

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. Exame da Época Normal » teste B

1. Seja $f(x, y) = (29 - x^2 - y^2)^{1/2}$,

$g(x, y)$ e $h(x, y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$g(x, y)$::
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := -5$
Senão $z := -f(x, y)$

$h(x, y)$::
Se $4 < x^2 + y^2 \leq 29$
Então $z := f(x, y)$
Senão Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := 5$

[1.0] (a) Determine o domínio da função $h(x, y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] (b) Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x, y)$.

[3.0] (c) Das alíneas seguintes resolva apenas duas

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[x, 1, -5]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = g(x, y)$ com o plano $y = 1$ no ponto $P(1, 1, -5)$.

(ii) Se a temperatura em qualquer ponto do plano xOy for dado por $T = f^2(x, y)$, então a taxa de variação mínima e máxima da temperatura no ponto $P(1, 1)$ ocorrem na direcção e sentido dos vectores $\vec{w} = \langle 2, 2 \rangle$ e $\vec{v} = \langle -2, -2 \rangle$ respectivamente.

(iii) A função $g(x, y)$ é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$.

(iv) Se $z = f^2(x, y)$, $y = r \sin \theta$ e $x = r \cos \theta$, então $\frac{\partial z}{\partial \theta} - 2 \times \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

2. A figura 1 representa um sólido, de densidade constante $\rho(x, y, z) = 3$, composto por duas partes:

- segmento de esfera de raio $r = \sqrt{29}$ seccionado por um cone de raio $r = 2$ e altura $h = 5$
- cilindro de raio $r = \sqrt{29}$ e altura $h = 5$

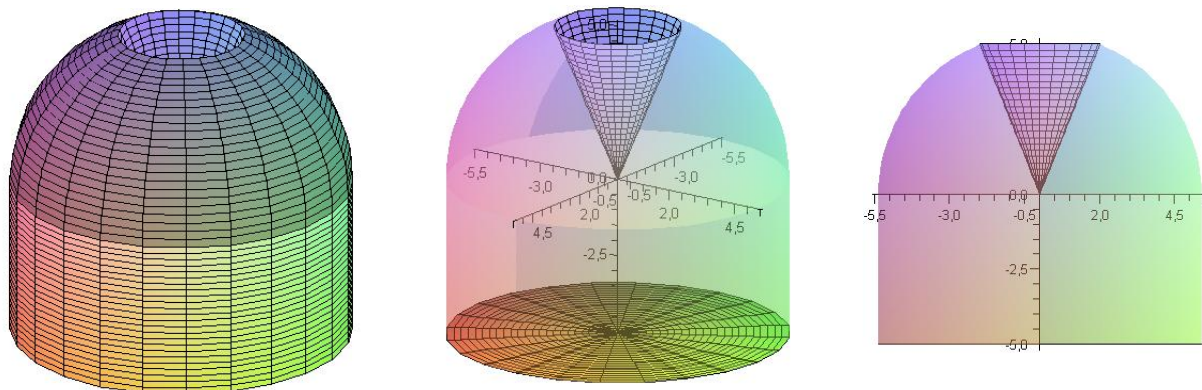


Figura 1

[2.0] (a) Justifique, associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, que o sólido é definido por

$S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \left\{ (R, \theta, \varphi) : 0 \leq R \leq \sqrt{29} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \arctan\left(\frac{2}{5}\right) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$S_2 = \{ (\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{29} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -5 \leq z \leq 0 \}$$

[2.5] (b) Calcule o volume, a massa e o centro de massa do sólido.

[1.0] (c) Das alíneas seguintes resolva apenas uma

i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cilindro de raio r e altura h é $\pi r^2 h$.

ii) Mostre, que a área da superfície cônica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 2\sqrt{29}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projecção da superfície no plano yOz .

iii) Complete as duas funções e associe-as a duas transformações/mudança de variáveis em 3D e 2D respectivamente

Transforma01(ρ , θ , z) :=

Prog

If (?)

RETURN "erro"

x := ?

y := ?

z := ?

RETURN [x, y, z]

Transforma02(x, y) :=

Prog

ρ := SQRT(?)

θ := ATAN(?)

RETURN [ρ , θ]

3. Considere a equação não linear $2x^2 - 2 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] (a) Determine, um intervalo de amplitude igual a 1, onde a equação dada tem uma única raiz real x_r positiva.

[1.5] (b) Utilizando o método da bissecção, uma vez, obtenha uma aproximação x_0 para a raiz da equação e, mostre que x_0 seria uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton/Raphson ou das tangentes.

4. Na figura 2, protótipo de um copo, a região sombreada é limitada pela exponencial de equação $y = e^{-x}$, por uma parábola e por segmentos de recta.

[1.0] (a) Determine, usando a interpoladora de Newton das Diferenças Divididas, a equação da parábola.

[2.0] (b) Aplicando a regra de Simpson simples ($n = 2$), obtenha um valor aproximado, com duas casas decimais, do integral $I = \int_0^{1.08} \int_{2x^2-2}^{e^{-x}} 1 dy dx$ e interprete o resultado obtido. Sugestão: Comece por transformar o integral duplo num integral simples.

[0.5] (c) Calcule um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação obtida na alínea anterior

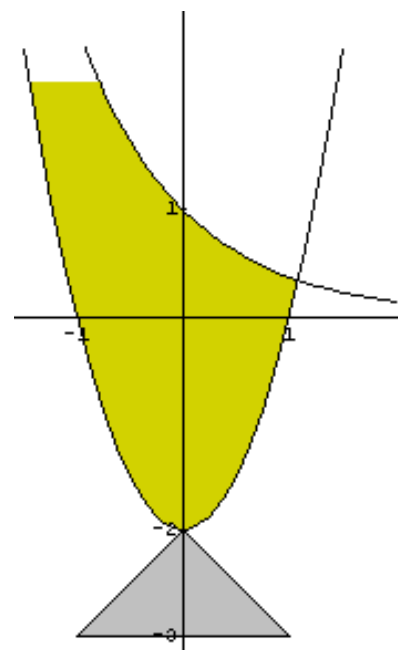


Figura 2

5. Considere o problema de condição inicial $y' = -ty$, $y(0) = 1$, $t \in [0, 2]$

[0.5] (a) Mostre que $y(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ é a solução exacta do problema.

[1.5] (b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

		Aproximações				Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$ y(t_i) - y_i $ Euler	$ y(t_i) - y_i $ RK2	$ y(t_i) - y_i $ RK4
0	0						0	0
1		0.6065					0.1065	0.0024
2	2			0.2500	0.1510			

[1.0] 6. Complete as funções seguintes e acrescente comentários para explicar os algoritmos associados a métodos numéricos específicos. Nota: a sintaxe usada é a da programação em *Matlab*.

```
function out = funcao1(f,a,b,n)
h=__;
x=__;
s=__;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0,
        s=__+2*feval(f,x);
    else
        s=__;
    end
end
out=h/3*(feval(f,a)+__+feval(f,b));
```

```
function y = funcao2(f,a,b,n,y0)
h=__;
t(1)=__;
y(1)=__;
for i=1:n,
    k1=h*feval(f,__,__);
    k2=h*feval(f,__,__);
    y(i+1)=__+1/2*(__);
    t(i+1)=__;
end
```