Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste B**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ se $x^2 + y^2 \le 25$, $g(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{f(x,y) + 25}$, $h(x,y)$ e $j(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$h(x,y) ::$
Se $9 < x^2 + y^2 \le 25$
Então $z := \sqrt{-f(x,y)}$
Senão Se $x^2 + y^2 \le 9$
Então $z := g(x,y)$

$j(x,y) ::$
Se $x^2 + y^2 \le 9$
Então $z := -g(x,y)$
Senão $z := -\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[2.0] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$ é uma curva de nível comum às quatro funções.

(ii) As funções f e g têm o mesmo limite em $(0,0)$, isto é, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

(iii) O vector $[0, y, -25]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto $P(0,0,-25)$.

(iv) As funções f e g têm um ponto crítico e um mínimo absoluto.

(v) A função h é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

(vi) As funções h e j são simétricas.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

(i) Mostre que, se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P(1,1)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ é negativa, sendo máxima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dado por $V = f(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $(1,1)$ e $(1.33, 1.33)$.

(iii) Mostre que, se $z = g(x+1, y-1) \wedge x = -1 + \cos\theta \wedge \mathrm{y} = 1 + \sin\theta$ então $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

(iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 2 - g(x+1, y-1)$ se $(x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4$, no ponto $P\left(0, 0, 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$.

[2.0] **(e)** Resolva apenas **uma** das alíneas seguintes

(i) Mostre, utilizando o integral duplo e uma mudança de variáveis para coordenadas polares, que a área da superfície parabólica de equação $z = f(x,y)$ se $x^2 + y^2 \le 25$ é igual a $A(S) = \frac{\pi}{6}(101\sqrt{101} - 1)$.

(ii) Determine o valor de $I = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta d\rho - \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta d\rho$ e interprete geometricamente o resultado obtido. Estabeleça, invertendo a ordem de integração, um integral que lhe permitiria obter o mesmo resultado de I.

2. A figura 1 representa um sólido com a forma de uma *bolota das terras de Riba-Côa*, formado por duas partes:

- Calote esférica de raio $r = 5$ seccionada por um cone de raio $r = 3$ e altura $h = 4$;
- Parabolóide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$.

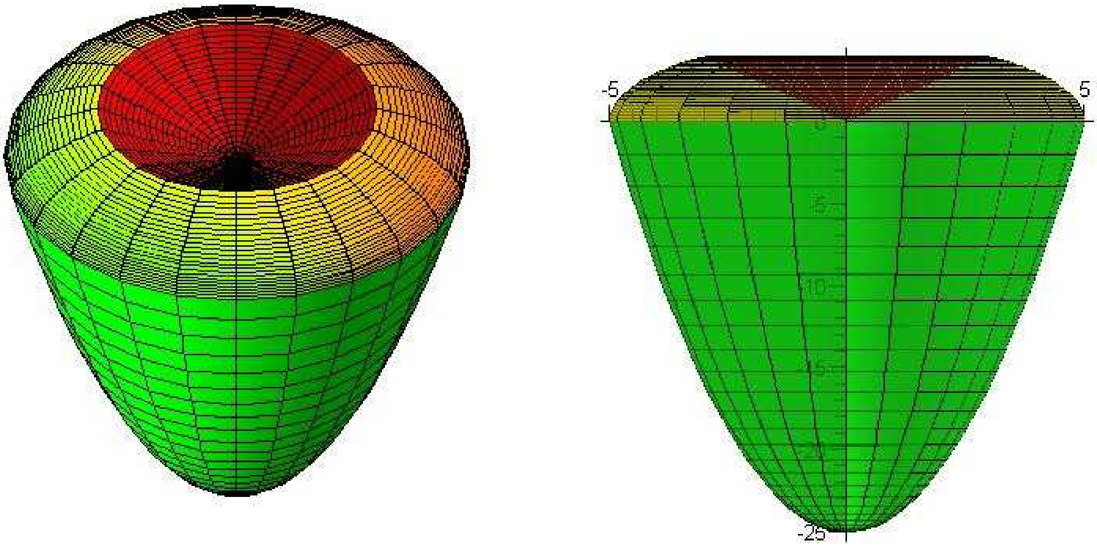

Figura 1

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\frac{3}{4}) \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$

$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \rho^2 - 25 \le z \le 0\right\}$

[3.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido de densidade constante e igual a 2.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre que em coordenadas cartesianas o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(9 < x^2 + y^2 \le 25 \wedge 0 \le z \le \sqrt{25 - x^2 - y^2}\right) \vee \left(x^2 + y^2 \le 9 \wedge 0 \le z \le \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right\}$

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 25 \wedge x^2 + y^2 - 25 \le z \le 0\right\}$

(iii) Complete as funções seguintes, implementadas em Maple, e associe-as a duas transformações/mudança de variáveis.

```
transformaCoords01 := proc(ρ, θ, z)
 local x, y;
 if --?--
 then x := --?--;
      y := --?--;
      return [x, y, z];
 else --?--;
 end if
 end proc
```

```
transformaCoords02 := proc(ρ, θ)
 local x, y;
 if --?--
 then x := --?--;
      y := --?--;
      return [x, y];
 else --?--;
 end if
 end proc
```