Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época de Recurso**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = 9 - f(x,y)$ se $x^2 + y^2 \leq 9$, $h(x,y) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{f(x,y)}$

e j dada sob a forma do algoritmo seguinte:

$j(x,y) :=$
Se $5 < x^2 + y^2 \leq 9$
Então $z := -\sqrt{g(x,y)}$
Senão Se $x^2 + y^2 \leq 5$
Então $z := h(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = j(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[0, y, 9]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = g(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto $P(0,0,9)$.

(ii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Determine a derivada direccional da função g em $P\left(-1,-1\right)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Em que direcção e sentido a função cresce mais rapidamente? Justifique.

(ii) Mostre que, se $z = -\frac{\sqrt{5}}{2}h(x,y) \wedge x = \rho\cos\theta \wedge y = \rho\sin\theta$ então $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \rho}$ para $\rho > 0$.

(iii) Qual das rotinas seguintes, implementadas em Maple, traduz correctamente a avaliação se uma função é harmónica, isto é, se satisfaz a equação de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$?

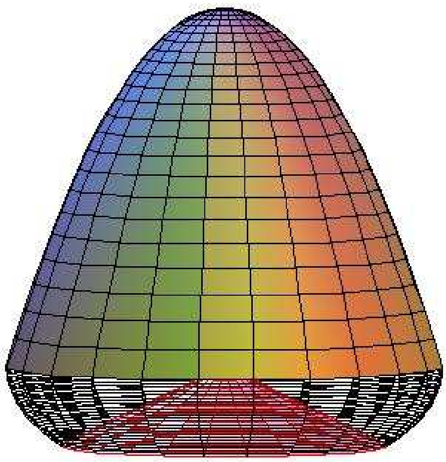
A função f é harmónica? Justifique.

```
Harmonica_v1 := proc(f)
   if diff(f, x, x)= - diff(f, y, y)
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;

Harmonica_v2 := proc(f)
   if diff(diff(f, x),x)-diff(diff(f, y),y) = 0
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;
```

2. A figura 1 representa um sólido de densidade $\rho(x, y, z) = 3$ formado por duas partes:

- Parabolóide de altura $h = 9$ e largura máxima de raio $r = 3$
- Calote esférica de raio $r = 3$ seccionada por um cone de raio $r = \sqrt{5}$ e altura $h = 2$.



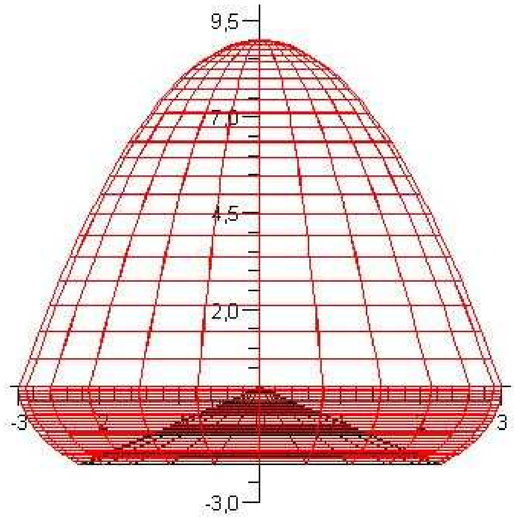


Figura 1

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(\rho, \theta, z) : 0 \le \rho \le 3 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le z \le 9 - \rho^2\right\}$

$S_2 = \left\{(r, \theta, \varphi) : 0 \le r \le 3 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi - \arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})\right\}$

[2.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

(i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de diâmetro d é igual a $\frac{1}{6}\pi d^3$.

(ii) Mostre que e m coordenadas cartesianas o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9 \wedge 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2\right\}$

$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(5 < x^2 + y^2 \le 9 \wedge -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \le z \le 0\right) \vee \left(x^2 + y^2 \le 5 \wedge -\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 0\right)\right\}$

(iii) Complete a rotina seguinte e apresente uma 2.ª versão, em Maple ou Matlab, com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := --?-- ;
   y := --?-- ;
   return [x, y];
end proc;
```

3. Considere a equação não linear $x-1-\sin x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

[1.5] **(a)** A equação tem uma única raiz real no intervalo $[1,2]$? Justifique.

[2.5] **(b)** Mostre que $x_0=2$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes. Aplique o método uma vez e obtenha uma aproximação da raiz real x_r da equação.

4. A figura 2 representa um bacalhau. As linhas que contornam a figura são:

- Arcos de circunferência de raio 1/2;
- Parábolas de eixo vertical com vértice de abcissa 2;
- Segmentos de recta.

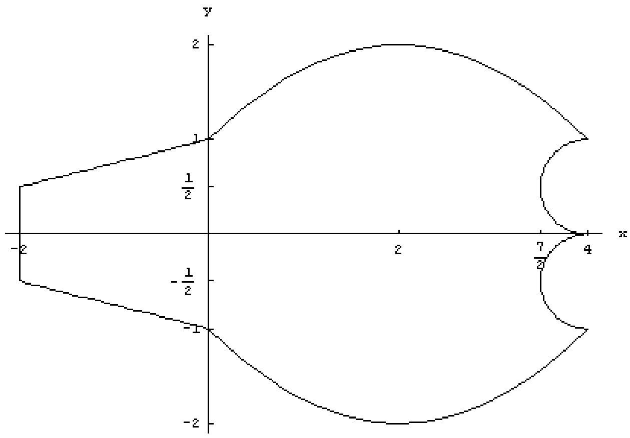


Figura 2

[1.0] **(a)** Determine, usando Interpolação Polinomial, as equações da parábola e do segmento de recta que se intersectam no ponto de coordenadas (0, -1)

[1.0] **(b)** Aplicando a regra de Simpson simples $(n=2)$, calcule o valor do integral $I=\int_0^4\int_{-2+\frac{1}{4}(x-2)^2}^{0} 1dydx$.

Interprete o resultado obtido.

[1.0] **(c)** Qual das funções seguintes traduz correctamente a regra de Simpson? Justifique.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if ~mod(i,2)
      s=s+2*feval(f,x);
    else
      s=s+4*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*(feval(f,a)+s+feval(f,b));
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)
      s=s+2*feval(f,x);
    else
      s=s+4*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*feval(f,a)+s+feval(f,b);
```

5. Considere o problema de condição inicial $y'=ty^2, \quad y(-1)=2, \quad t\in[-1,1]$

[1.5] **(a)** Sabendo que $y(t)=\frac{2}{2-t^2}$ é a solução exacta do problema, complete a tabela seguinte.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK4
0	-1			2				0
1					0,6667		1	
2	1			0				1,0019

[0.5] **(b)** Interprete os resultados obtidos na tabela anterior.