Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº6 Data limite de entrega: 10/Nov/2015 (23h59m)

INTEGRAL DEFINIDO
[**A. Conhecimento**] **Definição e propriedades**

3) Seja $f(x) = 2|x-1|$. Determine $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.

[**C. Aplicação**]
Calcule a área de cada uma das regiões indicadas:

2) $y = x^2 - 4,\ \ y = -x^2 + 4$;

3) $y^2 = 2x - 2,\ \ y = x - 5$;

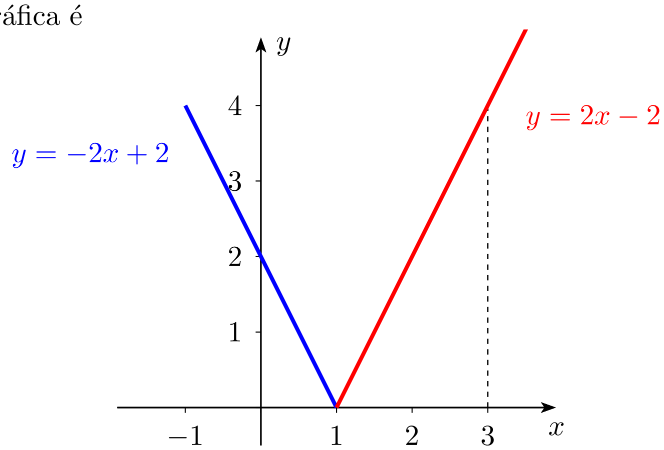
Sugestão de resolução:

[**A. Conhecimento**] **Definição e propriedades**

3) Comecemos por notar que

$$f(x) \;=\; 2|x-1| \;=\; \begin{cases} 2(x-1) & , x-1 \geq 0 \\ 2(-x+1) & , x-1 < 0 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 2x-2 & , x \geq 1 \\ -2x+2 & , x < 1 \end{cases},$$

cuja representação gráfica é

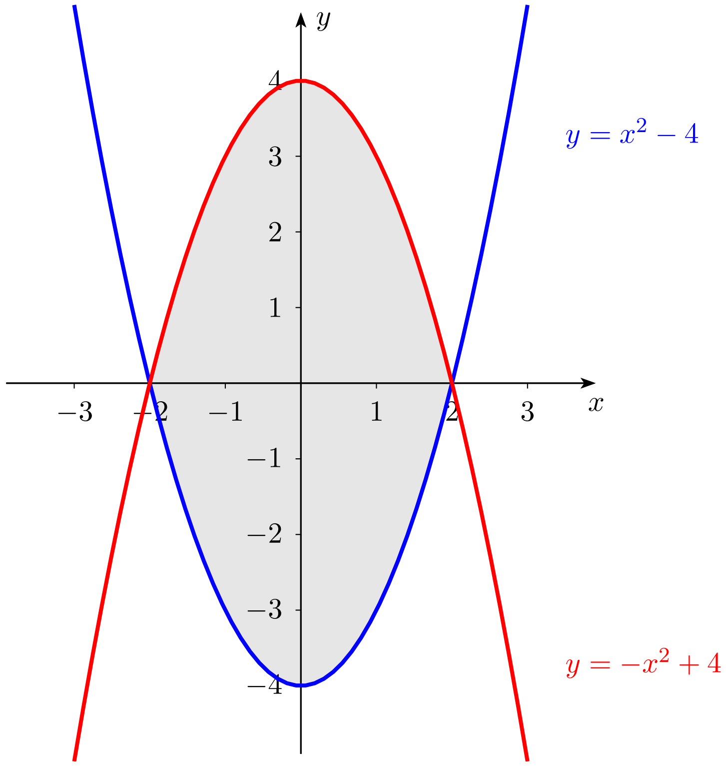


Assim,

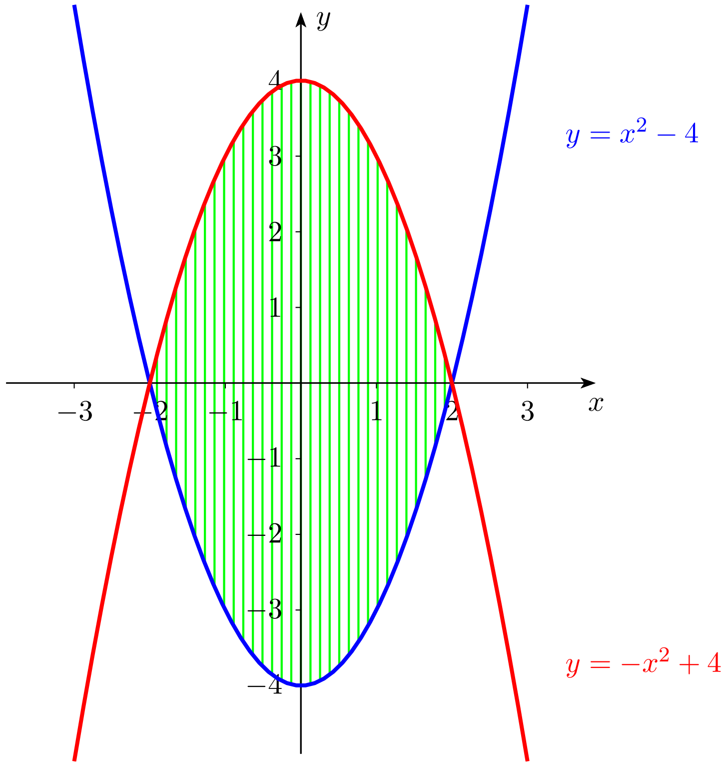
$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^1 -2x+2\,dx + \int_1^3 2x-2\,dx \\
&= -2\int_0^1 \underbrace{x^1\cdot 1}_{R2}\,dx + \int \underbrace{2}_{R1}\,dx + 2\int_1^3 \underbrace{x^1\cdot 1}_{R1}\,dx - \int \underbrace{2}_{R1}\,dx \\
&= -2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \Big[2x\Big]_0^1 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - \Big[2x\Big]_1^3 \\
&= \Big[-x^2+2x\Big]_0^1 + \Big[x^2-2x\Big]_1^3 = (-1+2)-(0)+(9-6)-(1-2) \;=\; 5\,.
\end{aligned}$$

[**C. Aplicação**]

2) A representação gráfica da região é a seguinte:

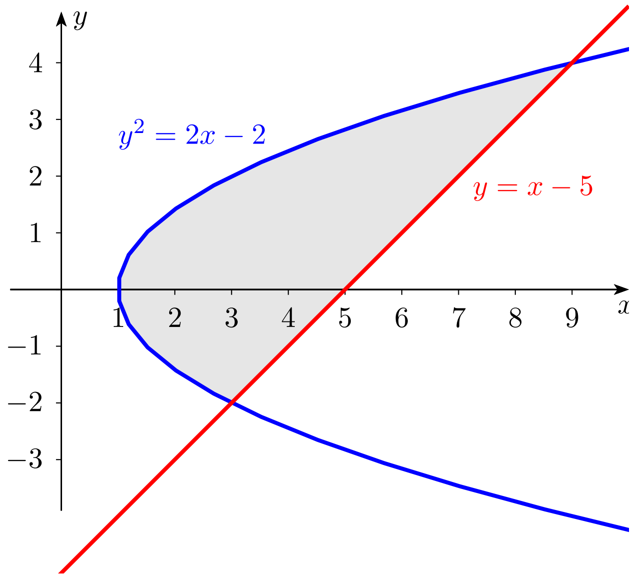


Descrevendo a região em função da variável x, tem-se



$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-2}^{2} (-x^2+4) - (x^2-4)\,dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2+8)\,dx = \Big[-2\,\frac{x^3}{3} + 8x\Big]_{-2}^{2} \\
&= \Big(-\frac{16}{3} + 16\Big) - \Big(\frac{16}{3} - 16\Big) = 2\Big(-\frac{16}{3} + \frac{48}{3}\Big) = \frac{64}{3}\,.
\end{aligned}
$$

3) A representação gráfica da região é a seguinte:



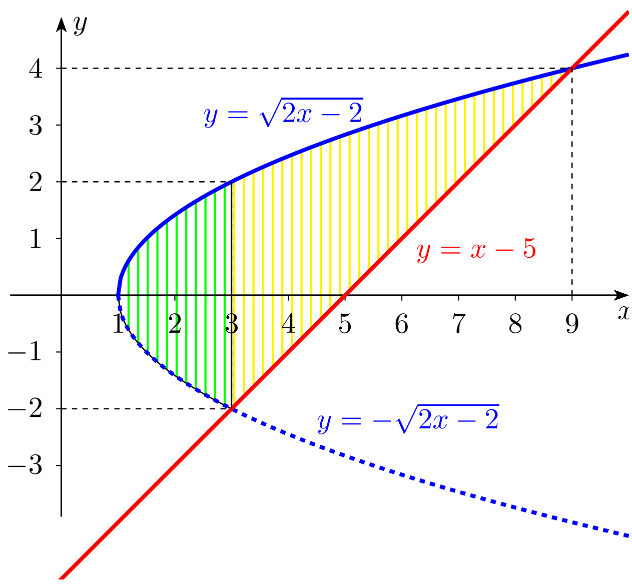
Para calcular a área da região recorrendo à variável x temos que descrever todas as curvas em função dessa variável. No caso da parábola, tem-se

$$y^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x-2}\,.$$

Além disso, os pontos de intersecção da recta e da parábola são tais que

$$\begin{aligned}\begin{cases} y^2 = 2x - 2 \\ y = x - 5 \end{cases} \Rightarrow (x-5)^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 2x - 2 \;&\Leftrightarrow\; x^2 - 12x + 27 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} \\ &\Leftrightarrow\; x = 9 \;\vee\; x = 3 \end{aligned}$$

Assim,



pelo que

$$
\begin{aligned}
\text{Área} \;&=\; \int_1^3 \sqrt{2x-2} - \big(-\sqrt{2x-2}\big)\,dx \;+\; \int_3^9 \sqrt{2x-2} - \big(x-5\big)\,dx \\
&=\; \int_1^3 2\sqrt{2x-2}\,dx \;+\; \int_3^9 \big(\sqrt{2x-2} - x + 5\big)\,dx \\
&=\; \int_1^3 \underbrace{2(2x-2)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_3^9 \underbrace{2(2x-2)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx - \int_3^9 \underbrace{x^1 \cdot 1}_{R2}\,dx + \int_3^9 \underbrace{5}_{R1}\,dx \\
&=\; \Big[\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_1^3 + \frac{1}{2}\Big[\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_3^9 - \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_3^9 + \Big[5x\Big]_3^9 \\
&=\; \frac{2}{3}\Big[\sqrt{(2x-2)^3}\Big]_1^3 + \frac{1}{3}\Big[\sqrt{(2x-2)^3}\Big]_3^9 - \Big(\frac{81}{2} - \frac{9}{2}\Big) + \Big(45 - 15\Big) \\
&=\; \frac{2}{3}\Big(\sqrt{4^3} - \sqrt{1}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\sqrt{16^3} - \sqrt{4^3}\Big) - 36 + 30 \\
&=\; \frac{2}{3}(8-1) + \frac{1}{3}(64-8) - 6 \\
&=\; \frac{70}{3} - 6\,.
\end{aligned}
$$