontra-se descrito no *papiro de Rhind* (cerca de 1650 anos antes da era cristã).

Na Grécia antiga muitos foram os matemáticos que deram contributos para o impulso desta disciplina. Por exemplo, *Arquimedes de Siracusa* (278-212, a.C.) mostrou que

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

e apresentou o chamado *método da exaustão* para calcular comprimentos, áreas e volumes de figuras geométricas. Este método, quando usado como método para calcular aproximações, está muito próximo do que hoje se faz em análise numérica; por outro lado, foi também um importante precursor do desenvolvimento do cálculo integral por *Isaac Newton* (1643-1729) e *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716).

*Heron*, o velho, no século I a.C., deduziu um procedimento para determinar  $\sqrt{a}$  da forma (serás capaz de deduzir este método?)

$$\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

No ano 250 da nossa era, *Diofanto* obteve um processo para a determinação das soluções de uma equação quadrática.

Durante a Idade Média, os grandes contributos para o desenvolvimento da matemática algorítmica vieram, sobretudo, do médio oriente, Índia e China. O contributo maior foi, sem dúvida, a simplificação introduzida com a chamada numeração hindu-árabe.

O aparecimento do cálculo e a criação dos logaritmos, no século XVII, vieram dar um grande impulso ao desenvolvimento de procedimentos numéricos. Os novos modelos matemáticos propostos não podiam ser resolvidos de forma explícita e assim tornava-se imperioso o desenvolvimento de métodos numéricos para obter soluções aproximadas. O próprio *Newton*

criou vários métodos numéricos para a resolução de muitos problemas, métodos esses que possuem, hoje, o seu nome. Tal como Newton, muitos vultos da matemática dos séculos XVIII e XIX trabalharam na construção de métodos numéricos. De entre eles podemos destacar Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Carl Friedrich Gauss (1777-1875).

Foi, no entanto, o aparecimento, na década de 40 do século XX, dos primeiros computadores que contribuiu decisivamente para o forte desenvolvimento da disciplina. Apesar de tanto Pascal como Leibniz terem construído, já no séc. XVII, as primeiras máquinas de calcular e de Charles Babage, milionário inglês, ter construído o que é considerado o primeiro computador (nunca funcionou!), foi apenas com o aparecimento do ENIAC, nos anos 40, que a ciência usufruiu, de facto, desses dispositivos de cálculo.

### 1.3 Noções e teoremas básicos

Antes de começarmos propriamente com os assuntos da análise numérica, relembremos algumas noções e teoremas importantes que convém ter sempre presentes. O primeiro teorema que iremos considerar é o chamado Teorema de Bolzano.

**Teorema 1.3 (Bolzano)** *Se  $f$  for uma função contínua em  $[a, b]$  então, para todo o  $y$  compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$  existe pelo menos um  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = y$ .*

Como pode ser verificado, este teorema estabelece um resultado intuitivo: uma função contínua para passar de um ponto para outro tem de passar por todos os valores intermédios.

Outro teorema básico é o seguinte e foi estabelecido por Michel Rolle (1652-1719).

**Teorema 1.4 (Rolle)** *Se  $f$  for uma função contínua em  $[a, b]$ , diferenciável em  $(a, b)$  e se  $f(a) = f(b) = 0$  então existe pelo menos um  $\xi \in (a, b)$  tal que  $f'(\xi) = 0$ .*

Em linguagem comum, este teorema diz-nos que entre dois zeros de uma função contínua existe, pelo menos, um zero da sua derivada. Este resultado pode ser generalizado da forma que se segue.

**Observação 1.5** *No teorema anterior não é necessário que  $f(a)$  e  $f(b)$  sejam ambos nulos; basta que  $f(a) = f(b)$ .*

**Teorema 1.6 (Rolle generalizado)** *Se  $f$  for uma função contínua em  $[a, b]$ , diferenciável  $n$  vezes em  $(a, b)$  e se tiver, neste intervalo,  $n$  zeros então  $f'$  tem pelo menos  $n - 1$  zeros em  $(a, b)$ ,  $f''$  tem pelo menos  $n - 2$  zeros em  $(a, b)$ , ...,  $f^{(n-1)}$  tem pelo menos 1 zero em  $(a, b)$ .*

Outro resultado que convém ter presente (cultura geral) é o conhecido Teorema do Valor Médio de Lagrange.

**Teorema 1.7 (Valor Médio de Lagrange)** *Se  $f$  for uma função contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$  então existe pelo menos um  $\xi \in (a, b)$  tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

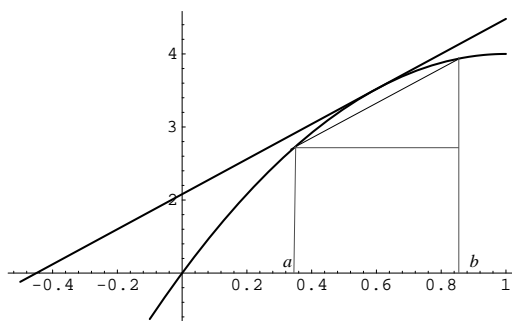


Figura 1.1: Teorema do Valor Médio.

Este resultado justifica o procedimento (muito comum) de substituir o cálculo da derivada de uma função definida num intervalo (pequeno)  $[a, b]$  pela diferença dividida

$$f[a, b] := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Consideremos agora o seguinte teorema estudado, tal como os anteriores, na disciplina de Cálculo/Análise do primeiro ano.

**Teorema 1.8 (Valor médio para integrais)** *Se  $f$  for uma função contínua em  $[a, b]$  e  $g$  uma função integrável, que não muda de sinal em  $[a, b]$ . Então existe pelo menos um  $\xi \in (a, b)$  tal que*

$$f(\xi) \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Finalmente, consideremos um teorema estabelecido por Weierstrass. Este resultado, apesar de ser apenas um resultado de existência, tem muita importância teórica.

**Teorema 1.9 (Weierstrass)** *Seja  $f$  uma função definida e contínua num intervalo  $[a, b]$ . Então para cada  $\varepsilon > 0$  existe um polinómio  $p$  definido em  $[a, b]$  tal que*

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Este teorema diz-nos que, por mais pequeno que seja o  $\varepsilon$  escolhido, existe sempre um polinómio  $p$  contido na faixa  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]\}$ .

## 1.4 Breve referência à teoria dos erros

A introdução de erros num determinado processo de cálculo pode ter várias causas. É nosso objectivo analisar quais são essas causas e estudar mecanismos que nos permitam determinar limites superiores para os erros obtidos no final do processo de cálculo.

Há várias teorias para estudar os erros e a sua propagação ao longo dos cálculos. Merece destaque especial neste campo o matemático J.H. Wilkinson que clarificou muitas questões com os seus trabalhos. Na bibliografia indicaremos algumas obras que se debruçam sobre estes problemas.

Para iniciar o nosso estudo, definamos dois tipos fundamentais de erros.

Seja  $x$  um valor desconhecido e  $\bar{x}$  um valor aproximado de  $x$ .

**Definição 1.10** Chama-se erro absoluto de  $\bar{x}$  e representa-se por  $\Delta\bar{x}$  a quantidade

$$\Delta\bar{x} = x - \bar{x}.$$

**Definição 1.11** Chama-se erro relativo de  $\bar{x}$  e representa-se por  $r_{\bar{x}}$  a quantidade

$$r_{\bar{x}} = \frac{\Delta\bar{x}}{x}.$$

**Observação 1.12**

1. Na prática os valores dos erros absoluto e relativo usam-se, normalmente, em módulo pois, para a maioria dos problemas, não é relevante saber se o erro foi cometido por defeito ou por excesso;
2. Como na definição de erro relativo o valor de  $x$  não é conhecido, é usual considerar a estimativa  $|r_{\bar{x}}| \approx |\Delta\bar{x}/\bar{x}|$ ;
3. O erro relativo, atendendo a que é uma quantidade adimensionada, é muitas vezes representado sob a forma de percentagem. Note-se também que o erro relativo nos dá uma maior informação quanto à precisão da aproximação que o erro absoluto.

É com base nas duas definições anteriores que iremos analisar os resultados numéricos que aparecerão como aproximações a valores que não conhecemos com exactidão.

### 1.4.1 Erros de arredondamento

Os dados de um determinado problema, podem estar à partida afectados de imprecisões resultantes de medições incorrectas. Note-se que a escala de um instrumento de medição nos dá uma possibilidade de saber um limite superior para o erro com que esses valores vêm afectados. Por exemplo, com uma régua usual, a medição de uma distância de 2 mm pode vir afectada com um erro de 0.5 mm o que dá um erro relativo de 2.5%.

Outra causa de erro resulta das simplificações impostas ao modelo matemático usado para descrever um determinado fenómeno físico. Por exemplo, é usual considerar que, para um dada problema, não há perdas de calor, o atrito é nulo, etc. Este tipo de erros fogem ao controlo do analista numérico e são muito difíceis de quantificar.

Outra causa de erros resulta da forma como representamos os números reais. De facto, quando usamos um computador, a mantissa de um número tem que ser limitada. Assim, existem números que não possuem representação na máquina que estamos a trabalhar. Por exemplo, o número  $x = 123.9346$  não tem representação numa máquina de base decimal cuja mantissa só permita armazenar 6 dígitos. Temos assim necessidade de o aproximar por um outro que possa ser representado na referida máquina. Essa aproximação vai ser efectuada por um processo conhecido por arredondamento.

A forma de arredondar um número real é a usual. Como tal

$$x = 123.9346 \approx 123.935 = \bar{x},$$

e este novo valor já tem representação na máquina que estamos a usar sob a forma .123935E2.

Note-se que o arredondamento foi efectuado na terceira casa decimal e que

$$|\Delta \bar{x}| = |x - \bar{x}| = 0.0004 < 0.5 \times 10^{-3},$$

$$|r_{\bar{x}}| = \frac{|\Delta \bar{x}|}{|x|} \approx 3.23 \times 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}.$$

Se o arredondamento tivesse sido efectuado na segunda casa decimal vinha

$$x = 123.9346 \approx 123.93 = \bar{\bar{x}},$$

e assim

$$|\Delta \bar{\bar{x}}| = 0.0045 < 0.5 \times 10^{-2},$$

$$|r_{\bar{\bar{x}}}| = \frac{|\Delta \bar{\bar{x}}|}{|x|} \approx 3.63 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}.$$

Daqui resultam as seguintes definições:

**Definição 1.13** *Seja  $\bar{x}$  uma aproximação para  $x$ . Diz-se que  $\bar{x}$  tem  $k$  casas decimais correctas se e só se  $|\Delta \bar{x}| \leq 0.5 \times 10^{-k}$ .*

**Definição 1.14** *Seja  $\bar{x}$  uma aproximação para  $x$ . Diz-se que  $\bar{x}$  tem  $k$  algarismos significativos correctos<sup>2</sup> se e só se  $|r_{\bar{x}}| \leq 5 \times 10^{-k}$ .*

**Observação 1.15** *Note-se que estas definições surgem por forma a que todo o número obtido a partir de um valor exacto por conveniente arredondamento tenha todas as suas casas decimais e todos os seus algarismos significativos correctos.*

Existe ainda outra possibilidade de erro quando trabalhamos em aritmética de vírgula flutuante. Suponhamos que estamos ainda numa máquina de base decimal cuja mantissa só permita armazenar 6 dígitos. Consideremos, por exemplo, o seguinte número:  $x = .100107\text{E}4$ . Assim temos que

$$z := x^3 = 1003213435.95.$$

Este número não tem representação nesta máquina. Há pois necessidade de o arredondar. Temos então

$$z \approx 100321 = \bar{z},$$

cuja representação é  $\bar{z} = .100321\text{E}6$ .

Note-se que, apesar de

$$|\Delta \bar{z}| = 3435.95$$

se tem

$$|r_{\bar{z}}| = \frac{3435.95}{1003213435.95} \approx 3.42 \times 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}.$$

Para finalizar vamos definir o que se entende por **precisão da máquina**. Esta característica é medida pelo chamado **zero da máquina**, denotado por  $\epsilon$ , e definido com sendo o menor número que pode ser representado satisfazendo a

$$(1 + \epsilon) > 1.$$

Assim, uma máquina é tanto mais precisa quanto menor for o seu zero.

---

<sup>2</sup>Na representação decimal de um número, um algarismo diz-se significativo se é diferente de zero. O zero também é significativo excepto quando é usado para fixar o ponto decimal.

**Exercício 1.4.1** Ptolomeu de Alexandria (século II) usou na sua obra *Almagest* (em árabe, “O Grande Compêndio”), seguindo os Babilônios, o valor de  $\pi = (3.830)_{60}$ . É claro que a notação usada não foi esta, mas sim a notação grega corrente na época  $\pi = \gamma\eta'\lambda''$ .

1. Converta à base decimal e determine os erros absoluto e relativo cometidos.

*Nota: Este foi o valor usado por Cristóvão Colombo (século XV) nos cálculos de navegação.*

2. Tente explicar a notação usada por Ptolomeu tendo em atenção que os gregos recorriam às letras do seu alfabeto para representar os números. Assim (o alfabeto grego na altura tinha mais duas letras)  $\alpha = 1, \beta = 2, \dots, \iota = 10, \kappa = 20, \lambda = 30, \rho = 100, \dots$

**Exercício 1.4.2** Um meio bastante eficaz de calcular o valor de  $\pi$  consiste em usar a série

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)![545140134 \cdot n + 13501409]}{n!^3(3n)!(-640320)^{3n}}.$$

1. Mostre que se trata de uma série convergente.
2. Pode mostrar-se que, tomando os  $k + 1$  primeiros termos desta série,  $\pi$  vem determinado com  $14.18(k + 1)$  casas decimais correctas. Verifique este facto para  $k = 5$  e  $k = 10$ .

**Exercício 1.4.3** Sejam  $x, y$  e  $z$  três quantidades exactas. Por arredondamento obtiveram-se as seguintes aproximações:  $\bar{x} = 231, \bar{y} = 2.31$  e  $\bar{z} = 23.147$ .

1. Conte o número de casas decimais correctas nas aproximações e calcule limites superiores para o erro absoluto em cada uma delas. Compare os resultados e comente.
2. Conte o número de algarismos significativos correctos nas aproximações e calcule limites superiores para o erro relativo em cada uma delas. Compare os resultados e comente.

## 1.4.2 Erros de truncatura

Os erros de truncatura ou de discretização são, por definição, os erros que surgem quando se passa de um processo infinito para um processo finito ou quando se substitui um processo contínuo por um discreto. Por exemplo, quando aproximamos

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ou

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M$$

cometemos erros de truncatura. Outro exemplo onde surgem este tipo de erros é dado pela chamada aproximação de Taylor que tem como suporte teórico o seguinte teorema (apresentado sem demonstração), devido a Brook Taylor (1685-1731).<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Taylor foi, entre outras coisas, o sucessor de Haley como secretário da Royal Society. Publicou, em 1715, um livro intitulado *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* no qual a sua expansão aparece descrita. O seu teorema foi enunciado em 1712. Colin Maclaurin (1698-1746) foi um menino prodígio sendo nomeado professor em Aberdeen com a idade de 19 anos. A sua expansão apareceu em 1742 no *Treatise on Fluxions*.



**Teorema 1.16 (Taylor)** *Se  $f$  admite derivadas contínuas até à ordem  $n$  (inclusivé) em  $[a, b]$ , isto é, se  $f \in C^n([a, b])$ , e se  $f^{(n+1)}$  existir em  $(a, b)$  então, para todo o  $x, x_0 \in [a, b]$ ,*

$$f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0), \quad (1.3)$$

onde

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

e

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in I\{x, x_0\},$$

sendo  $I\{x, x_0\}$  o intervalo aberto definido por  $x$  e  $x_0$ .

A (1.3) chamaremos fórmula de Taylor sendo  $T_n(x; x_0)$  o polinómio de Taylor de  $f$  em torno do ponto  $x_0$  e  $R_n(x; x_0)$  o resto (de Lagrange) de ordem  $n$  (ou de grau  $n+1$ ). Se  $x_0 = 0$  a (1.3) chamaremos fórmula de Maclaurin.

Atente-se ao grande interesse prático deste resultado que afirma que, mediante certas condições, uma função pode ser escrita como a soma de um polinómio com um resto. Escolhendo valores de  $x$  e  $x_0$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x; x_0) = 0. \quad (1.4)$$

temos que, a partir de um valor de  $n$  suficientemente grande, a função dada pode ser aproximada pelo seu polinómio de Taylor. Assim, qualquer operação a efectuar sobre a função (derivação, integração, etc.) poderá ser feita sobre o polinómio.

**Observação 1.17** *A escolha dos valores de  $x$  e  $x_0$  deverá ser feita de modo a que eles pertençam ao intervalo de convergência da série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

designada por série de Taylor. Neste curso não iremos dar ênfase a esta questão.

O objectivo fundamental dos problemas que surgem neste contexto é o de determinar o menor valor de  $n$  que verifica

$$\max_{\xi \in I\{x, x_0\}} |R_n(x; x_0)| < \eta,$$

sendo  $\eta > 0$  uma tolerância previamente fixada. Obtemos assim a aproximação

$$f(x) \approx T_n(x; x_0),$$

cujos erros não excedem  $\eta$ . O valor de  $R_n(x; x_0)$ , sendo um erro absoluto uma vez que

$$|f(x) - T_n(x; x_0)| = |R_n(x; x_0)|,$$

é também designado erro de truncatura.

**Definição 1.18** Uma função  $f$  cujo resto da sua fórmula de Taylor verifique (1.4), para todo  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , com  $\varepsilon$  positivo e escolhido de forma adequada, diz-se **analítica** em  $x_0$ .

Como a fórmula de Taylor é definida usando apenas informação relativa às derivadas da função num único ponto, é surpreendente que muitas das funções que são definidas de forma natural na matemática, bem como os limites das equações diferenciais que servem de modelo a muitos problemas da engenharia, física, biologia, sociologia, etc, sejam funções analíticas.

**Exercício 1.4.4** Determine um valor aproximado de  $e^2$  com 3 casas decimais correctas, usando a fórmula de Maclaurin aplicada à função  $f(x) = e^x$ .

**Resolução:** A função  $f(x) = e^x$  é uma função analítica para todo o  $x$  real (prove!) e atendendo a que  $f^{(k)}(x) = e^x$  a série de Maclaurin de  $f$  é dada por

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Assim, fixando um valor de  $n$ , temos que

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

com

$$|R_n(x; 0)| \leq \frac{e^x}{(n+1)!} |x^{n+1}| \leq \frac{3^x}{(n+1)!} |x^{n+1}|.$$

Vamos então determinar qual o menor valor de  $n$  tal que

$$|R_n(2; 0)| \leq \frac{3^2}{(n+1)!} |2^{n+1}| \leq 0.5 \times 10^{-3}.$$

Por tentativas...

$$n = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{3^2}{10!} 2^{10} = 0.254 \times 10^{-2}$$

$$n = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{3^2}{11!} 2^{11} = 0.462 \times 10^{-3}.$$

Logo a aproximação pedida é

$$e^2 \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{x^k}{k!} = 7.38899470899 \approx 7.389.$$

## 1.5 Exercícios de aplicação à engenharia

**Exercício 1.5.1** O fluxo através de uma parte da camada fronteira num fluido viscoso é dada pelo integral definido

$$\int_0^{0.8} 1.4(1 - e^{-4x^2}) dx.$$

Calcule uma aproximação para o integral com quatro casas decimais correctas.

**Exercício 1.5.2** Consideremos uma viga uniforme de comprimento  $L$ , suspensa, sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $W$  e a uma força compressiva  $P$  em cada extremo. A deflexão  $D$  no ponto médio é dada por

$$D = \frac{WEI}{P^2}(\sec(0.5mL) - 1) - \frac{WL^2}{8P},$$

onde  $m^2 = P/EI$  com  $E$  e  $I$  constantes. Usando o desenvolvimento em série de Maclaurin da função  $y = \sec x$  prove que quando a força gravítica tende a anular-se a deflexão  $D$  tende para  $\frac{5WL^4}{384EI}$ .

**Exercício 1.5.3** A lei dos gases perfeitos é dada por  $pv = nrt$  e relaciona a pressão  $p$ , o volume  $v$  a temperatura  $t$  e o número de moles  $n$  de um gás ideal. O número  $r$  nesta equação depende apenas do sistema de medição a usar. Suponhamos que foram efectuadas as seguintes experiências para testar a veracidade da lei usando o mesmo gás.

1. Consideraram-se  $p = 1.0$  atmosferas,  $n = 0.0042$  moles,  $v = 0.10$  metros cúbicos e  $r = 0.082$ . Usando a lei, a temperatura do gás foi prevista como sendo

$$t = \frac{pv}{nr} = \frac{1.0 \times 0.10}{0.082 \times 0.0042} = 290^\circ \text{ Kelvin} = 17^\circ \text{ Celsius}.$$

Quando medimos a temperatura do gás verificámos ser  $17^\circ$  Celsius.

2. A experiência anterior foi repetida usando os mesmos valores de  $r$  e  $n$  mas aumentando o pressão quatro vezes enquanto se reduziu o volume na mesma proporção. Como  $pv$  é constante, a temperatura prevista é de  $17^\circ$  Celsius mas agora, ao medir a temperatura do gás encontrámos o valor  $32^\circ$  Celsius.

Será que a lei não é válida nesta situação?

## 1.6 Referências bibliográficas

- K.E. Atkinson (1989), *An Introduction to Numerical Analysis*, 2th ed., John Wiley, New York.
- R.L. Burden e J.D. Faires (1988), *Numerical Analysis*, 4th ed., PWS-Kent, Boston.
- S.D. Conte e C. de Boor (1980), *Elementary Numerical Analysis*, 3th ed., McGraw-Hill, New York.
- P. Henrici (1963), *Error Propagation for Difference Methods*, John Wiley, New York.
- M. Rosa (1992), *Tópicos de Análise Numérica*, Textos de Apoio, DMUC, Coimbra.
- J. Stoer e R. Bulirsch (1980), *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- J.H. Wilkinson (1963), *Rounding Errors in Algebraic Process*, Prentice-Hall, New Jersey.