INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

13-11-04 **ANÁLISE MATEMÁTICA II** _DESLIZANTE Duração: 2.30h+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Teste A1**

1. Considere as funções reais f, g e h definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \;\; se \;\; x^2 + y^2 \leq 25$ $\qquad$ $g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)} \;\; se \;\; 9 < x^2 + y^2 \leq 25$

$$h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 9 \\ \text{então } z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right. \qquad j(x,y) = \begin{cases} g(x,y) \\ h(x,y) \end{cases}$$

(a) Determine o domínio das funções e represente-os geometricamente. A fronteira do domínio das funções coincide com uma das suas curvas de nível? Justifique.

(b) Trace um esboço da superfície de equação $z = j(x,y)$.

(c) Resolva **apenas três** das alíneas seguintes

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) $m_t = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$ e $\begin{bmatrix} 0 & y & -25 \end{bmatrix}$, definem o declive e a equação vectorial da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $(0,0,-25)$.

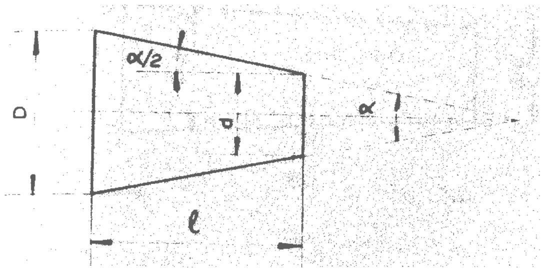
ii) O $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$.

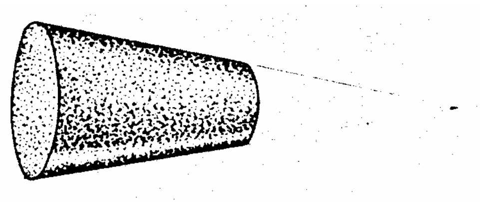
iii) A função $j(x,y)$ é contínua em todos os pontos do *cordão de soldadura* $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

iv) No *Derive*, a função j é definida por $j(x,y) := IF(x^2 + y^2 \leq 9, \; \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}, \; \sqrt{25 - x^2 - y^2})$

v) Determine a *conicidade* do tronco de cone limitado pela superfície cónica de equação $z = h(x,y) \;\; se \;\; x^2 + y^2 \geq \frac{9}{4}$

Sugestão: A conicidade é a relação $(D-d) : l$





A conicidade é indicada paralelamente ao eixo, e o seu valor pode ser calculado das seguintes maneiras:

$$k = \frac{l}{D-d} = \frac{100}{p\%} = \frac{1}{2}\text{cotg}\frac{\alpha}{2}; \qquad p\% = 100\frac{D-d}{l} = \frac{100}{k} = 200\tan\frac{\alpha}{2}; \qquad \frac{\alpha}{2} = \arctan\left(\frac{D-d}{2} : l\right) = \arctan\frac{p\%}{200} = \text{arccotg}\, 2k$$

(d) Resolva **apenas duas** das alíneas seguintes

i) Mostre, que a quantidade de tinta para pintar a superfície parabólica de equação $z = f(x,y)$, depende da sua área de superfície de valor igual a $A(S) = \frac{\pi}{6}(101\sqrt{101} - 1)$.

Sugestão: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\; dydx$, com f_x e f_y funções contínuas em D.

ii) Apresente, sem calcular, uma forma/algoritmo que lhe permitiria determinar o volume e a massa do sólido, de densidade constante, limitado superiormente por $z = j(x,y)$ e inferiormente por $z = 0$.

Sugestão: a massa de um sólido S de densidade $\rho(x,y,z)$ é dada por $M = \iiint_S \rho(x,y,z)dzdydx$.

iii) Determine o valor do integral $I = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho - \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho$ e, interprete o resultado obtido.

Estabeleça, invertendo a ordem de integração, um integral que lhe permitiria obter o mesmo resultado de I.

Análise Matemática II

Proposta de Resolução do Teste A1

13.11.04

---

① $f(x,y) = x^2+y^2-25$ se $x^2+y^2 \leq 25$

$g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)}$ se $9 < x^2+y^2 \leq 25 \Leftrightarrow g(x,y) = \sqrt{25-(x^2+y^2)}$ se $9<x^2+y^2\leq 25$

$h(x,y) := \left|\begin{array}{l} \text{se } x^2+y^2 \leq 9 \\ \text{então } z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow h(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2\leq 9$

$j(x,y) = \begin{cases} g(x,y) \\ h(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2-y^2} & \text{se } 9<x^2+y^2\leq 25 \\ \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$

(a) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 25\}$

$D_g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 25-x^2-y^2 \geq 0 \wedge 9 < x^2+y^2 \leq 25\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 25 \wedge 9 < x^2+y^2 \leq 25\}$

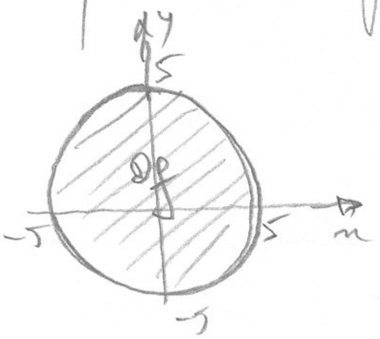
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9 < x^2+y^2 \leq 25\}$

$D_h = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\text{c. universal}} \wedge x^2+y^2 \leq 9\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}$

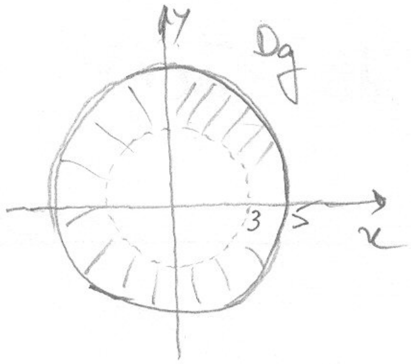
$D_j = D_{j_1} \cup D_{j_2} = D_g \cup D_h = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (9<x^2+y^2\leq 25) \vee (x^2+y^2\leq 9)\}$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 25\}$

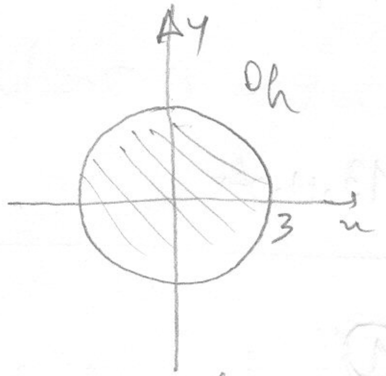
Representação geométrica dos domínios



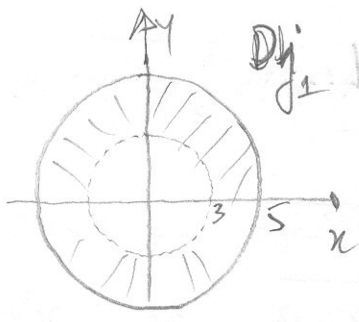
círculo centrado na origem de raio $r=5$

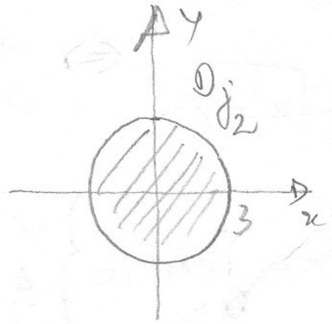


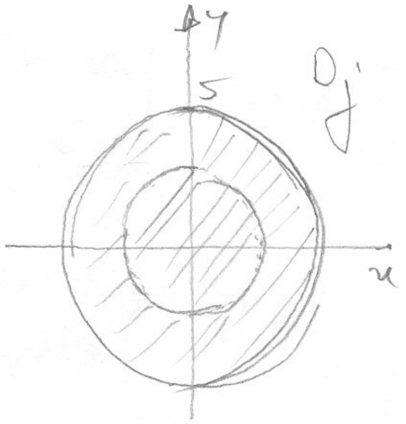
coroa circular



círculo centrado na origem de raio 3







Curvas de nível

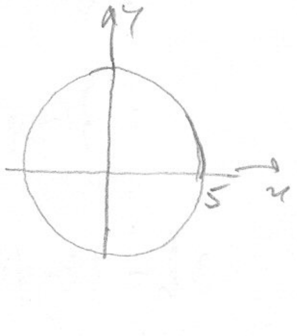
Fronteiras dos domínios

- $z = f(x,y)$

$$C_k = \{(x,y)\in D_f : x^2+y^2-25 = k\}$$

$$\{(x,y)\in D_f : x^2+y^2 = k+25\}$$

$$fr(D_f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=25\}$$



para $k=0$ $\quad C_0 \equiv fr(D_f)$

- $z = g(x,y)$

$$C_k = \{(x,y)\in D_g : \sqrt{25-x^2-y^2} = k\}$$

$$\{(x,y)\in D_g : x^2+y^2 = 25-k^2\}$$

$$fr(D_g) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{(x^2+y^2=25)}_{C_0} \vee \underbrace{(x^2+y^2=9)}_{C_4}\}$$

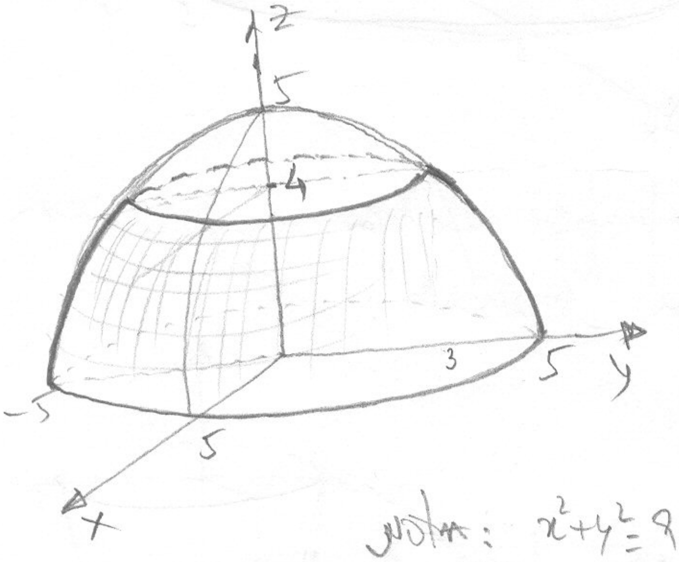
para $k=0 \wedge k=4$ coincidem

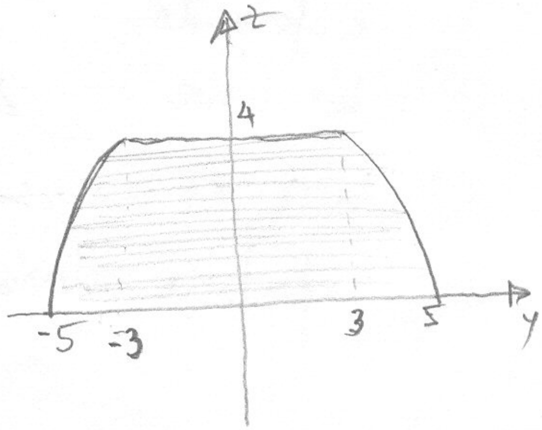
(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2-y^2} & \text{se } 9 < x^2+y^2 \leq 25 \\ \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Para

- $f_1(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$ se $9 < x^2+y^2 \leq 25$ 1º ramo



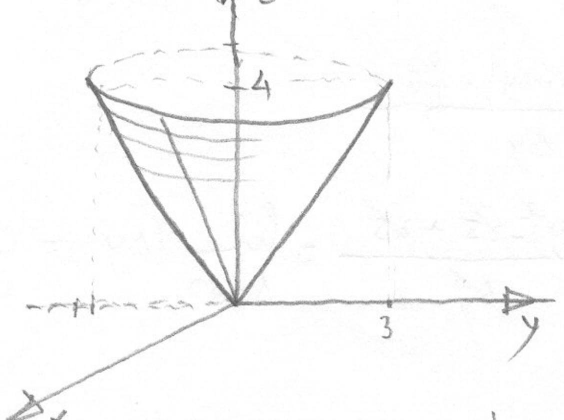


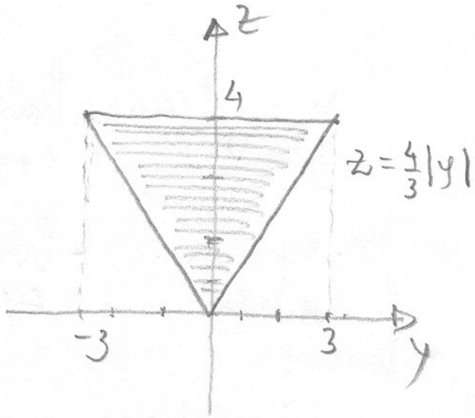
nota: $\underset{\uparrow \; C_4}{x^2+y^2=9} \rightarrow z = \sqrt{25-(x^2+y^2)}$

$z = \sqrt{25-9} \Leftrightarrow z = 4$

Semi-superfície esférica de raio 5, seccionada no plano $z=4$

- $f_2(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \leq 9$



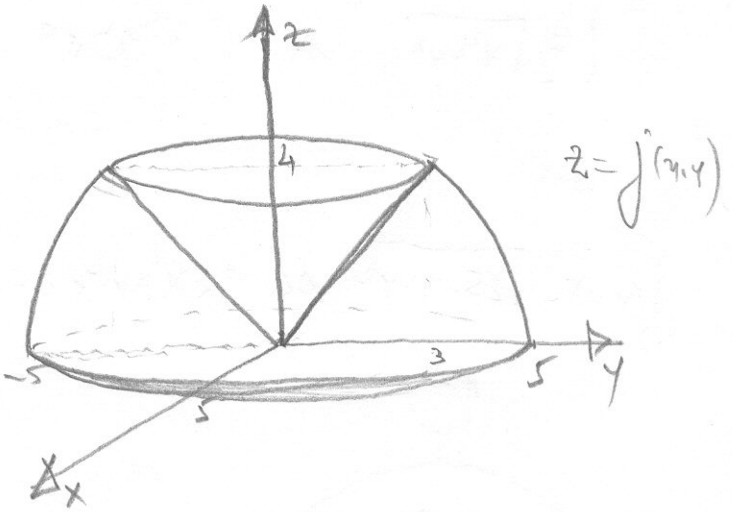


Superfície cónica de raio 3 e altura 4

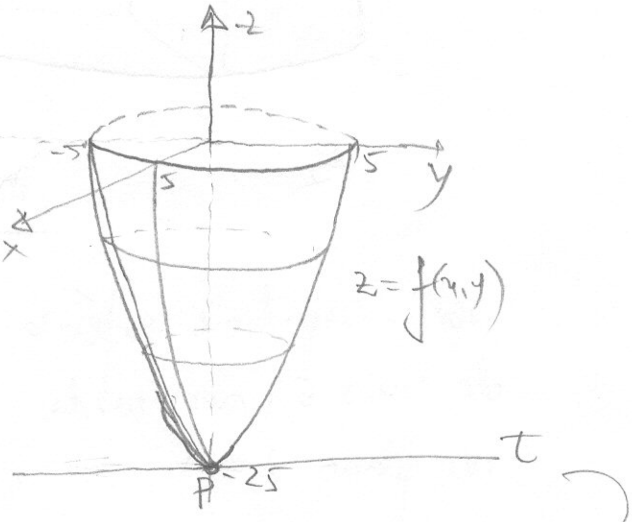
nota: $\underset{\uparrow \; C_4}{x^2+y^2=9} \rightarrow z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

$z = \frac{4}{3}\sqrt{9} \Leftrightarrow z = 4$

Assim:

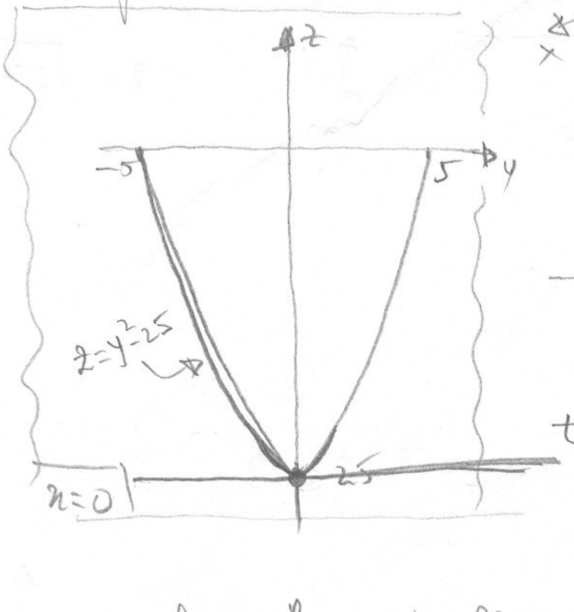


O gráfico ~~de~~ tridimensional de $z=f(x,y)$ é formado por uma parte de semi-superfície esférica e por uma superfície cónica "encaixada".



(e) Valor lógico

(i)



$z=-25 \wedge x=0$

tangente à curva

$C: \begin{cases} z=x^2+y^2-25 \\ x=0 \end{cases}$ no ponto $P(0,0,-25)$ (x_0,y_0,z_0)

$$m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

por definição de derivada parcial

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^2 - \cancel{25} + \cancel{25}}{\cancel{\Delta y}} = \lim_{\Delta y \to 0} (\Delta y) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} & m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2-25) = 2y \end{aligned}\right\} m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2(0) = 0$$

Equação da recta tangente

$z - z_0 = m_t (y - y_0) \wedge x = x_0$

$m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \rightarrow m_t = 0$

$P(x_0, y_0, z_0) = P(0, 0, -25)$

$z + 25 = 0(y - 0) \wedge x = 0$

$z = -25 \wedge x = 0$

equação cartesiana $y \in \mathbb{R}$

$[0, y, -25]$

→ equação vectorial

$\vec{R}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$

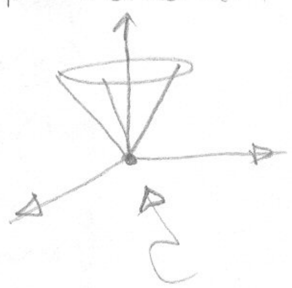
$\vec{R}(t) = 0\,\hat{\imath} + t\,\hat{\jmath} - 25\,\hat{k}$ $\quad y = t \in \mathbb{R}$

∴ Assim, a afirmação é verdadeira

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2 - 25) = -25$

conforme gráfico representado na alínea (i)

na vizinhança do ponto (0,0) as imagens tendem para $z = -25$

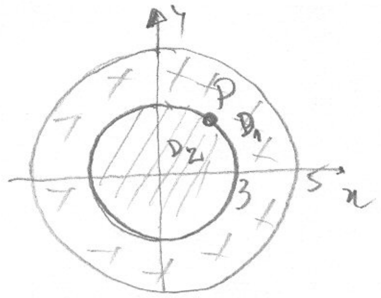


$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} = 0$

na vizinhança do ponto (0,0) as imagens tendem para zero

∴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ logo a afirmação dada é falsa

(iii)



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$

$P(x_0,y_0) \in C$, então $x_0^2+y_0^2=9$

A função $f(x,y)$ será contínua em C, se for contínua em todos os ptos de C e, em particular num pto genérico P ...

Teste de continuidade de $f(x,y)$ em $P(x_0,y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \frac{4}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{4}{3}\sqrt{9} = \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{3} = 4$
  a função está definida em P

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 4$, uma vez que: limites direccionais + visualização do gráfico

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{25-(x^2+y^2)} = \sqrt{25-(x_0^2+y_0^2)} = \sqrt{25-9} = 4$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{4}{3}\sqrt{9} = 4$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ logo f é contínua em P

e será contínua em todos os pontos de C "cordão de soldadura" entre as duas partes do gráfico da função.

(iv) $$j(x,y)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2-y^2} & \text{se } 9<x^2+y^2\leq 25\\ \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2\leq 9\end{cases}$$

<u>Sob a forma de algoritmo</u>

$j(x,y) :=$
| <u>**se**</u> $9<x^2+y^2\leq 25$
| <u>então</u> $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$
| <u>senão</u> <u>se</u> $x^2+y^2\leq 9$
| <u>então</u> $z=\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

que é equivalente ao algoritmo associado a:

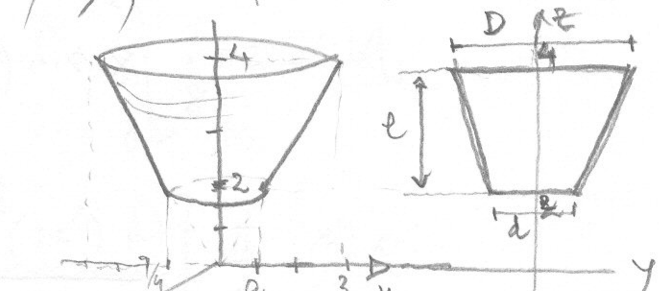
$$j(x,y) := IF\left(x^2+y^2\leq 9,\ \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{25-x^2-y^2}\right)$$

$j(x,y) :=$
| <u>se</u> $x^2+y^2\leq 9$
| <u>então</u> $z=\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$
| <u>senão</u> $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$

$$j(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } x^2+y^2\leq 9\\ \sqrt{25-x^2-y^2}, & \text{se } x^2+y^2>9\end{cases}$$

coincide com a função j dada ...

(v) Conicidade tronco de cone



$z=h(x,y)$ se $x^2+y^2\geq 9/4$

$\Leftrightarrow$ $z=\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ se $\frac{9}{4}\leq x^2+y^2\leq 9$

$x^2+y^2=\frac{9}{4} \rightarrow z=\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z=2$

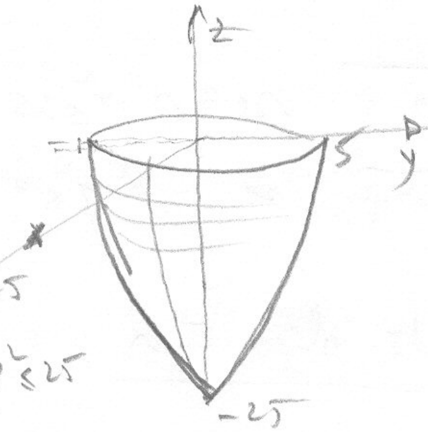
$D=6 \quad d=\frac{9}{2} \quad l=2$

<u>conicidade</u> $\rightarrow k_1=\frac{l}{D-d} \Leftrightarrow k_1=\frac{2}{6-\frac{9}{2}}=\frac{4}{3}$

(d)

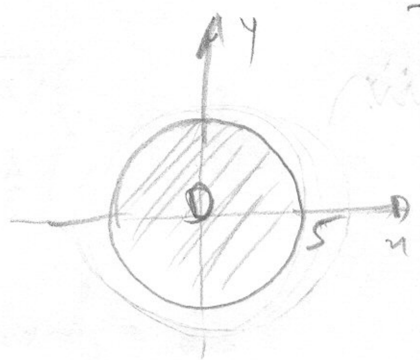
$z = f(x,y)$

(i)



$z = x^2+y^2-25$

$x^2+y^2 \le 25$



$$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dy\, dx$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dy\, dx = \iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dy\, dx$$

Efetuando uma mudança para coordenadas Polares

$$T_P = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad J = \rho \qquad D = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 5 \ \wedge\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

tem-se:

$$A(S) = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{4\rho^2+1}\ \underbrace{\rho}_{\text{jacobiano}}\, d\theta\, d\rho = \int_0^5 \rho(4\rho^2+1)^{1/2} \int_0^{2\pi} 1\, d\theta\, d\rho$$

$$A(S) = \int_0^5 \rho(4\rho^2+1)^{1/2} \left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho = \int_0^5 \rho(4\rho^2+1)^{1/2}(2\pi - 0)\, d\rho$$

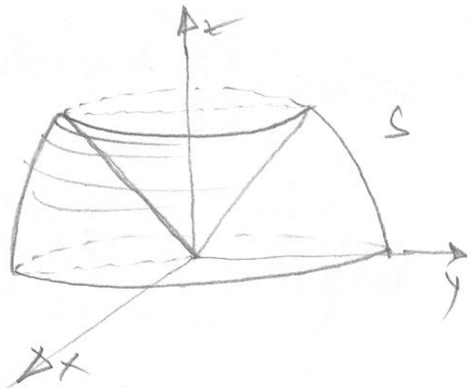
$$A(S) = 2\pi \frac{1}{8} \int_0^5 8\rho(4\rho^2+1)^{1/2} d\rho \qquad P\, f' f^p = \frac{f^{p+1}}{p+1}$$

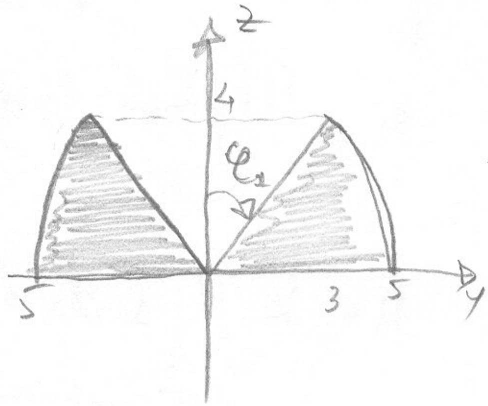
$$A(S) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(4\rho^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^5 = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\left[\sqrt{(4\rho^2+1)^3}\right]_0^5 = \frac{\pi}{6}\left[(4\rho^2+1)\sqrt{4\rho^2+1}\right]_0^5$$

$$A(S) = \frac{\pi}{6}\left[101\sqrt{101} - 1\right] \quad \text{c.q.m}$$

(ii) Sólido limitado superiormente por $z = f(x,y)$ e inferiormente por $z=0$

Graficamente





Análise do sólido $\rightarrow$ segmento de esfera de raio 5 e altura 4, "escavado" por um cone de raio 3 e altura 4

Volume = ?

1º Passo determinar o volume do segmento de esfera

2º Passo determinar o volume do cone

3º Passo volume do sólido seria igual à diferença dos volumes determinados no 1º Passo e 2º Passo

Analiticamente em coordenadas esféricas

$$S = \{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \operatorname{atan}(3/4) \le \varphi \le \pi/2\}$$

$$V(S) = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_{\operatorname{atan} 3/4}^{\pi/2} 1 \cdot |-R^2 \sin\varphi| \, d\varphi \, d\theta \, dR$$

MASSA = ?

Atendendo ao facto da função densidade ser constante

$\rho(x,y,z) = k$ e como:

$$M = \iiint_S \rho(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \iff M = \iiint_S k\, dz\, dy\, dx$$

$$M = k \underbrace{\iiint_S 1\, dz\, dy\, dx}_{V(S)} \iff \boxed{M = k\, V(S)}\ (*)$$

$V(S)$ fórmula para calcular volume do sólido

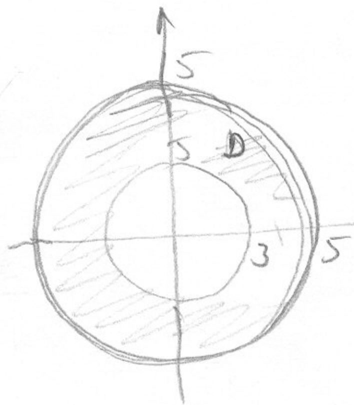
(*) A massa é directamente proporcional ao volume determinado anteriormente

$$I = \int_0^{2\pi}\int_3^5 \rho\, d\rho\, d\theta \quad (xx)$$

(iii) $$I = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta\, d\rho - \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^5 \rho\, [\theta]_0^{2\pi}\, d\rho - \int_0^3 \rho\, [\theta]_0^{2\pi}\, d\rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^5 - 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^3 =$$



Atendendo ao facto dos domínios de integração definirem em coordenadas polares círculos de raio 5 e 3 respectivamente o integral I permite calcular a área da região D coroa circular $A(D) = \iint_D 1\, dy\, dx = \iint_D 1\, \rho\, d\theta\, d\rho = \ldots$

. Inverter ordem de integração (xx)