Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº11 Data limite de entrega: 18/Dez/2015 (23h59m)

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação por substituição.

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx\,;$

INTEGRAIS DEFINIDOS

Justifique que o integral $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ é definido e calcule o seu valor recorrendo às seguintes técnicas de primitivação:

1) primitivação por partes;

2) primitivação por substituição.

Sugestão de resolução:

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

1) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 4 da página 4 das Tabelas de Matemática, $R(x,\, x^{\frac{p}{q}},\, x^{\frac{r}{s}},\dots)$, tem-se

$$\text{m.v. } \boxed{x=t^m},\ \text{ onde } m=m.m.c\{2,\,3\}=6\,.$$

Então

$$\text{m.v. } \boxed{x=t^6},\ t\in\mathbb{R}_0^+ \text{ (para garantir a invertibilidade da m.v)}$$

e ainda

$$x'=6\,t^5$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^6}+\sqrt{t^6}}\,6\,t^5\,dt\\
&= \int \frac{1}{t^2+|t|^3}\,6\,t^5\,dt\,, \qquad |t|=t \text{ porque } t\in\mathbb{R}_0^+\\
&= \int \frac{6\,t^5}{t^2+t^3}\,dt\\
&= \int \frac{6\,t^5}{t^2\,(1+t)}\,dt\\
&= \int \frac{6\,t^3}{1+t}\,dt\,, \quad \text{função racional imprópria - Tabelas pág 8}\,.
\end{aligned}$$

Efectuando a divisão dos polinómios, tem-se

$$\begin{array}{rrrr|l}
6\,t^3 & & & & t+1\\ \cline{5-5}
-(\,6\,t^3 & +6\,t^2) & & & 6\,t^2-6\,t+6\\ \cline{1-4}
 & -6\,t^2 & & & \\
 & -(\,-6\,t^2 & -6\,t\,) & & \\ \cline{1-4}
 & & 6\,t & & \\
 & & -(\ 6\,t & +6\,) & \\ \cline{1-4}
 & & & -6 &
\end{array}$$

pelo que

$$\frac{6\,t^3}{1+t} = 6\,t^2 - 6\,t + 6 + \frac{-6}{1+t}$$

e então

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{6\,t^3}{1+t}\,dt \\
&= \int \Big(6\,t^2 - 6\,t + 6 + \frac{-6}{1+t}\Big)\,dt \\
&= 6\int \underbrace{t^2}_{R2}\,dt - 6\int \underbrace{t}_{R2}\,dt + \int \underbrace{6}_{R1}\,dt - 6\int \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{R5}\,dt \\
&= 6\,\frac{t^3}{3} - 6\,\frac{t^2}{2} + 6\,t - 6\,\ln|1+t| + c \\
&\qquad \text{m.v}: \ x = t^6\,, \ t \in \mathbb{R}_0^+ \quad \to \quad \sqrt[6]{x} = t \\
&\overset{\text{m.v}}{=} 2\,(\sqrt[6]{x}\,)^3 - 3\,(\sqrt[6]{x}\,)^2 + 6\,\sqrt[6]{x} - 6\,\ln|1+\sqrt[6]{x}| + c \\
&= 2\,\sqrt{x} - 3\,\sqrt[3]{x} + 6\,\sqrt[6]{x} - 6\,\ln(1+\sqrt[6]{x}\,) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 6 da página 4 das Tabelas de Matemática $R(\,a^{rx},\, a^{sx}, \ldots)$, tem-se

$$\text{m.v. } \boxed{e^{mx} = t}\,, \ \text{onde } m = m.d.c\{2,\,3\} = 1\,.$$

Então

$$\text{m.v. } \boxed{e^{x} = t}\,, \ t \in \mathbb{R}^+ \ \text{(para garantir a invertibilidade da m.v)}$$

e ainda

$$x = \ln t \quad \to \quad x' = \frac{1}{t}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{t^3}{t^2-1}\,\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt\,, \quad \text{função racional imprópria - Tabelas pág 8}\,.
\end{aligned}$$

Efectuando a divisão dos polinómios, tem-se

$$\begin{array}{rr|l}
t^2 & & t^2 - 1 \\ \cline{3-3}
-(\,t^2 & -1\,) & 1 \\ \cline{1-2}
 & 1 &
\end{array}$$

pelo que

$$\underbrace{\frac{t^2}{t^2-1}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{t^2-1}}_{\text{fracção própria}}$$

A fracção própria resultante ainda não é primitivável de forma imediata, pelo que temos determinar a sua decomposição em elementos simples. Como

$$t^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ t^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ t = 1 \ \vee \ t = -1\,,$$

então

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \underbrace{\frac{A}{t-1}}_{\cdot(t+1)} + \underbrace{\frac{B}{t+1}}_{\cdot(t-1)} = \frac{A\,(t+1) + B\,(t-1)}{(t-1)(t+1)}$$

$$\begin{cases} t = 1: \quad 1 = 2\,A \ \Rightarrow \ A = \frac{1}{2} \\ t = -1: \quad 1 = -2\,B \ \Rightarrow \ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\underbrace{\frac{t^2}{t^2-1}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{t^2-1}}_{\text{fracção própria}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}$$

pelo que, finalmente,

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx &= \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt \\
&= \int \Big(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\Big)\,dt \\
&= \int \underbrace{1}_{R1}\,dt + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{R5}\,dt - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{t+1}}_{R5}\,dt \\
&= t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + c \\
&\qquad \text{m.v}: \ e^x = t \\
&\overset{\text{m.v}}{=} e^x + \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Integrais definidos

1) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{2} \underbrace{x^2}_{d}\,\underbrace{x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}_{p}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \\ (x^2)' = 2x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&= \Big[x^2\,(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\Big]_{\sqrt{2}}^{2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} \underbrace{2x\,(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}_{R5}\,dx \\
&= 4\sqrt{3} - 2 - \Big[\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= 4\sqrt{3} - 2 - \frac{2}{3}\Big((\sqrt{3})^3 - 1\Big) \\
&= 4\sqrt{3} - 2 - \frac{2}{3}\Big(3\sqrt{3} - 1\Big) \\
&= 4\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} + \frac{2}{3} \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

2) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 3 da página 4 das Tabelas de Matemática, $R(x, \sqrt{b^2x^2-a^2})$, tem-se

$$\text{m.v. } \boxed{x = \sec t}\,, \ t \in [0,\pi] \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\} \quad \to \ x' = \sec t\,\tan t$$

x	t
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} = \sec t \ \to \ \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \to \ t = \frac{\pi}{4}$
2	$2 = \sec t \ \to \ \cos t = \frac{1}{2} \ \to \ t = \frac{\pi}{3}$

Então

$$
\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad &\overset{\text{m.v}}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^3 t}{\sqrt{\sec^2 t - 1}}\ \sec t\ \tan t\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^4 t\ \tan t}{\sqrt{\tan^2 t}}\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^4 t\ \tan t}{|\tan t|}\,dt\,, \qquad |\tan t| = \tan t \text{ porque } t \in \left[\tfrac{\pi}{4},\, \tfrac{\pi}{3}\right] \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^4 t\,dt\,, \quad \text{potência par de secante - Tabelas pág 6 caso I-4} \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 t\ \sec^2 t\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 t\,\left(\tan^2 t + 1\right)dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sec^2 t\ \tan^2 t}_{R2}\,dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sec^2 t}_{R8}\,dt \\
&= \left[\frac{\tan^3 t}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \Big[\tan t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left(\tan^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^3 - 1\right) + \sqrt{3} - 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) + \sqrt{3} - 1 \\
&= \sqrt{3} - \frac{1}{3} + \sqrt{3} - 1 \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}
$$