Maria Leonor Almeida Gouveia Oliveira Alves
Paulo Alexandre Mendes Martins Rosa

Cap1 - dos Apontamentos de AM2
Eng. Electrotécnica - ISEC, 2006/2007

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

A teoria das equações diferenciais constitui um dos campos mais importantes da Matemática, pela enorme diversidade de áreas científicas e técnicas em que se aplica. Questões tão simples e naturais como:

- *Quantos habitantes tem determinada região em cada instante?*

- *Quantas toneladas de determinado peixe podem ser pescadas em certa região sem exterminar a espécie?*

- *Uma bola lançada verticalmente demora mais tempo a subir ou a descer?*

- *Ao fim de quanto tempo é que as vendas de determinado produto lançado no mercado atingem um certo valor?*

podem ser modeladas e respondidas através de equações diferenciais.

As equações diferenciais modelam e permitem explicar processos com comportamento dinâmico. As palavras *equação* e *diferencial* sugerem a resolução de uma equação em que estão envolvidas derivadas. Neste capítulo iremos estudar alguns tipos de equações diferenciais e respectivos métodos de resolução. Começaremos por apresentar alguns conceitos básicos e terminologia específica deste assunto.

1.1 Definições e Terminologia

Definição 1.1.1 *Uma equação em que, para além de uma função incógnita, figuram uma ou mais das suas derivadas, chama-se* **equação diferencial**.

Exemplo 1.1.1 As seguintes equações são exemplos de equações diferenciais:

(1) $\frac{dy}{dx} + y + x = 0$;

(2) $x^2\,dy + 5y\,dx = 2\,dx$;

(3) $y'' + y = e^x$;

(4) $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = e^{xt}$;

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t + y.$

Podemos classificar as equações diferenciais quanto ao **tipo**, quanto à **ordem** e quanto à **linearidade**.

Classificação quanto ao tipo

Definição 1.1.2 *Uma equação diferencial diz-se* **ordinária** *se a função incógnita depender apenas de uma variável.*

Exemplo 1.1.2 São exemplos de equações diferenciais ordinárias as seguintes equações:

(1) $L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t);$

(2) $L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E(t).$

Definição 1.1.3 *Uma equação diferencial diz-se de* **derivadas parciais** *se a função incógnita depender de duas ou mais variáveis.*

Exemplo 1.1.3 São exemplos de equações com derivadas parciais as seguintes equações:

(1) $\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial y^2}{\partial v^2} = 0$ — equação de Laplace;

(2) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ — equação da condução e difusão do calor.

Neste curso estudaremos apenas equações diferenciais ordinárias. Assim, sempre que nos referirmos a equações diferenciais, dispensaremos esta classificação sem que haja lugar a qualquer ambiguidade.

Classificação quanto à ordem

Definição 1.1.4 *Chama-se* **ordem** *de uma equação diferencial à maior ordem das derivadas que figuram na equação.*

Exemplo 1.1.4 A equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y = \sin x$ tem ordem dois, ao passo que a equação $y\,dx + 4x\,dy = 0$ (que se pode reescrever na forma equivalente $y + 4x\frac{dy}{dx} = 0$) tem ordem um.

A forma geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n é

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

em que y é uma função real da variável x (definida num certo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$) e F é uma função real de $n+2$ variáveis $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ [1].

[1] No texto utilizaremos, para a derivada de ordem n de $y = y(x)$, indistintamente $y^{(n)}$ ou a notação de Leibniz $\frac{d^ny}{dx^n}$. Em alguns textos de Engenharia e Física, é frequente ver-se a notação $\dot{y}$ e $\ddot{y}$ para representar y' e y'', respectivamente.

À relação traduzida por (1.1) é usual chamar-se **forma implícita** da equação diferencial.

Uma equação diferencial de ordem n diz-se na *forma normal* quando se apresentar explicitada em relação à derivada de maior ordem, isto é, quando se puder escrever na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{1.2}$$

À relação (1.2) é usual chamar-se equação diferencial de ordem n na **forma explícita**.

Classificação quanto à linearidade

Definição 1.1.5 *Chama-se* **equação diferencial linear de ordem** n *a uma equação da forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{1.3}$$

em que $a_n \neq 0$ *e* $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ *são funções definidas num intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$.

A definição 1.1.5 permite observar que uma equação é linear se se verificarem as seguintes condições:

- a incógnita e as suas derivadas que figuram na equação têm expoente um;
- não há produtos entre a incógnita e as suas derivadas ou entre derivadas da incógnita;
- não há funções transcendentes que envolvam a incógnita ou as suas derivadas.

Em resumo, a função F é um polinómio de grau *um* em $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Exemplo 1.1.5 São exemplos de **equações lineares**:

(1) $L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$. Como $I = \frac{dQ}{dt}$, esta equação pode escrever-se sob a forma de uma equação de segunda ordem:

$$L\frac{d^2Q}{dt} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t);$$

(2) $e^x y'' + \cos x\, y' + y = \arctan x$;

(3) $y'' - 2y' + y = 0$;

(4) $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} - 5y = e^t$.

São exemplos de **equações não lineares**:

(5) $(1-y)y' + 2y = e^x$, por aparecer o produto yy';

(6) $y'' + 3(y')^2 + 4y = 0$, por ter um termo não linear em y';

(7) $y'' + \cos y = 0$, por ter uma função transcendente em y.

As equações lineares podem ainda classificar-se quanto aos coeficientes em equações lineares de **coeficientes constantes** se $a_i(x) = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, forem constantes reais, e de **coeficientes variáveis**, caso contrário. A título de exemplo, refira-se que a equação (2) do exemplo 1.1.5 é de coeficientes variáveis; a equação (3) do mesmo exemplo é de coeficientes constantes.

Se o segundo membro da equação linear (1.3) for identicamente nulo, isto é, se $g(x) = 0$ para todo o $x \in I$, a equação diz-se **homogénea** ou **incompleta**; caso contrário, a equação diz-se **não homogénea** ou **completa**. Assim, as equações (1), (2) e (4) do exemplo 1.1.5 são completas; a equação (3) do mesmo exemplo é homogénea.

1.2 Soluções. Tipos de Soluções

Um dos principais objectivos deste capítulo é a *resolução* (ou seja, a *determinação da solução*) de equações diferenciais. Passaremos a definir solução de uma equação diferencial ordinária.

Definição 1.2.1 *Considere-se a equação diferencial ordinária de ordem n*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Diz-se que uma função ϕ definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial se:

1. *ϕ admitir derivadas, $\phi', \ldots, \phi^{(n)}$, em I;*
2. *$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\right)$ estiver definida e verificar a identidade*

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0,$$

para todo o ponto $x \in I$.

Por outras palavras, uma função ϕ é solução de uma equação diferencial de ordem n, no intervalo I, se for derivável pelo menos até à ordem n e transformar a referida equação diferencial numa identidade em I.

Exemplo 1.2.1 As funções $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ são ambas soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

em $I = \mathbb{R}$. De facto,

1. as funções y_1 e y_2 são infinitamente deriváveis em $\mathbb{R}$;
2. como $y_1'(x) = \cos x$ e $y_1''(x) = -\sin x$, substituindo na equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}$ por y_1'' e y por y_1, temos

$$-\sin x + \sin x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

O mesmo raciocínio pode ser feito relativamente à função y_2, sendo a verificação deixada como exercício [2].

Existem casos em que não é possível determinar, de forma explícita, uma expressão para as soluções de uma equação diferencial.

Definição 1.2.2 *Uma expressão da forma*

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1.4}$$

é chamada **solução implícita** *da equação diferencial (1.1) em $I \subseteq \mathbb{R}$ se existir pelo menos uma função ϕ que satisfaça a relação (1.4) e que seja solução da equação diferencial em I.*

[2] Observe-se que a função identicamente nula, $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é solução da equação diferencial apresentada. A esta solução chamamos **solução trivial** da equação diferencial.

Exemplo 1.2.2 A relação $x^2 + y^2 = 25$ define implicitamente uma solução da equação

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.5}$$

no intervalo $I =]-5, 5[$. De facto, a relação dada define duas funções

$$y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

e

$$y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

que satisfazem $x^2 + \phi_1^2 = 25$ e $x^2 + \phi_2^2 = 25$ e que são soluções explícitas da equação (1.5) no intervalo $]-5, 5[$ (ver figura 1.1).

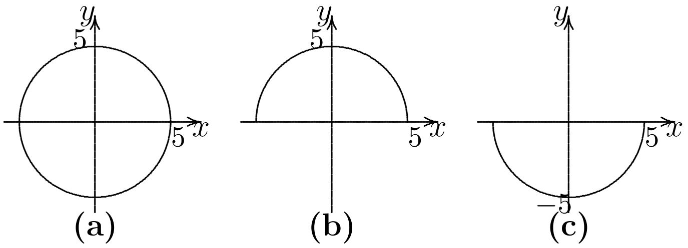

Figura 1.1: Gráficos da solução implícita **(a)** e das funções $y = \phi_1(x)$ **(b)** e $y = \phi_2(x)$ **(c)**.

Exemplo 1.2.3 A resolução das equações diferenciais que se seguem pode ser feita recorrendo a simples primitivação:

1. $y' = 2x$, $x \in \mathbb{R}$: tem-se $y = x^2 + c$, onde c é uma constante arbitrária;
2. $y'' = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$: tem-se $y = e^{-x} + c_1 x + c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias;
3. $y''' = 24x$, $x \in \mathbb{R}$: tem-se $y = x^3 + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

Se for possível determinar uma expressão que permita estabelecer as soluções de uma equação de ordem n, esta depende, em geral, de n constantes arbitrárias, e portanto a equação tem uma infinidade de soluções.

O conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial num dado intervalo é chamado **integral geral** ou **solução geral** da equação nesse intervalo.

Existem ainda equações diferenciais que possuem soluções que não se enquadram na expressão do integral geral. A essas soluções chamamos **soluções singulares**.

Exemplo 1.2.4 A equação diferencial $(y')^2 - xy' + y = 0$ admite a **solução geral** $y = cx - c^2$ (como pode facilmente ser constatado por substituição) que consiste numa família de rectas de declive c e ordenada na origem $-c^2$.

Por outro lado, é também fácil, por substituição, verificar que $y = \frac{x^2}{4}$ é uma solução da equação diferencial dada, que não se enquadra na expressão da solução geral. Desta forma, dizemos que $y = \frac{x^2}{4}$ é uma **solução singular** da equação diferencial (figura 1.2).

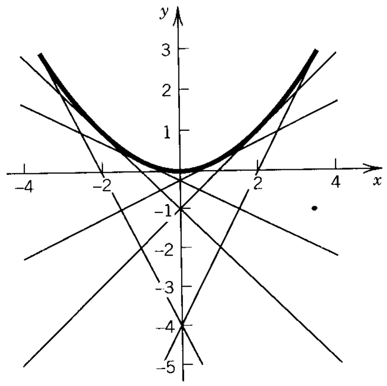

Figura 1.2: Solução geral (família de rectas), e solução singular (parábola) da equação diferencial $(y')^2 - xy' + y = 0$.

Uma equação diferencial da forma

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

pode ser interpretada como definindo um declive, $f(x, y)$, em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual f está definida. Se admitirmos que a equação tem uma família de soluções da forma

$$y = F(x, c),$$

em que c é uma constante real arbitrária, a expressão anterior pode ser interpretada geometricamente como sendo uma família de curvas no plano XOY. Estas curvas são chamadas **curvas integrais** e possuem, em cada ponto (x, y), tangentes com o mesmo declive, $f(x, y)$. Às linhas com equação da forma

$$f(x, y) = \text{ constante}$$

chamamos **linhas isóclinas** ou **isoclínicas** (linhas com igual inclinação) da equação diferencial (1.6).

Exemplo 1.2.5 Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$y' = xy.$$

As linhas isóclinas desta equação são da forma $xy = k$ (k constante), isto é, representam hipérboles para cada valor de k.

Existem equações diferenciais que não admitem soluções reais, por exemplo, a equação $|y'| + 1 = 0$. Existem ainda outras que apenas admitem uma solução, por exemplo, a equação $|y'| + |y| = 0$, que apenas admite a solução $y = 0$ (solução trivial).

Há ainda outras situações em que não é possível encontrar uma expressão para a solução. Em alguns desses casos podem, no entanto, conhecer-se algumas propriedades e comportamento da solução, como por exemplo, a periodicidade, a limitação ou o limite quando a variável independente tende para infinito.

Em muitas aplicações que envolvem equações diferenciais, é frequente exigir não apenas que a incógnita satisfaça a equação diferencial, mas também certas condições auxiliares. Estas condições especificam valores da função e algumas das suas derivadas em um ou mais pontos.

Definição 1.2.3 *Chama-se* **problema de valores iniciais** *(ou* **problema de Cauchy***) a todo o problema que consiste numa equação diferencial satisfazendo a condições dadas num único ponto do intervalo em que a equação é considerada. Estas condições chamam-se* **condições iniciais** [3].

Para uma equação de ordem n, um problema de valores iniciais consiste então em resolver, num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, a equação

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

sujeita às condições

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

em que x_0 é um ponto pertencente ao intervalo I, e $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são constantes reais.

Exemplo 1.2.6

1. A equação $y'' - 4y = e^x$ juntamente com as condições $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$ formam um problema de valores iniciais, cujas condições iniciais são dadas no ponto $x = 0$.
2. Para o problema de valor inicial

   $$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1,$$

   a equação diferencial associada admite uma família de soluções dependentes de um parâmetro, c, que é da forma

   $$y = \frac{c}{x}.$$

   Para cada valor de c, a solução da equação diferencial representa, geometricamente, uma hipérbole (ver figura 1.3). A condição inicial impõe que a solução do problema seja a curva desta família que passa pelo ponto $(1, 1)$. Assim, determinaremos c por forma a que, para $x = 1$, tenhamos $y = 1$, ou seja, $c = 1$. À solução única do problema de valor inicial, $y = \frac{1}{x}$, chama-se **solução particular**. Esta curva encontra-se representada a cheio na figura 1.3.

Definição 1.2.4 *Chama-se* **problema de valores de fronteira** *(ou simplesmente* **problema de fronteira***) a todo o problema que consiste numa equação diferencial satisfazendo a condições dadas em mais do que um ponto do intervalo em que a equação é considerada. Estas condições chamam-se* **condições de fronteira**.

Exemplo 1.2.7 A equação $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ juntamente com as condições $y(0) = 1$ e $y(\pi) = 5$ constituem um problema de valores de fronteira.

Neste texto estudaremos apenas os problemas de valores iniciais.

[3] Esta designação resulta de, inicialmente, estes problemas serem dependentes do tempo, e as condições serem dadas no instante $t = 0$.

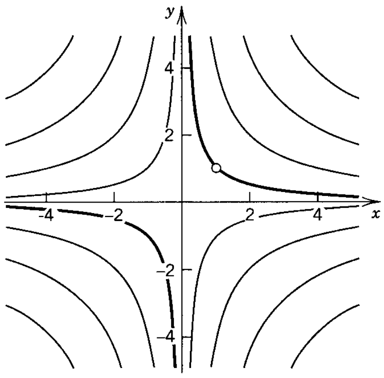

Figura 1.3: Família de hipérboles que constitui a solução geral da equação diferencial, e solução do problema de valor inicial (a cheio).

1.3 Existência e Unicidade de Solução

Num problema de valores iniciais, duas questões fundamentais podem ser colocadas:

1. *Existe solução?*
2. *Se existir, será tal solução única?*

O teorema que enunciamos em seguida permite responder a estas questões, no caso de uma equação diferencial de primeira ordem.

Teorema 1.3.1 *Seja*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a \leq x \leq b, \, c \leq y \leq d\},$$

e sejam $x_0 \in]a, b[$ *e* $y_0 \in]c, d[$.
Se f *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *forem contínuas em* A [4], *então existe e é única a solução,* $y = \phi(x)$, *do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

definida em algum intervalo aberto da forma

$$]x_0 - h, x_0 + h[\subset [a, b].$$

A demonstração deste resultado não se enquadra no âmbito deste texto. Na figura 1.4 é feita a representação geométrica da região A, bem como a interpretação geométrica das condições do enunciado.

[4] O símbolo $\frac{\partial f}{\partial y}$ significa *derivada parcial de* f *em ordem a* y, e obtém-se derivando a função f como função de y, e considerando as restantes variáveis como parâmetros.

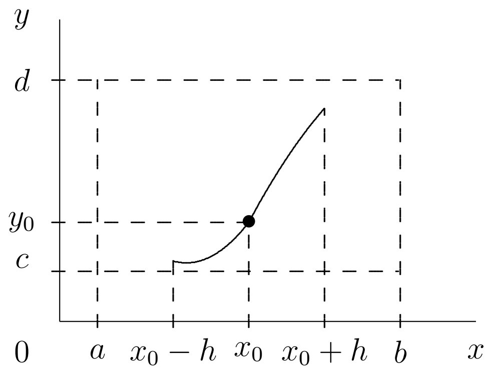

Figura 1.4:

1.4 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Começaremos por apresentar métodos de resolução de algumas equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, definiremos alguns tipos específicos de equações, e apresentaremos métodos de resolução analítica.

Existem equações que, não podendo ser resolvidas analiticamente, podem fornecer expressões que se utilizam para obter soluções aproximadas.

1.4.1 Equações de Variáveis Separáveis

Definição 1.4.1 *Uma equação diferencial de primeira ordem , $F(x, y, y') = 0$, que possa ser representada na forma*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1.7}$$

chama-se **equação de variáveis separáveis**.

Se $h(y) \neq 0$, a equação (1.7) pode reduzir-se à equação de **variáveis separadas**

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx,$$

cuja resolução passa pela integração directa de ambos os membros, tendo-se

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx.$$

Agora, o problema resume-se ao cálculo das primitivas de ambos os membros da expressão anterior, pelo que

$$H(y) + c_1 = G(x) + c_2,$$

onde H e G representam primitivas das funções $\frac{1}{h}$ e g, respectivamente, e c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Notemos que, substituindo a constante $c_2 - c_1$ por uma única constante c, podemos ainda escrever

$$H(y) = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.4.1

1. A equação
$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$$
é uma equação de variáveis separáveis que se pode escrever na forma
$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}\,dx,$$
desde que $y \neq 0$. Integrando ambos os membros tem-se $\log|y| = 2\log|x+1| + k$, [5] ou seja
$$\log|y| = \log(x+1)^2 + k.$$
Desta forma,
$$|y| = e^k(x+1)^2,$$
e portanto
$$y = \pm e^k(x+1)^2. \tag{1.8}$$
Como $\pm e^k$ pode tomar qualquer valor excepto zero, o conjunto de soluções descrito por (1.8) pode representar-se na forma
$$y = c(x+1)^2, \quad c \neq 0.$$
No entanto, é fácil verificar que $y = 0$ é também solução da equação diferencial. Logo, podemos afirmar que
$$y = c(x+1)^2, \quad c \in \mathbb{R},$$
é a solução geral da equação diferencial dada.

2. Consideremos o problema de valor inicial
$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad y(2) = -1.$$
Separando as variáveis da equação diferencial, e supondo que $y \neq 0$, temos
$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx.$$
Primitivando ambos os membros, podemos escrever
$$-\frac{1}{y} = x^2 + c,$$
ou seja,
$$y = -\frac{1}{x^2+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
A condição inicial permite-nos determinar o valor da constante c. De facto, para $x = 2$ teremos que ter $y = -1$, pelo que $-1 = -\frac{1}{4+c}$. Finalmente, sendo $c = -3$, a solução particular do problema de valor inicial dado é
$$y = \frac{1}{3-x^2}.$$

[5] Neste texto utilizaremos $\log x$ para representar o logaritmo neperiano de x, $\log_e x$. Para o logaritmo de base $b \neq e$ será utilizada a notação $\log_b$.

1.4.2 Equações Homogéneas

Definição 1.4.2 *Uma equação diferencial de primeira ordem , $F(x, y, y') = 0$, que possa ser representada na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.9}$$

chama-se **equação homogéna**.

Uma equação homogénea pode ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis através de uma mudança de variável, como se mostra no resultado seguinte:

Teorema 1.4.1 *A mudança de variável $y = ux$ transforma a equação $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ numa equação de variáveis separáveis.*

Demonstração: Seja $y = ux$. Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u.$$

Assim, substituindo na equação homogéna (1.9), temos

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u),$$

que é uma equação de variáveis separáveis.

Separando as variáveis na equação diferencial anterior, obtemos

$$x\,du = (f(u) - u)\,dx,$$

ou seja

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad f(u) - u \neq 0.$$

■

Em resultado do teorema anterior, para resolver a equação homogénea (1.9), procede-se da seguinte forma:

1. Efectuar a mudança de variável definida por $y = ux$;
2. Resolver a equação de variáveis separáveis obtida no passo anterior;
3. Retornar à variável inicial, y, substituindo u por $\frac{y}{x}$.

Exemplo 1.4.2

1. Consideremos a equação diferencial

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2.$$

Esta equação pode representar-se na forma

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}.$$

Efectuando na equação anterior a mudança de variável definida por $u = \frac{y}{x}$, e notando que $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$, temos

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2}{u} + \frac{3}{2}u,$$

ou seja,

$$\frac{2u}{4+u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

A resolução desta equação de variáveis separáveis conduz-nos a

$$4 + u^2 = e^k|x|.$$

Substituindo u por $\frac{y}{x}$ e e^k por c (constante arbitrária), temos

$$4 + \frac{y^2}{x^2} = c|x|,$$

ou seja

$$4x^2 + y^2 = cx^2|x|.$$

A solução da equação pode ainda ser escrita na forma implícita

$$4x^2 + y^2 = cx^3, \quad c \in \mathbb{R}$$

já que a constante c pode "absorver" o sinal de x.

2. Consideremos o problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad y(1) = 0.$$

A equação diferencial dada pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Fazendo a mudança de variável definida por $y = ux$ e notando uma vez mais que $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$, temos

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1 - u^2}.$$

A resolução desta equação de variáveis separáveis conduz-nos a

$$\arcsin u = \log|x| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Retornando à variável inicial, y, temos

$$\arcsin\frac{y}{x} = \log|x| + k.$$

Numa vizinhança de $x = 1$, vale $x > 0$, pelo que podemos considerar $\log x$ no integral geral (para valores de $x > 0$). A condição inicial permite-nos determinar o valor da constante k. De facto, para $x = 1$ teremos que ter $y = 0$, pelo que $\arcsin 0 = \log 1 + k$. Finalmente, sendo $k = 0$, a solução particular do problema de valor inicial dado é $\frac{y}{x} = \sin(\log x)$, e portanto

$$y = x\sin(\log x).$$

1.4.3 Equações Lineares de Primeira Ordem

Definição 1.4.3 *Uma* **equação diferencial linear de primeira ordem** *é uma equação da forma*

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{1.10}$$

Estas equações diferenciais podem ser resolvidas por diversos métodos. Desenvolveremos de seguida o **método do factor integrante**. Define-se factor integrante, $\mu(x)$, por

$$\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1.10) por $\mu(x)$ obtemos

$$e^{\int a(x)\,dx}y' + e^{\int a(x)\,dx}a(x)y = e^{\int a(x)\,dx}b(x).$$

Ora, notando que o primeiro da equação anterior é

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right),$$

temos que

$$\mu(x)y = \int b(x)\mu(x)\,dx,$$

pelo que $y = \frac{1}{\mu(x)}\int b(x)\mu(x)\,dx + \frac{c}{\mu(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.4.3 Consideremos a equação diferencial $y'+y = 3x$. Claramente, tem-se $a(x) = 1$ e $b(x) = 3x$. Assim, o factor integrante será

$$\mu(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x.[6]$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada por $\mu(x) = e^x$, obtemos

$$e^x y' + e^x y = 3xe^x,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = 3xe^x.$$

Segue-se que

$$e^x y = \int 3xe^x\,dx,$$

ou seja

$$e^x y = 3(x-1)e^x + c.$$

Finalmente, tem-se

$$y = 3(x-1) + ce^{-x},\ c \in \mathbb{R}.$$

[6] A omissão da constante de integração deve-se ao facto de apenas ser necessário calcular **uma** primitiva de $a(x)$, pelo que, por simplicidade, se pode considerar nula tal constante.

1.4.4 Equações de Bernoulli

Definição 1.4.4 *Uma* **equação diferencial de Bernoulli** *é uma equação da forma*

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \tag{1.11}$$

para algum $n \in \mathbb{Q} \backslash \{0, 1\}$.

Teorema 1.4.2 *Uma equação diferencial de Bernoulli transforma-se numa equação diferencial linear de primeira ordem através da mudança de variável definida por*

$$u = y^{1-n}. \tag{1.12}$$

Demonstração: Consideremos uma equação diferencial de Bernoulli traduzida pela equação (1.11). Multiplicando ambos os membros desta equação por y^{-n} obtemos a equação

$$y'y^{-n} + a(x)y^{1-n} = b(x). \tag{1.13}$$

Ao efectuarmos a mudança de variável definida por $u = y^{1-n}$ temos $u' = (1-n)y^{-n}y'$, pelo que $y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}u'$. Substituindo em (1.13), podemos escrever

$$\frac{1}{1-n}u' + a(x)u = b(x),$$

ou, o que é o mesmo,

$$u' + (1-n)a(x)u = (1-n)b(x),$$

que é, claramente, uma equação diferencial linear na função $u(x)$. ■

Exemplo 1.4.4 Consideremos a equação diferencial

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{1}{x}y^2. \tag{1.14}$$

Estamos perante uma equação diferencial da forma (1.11) com $a(x) = -\frac{3}{x}$, $b(x) = \frac{1}{x}$ e $n = 2$. Multiplicando ambos os membros de (1.14) por y^{-2} temos

$$y'y^{-2} - \frac{3}{x}y^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Efectuando a mudança de variável indicada no teorema 1.4.2, temos $u = y^{1-2} = y^{-1}$. Assim, $u' = -y^{-2}y'$, pelo que $y^{-2}y' = -u'$. Substituindo estas expressões na última equação podemos escrever

$$-u' - \frac{3}{x}u = \frac{1}{x},$$

isto é,

$$u' + \frac{3}{x}u = -\frac{1}{x},$$

que é claramente uma equação diferencial linear de primeira ordem nas variáveis x e u. A resolução desta equação usando o factor integrante $\mu(x) = x^3$ é deixada ao cuidado do leitor. Limitar-nos-emos a apresentar a sua solução geral:

$$u = -\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Uma vez obtida a solução geral da equação diferencial linear, há que retornar à variável original, bastando para tal notar que $u = y^{-1}$. Deste modo, a solução geral da equação diferencial de Bernoulli (1.14) é

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.4.5 Equações de Riccati

Definição 1.4.5 *Uma* **equação diferencial de Riccati** *é uma equação da forma*

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2. \tag{1.15}$$

Teorema 1.4.3 *Seja y_0 uma solução particular da equação de Riccati traduzida pela expressão (1.15). Nestas condições, a mudança de variável definida por $y = y_0 + u$ permite transformar a equação de Riccati numa equação de Bernoulli.*

Demonstração: Sendo $y = y_0 + u$, então $y' = y_0' + u'$. Assim, substituindo estas quantidades na equação (1.15) temos

$$y_0' + u' = p(x) + q(x)y_0 + q(x)u + r(x)y_0^2 + 2r(x)y_0u + r(x)u^2.$$

Ora, por hipótese, y_0 é uma solução particular da equação diferencial dada. Como tal, temos que $y_0' = p(x) + q(x)y_0 + r(x)y_0^2$, pelo que a equação anterior se pode simplificar escrevendo

$$u' - (q(x) + 2r(x)y_0)\, u = r(x)u^2,$$

que é uma equação diferencial de Bernoulli da forma (1.11) com $a(x) = -q(x) - 2r(x)y_0$, $b(x) = r(x)$ e $n = 2$. ■

Exemplo 1.4.5 Consideremos a equação diferencial

$$xy' = y^2 + y - 2. \tag{1.16}$$

A equação (1.16) é uma equação diferencial de Riccati com $p(x) = -\frac{2}{x}$ e $q(x) = r(x) = \frac{1}{x}$. Além disso, esta equação admite a solução particular $y_0 = 1$ (verifique). Desta forma, podemos efectuar a mudança de variável definida por $y = 1 + u$, tendo-se, consequentemente, $y' = u'$ e $y^2 = 1 + 2u + u^2$. Substituindo na equação (1.16) obtemos $xu' = 3u + u^2$, isto é (supondo $x \neq 0$),

$$u' - \frac{3}{x}u = \frac{1}{x}u^2, \tag{1.17}$$

que é uma equação diferencial de Bernoulli da forma (1.11) com $a(x) = -\frac{3}{x}$, $b(x) = \frac{1}{x}$ e $n = 2$. A equação (1.17) foi já resolvida no exemplo 1.4.4, tendo-se obtido

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, notando que $y = 1 + u$, facilmente se obtém

$$y = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.5 Equações Diferenciais Lineares de Ordem n com Coeficientes Constantes

Definição 1.5.1 *Uma* **equação diferencial linear de ordem** n **com coeficientes constantes** *é uma equação da forma*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \tag{1.18}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ $(0 \leq i \leq n)$ *e* $a_n \neq 0$*. Se* $b(x)$ *for identicamente nulo em* I *a equação diz-se* **homogénea***; caso contrário, diz-se* **completa***.*

Para determinar a solução geral desta equação num intervalo, introduziremos alguns conceitos básicos. No desenvolvimento do texto, veremos que a determinação da solução da equação completa passa pela determinação da solução geral da equação **homogénea associada** e de uma solução particular da equação **completa**. Assim, começaremos por resolver a equação linear homogénea.

Teorema 1.5.1 *A equação diferencial (1.18), com* $b(x)$ *contínua em* I*, que satisfaz às* n *condições iniciais* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ... $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ $(x_0 \in I)$*, admite solução única em* I*.*

1.5.1 Dependência e Independência Linear de Funções

A noção de funções reais de variável real linearmente dependentes ou independentes é fundamental para a resolução das equações diferenciais lineares a que nos dedicaremos nesta secção.

Definição 1.5.2 *Sejam* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *funções reais definidas no intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$*. O conjunto de funções* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *diz-se* **linearmente dependente** *em* I *se existirem constantes* c_i $(1 \leq i \leq n)$ **não todas nulas** *tais que*

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0, \ \forall x \in I.$$

O conjunto de funções diz-se **linearmente independente** *em* I *se não for linearmente dependente.*

Exemplo 1.5.1 Consideremos as funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = |x|$.

- Se $I \subseteq \mathbb{R}^+$, então $y_1(x) = y_2(x)$, e portanto as funções dadas são linearmente dependentes em I.
- Se $I \subseteq \mathbb{R}^-$, então $y_1(x) = -y_2(x)$, e portanto as funções dadas são linearmente dependentes em I.
- Se $I = [a, b]$ com $a < 0$ e $b > 0$, então as funções dadas são linearmente independentes em I.

Exemplo 1.5.2 Consideremos as funções $y_1(x) = e^{-2x}$ e $y_2(x) = e^{3x}$. Da igualdade

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} = 0$$

obtemos, derivando ambos os membros,

$$-2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} = 0.$$

As igualdades anteriores permitem escrever o sistema linear

$$\begin{bmatrix} e^{-2x}(x) & e^{3x} \\ -2e^{-2x}(x) & 3e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que

$$\begin{vmatrix} e^{-2x}(x) & e^{3x} \\ -2e^{-2x}(x) & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 5e^x \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

este sistema tem solução única, $c_1 = c_2 = 0$. Segue-se que as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

O determinante calculado no exemplo anterior é fundamental no estudo da independência linear de funções. Torna-se, assim, importante a seguinte definição:

Definição 1.5.3 *Sejam $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ funções definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ que admitem derivadas até à ordem $n-1$ em I. Chama-se determinante* **wronskiano** *de $y_1, \ldots, y_n$ a*

$$W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 1.5.2 *Sejam $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ funções definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ que admitem derivadas até à ordem $n-1$ em I. Se existir $x_0 \in I$ tal que $W(y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)) \neq 0$, então as funções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são linearmente independentes em I.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo [7], que as funções dadas são linearmente dependentes em I. Então existem constantes reais $c_1, \ldots, c_n$ **não todas nulas** tais que

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0.$$

Derivando sucessivamente ambos os membros da igualdade anterior $n-1$ vezes obtemos o sistema

[7] *Demonstração por redução ao absurdo*: é uma técnica bastante usada em alguns tipos de provas em Matemática. Se o objectivo for demonstrar a veracidade da implicação $[p \Rightarrow q]$ (onde p e q representam proposições), a estratégia usada consiste em fazer uso da tautologia $[\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)] \Leftrightarrow p]$.

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases},$$

que é um sistema com n equações e n incógnitas $(c_1, \ldots, c_n)$, homogéneo. Assim, este sistema admite também a solução trivial

$$(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0).$$

Como a solução não é única, então $W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = 0$ para todo o $x \in I$, o que é absurdo. ■

O teorema 1.5.2 permite-nos, portanto, concluir que **se** o determinante wronskiano for diferente de zero para algum $x_0 \in I$, **então** as n funções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são linearmente independentes em I, isto é, **se** as funções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ forem linearmente dependentes em I, **então** o determinante wronskiano anular-se-á em todo o ponto $x \in I$.

1.5.2 Equações Homogéneas

Teorema 1.5.3 *Se $y_1(x)$, $y_2(x)$ são soluções da equação diferencial homogénea, então qualquer combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ com c_1 e c_2 constantes, é ainda uma solução da mesma equação diferencial.*

A demonstração deste resultado é deixada como exercício.

Teorema 1.5.4 *Sejam $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ n soluções da equação diferencial linear homogénea. É condição* **necessária e suficiente** *para que as soluções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sejam linearmente independentes, em I, que $W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$, para todo o $x \in I$.*

Demonstração: De acordo com o teorema 1.5.2, é claro que, **se** o determinante wronskiano for não nulo para todo o $x \in I$, **então** as soluções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são linearmente independentes em I.

Reciprocamente, suponhamos que as soluções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são linearmente independentes em I. Então o sistema homogéneo

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

tem solução única $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Como este sistema é de Cramer, admite solução única, e portanto o determinante da matriz do sistema é diferente de zero para todo o $x \in I$, ou seja $W(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$, para todo o $x \in I$. ■

Dos teoremas 1.5.2 e 1.5.4, concluímos que se $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são n soluções linearmente independentes da equação homogénea num intervalo I, ou o wronskiano é identicamente nulo, ou nunca se anula no intervalo.

Exemplo 1.5.3 Consideremos a equação diferencial de segunda ordem $y'' - y = 0$. O sistema de funções $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ é um sistema de soluções linearmente independentes desta equação.

Com efeito,

(1) y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y_1'(x) = y_1(x) = e^x \text{ pelo que } y_1'' - y_1 = 0;$$

$$y_2'(x) = -e^{-x} \text{ e } y_2''(x) = e^{-x}, \text{ pelo que } y_2'' - y_2 = 0.$$

(2) y_1 e y_2 são linearmente independentes. Como

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

Definição 1.5.4 *Chama-se* **sistema fundamental de soluções** *da equação diferencial linear homogénea de ordem n a qualquer conjunto de n soluções linearmente independente.*

Teorema 1.5.5 *A equação diferencial linear homogénea de ordem n admite sempre um sistema fundamental de soluções em I. Se $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ for um sistema fundamental de soluções da equação, o integral geral é*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

em que $c_1, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias.

Omitimos a demonstração deste resultado.

Exemplo 1.5.4 Consideremos a equação diferencial $y'' + y = 0$.

É fácil verificar que as funções $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \sin x$ são ambas soluções da equação diferencial dada.

Por outro lado, como

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

podemos afirmar que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ é um sistema fundamental de soluções para a equação diferencial $y'' + y = 0$, pelo que

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

é a solução geral da referida equação.

A noção de sistema fundamental de soluções revela-se fundamental para determinar todas as soluções de uma equação diferencial linear homogénea, com coeficientes constantes. Veremos, de seguida, como obter sistemas fundamentais de soluções para o caso $n = 2$, isto é, para equações lineares homogéneas de ordem dois.

Consideremos a equação

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1.19}$$

com $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ constantes, e façamos $y'' = \lambda^2$. Podemos então construir uma **equação algébrica associada** à equação (1.19) (também chamada equação característica):

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{1.20}$$

Como veremos seguidamente, a determinação de um sistema fundamental de soluções para a equação (1.19) resume-se à determinação das raízes da equação algébrica associada (1.20). Os principais resultados encontram-se resumidos nas proposições que se seguem.

Proposição 1.5.1 Se λ_1 é uma raiz da equação característica, então $e^{\lambda_1 x}$ é uma solução da equação diferencial.

Demonstração: Sendo $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, tem-se $y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$ e $y_1''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$. Substituindo na equação diferencial (1.19), obtemos

$$\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_0 e^{\lambda_1 x} = 0,$$

ou seja

$$(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0) e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Uma vez que λ_1 é raiz da equação característica (1.20), então $\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0 = 0$, o que demonstra o pretendido. ■

Proposição 1.5.2 Se a equação algébrica tiver duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2, então a solução geral da equação diferencial é da forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Pela proposição 1.5.1, $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são ambas soluções da equação diferencial (1.19). De acordo com o teorema 1.5.5, basta mostrar que $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são linearmente independentes. Ora,

$$W\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x}.$$

Como, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (note-se que as soluções $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são distintas), podemos concluir que $W\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ é um sistema fundamental de soluções para a equação (1.19). ■

Proposição 1.5.3 Se a equação algébrica tiver uma raiz real, λ_1, de multiplicidade dois, então a solução geral da equação diferencial é da forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Pela proposição 1.5.1, $e^{\lambda_1 x}$ é solução da equação diferencial (1.19). Mostraremos de seguida que também $xe^{\lambda_1 x}$ satisfaz a equação (1.19). Para tal, representemos por $p(\lambda)$ o polinómio de grau dois $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.

Se λ_1 é um zero de multiplicidade dois do polinómio $p(\lambda)$, facilmente se verifica que $p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = 0$. Assim,

$$\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0$$

e

$$2\lambda_1 + a_1 = 0.$$

Além disso,

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{\lambda_1 x}\right) = e^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x), \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{\lambda_1 x}\right) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}(2 + \lambda_1 x).$$

Substituindo na equação diferencial (1.19) temos

$$e^{\lambda_1 x}\left[\lambda_1(2 + \lambda_1 x) + a_1(1 + \lambda_1 x) + a_0 x\right] = 0,$$

e como $e^{\lambda_1 x}$ nunca se anula, ter-se-á

$$\lambda_1(2 + \lambda_1 x) + a_1(1 + \lambda_1 x) + a_0 x = 0$$

ou, o que é o mesmo,

$$(2\lambda_1 + a_1) + x(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0) = 0.$$

Esta igualdade é obviamente satisfeita atendendo a que $p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = 0$, o que mostra que $xe^{\lambda_1 x}$ é também solução da equação diferencial (1.19). Para terminar a demonstração, pelo teorema 1.5.5, resta verificar que as funções $e^{\lambda_1 x}$ e $xe^{\lambda_1 x}$ são linearmente independentes. Ora,

$$W\left(e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\right) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}.$$

Desta forma, como $W\left(e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\right) \neq 0$ para todo o x, conclui-se que as funções $e^{\lambda_1 x}$ e $xe^{\lambda_1 x}$ são linearmente independentes, pelo que $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ é um sistema fundamental de soluções para a equação (1.19). ∎

Proposição 1.5.4 Se a equação algébrica tiver duas raízes complexas conjugadas, $\lambda_1 \pm i\lambda_2$, então a solução geral da equação diferencial é da forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\cos\lambda_2 x + c_2 e^{\lambda_1 x}\sin\lambda_2 x,$$

com c_1 e c_2 constantes.

Demonstração: Sejam $z_1 = \lambda_1 + i\lambda_2$ e $z_2 = \lambda_1 - i\lambda_2$ as raízes do polinómio característico. Sabemos que $e^{z_1 x}$ e $e^{z_2 x}$ são ambas raízes da equação diferencial. Ora,

$$e^{z_1 x} = e^{\lambda_1 x + i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} e^{i\lambda_2 x}$$

e

$$e^{z_2 x} = e^{\lambda_1 x - i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x}.$$

Pela fórmula de Euler [8], podemos então escrever

$$e^{z_1 x} = e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + i e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

e

$$e^{z_2 x} = e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - i e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x.$$

A solução geral da equação diferencial é, portanto,

$$y = k_1(e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + i e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x) + k_2(e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - i e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x) =$$

$$= (k_1 + k_2) e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + i(k_1 - k_2) e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

com k_1 e k_2 constantes arbitrárias. Finalmente, fazendo $c_1 = k_1 + k_2$ e $c_2 = i(k_1 - k_2)$, obtemos o pretendido.

■

Vimos como obter a solução geral de equações lineares homogéneas de ordem dois. É possível fazer a generalização destes resultados a equações lineares homogéneas de ordem n. Para isso recorreremos à noção de **operador diferencial**.

Representemos por $\mathcal{F}$ o conjunto das funções reais de variável real que admitem derivadas contínuas até à ordem k no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Seja $D^k : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definido por $D^k(y) = y^{(k)}$ [9], para $k \in \mathbb{N}_0$.

Desta forma,

$$D^0 y = y, Dy = y', D^2 y = D(Dy) = Dy' = y'', \ldots, D^k y = D(D^{k-1} y) = D(y^{(k-1)}) = y^{(k)}.$$

Ao operador D^k chamamos **operador diferencial de ordem** k. A partir deste operador, podemos construir um operador mais geral, **polinómio diferencial**, $P(D) = a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0$, que é ainda um operador linear. Este operador permite representar o primeiro membro da equação diferencial linear de ordem n na forma

$$P(D)y = 0.$$

O polinómio $P(D)$ coincide com o polinómio característico para $n = 2$ e permite fazer uma generalização do processo adoptado para as equações de ordem dois, para construir um sistema fundamental de soluções para as equações de ordem $n \geq 2$.

À equação $P(D) = 0$ chama-se **equação característica**.

Prova-se que é possível obter um sistema fundamental de soluções da equação de ordem n através da determinação das raízes da equação característica $P(D) = 0$. O contributo dado

Raízes da equação característica	Contribuição para o S. F. S.
$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (simples)	$e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (multiplicidade m)	$x^j e^{\lambda_1 x},\ 0 \leq j \leq m-1$
$\lambda_1 \pm \lambda_2 i \in \mathbb{C}$ (simples)	$e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x,\ e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x$
$\lambda_1 \pm \lambda_2 i \in \mathbb{C}$ (multiplicidade m)	$x^j e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x,\ x^j e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x,\ 0 \leq j \leq m-1$

por cada raiz para a formação do sistema fundamental de soluções da equação homogénea descreve-se no quadro seguinte.

Exemplo 1.5.5

1. Consideremos a equação $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Esta equação escreve-se na forma $(D^3 - 2D^2 - D + 2)y = 0$.

   A equação característica é $D^3 - 2D^2 - D + 2 = 0$, cujas raízes são 1, -1, 2, todas reais e de multiplicidade um.

   Assim, o sistema fundamental de soluções é $\{e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$, pelo que o integral geral desta equação é
   $$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Consideremos a equação $y''' - 2y'' + y' = 0$. As raízes da equação característica são 0 (com multiplicidade um), 1 (com multiplicidade dois).

   Assim, o sistema fundamental de soluções é $\{1, e^x, xe^x\}$, pelo que o integral geral desta equação é
   $$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Consideremos a equação $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$. A equação característica é $(D^2+4)^2 = 0$, que tem duas raízes imaginárias puras de multiplicidade dois: $2i$, $-2i$.

   O sistema fundamental de soluções é, portanto, $\{\cos 2x, \sin 2x, x\cos 2x, x \sin 2x\}$, e a solução geral é
   $$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

1.5.3 Equações Completas

Consideremos uma equação diferencial linear completa
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x). \tag{1.21}$$
e a correspondente equação homogénea associada,
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{1.22}$$

Teorema 1.5.6 *Seja y_p uma solução particular da equação completa, e y_h a solução geral da equação homogénea associada. A solução geral da equação completa é dada por*
$$y = y_h + y_p.$$

[8] $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

[9] Usualmente, em vez de $D^k(y)$ escrevemos apenas $D^k y$.

Demonstração: Se y_h é a solução geral da equação homogénea, tem-se

$$P(D)y_h = 0.$$

Por outro lado, sendo y_p uma solução particular da equação não homogénea (1.21),

$$P(D)y_p = b(x).$$

Assim, e atendendo a que o operador $P(D)$ é linear,

$$P(D)[y_h + y_p] = P(D)y_h + P(D)y_p = 0 + b(x) = 0.$$

Suponhamos agora que y é uma solução qualquer da equação completa, e que y_p é uma solução particular. Então

$$P(D)y = b(x).$$

Por outro lado,

$$P(D)(y - y_p) = P(D)y - P(D)y_p = b(x) - b(x) = 0.$$

Assim, $y - y_p$ é solução da equação homogénea, $y - y_p = y_h$.

■

Existem vários processos de resolução de equações diferenciais lineares completas. Neste texto, dedicar-nos-emos apenas ao estudo do **método da variação das constantes arbitrárias**, também conhecido por **método de Lagrange**. Este método pode ser usado quer em equações com coeficientes constantes quer em equações com coeficientes não constantes.

Na secção anterior foi visto como determinar um sistema fundamental de soluções para a equação (1.22), digamos $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$. O método da variação das constantes arbitrárias consiste em considerar que a solução geral da equação completa se escreve na forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x), \tag{1.23}$$

sendo $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ funções a determinar.

Proposição 1.5.5 Se as funções $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ satisfazem o **sistema de Lagrange**, com n equações e n incógnitas,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} c_1'(x)y_1(x)+ & \ldots & +c_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ c_1'(x)y_1'(x)+ & \ldots & +c_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+ & \ldots & +c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & \frac{b(x)}{a_n} \end{array}\right. ,$$

então $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$ é solução da equação completa.

Demonstração: Sendo $y(x) = c_1(x)y_1 + \ldots + c_n(x)y_n$, com $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ nas condições do sistema de Lagrange, tem-se, derivando sucessivamente ambos os membros da equação (1.23),

- $y'(x) = c_1(x)y_1' + \ldots + c_n(x)y_n' + \underbrace{c_1'(x)y_1 + \ldots + c_n'(x)y_n}_{=0}$

- $y''(x) = c_1(x)y_1'' + \ldots + c_n(x)y_n'' + \underbrace{c_1'(x)y_1' + \ldots + c_n'(x)y_n'}_{=0}$

$$\vdots$$

- $y^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n(x)y_n^{(n-1)}$
- $y^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)} + \ldots + c_n(x)y_n^{(n)} + \frac{b(x)}{a_n}$, pela última equação do sistema de Lagrange.

Substituindo estas funções na equação diferencial (1.21) pretendemos obter uma igualdade. De facto,

$$\begin{aligned}
a_n\left(\frac{b(x)}{a_n} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i^{(n)}\right) + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i^{(n-1)} + \ldots +\\
+a_1\sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i' + a_0\sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i =\\
= b(x) + c_1(x)\underbrace{\left(a_ny_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \ldots + a_1y_1' + a_0y_1\right)}_{=0} +\\
+c_2(x)\underbrace{\left(a_ny_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \ldots + a_1y_2' + a_0y_2\right)}_{=0} + \ldots +\\
+c_n(x)\underbrace{\left(a_ny_n^{(n)} + a_{n-1}y_n^{(n-1)} + \ldots + a_1y_n' + a_0y_n\right)}_{=0} =\\
= b(x),
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração.

■

Para obter as funções $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ basta notar que o sistema referido no teorema anterior é possível e determinado [10], pelo que admite solução única. Essa solução pode ser obtida recorrendo à regra de Cramer, pelo que

$$c_i'(x) = \frac{1}{W(y_1(x), \ldots, y_n(x))}\; det\begin{bmatrix} y_1 & \ldots & 0 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & 0 & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & \frac{b(x)}{a_n} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

onde a i-ésima coluna do determinante anterior é formada pelo vector

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \dfrac{b(x)}{a_n} \end{bmatrix}^t$$

e $W(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ representa o determinante wronskiano das funções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

Finalmente, uma vez conhecidas as funções $c_i'(x)$ $(1 \leq i \leq n)$, por primitivação podem obter-se as funções $c_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$.

[10]Note-se que as n funções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são linearmente independentes...

Exemplo 1.5.6 Consideremos a equação completa $y'' - 2y' + y = e^x$. A solução geral da equação homogénea associada é $y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (porquê?). Utilizando o método descrito anteriormente, escrevemos $y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$, sendo que $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ devem satisfazer o sistema de Lagrange:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x & + & c_2'(x)xe^x & = & 0 \\ c_1'(x)e^x & + & c_2'(x)(x+1)e^x & = & e^x \end{cases}.$$

A solução deste sistema obtém-se facilmente recorrendo à regra de Cramer, tendo-se

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{2x}}{e^{2x}} = -x \Rightarrow c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$$

e

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1 \Rightarrow c_2(x) = x.$$

Finalmente,

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x = -\frac{x^2}{2}e^x + x^2e^x.$$

Esta é uma **solução particular** da equação completa. Pelo teorema 1.5.6, a sua **solução geral** é

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{x^2}{2}e^x + x^2e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Note-se, contudo, que caso tivéssemos incluído as constantes de integração aquando do cálculo de $c_1(x)$ e $c_2(x)$ (digamos k_1 e k_2, respectivamente), e após substituição na expressão para $y(x)$, teríamos obtido $y(x) = k_1e^x + k_2xe^x - \frac{x^2}{2}e^x + x^2e^x$, que é a **solução geral** da equação completa.

1.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = 2x + 1$;
   (b) $y' = \log x$;
   (c) $y'' = x^3 + x$;
   (d) $\frac{dy}{dx} = xe^x$;
   (e) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \sin x$;
   (f) $y''' = \frac{1}{x^3}$.

2. Determine a solução dos seguintes problemas de condição inicial:

   (a) $y' = \log x$, $y(1) = 0$;
   (b) $y' = \sin 3x$, $y(\pi) = 4$;
   (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$;
   (d) $y' = x \log x$, $y(1) = 0$;
   (e) $y' = x^2 e^x$, $y(0) = 3$;
   (f) $y'' = x^2 + 3x$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

3. Verifique se as seguintes funções são soluções das equações diferenciais indicadas:

   (a) $y = e^{x^2} \to y' = 2xy$;
   (b) $y = 4e^x + 3e^{2x} \to y'' - 3y' + 2y = 0$;
   (c) $y = 4 \sin x + 5 \to y''' + y' = 0$;
   (d) $y = x \cos x \to y'' + y = -2 \sin x$.

4. As vendas de um novo produto são representadas pela função $y(x)$, onde x representa o número de meses a que o produto foi introduzido no mercado.

   Suponha que $y(x)$ verifica a relação
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x(x+1)}.$$

   (a) Mostre que, sendo c uma constante arbitrária, a solução geral da equação diferencial dada é
   $$y(x) = \frac{cx^2}{(x+1)^2}.$$

   (b) Se as vendas, um mês após a introdução do produto no mercado, forem de 1000 unidades, qual o valor de c?

5. Para um novo produto introduzido no mercado e que é divulgado pelos meios de comunicação, a variação da percentagem da população que toma conhecimento do produto é proporcional à percentagem da população que ainda o desconhece.

   Escreva uma equação diferencial que traduza esta situação, e determine a sua solução geral.

6. Uma gripe propaga-se numa comunidade estudantil a uma taxa proporcional à proporção de estudantes infectados e não infectados. Determine a proporção, $P(t)$, de estudantes infectados ao fim de t dias, supondo que inicialmente estavam infectados 10% dos alunos e que ao fim de três dias essa proporção era já de 30%.

7. Resolva as seguintes equações de variáveis separáveis:

   (a) $\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 1)$;
   (b) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$;
   (c) $xy' - y = y^2$;
   (d) $(1 + x^2)y' = 2\sqrt{y}$;
   (e) $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$;
   (f) $\frac{dy}{dx} = cy$ (c constante);
   (g) $(1 + x^2)y' + 2y = 4xy$;
   (h) $\frac{dy}{dx} = ax - bx^2$ (equação logística);
   (i) $3e^x \tan y + (1 - e^x) \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0$.

8. Resolva as seguintes equações homogéneas:

   (a) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$;
   (b) $y' = \frac{y}{x} - 1$;
   (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$;

(d) $xyy' = 2y^2 - x^2$;

(e) $xy' = y + (x^2 + y^2)^{1/2}$;

(f) $y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$;

(g) $x^2dy + (y^2 - 4xy)dx = 0$.

9. Determine o integral das seguintes equações lineares de primeira ordem:

(a) $y' + y = e^{-x}$;

(b) $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$;

(c) $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 4$;

(d) $y' - 2y = 3x$, $y(0) = 1$;

(e) $y' + xy = x^3$;

(f) $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$;

(g) $x \log xy' + y = 2 \log x$;

(h) $(1 + x^2)y' + 2xy = (1 + x^2)e^{2x}$.

10. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

(a) $y' + y = xy^2$;

(b) $y' + xy = x^3y^3$;

(c) $3xy^2y' - 3y^3 = x^4 \cos x$;

(d) $\frac{dy}{dx} = y^2 \sec x - y \tan x$;

(e) $y' + xy = xy^{-1}$.

11. Determine o integral geral das seguintes equações de primeira ordem:

(a) $y' + y \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$;

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$;

(c) $-y'x = x + y$;

(d) $y\frac{dy}{dx} + (1 + y^2) \sin x = 0$;

(e) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$;

(f) $x^2y' = y^2 + 2xy$;

(g) $(2xy - x^2)dy - (2x^2 + y^2)dx = 0$;

(h) $y' + y \sin x = \sin x$;

(i) $L\left(\frac{dI}{dt} + RI\right) = \frac{V}{T}te^{-t}$.

12. Verifique se as seguintes funções são soluções das equações diferenciais indicadas:

(a) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} \to y'' - y = 0$;

(b) $y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x \to y'' - y = 0$;

(c) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \to y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

13. Escreva cada uma das seguintes equações diferenciais na forma $P(D)y = 0$:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

(b) $y''' - 3y'' - y' + y = 0$;

(c) $y^{(4)} - y'' + y = 0$.

14. Determine uma equação diferencial da forma $P(D)y = 0$ cujo polinómio característico admita as seguintes raízes:

(a) $r_1 = 2$, $r_2 = -1$;

(b) $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = 0$;

(c) $r_1 = 2i$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$;

(d) $r_1 = r_2 = 1 + i$, $r_3 = r_4 = 1 - i$.

15. Suponha que os seguintes conjuntos de n funções constituem sistemas de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n:

(1) $\{1, e^x\}$;

(2) $\{1, x, e^x\}$;

(3) $\{5, \sin^2 t, \cos 2t\}$;

(4) $\{e^{2t}, \sin t, \cos t\}$.

(a) Calcule o Wronskiano de cada um dos sistemas.

(b) Indique quais dos sistemas constituem sistemas fundamentais de soluções.

(c) Para cada um dos sistemas fundamentais de soluções encontrados na alínea anterior, escreva a equação diferencial linear homogénea correspondente, e o respectivo integral geral.

16. Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

    (a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;
    (b) $y'' - 9y = 0$;
    (c) $y''' - y'' = 0$;
    (d) $y'' + 4y = 0$;
    (e) $y'' - 2y' + 2y = 0$;
    (f) $y'' - 4y' + 2y = 0$;
    (g) $y'' + 2y' + y = 0$;
    (h) $y''' - 3y'' + y' + 5y = 0$;
    (i) $y^{(4)} + 4y'' = 0$;
    (j) $(D-2)^2(D^2+2)y = 0$;
    (k) $(D+2)(D^2+3)^2y = 0$;
    (l) $\frac{d^2Q}{dt^2} - 5\frac{dQ}{dt} + 7Q = 0$.

17. Determine o integral particular de cada uma das seguintes equações diferenciais:

    (a) $y''-4y'+3y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;
    (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;
    (c) $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$;
    (d) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

18. Sejam y_1 e y_2 soluções particulares das equações lineares completas

$$P(D)y = b_1(x)$$

e

$$P(D)y = b_2(x).$$

Sejam ainda $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer. Mostre que, nestas condições,

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

é solução particular da equação

$$P(D)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x).$$

19. Resolva as seguintes equações diferenciais usando o método da variação das constantes:

    (a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^x$;
    (b) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$;
    (c) $y'' - 2y' - 3y = 3e^x - 3xe^{-x}$;
    (d) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x$;
    (e) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$;
    (f) $y'' - y = x$.

20. Determine a solução geral de cada um dos seguintes problemas de condição inicial:

    (a) $(1+x^2)y'-2xy = e^x(1+x^2)^2$, $y(0) = 2$;
    (b) $xy' + xy = 1 - y$, $y(0) = 2$;
    (c) $L\frac{di}{dt} + Ri = V$, $i(0) = 0$, sendo L, R e V constantes;
    (d) $4y''' + y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

21. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

    (a) "*A equação $y'+e^y = 0$ é de variáveis separáveis*";
    (b) "*O problema de condição inicial $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$, tem solução única, dada por $y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$*".
    (c) "*A equação $y' = t^2\sqrt{y}$ é linear*";

22. Sabendo que $y = e^{2t}$ é solução da equação diferencial $y''' - 5y'' + ky' = 0$, $k \in \mathbb{R}$, determine k e escreva o integral geral da equação diferencial.

Soluções

No que se segue, c e c_i representam constantes arbitrárias.

(1a) $y = x^2+x+c$; (1c) $y = \frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2$; (1e) $y = -4\sin x + c_1x + c_2$.

(2a) $y = x\log x - x + 1$; (2c) $y = -\log|x|$; (2e) $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + 1$.

(4b) $c = 4000$.

(5) $\frac{dy}{dt} = k(100-y),\ y(t) = 100 - ce^{-kt}$.

(6) $\frac{P}{100-P} = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{7}}\right)^t$.

(7a) $\log|y+1| = \frac{x^2}{2}+2x+c$; (7c) $\frac{y}{y+1} = cx$; (7e) $\frac{y^2}{2}-y+\log|y+1| = -\frac{x^2}{2}-x-\log|x-1|+c$; (7g) $\log|y| = 2\log|x^2+1| - 4\arctan x + c$; (7i) $\tan y = c(1-e^x)^3$.

(8a) $\frac{y-2x}{y+x} = cx^3$; (8c) $-\frac{x}{y} - \log|y/x| = \log|x| + c$; (8e) $\frac{y}{x} + \sqrt{1+(y/x)^2} = cx$; (8g) $\frac{y}{3x-y} = cx^3$.

(9a) $y = xe^{-x}+ce^{-x}$; (9c) $y = x^2+\frac{3}{x^2}$; (9e) $y = x^2-2+ce^{-x^2/2}$; (9g) $y\log x = 2(\log x)^2+c$.

(10a) $\frac{1}{y} = x+1+ce^x$; (10c) $y^3 = x^3\sin x + cx^3$; (10e) $y^2 = 1+ce^{-x^2}$.

(11a) $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$; (11c) $y = c - \frac{x}{2}$; (11e) $y = (1+x^2)(c+\arctan x)$; (11g) $\frac{x^2}{-y^2+xy+2x^2} = cx$; (11i) $I = \left(\frac{t}{R-1} - \frac{1}{(R-1)^2}\right)\frac{V}{LT}e^{-t} + ce^{-Rt}$.

(13a) $(D^2-3D+2)y = 0$; (13c) $(D^4-D^2+1)y = 0$.

(14a) $y'' - y' - 2y = 0$; (14c) $y^{(iv)} - y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$.

(15a) (1) $W = e^x$; (2) $W = e^x$; (3) $W = 0$; (4) $W = -5e^{2t}$; (15b) (1) $D(D-1)y = 0$; $y = c_1 + c_2e^x$; (2) $D^2(D-1)y = 0$; $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$; (4) $(D-2)(D^2+1)y = 0$, $y = c_1e^{2t} + c_2\sin t + c_3\cos t$.

(16a) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$; (16c) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x$; (16e) $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$; (16g) $y = e^{-x}(c_1+c_2x)$; (16i) $y = c_1 + c_2x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$; (16k) $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x)\cos(\sqrt{3}x) + (c_4+c_5x)\sin(\sqrt{3}x)$.

(17a) $y = 2e^{3x} - 3e^x$; (17c) $y = 3 - e^{-x}$.

(19a) $y = -\frac{3}{4}e^x + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$; (19c) $y = \frac{e^{-x}}{64}(3 - 48e^{2x} + 12x + 24x^2 + 64c_1 + 64c_2e^{4x})$; (19e) $y = e^{-2x}(4x^2 + c_1 + c_2x)$.

(20a) $y = (1+x^2)(e^x+1)$; (20c) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

(21a) Verdadeiro; (21c) Falso.

(22) $k = 6$; $y = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$.