Aula Teórica (2ª aula à distância)

ED Lineares de ordem n (n = 2) com coeficientes e completa $\rightarrow a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ (1)

$a_i \in \mathbb{R} \wedge b(x) \neq 0$

ED LO_2 homogénea correspondente $\rightarrow a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (2)

Hoje: método da variação das constantes arbitrárias para resolver (1)

Método valores constantes arbitrárias (algoritmo de 3 passos)

1º passo) determinar a sol. geral de (2)

$$y_H = C_1 \times y_1(x) + C_2 \times y_2(x) \cancel{(*)},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(última aula T)

2º passo) determinar uma solução particular y_P de (1)

$$y_P = \underbrace{C_1(x)}_{\text{constantes arbitrárias}} \times y_1(x) + \underbrace{C_2(x)}_{\text{constantes arbitrárias}} \times y_2(x) \quad (4)$$

Método da variação das constantes arbitrárias

3º passo) solução geral de (1)

$$\boxed{y = y_H + y_P} \quad (5)$$

Ex: Aplicando o método anterior determinar a solução geral de

$$\boxed{y'' + y = x} \quad (1)$$

(1) Eq. D. Linear de ordem 2 com coef. constantes e completa
$b(x) = x \neq 0$

4)

1º passo: Estabelecer a EDLO$_2$ homogénea correspondente a

i) $y'' + y = 0$ (2)

ii) $y_H = c_1 \times y_1(x) + c_2 \times y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (3)

iii) Estabelecer a eq. característica de (2)

$\lambda^2 + 1 = 0$ (4)

Determinar as raízes de (4)

$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}}$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 \pm \lambda_2 i$$

iv) Pela tabela SFS (3ª linha)

$N = 0 \pm 1i$

(5)

$\longrightarrow y_1(x) = e^{\lambda_1 x} . sen(\lambda_2 x)$

$y_1(x) = e^{0x} . sen(1x) \Leftrightarrow y_1(x) = sen(x)$

$\longrightarrow y_2(x) = e^{\lambda_1 x} . cos(\lambda_2 x)$

$y_2(x) = e^{0x} . cos(1 + x)$ (6)

V) (5) e (6) $\rightarrow$ (3)

$y_H = c_1 . sen(x) + c_2 . cos(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (7)

2º passo: Aplicar m. v. constantes arbitrárias para determinar uma sol. particular de (1)

$$y_p = c_1(x) + y_1(x) + c_2(x) \times y_2(x)$$

$$\boxed{\begin{matrix} c_1(x) = ? \\ c_2(x) = ? \end{matrix}}$$

$$(=) \; y_p = c_1(x) \,.\, sen(x) + c_2(x) \,.\, cos(x)$$

i) Establecer o sistema de Lagrange

$$\begin{cases} c_1'(x) \,.\, y_1(x) + c_2'(x) \,.\, y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) \,.\, y_1'(x) + c_2'(x) \,.\, y_2'(x) = \dfrac{b(x)}{a_2} \end{cases} (=)$$

$$y'' + y = x$$

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

$$(=) \begin{cases} c_1'(x) \,.\, sen(x) + c_2'(x) \,.\, cos(x) = 0 \\ c_1'(x) \,.\, cos(x) + c_2'(x) \,.\, (-sen(x)) = \dfrac{x}{1} \end{cases}$$

$$(=) \begin{cases} c_1'(x) \,.\, sen(x) + c_2'(x) \, cos(x) = 0 \\ c_1'(x) \,.\, cos(x) - c_2'(x) \,.\, sen(x) = x \end{cases} \quad (9)$$

ii) Establecer a equ. matricial de (9)

$$\begin{bmatrix} sen(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A \quad + \quad c_1'(x) \quad = b$$

iii) Resolução de (10) pela regra de Cramer

- $$det(A) = \begin{vmatrix} sen\,x & cos\,x \\ cos\,x & -sen\,x \end{vmatrix} = -(sen^2 x + cos^2 x) = -1 \neq 0$$

- $$c_1'(x) = \frac{|b \quad :|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & cos\,x \\ x & -sen\,x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{x \,.\, cos\,x}{+1} = x \,.\, cos(x)$$

- $$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} sen\,x & 0 \\ cos\,x & x \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{x \,.\, sen\,x}{-1} = -x \,.\, sen(x)$$

iv) Integral (11) e (12),

$$c_1(x) = \int x . \cos x \, dx$$

Primitivação P/ partes

$$= \int \cos x \, dx + x - \int \int \cos x \, dx + (x)' \, dx$$

$$= \operatorname{sen} x + x + \cos x + \cancel{C}$$

(13)

P.P.P

$$c_2(x) = \int -x . \operatorname{sen} x \, dx = \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_2(x) = x . \cos x - \operatorname{sen}(x) \quad (14)$$

v) $(13), (14) \curvearrowright 8$

$$y_p = c_1(x) . y_1(x) + c_2(x) . y_2(x)$$

$$\Leftrightarrow y_p = (x . \operatorname{sen}(x) + \cos x) . \operatorname{sen} x + (x . \cos x - \operatorname{sen} x) \cos x$$

$$\Leftrightarrow y_p = x . \operatorname{sen}^2 x + \cos x . \operatorname{sen} x$$

$$\Leftrightarrow y_p = x (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow y_p = x \quad (15)$$

3º passo: $y = y_H + y_p$

$$\Leftrightarrow y = c_1 . \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \, , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

16

Solução geral da ED dada

$$y'' + y = x$$