EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE A+B » Data: 27/06/2016 Código da prova: **2706201602**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $e^{-x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique um intervalo de amplitude igual a 1 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e positiva. Justifique a sua resposta!

[0.5] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[0.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.

[1.5] **(d)** Complete a função seguinte e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
 k=_________;
 x(k)=______;
 while(___________)
     x(k+1)=______________________________;
     if(__________________________________)
        return;
     end
     k=__________;
end
```

```
% Script01 de interface do MTangentes
clear
clc
fprintf('-------MÉTODO DAS TANGENTES para f(x)=0-------\n')
strF='exp(x)-ln(x)';
f=@(x) vectorize(eval(strF));
while(1)
    a=str2num(input('a=','s'));
    b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&&isreal(a))&&(isscalar(b)&&isreal(b))&& b>a) continue end;
    if (f(a)*f(b)>0) break; end
end
```

```
% 1ª e 2ª derivada da função
df     = diff(f('x')); % Derivada simbólica
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

% aproximação inicial
while(1)
    x0 = str2num(input('x0=','s'));
    if ~(isscalar(x0)&& isreal(x0))
        continue;
    end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max=');
tol  = str2num(input('tol=','s'));

% chamada do método das tangentes
xT = mTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol)
```

2. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos.

Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 0 \le x \le 2\pi \\ \text{então} \;\; y = \cos x \\ \text{senão se} \quad -2 \le x < 0 \\ \qquad \text{então} \quad y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = -f(x)$$

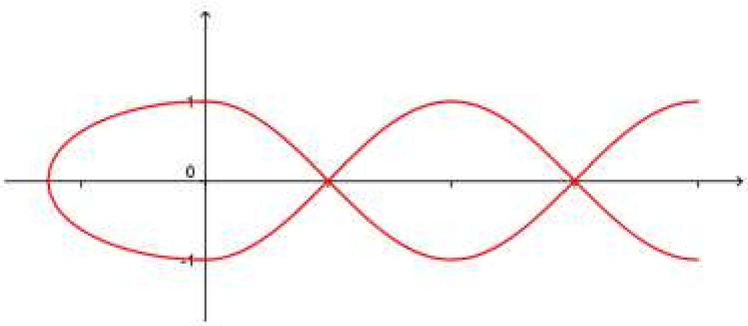

Figura 1 – Gráficos de f e g

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Redesenhe a figura 1, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in \left[-2, 0\right]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

[2.5] **(b)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\, dx$ e $I_2 = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx$, utilizando as regras simples de Simpson e dos trapézios respetivamente. Recorrendo à figura 1 interprete os resultados obtidos.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial $y' = -2ty, \;\; y(0) = 3, \;\; t \in \left[0, 2\right]$

[2.5] **(a)** Sabendo que $y(t) = 3\exp(-t^2)$ é a solução exata do PVI, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK4
0	0	3				0	0	0
1				2.25	2.3359		0.0864	0.0005
2	1	1.1036		1.125	1.1041			
3					0.3350		0.2463	0.0188
4	2	0.0549		0.4219				0.0358

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f\left(x,y\right) = -x^2 - y^2$;

$g\left(x,y\right) = \sqrt{-f(x,y)}$; $\quad h\left(x,y\right) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 9 \\ \text{então } z = \frac{\sqrt{27}}{3} g(x,y) \end{array} \right.$; $\quad j\left(x,y\right) = \begin{cases} \sqrt{36 + f(x,y)} & \text{, se } 9 < x^2 + y^2 \leq 36 \\ h(x,y) & \end{cases}$

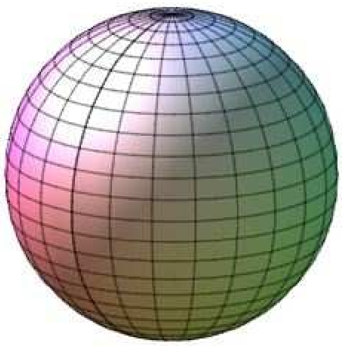

Figura 1

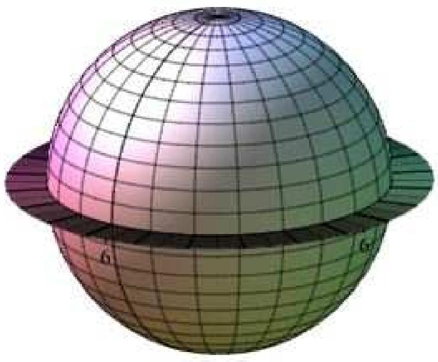

Figura 2

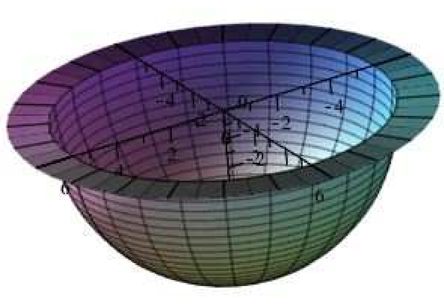

Figura 3

[0.5] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **duas** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras 1, 2 e 3, apenas a figura 2 representa o gráfico de uma função/campo escalar de duas variáveis.

ii) O vetor $\begin{bmatrix} 4 & y & -\sqrt{20} \end{bmatrix}$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $x = 4$ no ponto de coordenadas $P(4,0,2\sqrt{5})$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = g(x,y)$, a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $P\left(2,2\right)$ ocorrem na direção e sentido do vetor $\vec{w} = \left\langle -1,-1 \right\rangle$? Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação da temperatura em P segundo o vetor $\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Mostre que se $z = -f(x,y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0$.

5. A figura 5 representa um sólido, de densidade igual a 5, composto por três partes:

- Cone de raio $r = 3$ e altura $h = 2$;
- Cilindro de raio $r = 3$ e altura $h = \sqrt{27} - 2$;
- Segmento de esfera de raio $r = 6$.

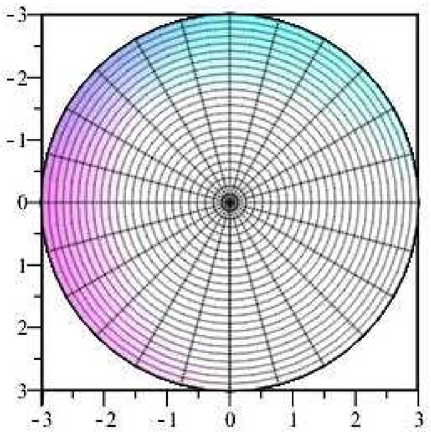

Figura 4

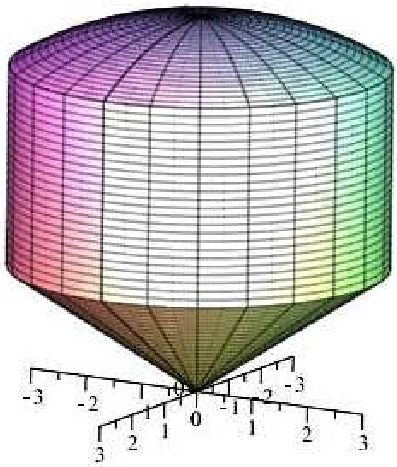

Figura 5

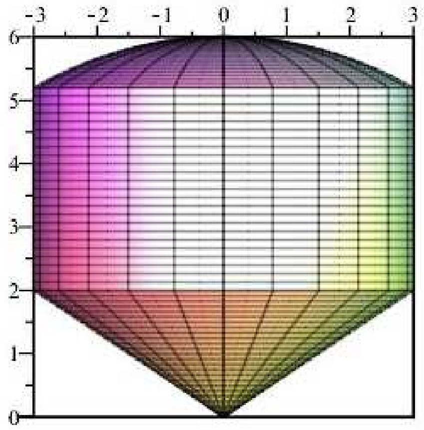

Figura 6

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq z \leq \sqrt{27}\right\}$$

$$S_3 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \arctan\tfrac{3}{\sqrt{27}} \wedge \tfrac{\sqrt{27}}{\cos\varphi} \leq R \leq 6\right\}$$

[2.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o bico do lápis é igual a $A(S) = \pi r m = 3\sqrt{13}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

Sugestão: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$$, com f_x e f_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right\}$$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := ________________________;
   y := ________________________;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não