O problema e exercício do Lápis

Ficha: sólidos de AM2
Docente: Arménio Correia | armenioc@isec.pt

4. A figura 4 representa um sólido composto por três partes:

- segmento de esfera de raio $r = \sqrt{29}$
- cilindro de raio $r = 2$ e altura $h = 3$
- cone de raio $r = 2$ e altura $h = 2$

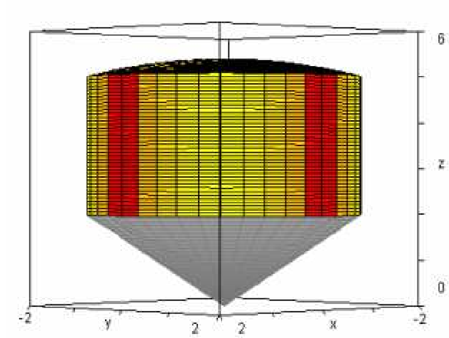


Figura 4

(a) Prove, usando coordenadas cilíndricas e/ou esféricas, que o volume de um cilindro de diâmetro d e altura h é $\frac{1}{4}\pi d^2 h$ e o volume de uma esfera é igual a $\frac{1}{6}\pi d^3$.

(b) Justifique, que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde :

$S_1 = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 2 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \rho \le z \le 2\}$

$S_2 = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 2 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 2 \le z \le 5\}$

$S_3 = \{(R,\theta,\varphi) : 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le \varphi \le \arctan(\frac{2}{5}) \wedge \frac{5}{\cos\varphi} \le R \le \sqrt{29}\}$

associando as definições de S_1, S_2 e S_3 a duas mudanças de coordenadas em 3D.

(c) Calcule o volume do sólido.

(d) Complete os algoritmos e, associe-os a duas transformações/mudança de variáveis em 3D

Algoritmo 1:

Ler (x,y,z)
Se _?_
Então $R \leftarrow \sqrt{\_?\_}$
 $\theta \leftarrow \arctan \frac{\_?\_}{x}$
 $\varphi \leftarrow \_?\_$
 Escrever (R,θ,φ)
Senão _?_

Algoritmo 2:

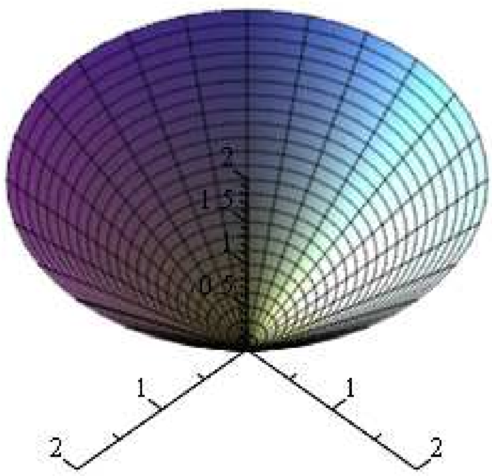
Ler (R,θ,φ)
Se $R \ge \_?\_$ e $\_?\_ \le \theta \le \_?\_$ e $\_?\_ \le \varphi \le \_?\_$
Então $x \leftarrow R * \sin \_?\_ * \cos\theta$
 $y \leftarrow R * \sin\varphi * \_?\_$
 $z \leftarrow \_?\_ * \cos\varphi$
 Escrever (x,y,z)
Senão _?_

```
> restart
> with(plots) :
```

```
> ?cylindrical
> ?spherical
```

S1 - Bico do Lápis

```
> addcoords(z_cylindrical, [z, r, theta], [r·cos(theta), r·sin(theta), z])
> plot3d(r, r = 0 ..2, theta = 0 ..2·Pi, coords = z_cylindrical, axes = normal, scaling = constrained)
```

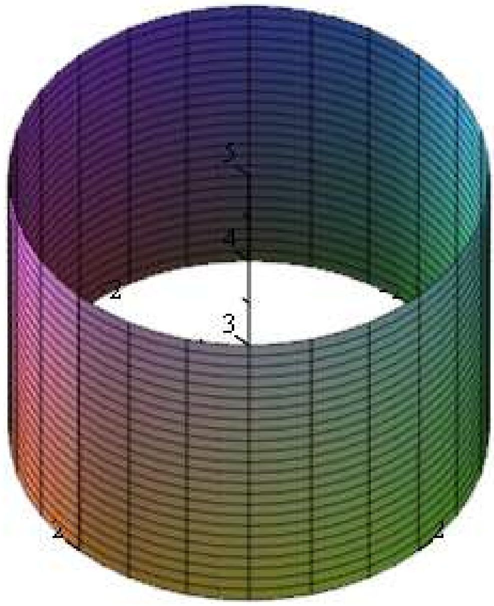



```
> S1 := plot3d(r, r = 0 ..2, theta = 0 ..2·Pi, coords = z_cylindrical, axes
    = normal, scaling = constrained)
```

$$S1 := PLOT3D(\ldots) \tag{1.1}$$

S2 - Parte central do Lápis

```
> plot3d(2, theta = 0 ..2·Pi, z = 2 ..5, coords = cylindrical, axes
    = normal, scaling = constrained)
```

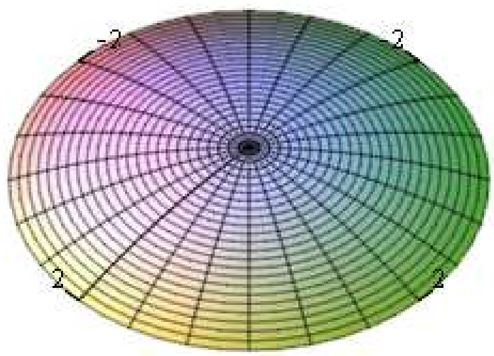


> $S2 := plot3d(2, \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}, z = 2..5, coords = cylindrical, axes = normal, scaling = constrained)$

$$S2 := PLOT3D(\ldots) \tag{2.1}$$

S3 - Cabeça do Lápis

> $plot3d\left(\text{sqrt}(29), \text{theta} = 0..2\cdot\text{Pi}, \text{phi} = 0..\arctan\left(\frac{2}{5}\right), coords = spherical, axes = normal, scaling = constrained\right)$

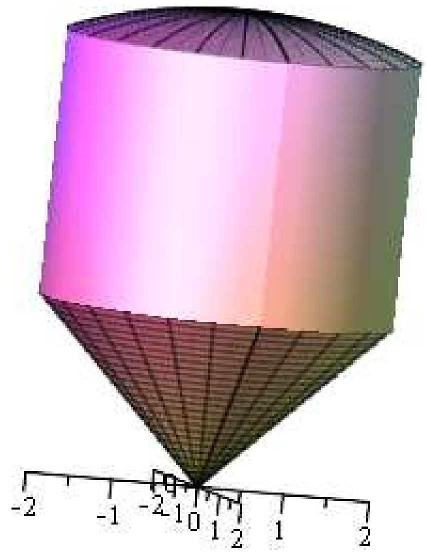



```
> S3 := plot3d(sqrt(29), theta = 0 ..2·Pi, phi = 0 ..arctan(2/5), coords
    = spherical, axes = normal, scaling = constrained)
```

$$S3 := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(3.1)}$$

S=S1US2US3 - Lápis Completo

```
> display({S1, S2, S3})
```



>

Volume do Lápis

> $V1 := \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2$

$$V1 := \frac{8}{3}\pi \tag{4.1.1}$$

> $V2 := \pi \cdot 2^2 \cdot 3$

$$V2 := 12\pi \tag{4.1.2}$$

> $V3 := \int_0^{2\cdot\pi}\int_0^{\arctan\left(\frac{2}{5}\right)}\int_{\frac{5}{\cos(\mathrm{phi})}}^{\mathrm{sqrt}(29)} r^2 \cdot \sin(\mathrm{phi})\, dr\, d\mathrm{phi}\, d\mathrm{theta}$

$$V3 := \frac{58}{3}\sqrt{29}\,\pi - \frac{310}{3}\,\pi \tag{4.1.3}$$

> $V := V1 + V2 + V3$

$$V := -\frac{266}{3}\pi + \frac{58}{3}\sqrt{29}\,\pi \qquad \textbf{(4.1.4)}$$

```
> simplify(V)
```

$$-\frac{266}{3}\pi + \frac{58}{3}\sqrt{29}\,\pi \qquad \textbf{(4.1.5)}$$

```
> evalf(V)
```

$$48.5266724 \qquad \textbf{(4.1.6)}$$

```
>
```