Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste A+B**

1. Considere a equação não linear $4\cos x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a $\pi/2$ no qual a equação dada tem uma única raiz real negativa.

[1.5] **(b)** Mostre que $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes. Aplicando o método, uma vez, obtenha uma aproximação da raiz x_r negativa. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

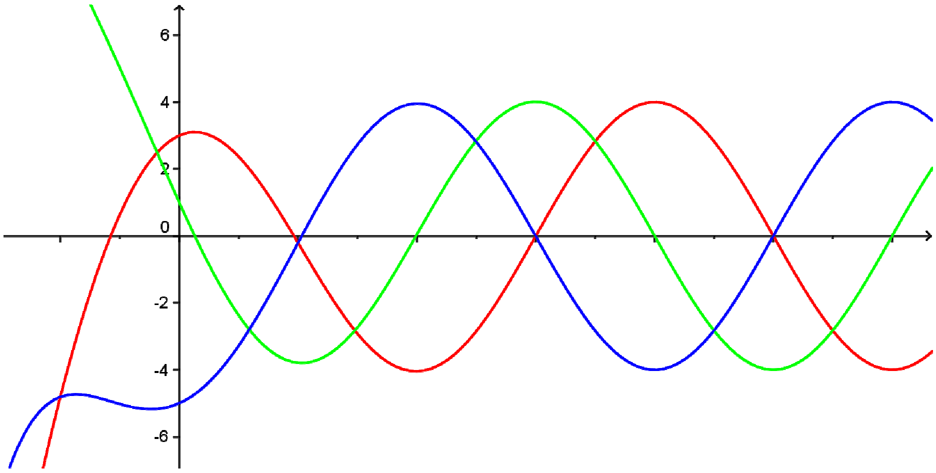

Figura 1 – Gráficos de *f*, *f'* e *f''*

2. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}\ , & \text{se } -1 \le x < 0 \\ 1+\sin x\ , & \text{se } 0 \le x \le \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = -f(x)$$

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in [0, \pi]$. Redesenhe a figura 2, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in [-1, 0]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in [0, \pi]$.

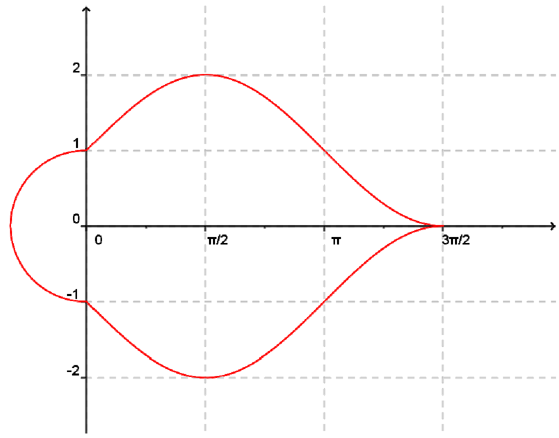

Figura 2 – Gráficos de *f* e *g*

[2.0] **(b)** Utilize as regras dos Trapézios simples ($n = 1$) e de Simpson simples ($n = 2$) para aproximar o valor dos integrais $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$ e $\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ respetivamente. Recorrendo à figura 2, interprete os resultados obtidos.

3. Considere o problema de valor inicial $y' = 2ty, \quad y(1) = 1, \quad t \in [1{,}1.5]$

[2.0] **(a)** Sabendo que $y = \exp(t\,\hat{}\,2-1)$ é a solução exata do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK4
0	1						0	0
1				1.7188				0.0006
2	1.5	3.4903			3.4865		0.1871	

[1.0] **(b)** Alguma das funções seguintes, implementadas em Matlab, traduz corretamente o método de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2) para a resolução de um PVI? Justifique a sua resposta, efetuando as correções que achar convenientes e necessárias.

```
function y = RK2_v1(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=y0;
for i=1:n
    k1=h*f(t(1),y(i));
    k2=f(t(i+1),y(i));
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

```
function y = RK2_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
t(1)=a;
y(1)=0;
for i=1:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    k1=f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+k1+k2*0.5;
end
```

4. Considere as funções $f(x,y) = -x^2 - y^2$, $g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)}$ e h definida em forma de algoritmo por:

$h(x,y) ::=$

Se $x^2 + y^2 \le 16$
Então $z := g(x,y)$
Senão Se $16 < x^2 + y^2 \le 32$
  Então $z := \sqrt{32 + f(x,y)}$
  Senão Se $x^2 + y^2 > 32 \wedge -6 \le x \le 6 \wedge -6 \le y \le 6$
    Então $z := 0$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**uma**</u>

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vetor $[5, y, \sqrt{7}]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de interseção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $x = 5$ no ponto $P(5,0,\sqrt{7})$.

(ii) A função h é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Mostre que, se a temperatura em qualquer ponto do plano xOy for dada por $T = g(x,y)$ (distância de qualquer ponto à origem), então a taxa de variação da temperatura em $P(2,2)$ segundo a direção e sentido do vetor $\vec{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ é negativa, sendo máxima na direcção e sentido do vetor $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Mostre que, se $z = f(x-1, y-1) \wedge x = 1 + \cos\theta \wedge \mathrm{y} = 1 + \sin\theta$ então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{dz}{d\theta} - 2$.

5. Numa das tendas da *Feira de Artesanato 2012* existiam candeeiros com a forma da figura 1, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 2$, compostos por três partes:

- Calote esférica de raio $\sqrt{32}$ seccionada por um cone de raio e altura 4;
- Cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$;
- Cilindro de raio $r = 4$ e altura $h = 1$.

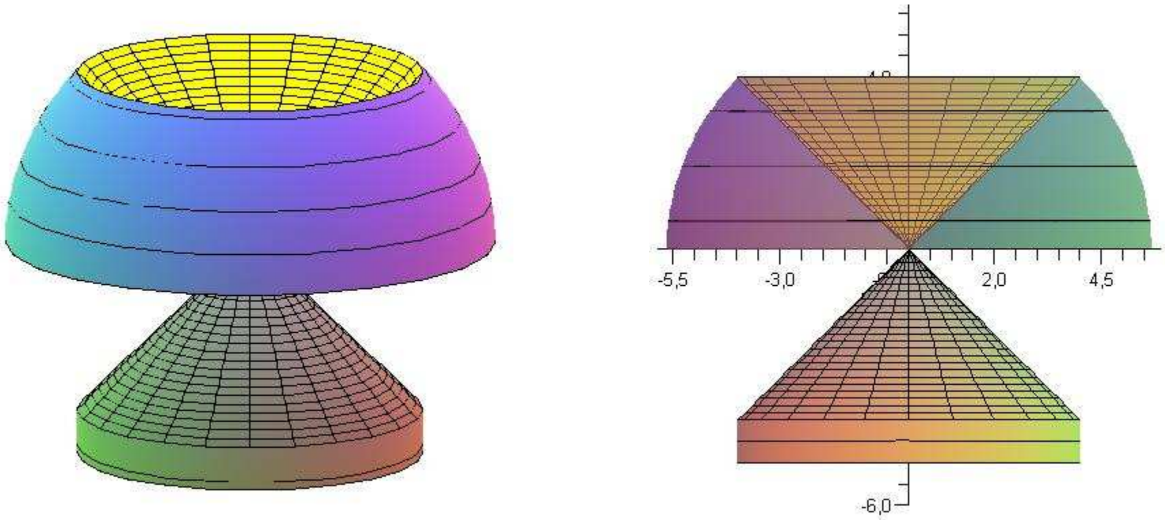

Figura 3

[2.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{ (R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 4 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -4 \le z \le -\rho \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 16 \wedge -5 \le z \le -4 \right\}$$

[2.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
Cartesianas2Esfericas := proc(x, y, z)
 local R, theta, phi;
 R := sqrt(--?--);
 if (x ≠ 0) then theta := arctan(--?--);
 elif (y = 0) then theta := 0;
 elif (y > 0) then theta := --?--; else theta := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then phi := --?--; else phi:=arccos(--?--); end if;
 return [R, theta, phi];
 end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Ramos – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At00_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At01_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At02_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At03_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At04_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não