ISEC ENGENHARIA

Curso Técnico Superior Profissional – TGA
Unidade Curricular: Matemática
Ano Letivo: 2015/2016

Exame da Época Normal – Parte sobre ED e MNEDO » Data: 26/02/2016 Código da prova: **1702201601**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:**

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação diferencial (ED) $dy + (x^2 - 1)y\,dx = 0$

[1.50] **(a)** Mostre que a ED é de variáveis separáveis e determine a sua solução geral.

[0.75] **(b)** Sabendo que a figura 1 representa o campo direcional dado pela ED, qual das figuras 2 ou 3 representa o gráfico da sua solução geral? Justifique.

[2.75] **(c)** Sabendo que $y(t) = 5 \times \exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI dado por $y' = y - yt^2,\ y(0) = 5,\ t \in [0,2]$, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2
0	0	5	5	5	0	0
1	1	9,73867	10	7.5000	0,26133	2,23867
3	2	2.5671	10	-3,75	7,4329	6.3171

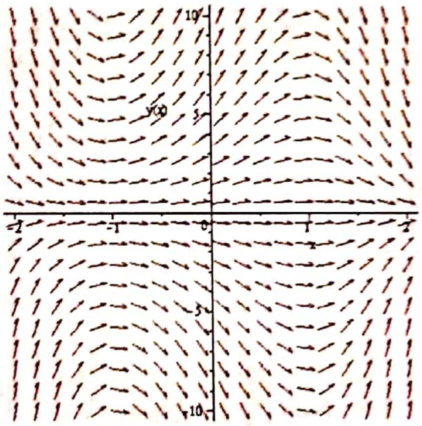

Figura 1

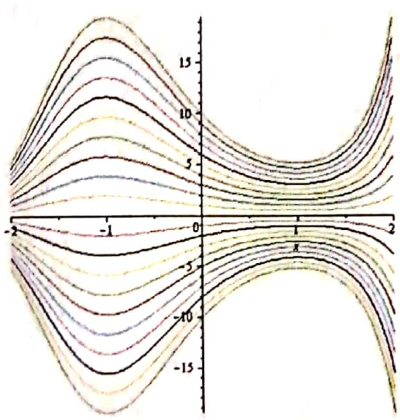

Figura 2

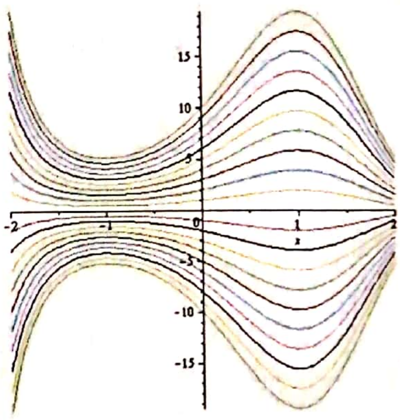

Figura 3

① Considere a equação diferencial (ED) $\boxed{dy+(x^2-1)y\,dx=0}$ (1)

a) Mostre que a ED é de variáveis separáveis e determine a sua solução geral.

1º Passo: Mostrar que a ED é de variáveis separáveis:

A Equação Diferencial é de variáveis separáveis pois apresenta-se na forma:

$$\boxed{f_1(x)\,g_1(y)\,dx+f_2(x)\,g(y)\,dy=0} \quad (2)$$

Rearranjando a ED (colocar (1) na forma (2)):

$$dy+(x^2-1)y\,dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{(x^2-1)y\,dx}_{f_1(x)g_1(y)\,dx}+\underbrace{1\,dy}_{f_2(x)g(y)\,dy}=0} \quad (3)$$

2º Passo: Transformar a equação (3) em variáveis separadas:

Multiplicar ambos os membros por: $\dfrac{1}{g_1(y)\times f_2(x)}$ com $g_1(y)\neq 0 \wedge f_2(x)\neq 0$

Nota
$g_1(y)=y$
$f_2(x)=1$

Como tal, fica: $\dfrac{(x^2-1)y\,dx}{y\times 1}+\dfrac{1\,dy}{y\times 1}=\dfrac{0}{y\times 1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)\cancel{y}\,dx}{\cancel{y}}+\frac{1}{y}dy=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x^2-1)\,dx+\frac{1}{y}dy=0} \quad (4)$$ Equação Dif. Variáveis Separadas

3º Passo: Integrar (4)

$$(x^2-1)\,dx+\frac{1}{y}dy=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int(x^2-1)\,dx+\int\frac{1}{y}dy=\int 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-x+C_1+\ln|y|+C_2=C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^3}{3}-x+\ln|y|=\mathcal{C}} \quad (5)$$

Solução Geral de (1) na forma implícita (5)

C. Auxiliares

- $\int f'\times f^p=\dfrac{f^{p+1}}{p+1}+C$
- $\int\dfrac{f'}{f}=\ln|f|+C$
- $\int(x^2-1)\,dx=\int \underbrace{1}_{f'}.\underbrace{x}_{f}{}^{\overset{p}{2}}dx-\int 1\,dx=$
  $=\dfrac{x^3}{3}-x+C_1,\ C_1\in\mathbb{R}$
- $\int\dfrac{1}{y}^{\leftarrow f'}_{\leftarrow f}dy=\ln|y|+C_2,\ C_2\in\mathbb{R}$
- $\int 0=C$
- $\mathcal{C}=C-C_1-C_2$

4-Passo: Colocar na forma explícita

$$\frac{x^3}{3} - x + \ln|y| = C \Leftrightarrow$$

Nota:

- $e^c = C$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{x^3}{3} + x + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{x^3}{3} + x + C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{x^3}{3}+x+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^c \cdot e^{-\frac{x^3}{3}+x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|y| = C \cdot e^{-\frac{x^3}{3}+x}, C \in \mathbb{R}} \text{ (6) Forma Explícita}$$

b) Sabendo que a figura 1 representa o campo direcional dado pela ED, qual das figuras 2 ou 3 representa o gráfico da sua solução geral? Justifique.

É a figura 3 que representa o gráfico da solução geral porque sobrepondo a figura 1 com a figura 3 a sobreposição é total e o ajuste é completo e perfeito.

c) Sabendo que $y(t) = 5 \times \exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI dado por $y' = y - t^2$, $y(0) = 5$, $t \in [0,2]$, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

Solução Exata do PVI $\rightarrow \boxed{y(t) = 5 \cdot \exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Equação Diferencial} \rightarrow \boxed{y' = y - t^2} \\ \text{Condição Inicial} \rightarrow y(0) = 5 \\ \text{Intervalo} \rightarrow t \in [0,2] \end{array}\right\} \text{PVI}$$

Substituir t em (1)

$\boxed{\text{Solução Exata}}$

$t=0$

$$y(0) = 5 \cdot \exp\left(0 - \frac{0^3}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp^0 =$$
$$= 5 \cdot 1 =$$
$$y(0) = 5$$

$t=1$

$$y(1) = 5 \cdot \exp\left(1 - \frac{1^3}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp\left(\frac{1}{1_{\times 3}} - \frac{1^3}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp\left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp\left(\frac{3}{2}\right) =$$
$$y(1) = 9{,}73867$$

$t=2$

$$y(2) = 5 \cdot \exp\left(2 - \frac{2^3}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp\left(\frac{2}{1_{\times 3}} - \frac{8}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp\left(\frac{6}{3} - \frac{8}{3}\right) =$$
$$= 5 \cdot \exp\left(-\frac{2}{3}\right) =$$
$$y(2) = 2.5671$$

Aproximações

Método de Euler

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \times f(t_i, y_i)\ ,\ i=0,1,2,\dots,m-1} \quad (2)$$

1º Passo:
Discretização de t - Partição regular do intervalo

$\boxed{h = \frac{b-a}{m}}$ em que $\rightarrow t \in [a,b]$, ou seja, a e b são os intervalos da função
$\rightarrow m$ = número de subintervalos da função

Então:

$b=2$
$a=0$ $> t \in [0;2]$ logo $h = \frac{2-0}{2} \Leftrightarrow \boxed{h=1}$
$m=2$

$\boxed{t_0 = a\ ,\ t_1 = t_0 + h\ ,\ t_2 = t_1 + h}, \dots, t_m = t_{m-1} + h = b$

2º Passo: Aplicar a equação iterativa do Método de Euler (2)

$i=0$ $\quad y_0 = 5$ e $t_0 = 0$ → Como o Erro do M. Euler é zero e a solução exacta é 5 então $y_0 = 5$.

$y_{0+1} = y_0 + 1 \times f(t_0, y_0) =$
$y_1 = 5 + 1 \times 5 =$
$\boxed{y_1 = 10}$

C. Auxiliares
- Nota $= f(t,y) = y'$
- Substituindo y' pelo PVI $\boxed{y' = y - yt^2}$

$\rightarrow f(t_0, y_0): y' = y_0 - y_0 . t^2 =$
$y' = 5 - 5 \times 0^2 =$
$y' = 5$

$i=1$ $\quad y_1 = 10$ e $t_1 = 1$

$y_{1+1} = y_1 + 1 \times f(t_1, y_1) =$
$= 10 + 1 \times 0 =$
$\boxed{y_2 = 10}$

$t_1 = t_0 + h$
$= 0 + 1$
$t_1 = 1$

$\rightarrow f(t_1, y_1): y' = y_1 - y_1 \cdot t^2 =$
$= 10 - 10 . 1^2 =$
$= 10 - 10 =$
$= 0$

Método RK2

$K_1 = h \times f(t_i, y_i)$

$K_2 = h \times f(t_{i+1}, y_i + K_1)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), i = 0,1,2,\dots,m-1$

$h = 1$

$y_0 = 5$ → Como o erro do M. RK2 = 0 e a solução exacta é 5 então $y_0 = 5$.

$i=0$ $\quad t_0 = 0$ e $t_1 = 1$ e $y_0 = 5$

$K_1 = 1 \times f(t_0, y_0) =$
$= 1 \times 5 =$
$\boxed{K_1 = 5}$

C Auxiliares
$y' = y_0 - y_0 t_0^2 =$
$= 5 - 5 \times 0^2 =$
$= 5$

$K_2 = h \times f(t_{i+1}, y_i + K_1) =$

$= 1 \times f(t_{0+1}, y_0 + 5) =$

$= 1 \times f(t_1, 5+5) =$

$= 1 \times f(1, 10) =$

$= 0$

C. Auxiliares

$y' = 10 - 10 \cdot 1^2 =$

$= 10 - 10 =$

$= 0$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) =$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(5+0) =$

$= 5 + \frac{1}{2}(5) =$

$= \frac{5}{1 \times 2} + \frac{5}{2} =$

$= \frac{10}{2} + \frac{5}{2} =$

$= \frac{15}{2} =$

$\boxed{y_1 = 7{,}5}$

$\underline{i=1}$ $h = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $y_1 = 7{,}5$

$K_1 = h \times f(t_1, y_1) =$

$= 1 \times f(1, 7{,}5) =$

$= 0$

C. Auxiliares

$y' = 7{,}5 - 7{,}5 \times 1^2 =$

$= 7{,}5 - 7{,}5 =$

$= 0$

$K_2 = h \times f(t_{i+1}, y_i + K_1) =$

$= 1 \times f(t_2, 7{,}5 + 0) =$

$= 1 \times f(2, 7{,}5) =$

$= -22{,}5$

$y' = 7{,}5 - 7{,}5 \times 2^2 =$

$= 7{,}5 - 7{,}5 \times 4 =$

$= 7{,}5 - 30 =$

$= -22{,}5$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) =$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(0 - 22{,}5) =$

$= 7{,}5 + \frac{1}{2}(-22{,}5) =$

$= \frac{7{,}5}{1 \times 2} - \frac{22{,}5}{2} =$

$= \frac{15}{2} - \frac{22{,}5}{2} =$

$\boxed{y_2 = -3{,}75}$

Erros

Euler

$\underline{i=1}$: $|y(t_i) - y_i| = |9{,}73867 - 10| = |-0{,}26133| = \boxed{0{,}26133}$

$\underline{i=2}$: $|y(t_i) - y_i| = |2{,}5671 - 10| = |-7{,}43291| = \boxed{7{,}4329}$

RK2

$\underline{i=1}$: $|y(t_i) - y_i| = |9{,}73867 - 7{,}5| = \boxed{2{,}23867}$

$\underline{i=2}$: $|y(t_i) - y_i| = |2{,}5671 - (-3{,}75)| = \boxed{6{,}3171}$