CAP0 : NÚMEROS COMPLEXOS

Número complexo : $z = a + bi$

Parte Real : $Re(z) = a$

Parte Imaginária : $Im(z) = b$

Adição : $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplicação : $zw = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$

$= (ac - bd) + (ad - bc)i$

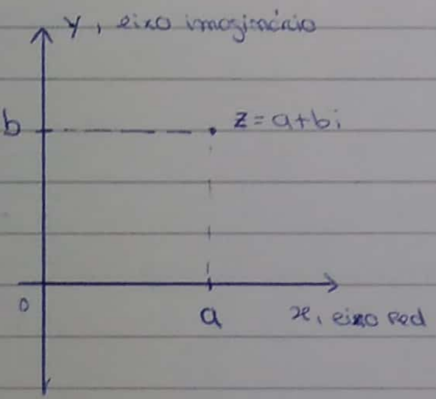
Conjugado : $z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$

Módulo : $z = a + bi \qquad |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

↳ Propriedade : $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ou seja $z\bar{z} = |z|^2$

Divisão : $w \neq 0 \qquad \dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2}$

→ Representação Geométrica :

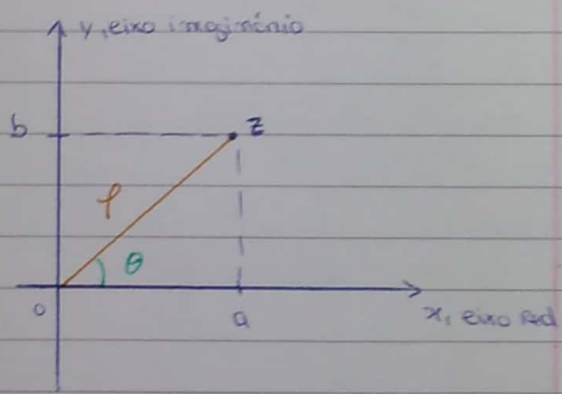


origem : $0 + 0i$

correspondência :

$a + bi \rightarrow P(a, b)$

→ Representação da Forma Polar ou trigonométrica :



$]-\pi, \pi]$ argumento principal

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}, \quad a \neq 0$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

através da fórmula de Euler :

$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$

$cis\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

$z = \rho e^{\theta i}$ ou $z = \rho\, cis\,\theta$

CAP 1: MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Uma matriz é sempre do tipo $m \times n$, ou seja, linhas x colunas.

OPERAÇÕES COM MATRIZES:

→ **Adição**: as matrizes têm que ter o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

→ **Multiplicação por um escalar**: multiplicar o escalar por todos os elementos.

→ **Produto de matrizes**: só podem ser multiplicadas duas matrizes se e só se o número de colunas de uma matriz A for igual ao número de linhas de uma matriz B.

PROPRIEDADES:

Comutativa → $A + B = B + A$

Associativa → $(A+B)+C = A+(B+C)$

Caso Matriz Nula → $A + 0 = A$

Multiplicação por um escalar

→ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

→ $(\alpha + B)A = \alpha A + BA$

→ $(\alpha B)A = \alpha(BA)$

→ $(-1)A = -A$

Produto de Matrizes

→ $A(B+C) = AB + AC$ } Distributiva

→ $(B+C)A = BA + CA$

→ $(AB)C = A(BC)$ } Associativa

→ $IA = AI = A$ } Matriz Identidade

TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES

(ex) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Propriedades da transposição de matrizes:

$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Se $A^T = A$ então A é simétrica

Se $A^T = -A$ então A é anti-simétrica

ELIMINAÇÃO DE GAUSS (ver vídeo)

Operações Elementares:

OE1 - troca de duas linhas

OE2 - multiplicação de uma linha por um escalar não nulo

OE3 - adição de linhas

Condição de Matriz em forma de escada:

$$M = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ qualquer número

$*$ número $\neq 0$

NOTA: Diz-se que a matriz A é equivalente por linhas a B se for possível obter B a partir de A e OE's.

Determinar forma de escada:

(1) se a matriz é nula → já está em forma de escada;

(2) encontrar a primeira coluna que contém uma entrada $\neq 0$ e mover essa linha para o topo;

(3) multiplicar essa linha por $1/a$ para obter o pivô;

(4) Repetir os passos nas restantes linhas;

Forma de escada Reduzida:

(i) a matriz está em forma de escada;

(ii) todos os pivôs são iguais a 1;

(iii) cada pivô é a única entrada não nula da sua coluna;

CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ

↳ Número de linhas não nulas de uma matriz A em forma de escada.

Sistemas de Equações Lineares

→ Representação Matricial $Ax = b \longrightarrow [A|b]$

→ Resolução:

(1) Formar $[A|b]$ e definir a sua forma de escada

(2) (i) $car(A) \neq car[A|b]$ → Sistema impossível

(ii) $car(A) = car[A|b]$ e $n - car(A) = 0$ → Sistema possível determinado

(iii) $car(A) = car[A|b]$ e $n - car(A) > 0$ → Sistema possível indeterminado com $n - car(A)$ variáveis livres.

Scanned by CamScanner

Sistema Homogéneo:

$Ax = 0$, tem solução trivial $X = 0$ e outras não triviais

→ Um Sistema Homogéneo com n incógnitas:

(i) é possível determinado se $car(A) = n$

(ii) é possível indeterminado se $car(A) < n$

MATRIZ INVERSA

A^{-1} é matriz inversa de A → $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$AB = AB = I$, assim A é invertível e não singular

, caso contrário A é não invertível e singular

Teoremas:

→ Uma matriz invertível só admite uma inversa

→ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

→ $(A^{-1})^{-1} = A$

→ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ $n \in \mathbb{N}$

→ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

→ Mostrar que B é a inversa de A pela definição: $AB = I$ e $BA = I$

Calcular Inversa: Algoritmo de Gauss-Jordan

→ ver matrizes por blocos

(1) Determinar a forma de escada reduzida de $[A|I]$

(2) Se for possível obter $[I|B]$ então $B = A^{-1}$

CAP2: DETERMINANTES

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Cofator ou Componente Algébrico:

Seja M_{ij} o determinante da submatriz que se obtem pela supressão da linha i e coluna j $\longrightarrow$ $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Assim, para matrizes $m \geq 2$ $\longrightarrow$ TEOREMA DE LAPLACE

O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos das entradas de uma qualquer linha ou coluna pelos respectivos componentes algébricos $\longrightarrow$ $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1m}C_{1m}$

Propriedades: Seja A uma matriz $m \times m$

(i) Se A tem coluna ou linha nula $\rightarrow$ $\det(A) = 0$

(ii) Se A troca 2 linhas $\rightarrow$ $\det(A)$ troca de sinal

(iii) multiplicar $\det(A)$ por x $\longrightarrow$ multiplicar qualquer linha ou coluna de A por x

(iv) Se A tem 2 colunas / linhas iguais $\longrightarrow$ $\det(A) = 0$

(V) Se uma linha de A é a soma de multiplos escalares de outras linhas $\rightarrow$ $\det(A) = 0$

(vi) Se a uma linha for adicionado 1 multiplo escalar de outra linha
↳ $\det(A)$ não se altera

Teoremas: Sejam A e B $m \times m$

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(ii) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$

(iii) Se A é invertível então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

(iv) $\det(A) = \det(A^T)$

(V) $\det(\alpha A) = \alpha^m \det(A)$

(Vi) determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é igual ao produto dos elementos da sua diagonal

<u>**NOTAS**</u>: $\det(A \pm B) \neq \det(A) \pm \det(B)$

$\det(2A) \neq 2\det(A)$

Se A invertível <u>então</u> $car(A) = m$

<u>e</u> $\det(A) \neq 0$.

MATRIZ ADJUNTA

↳ transposta da matriz de cofatores: $adj(A) = (cof(A))^T$

Teorema: Se A é quadrada → $A\, adj(A) = adj(A) = det(A) I$

Corolário: Se $det(A) \neq 0$ → $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$

Regra de Cramer:

↳ válida se o sistema é possível determinado (ver vídeo)

ou seja se: $Ax = b$

A é $n \times n$, não singular

$car(A) = car[A|b]$

$n - car(A) = 0$

teorema: $x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$

MENSAGENS

Codificação

frase

↳ sequência de num.

↳ matriz M_I

↳ $M_F = C M_I$

↳ sequência de num a enviar

Descodificação

sequência de num recebida

↳ matriz M_F

↳ $M_I = C^{-1} M_F$

↳ sequência de num

↳ frase