Exame Época Normal → 27/6/2016

① $f(x,y) = -x^2 - y^2$, $\quad h(x,y) := \Big|$ se $x^2+y^2 \le 9$ então $z = \frac{\sqrt{27}}{3}\, g(x,y)$

$g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)}$,

$$j(x,y) := \begin{cases} \sqrt{36 + f(x,y)}, & \text{se } 9 < x^2+y^2 \le 36 \\ h(x,y) \end{cases}$$

(a) $D_j = D_{j_1} \cup D_{j_2}$ onde

$$j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{32 - x^2 - y^2} & \text{se } 9 < x^2+y^2 \le 36 \\ z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{-(-x^2-y^2)} & \text{se } x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$$

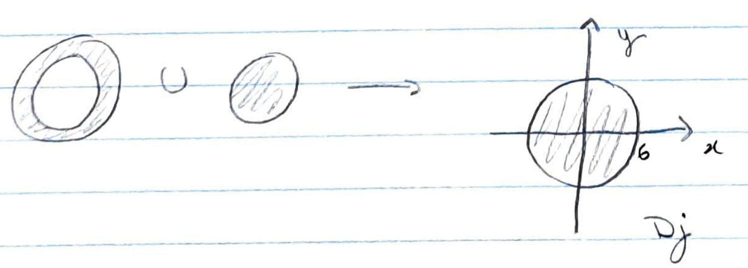
$$= \begin{cases} \sqrt{32 - x^2 - y^2} & \text{se } 9 < x^2+y^2 \le 36 \longrightarrow j_1 \\ z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \le 9 \longrightarrow j_2 \end{cases}$$

$D_{j_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 32 - x^2 - y^2 \ge 0 \wedge 9 < x^2+y^2 \le 32\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 < x^2 + y^2 \le 32\}$

$\Leftrightarrow 32 - x^2 - y^2 \ge \wedge \; 9 < x^2+y^2 \le 32$
$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 32 \wedge 9 < x^2+y^2 \le 32$
$\Leftrightarrow \quad 9 < x^2+y^2 \le 32$

$D_{j_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9\}$

$D_j = D_{j_1} \cup D_{j_2}$ $\quad D_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : 9 < x^2+y^2 \le 32 \vee x^2+y^2 \le 9\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 32\}$



D_j é fechado uma vez que $D_{fr} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 36\} \subseteq D_j$

(b) Mostrar que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$ é curva de nível comum a todas as funções.

↳ circunferência de raio 3

$C \rightarrow z = f(x,y)$

$z = -x^2-y^2 \Leftrightarrow z = -\underbrace{(x^2+y^2)}_{9} \Leftrightarrow z = -9$ ✓

$C_g = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = -9\}$
$= \{(x,y) \in D_f : -x^2-y^2 = -9\}$

$f(x,y) = -9 \Leftrightarrow -(x^2+y^2) = -9$
$\Leftrightarrow -x^2-y^2 = -9$

$C \rightarrow z = g(x,y)$

$z = \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{9}} \Leftrightarrow z = \sqrt{9} \Leftrightarrow z = 3$

$C_3 = \{(x,y) \in D_g : g(x,y) = 3\}$
$= \{(x,y) \in D_g : \sqrt{x^2+y^2} = 3\}$

$g(x,y) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{9}} = 3$
$\Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$

$C \rightarrow z = h(x,y)$

$z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{9}} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27}}{3} \times \sqrt{9} \Leftrightarrow z = \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{3}} \times 3 \Leftrightarrow z = 3\sqrt{3}$

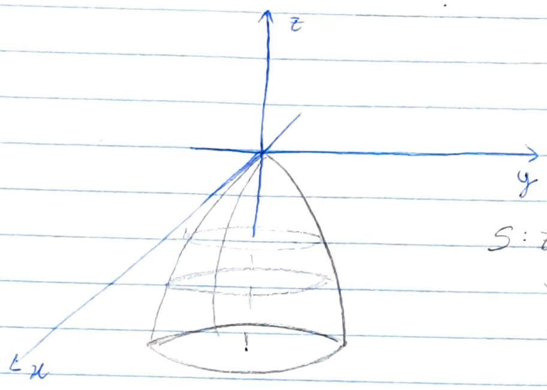
$C_{3\sqrt{3}} = \{(x,y) \in D_h : h(x,y) = 3\sqrt{3}\}$
$= \{(x,y) \in D_h : \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{3}\}$

$h(x,y) = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{27}}{3} \times \sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{3}}\sqrt{9} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$

Assim C é uma curva de nível comum a todas as funções

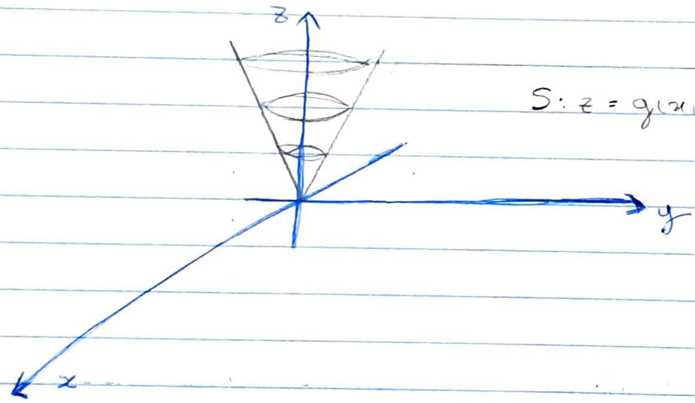
(C) Identificar as superfícies associadas às funções e traçar o esboço das mesmas.

$z = f(x,y) \Leftrightarrow z = -(x^2+y^2)$



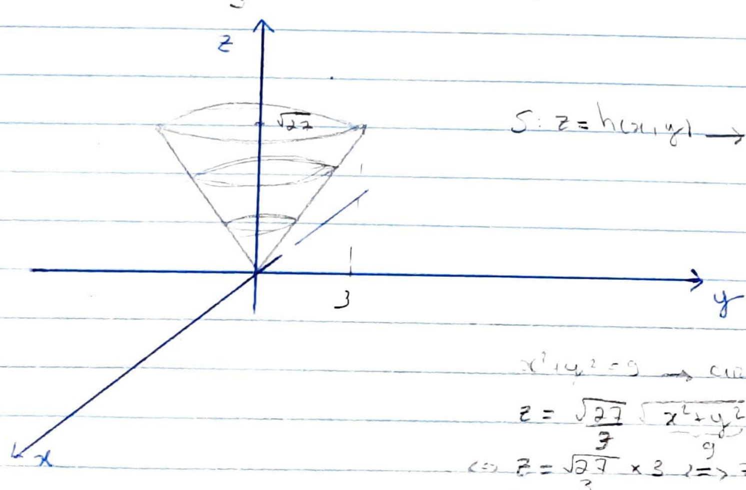
$S: z = f(x,y) \rightarrow$ Superfície Parabólica de vertice $(0,0,0)$ e comcavidade voltada para baixo.

$z = g(x,y) \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad x+y \geq 0$



$S: z = g(x,y) \rightarrow$ Superfície Cónica de vértice $(0,0,0)$ e comcavidade voltada para cima

$z = h(x,y) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27}}{3} \times \sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \geq 9$



$S: z = h(x,y) \rightarrow$ Superfície Cónica de vertice $(0,0,0)$ e comcavidade voltada para cima, Raio $= 3$ e altura $\sqrt{27}$

$x^2+y^2 = 9 \rightarrow$ circunferência de raio 3 (base)

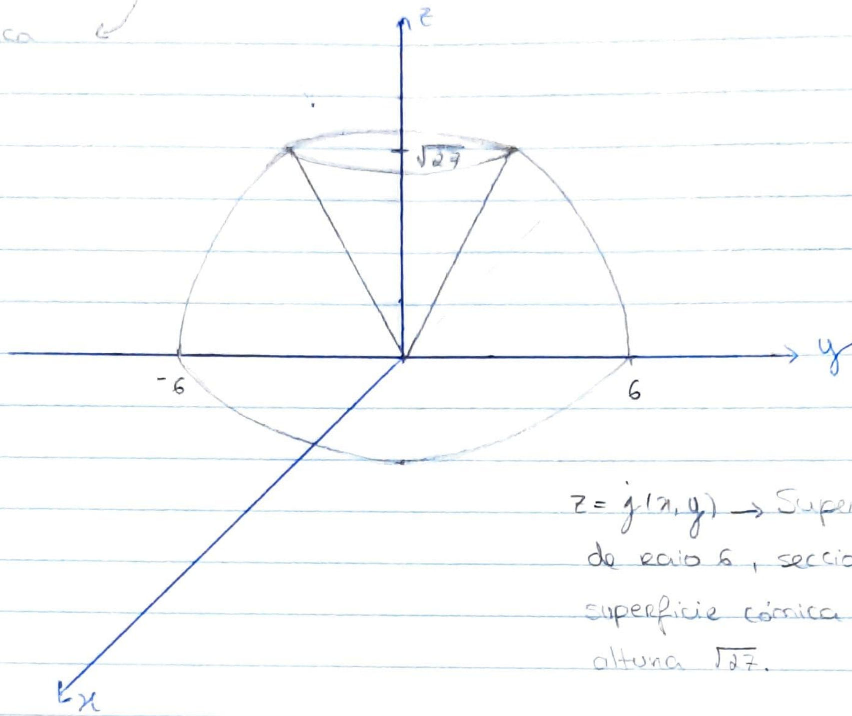
$z = \frac{\sqrt{27}}{3} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{9} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27}}{3} \times \sqrt{9}$

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27}}{3} \times 3 \Leftrightarrow z = \sqrt{27} \rightarrow$ altura do cone

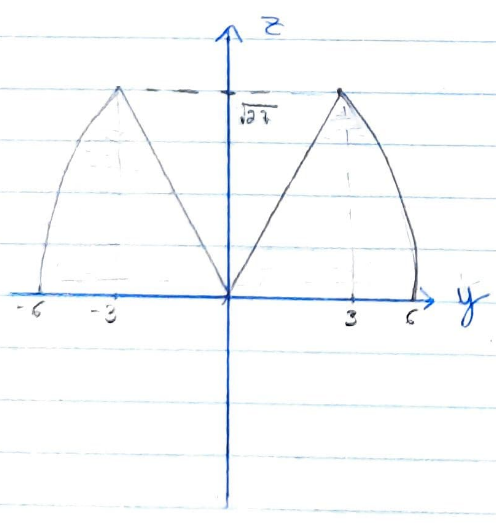
→ Superfície esférica

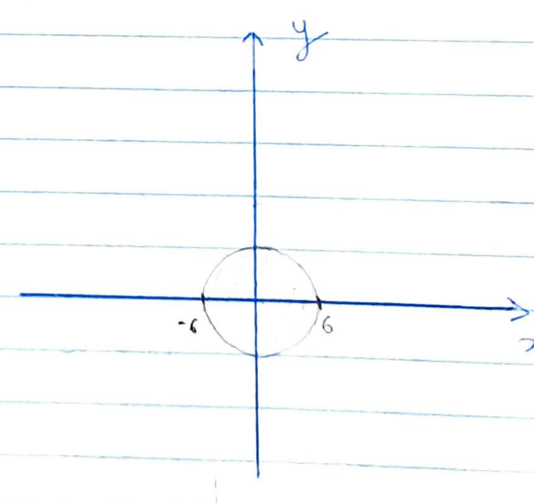
$$z = f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{36 - x^2 - y^2} & \text{se} \quad 9 < x^2 + y^2 \leq 36 \\ \dfrac{\sqrt{27}}{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Superfície Cônica



$z = f(x,y)$ → Superfície Esférica de raio 6, seccionada por uma superfície cônica de raio 3 e altura $\sqrt{27}$.





d)

i) Dos figuras 1, 2, 3 apenas 2 representa o gráfico de uma função real de duas variáveis. Falsa!

Apenas a figura 3 representa o gráfico de uma função do tipo:

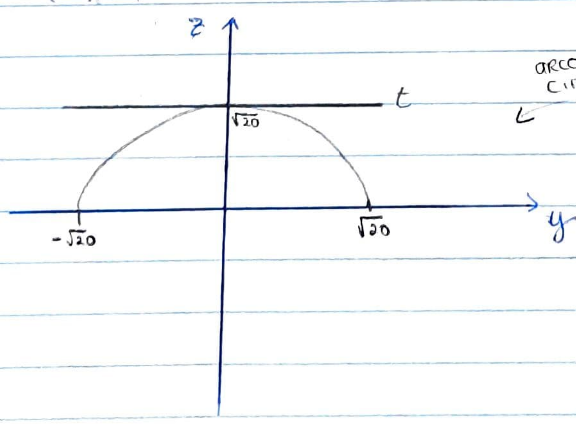
$$k(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{se } R < x^2 + y^2 \leq R + a \end{cases}$$

A cada objeto do domínio (x, y) faz corresponder um ponto em z e isso não acontece nas figuras 1 e 2.

ii) O vetor $[4 \;\; y \;\; -\sqrt{20}\,]$ define a equação da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $x = 4$ no ponto de coordenadas $P(4, 0, 2\sqrt{5})$.

$$C = \begin{cases} z = j(x,y) \\ x = 4 \end{cases} \text{c/ Ponto } (4, 0, 2\sqrt{5}) \rightarrow C = \begin{cases} z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{cases} z = \sqrt{36 - 4^2 - y^2} \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{cases} z = \sqrt{36 - 16 - y^2} \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{cases} z = \sqrt{20 - y^2} \\ x = 4 \end{cases}$$



arco de circunferência

$$C = [4 \;\; y \;\; \sqrt{20 - y^2}\,]$$

Assim, pela figura desenhada, a equação será $t = [4, \; y, \; \sqrt{20}\,]$

Logo a afirmação é falsa.

iii) A função j é contínua em qualquer ponto do cordão de soldadura $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$ → Verdadeira, uma vez que

$$x_0^2+y_0^2 = 9 \longrightarrow j_2(x_0,y_0) = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{9} = \frac{3\sqrt{3}}{3}\times 3 = 3\sqrt{3}$$

Considerando um ponto qualquer $P(x_0,y_0)$ pertencente a C, a função é definida nesse ponto.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j_2(x,y) = ? \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y) = \sqrt{27} \text{ existe!}$$

Aplicando os limites direcionais:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} j_1(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} \sqrt{36-x^2-y^2} = \sqrt{36-x_0^2-y_0^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} j_2(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{9} = \sqrt{27}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} j(x,y) = j(x_0,y_0) = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$ → logo a função é contínua em $P(x_0,y_0)$

Assim a função é contínua em todos os pontos de C que "funciona" como um "cordão de soldadura" entre os gráficos dos dois ramos da função f.

iv) f, g e h têm um mínimo ~~absoluto~~ absoluto em $(0,0)$ e a função j não tem extremos. → Falsa, uma vez que, pelos gráficos:

- f tem um máximo absoluto em $(0,0,0)$
- g e h têm um mínimo absoluto em $(0,0,0)$
- j tem uma linha de mínimo absoluto e uma linha de máximo absoluto.