LICENCIATURAS EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Unidade Curricular: **ANÁLISE MATEMÁTICA II**

Ano Letivo: **2018/2019**

TESTE INTERCALAR A » Data: 15/05/2019 Código da prova: **1505201901**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1.

[1.00] **(a)** Utilizando um polinómio de Taylor de grau 2, determine um valor aproximado de $\sin\left(44^{o}\right)+\cos(44^{o})$ com 2 casas decimais e um majorante para o erro cometido.

Sugestão: $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}\left(x-a\right)^i$ e $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1},\quad c\in\left(a,x\right)$

[0.25] **(b)** Complete as instruções seguintes em GeoGebra que lhe permitiriam resolver a questão anterior.

```
f(x)= ____________        a= ____________
  n= ____________       x_0= ____________

P(x)= PolinómioTaylor[______,______,______]
sinpluscos_x0= P(_____)
```

[0.50] **(c)** No desenvolvimento e aproximação da função f da alínea anterior por um Polinómio de Taylor de qualquer grau, os termos ímpares são sempre nulos? Justifique a sua resposta.

[0.25] **(d)** Qual das figuras seguintes ilustra corretamente os dados e resultados da alínea (b)? Justifique.

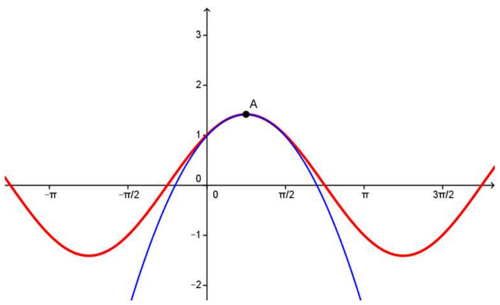

Figura 1

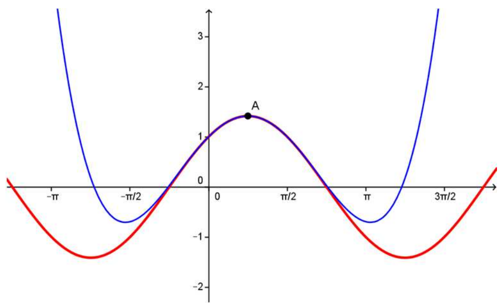

Figura 2

2. Considere a equação não linear $\sin x-\sqrt{4-x^2}=0\Leftrightarrow f(x)=0$

[1.00] **(a)** Indique um intervalo de amplitude igual a 2 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e positiva. Justifique a sua resposta!

[0.75] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção duas vezes. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.25] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

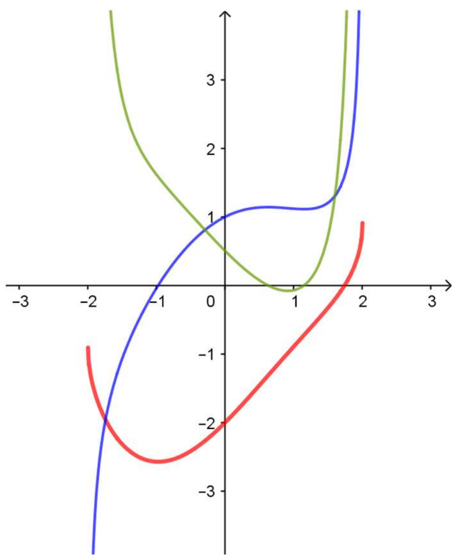

Figura 3 - Gráficos de f, f' e f''

[2.75] **(d)** Deduza a fórmula (equação de iteração) do método de Newton-Raphson ou das tangentes.

Complete a função seguinte, escreva um pseudocódigo da mesma e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
 k=_________;
 x(k)=______;
 while(______________)
     x(k+1)=________________________________;
     if(____________________________________) break; end;
     k=____________;
end
```

Script01

```
%INTERFACE01_MTangentes
% 15/05/2019 - ArménioCorreia .: armenioc@isec.pt

clear
clc
fprintf('\n-------MÉTODO DAS TANGENTES para f(x)=0-------\n')
strF='sin(x)+sqrt(4-x^2)';
f=@(x) vectorize(eval(strf));
while(1)
    a=num2str(input('a=','s'));
    b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&& isreal(a))||(isscalar(b)&& isreal(b))&& b>a)
        continue
    end
    if (f(a)*f(b)>0) break; end
end

% 1ª e 2ª derivada da função
df     = diff(f(syms('x')));
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

% aproximação inicial
while(1)
    x0 = num2str(input('s','x0='));
    if ~(isscalar(x0)|| isreal(x0)) continue; end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max=');
tol  = str2num(input('tol=','s'));
% chamada do método das tangentes
xT = MTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol);
disp(xT.');
```

3. Na Queima das Fitas 2019 o fado de Coimbra também foi cantado e tocado numa das noites do parque para além da tradicional serenata na Sé Velha!

Na figura seguinte o tampo da guitarra é limitado pelas funções f e g, a boca por um círculo de raio $1/2$, o braço por segmentos de reta e a cabeça por segmentos de reta e um arco de circunferência de raio 1.

$$f(x) := \left|\begin{array}{l} \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ \text{então} \;\; y = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \\ \text{senão se} \;\; -\pi \leq x \leq 0 \\ \qquad \text{então} \;\; y = 3\cos(\frac{1}{2}x) \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = -f(x)$$

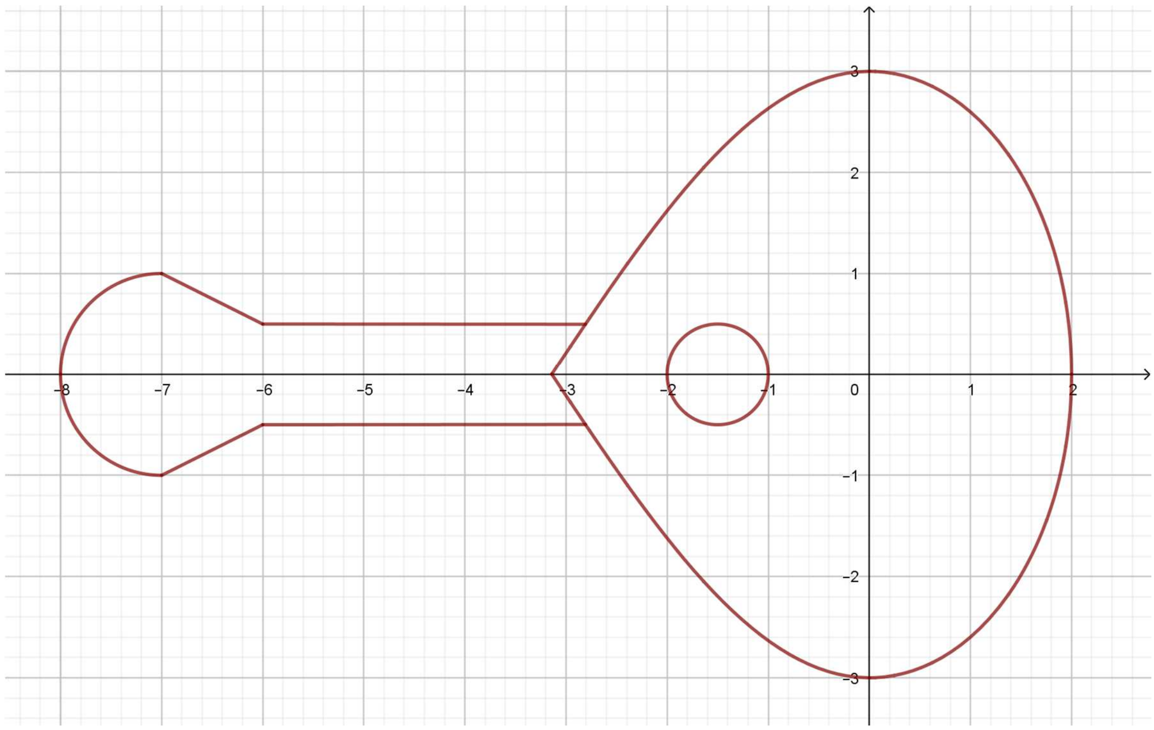

Figura 4 – Gráfico e desenho de uma guitarra de Coimbra

[0.25] **(a)** Defina polinómio interpolador.

[2.00] **(b)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[-\pi, 0\right]$ e a equação do segmento de reta com declive negativo da parte da cabeça da guitarra.

[0.25] **(c)** Redesenhe a figura 4, aproximando as funções e linhas que definem o tampo da guitarra por interpolações quadráticas e as restantes linhas do braço e cabeça da guitarra por interpolações lineares.

[2.00] **(d)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_0^2 f(x)\,dx$ e $I_2 = \int_{-\pi}^0 -g(x)\,dx$, utilizando respetivamente as regras simples de Simpson e dos trapézios.

Recorrendo à figura 4 interprete os resultados obtidos.

[0.50] **(e)** Aplicando as regras de Simpson e a dos trapézios com $n = 2$, qual delas lhe permite obter uma melhor aproximação à medida de área da região limitada por uma elipse de semieixo a e b? Justifique

[1.50] **(f)** Alguma das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique a sua resposta e no caso de nenhuma estar correta, reescreva corretamente em Matlab pelo menos uma dessas funções e escreva o respetivo pseudocódigo do algoritmo da regra em causa.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=abs(a-b)/n;
x=a;
s=b;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0
        s=s+2*f(x);
    else
        s=s+4*f(x);
    end
end
S=(h*f(b)+h*s+h*f(a))/3;
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,h)
n=(b-a)/h;
x=a+h:h:b-h;
s=0;
for i=2:n-1
    if mod(i,2)
        s=s+4*f(x(i));
    else
        s=s+2*f(x(i));
    end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

4.

[0.25] **(a)** Mostre que a equação diferencial de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times x^2$ como integral geral é dada por $y' = 2yx^{-1}$. Os gráficos da equação diferencial e da solução geral são dados pelas figuras 5 e 6? Justifique a sua resposta.

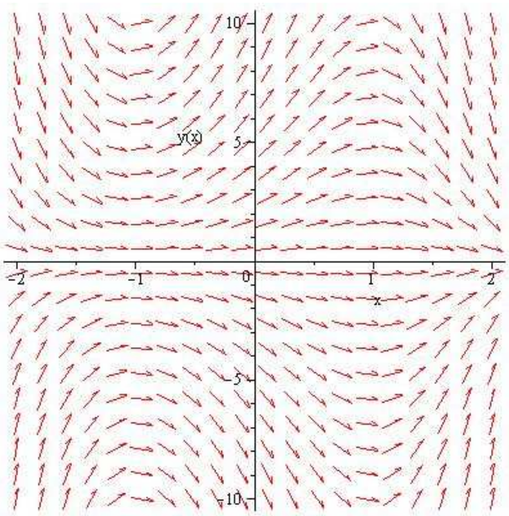

Figura 5

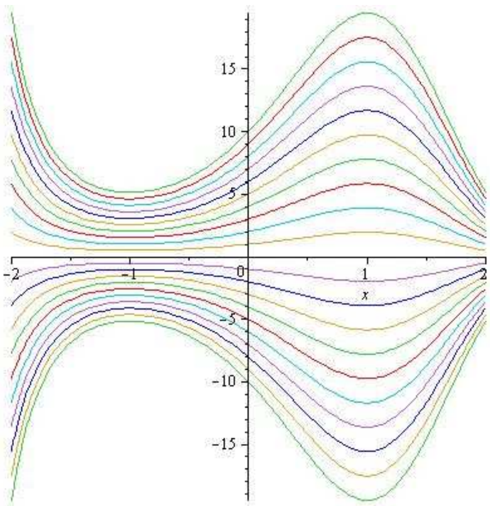

Figura 6

[1.00] **(b)** Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$y' - \frac{2y}{t} = 0, \quad y(1) = 1, \quad t \in [1,4].$$

Qual das funções $y(t) = t^2$ ou $y(t) = -t^2$ é a solução exata do PVI?

Justifique a sua resposta.

Apresente a instrução em Matlab através da qual, utilizando uma função da *Symbolic Math Toolbox*, se obtém a solução exata do PVI dado.

[2.00] **(c)** Relativamente ao PVI da alínea anterior, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos..

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK4
0	1		1		1		0	
1		4		3.50				0.06
2					8.86		1.42	
3	4	16		13.27				0.25

[0.25] **(d)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

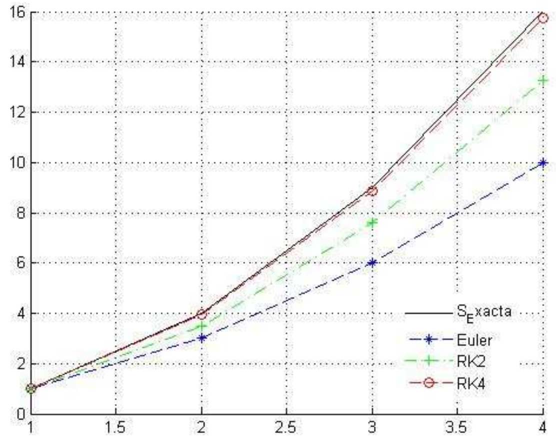

Figura 7

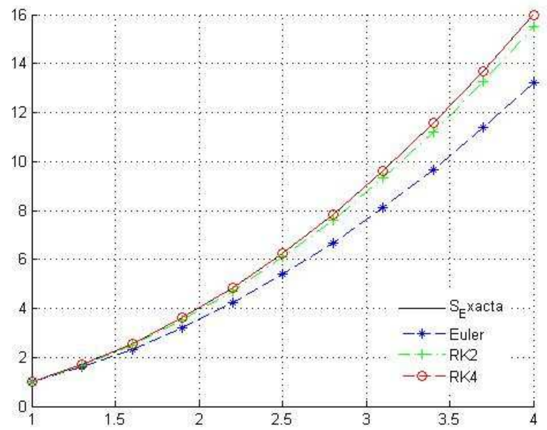

Figura 8

[1.00] **(e)** Complete a função seguinte e acrescente comentários para explicar o algoritmo e método numérico associado.

```
function y = RK4(f,a,b,h,y0)
n=_________________;
t=_________________;
y=zeros(____,_____);
y(1)=______________;
for i=1:n
    k1=_________________________________;
    k2=_________________________________;
    k3=_________________________________;
    k4=_________________________________;
    y(___)=_____________________________;
end
```

[1.25] **(f)** A *script* seguinte traduz corretamente a resolução em Matlab de um PVI? Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

Script02

```
%INTERFACE01_MNEDO
% y'= f(t,y) com t=[a, b] e y(a)=y0 condição inicial
%CHAMADA FUNÇÕES: N_Euler; N_EulerModificado; N_RK2; N_RK4;dsolve
% 15/04/2019 - ArménioCorreia .: armenioc@isec.pt

clc
clear

disp('--- Parâmetros de entrada do PVI ---');
strF=input('f(t,y)= ','s');
f   =@(t,y) vectorize(eval(strf));
a   = str2num(input('a= ','s'));
b   = str2num(input('b= ','s'));
n   = str2double(input('n= ','s'));
y0  = num2str(input('y0= ','s'));

try
    yEuler  = N_Euler(f,a,b,n,y0);
    yEulerM = N_EulerMelhorado(f,a,b,n,y0);
    yRK2    = N_RK2(f,a,b,n,y0);
    yRK4    = N_RK4(f,a,b,n,y0);
    sExata  = dsolve(['Dy=',a],['y(',num2str(strF),')=',num2str(0)]);
    t=b:(a-b)/n:a;
    yExata  = eval(vectorize(char(sExata)));

    erroEuler  = abs(yRK4-yEuler);
    erroEulerM = abs(yRK4-yEulerM);
    erroRK2    = abs(yRK4-yRK2);
    erroRK4    = abs(yRK4-yExata);

    disp('---- Tabela de Resultados----');
    tabela=[t.',yExata,yEuler,yEulerM,yRK2,yRK4,...
            erroEuler.',erroEulerM.',erroRK2.',erroRK4.'];
    disp(tabela);

    plot(t,yExata,'-*k');
    hold on
    plot(t,yEuler,'-or');
    plot(t,yEulerM,'-db');
    plot(t,yRK2,'-+c');
    plot(t,yRK4,'-sg');
    hold off
    grid on
    legend('yExata','yEuler','yEulerM','yRK2','yRK4');
    shg
catch Me
    errordlg('Ocorreu um erro nos pârametros do PVI ou...','Erro','modal');
end
```