Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Teste intercalar A**

[1.5] **1.** Determine um valor aproximado de $\sqrt{e}$ utilizando o polinómio de Taylor de grau 2.
Indique um majorante para o erro cometido.

2. Considere a equação não linear $4\cos x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a $\pi/2$ no qual a equação dada tem uma única raiz real negativa.

[1.0] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção duas vezes. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Recorrendo à figura 1, aproxime a raiz x_r efetuando uma iteração. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

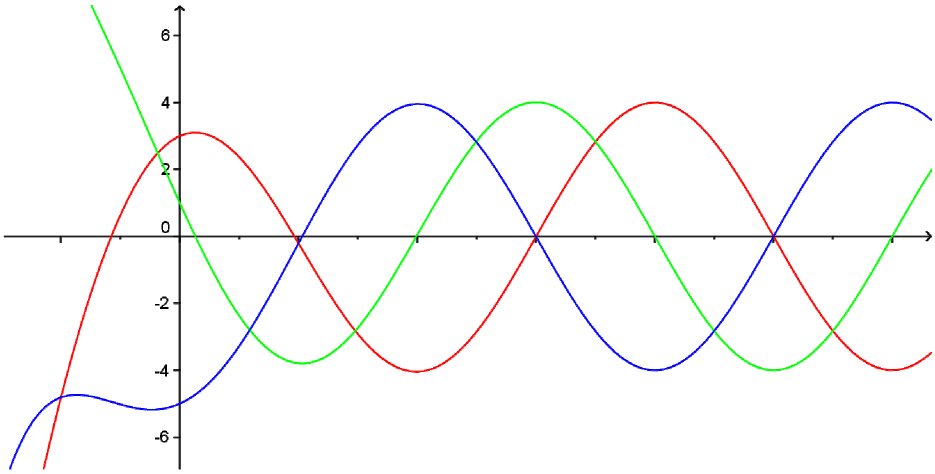

Figura 1: Gráficos de f, f' e f''

[1.5] **(d)** Qual das seguintes funções em Matlab traduz corretamente o método da Bisseção? Justifique a sua resposta assinalando os erros na função incorreta.

```
function x = Biss_v1(f,a,b,kmax,tol)
k=1;
while(k<=kmax),
  x(k)=(a+b)/2;
  if (abs(b-a)/2<tol) return; end
  if (f(a)*f(x(k))<0) b=x(k);
  else a=x(k);
  end
  k=k+1;
end
```

```
function x = Biss_v2(f,a,b,kmax,tol)
k=1;
while(k<=kmax),
  x(k)=(b-a)/2;
  if (abs(a-b)<2*tol) return; end
  if (f(a)*f(x(k))<0) a=x(k);
  else b=x(k);
  end
  k=k+1;
end
```

3. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{, se } -1\le x<0\\ 1+\sin x & \text{, se } 0\le x\le \frac{3}{2}\pi\end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=-f(x)$$

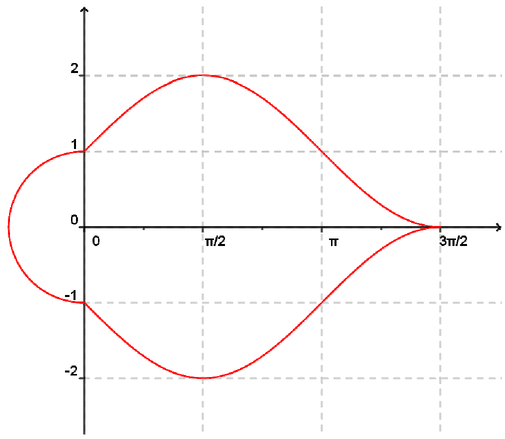

Figura 2: Gráficos de f e g

[1.0] **(a)** Defina polinómio interpolador.

[3.0] **(b)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 3 da função $f(x)$ para $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Redesenhe a figura 2, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x\in\left[-1,0\right]$ e por uma interpolação quadrática para $x\in\left[0,\pi\right]$.

[3.5] **(c)** Utilize a regra dos Trapézios com $n=1$ e a regra de Simpson simples, para aproximar o valor dos integrais $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ e $\int_{0}^{\pi} -g(x)dx$ respetivamente. Recorrendo à figura 2, interprete os resultados obtidos.

4. Considere o problema de valor inicial $y'=2ty,\quad y(1)=1,\quad t\in\left[1,1.5\right]$

[1.5] **(a)** Obtenha uma aproximação para $y(1.5)$ usando o método de Euler com um passo $h=0.25$.

[2.0] **(b)** Mostre que $y=\exp(t\,\hat{}\,2-1)$ é a solução exacta do problema. Complete a tabela seguinte, compare a precisão do resultado obtido na alínea anterior com o valor exato de $y(1.5)$ e interprete os resultados da tabela.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK4
0	1					0	0	0
1				1.7188		0.2551		0.0006
2	1.5	3.4903			3.4865	1.0528	0.1871	

[1.5] **(c)** Alguma das funções seguintes, implementadas em Matlab, traduz corretamente o método de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2) para a resolução de um PVI? Justifique a sua resposta, efetuando as correções que achar convenientes e necessárias.

```
function y = RK2_v1(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=y0;
for i=1:n
    k1=h*f(t(1),y(i));
    k2=f(t(i+1),y(i));
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

```
function y = RK2_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
t(1)=a;
y(1)=0;
for i=1:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1=f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+k1+k2*0.5;
end
```

[0.5] **(d)** Qual das figuras seguintes representa graficamente a solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

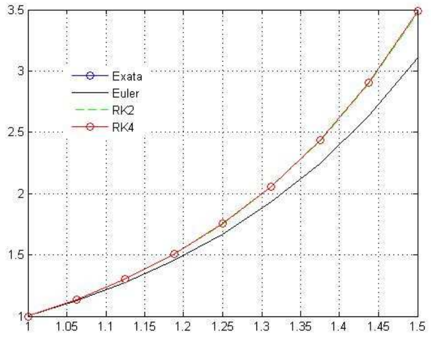

Figura 3

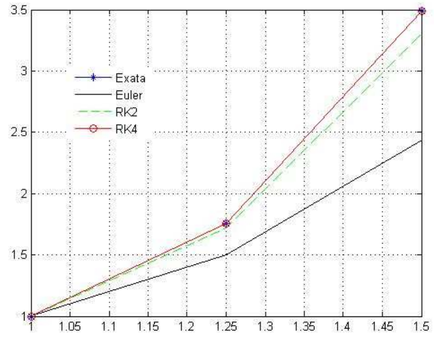

Figura 4

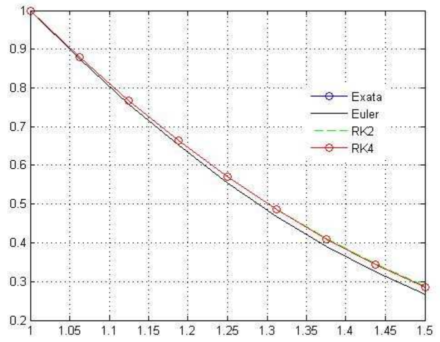

Figura 5

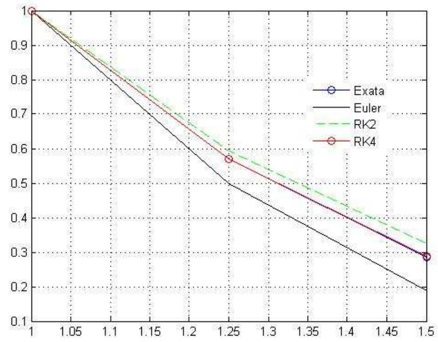

Figura 6

[1.0] **(e)** A *script* seguinte traduz correctamente a resolução em Matlab do PVI dado? Justifique a sua resposta, assinalando e corrigindo erros que possam existir.

```
clear; clc;

strF = '-2*y*t'
f    = @(t,y) eval(vectorize(strF));

a = 1; b = 1.5;   y0 = 1;
n = 2; h = b-a/n; t  = b:h:a;

yEuler = N_Euler(f,a,b,n,y0);
yRK2   = N_RK2(f,a,b,n,y0);   yRK4 = N_RK4(f,a,b,n,y0);

sExacta = dsolve(['Dy=',strF],['y(',num2str(1),')=',num2str(0)]);
yExacta = eval(vectorize(char(sExacta)));

erroEuler = abs(yExacta-yEuler); erroRK2 = abs(yExacta-yRK2);
erroRK4   = abs(yExacta-yRK4);
y = [t.',yExata.',yEuler.',yRK2.',yRK4.',ErroEuler.',ErroRK2.',ErroRK4.']

plot(t,yExacta,'-ob')
hold on
plot(t,yEuler,'-k')
plot(t,yRK2,'--g')
plot(t,yRK4,'-or')
legend('Exacta','Euler','RK2','RK4')
grid on
hold off
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome utilizado no LVM:____

Curso:

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Frequência às aulas de AM2:

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Actividades de aprendizagem e avaliação:

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At00_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At01_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At02_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At03_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 1 vez)