Licenciaturas em Engenharia Informática

Unidade Curricular: **Análise Matemática II**

Ano Letivo: **2017/2018**

Exame da Época Normal - Teste B » Data: 29/06/2018 Código da prova: **2906201801**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y) = -x^2 - y^2\,; \qquad g(x,y) = \sqrt{1+f(x,y)}\,; \qquad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \\ \text{então } z = f(x,y)+1 \end{array} \right. ; \quad j(x,y) = \begin{cases} g(x,y) \\ h(x,y) \end{cases}$$

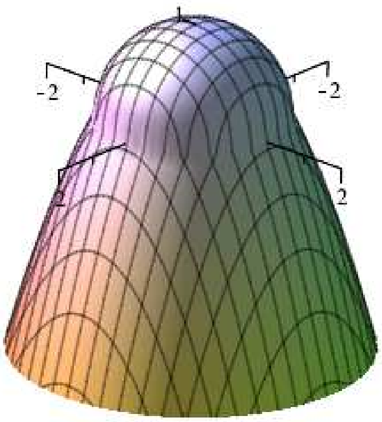

Figura 1

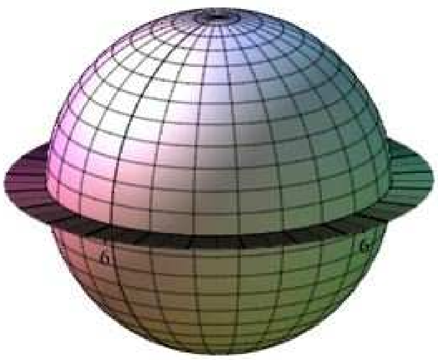

Figura 2

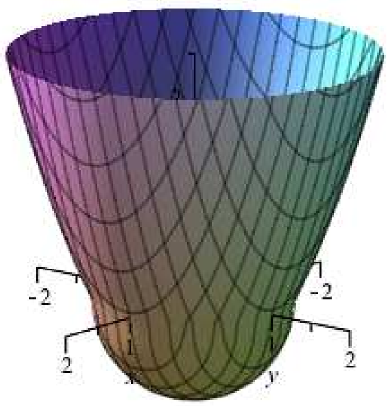

Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[0.5] **(b)** Defina a função j em forma de algoritmo.

[0.5] **(c)** Defina curva de nível.

A curva de nível $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ é comum a todas as funções? Justifique a sua resposta.

[2.0] **(d)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço da superfície de equação $z = j(x,y)$.

[3.0] **(e)** Resolva apenas <u>**três**</u> das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? <u>Justifique a sua resposta</u>.

i) As figuras 1, 2 e 3 são gráficos 3D de funções reais de duas variáveis reais e as figuras 1 e 3 representam funções simétricas.

ii) Por definição, a derivada parcial da função j em ordem a y no ponto $(0,\frac{1}{2})$ é dada por:

$$\frac{\partial j}{\partial y}(0,\tfrac{1}{2}) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{j(\Delta y, \frac{1}{2}) - j(0,\frac{1}{2})}{\Delta y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

iii) O vetor $\left[0 \quad y \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z = j(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $P(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

iv) A função j não é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por:
$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.

v) As funções f, g e h têm extremos.

vi) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x,y)->piecewise(x^2+y^2<=1,sqrt(1-x^2-y^2),1<x^2+y^2<=4,-x^2-y^2+1)
```

[3.0] **(f)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

i) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dada por $V = -f(x,y)$, a taxa de variação máxima do potencial no ponto $P(1,1)$ ocorre na direção e sentido do vetor $\vec{w} = \langle -1,-1 \rangle$?

Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação do potencial em P segundo o vetor $\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Utilizando diferenciais e supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dado por $T = \sqrt{-f(x,y)}$, obtenha uma aproximação da diferença da temperatura entre os pontos $(1,1)$ e $(1.12,1.12)$.

iii) Mostre que se $z = f(x,y) - (x+y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$,

então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin(\theta) - \cos(\theta)$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por

$z = 1 - f(x-1, y-1)$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$, no ponto $P(1,1,1)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. As figuras 4 e 5 representam um molde de uma taça de espumante, composto por quatro partes: segmento de um paraboloide de raio 2 e altura 4; calote esférica de raio 1; cone de raio e altura 2; cilindro de raio 2 e altura 0.25

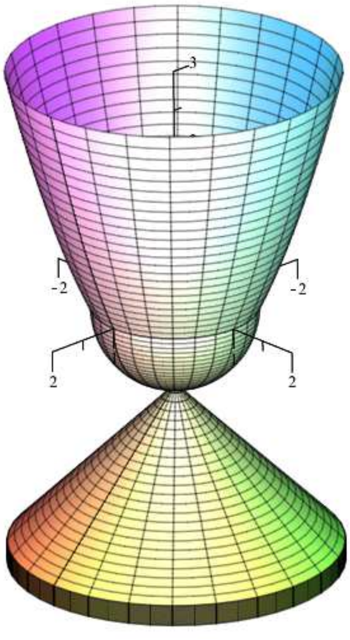

Figura 4

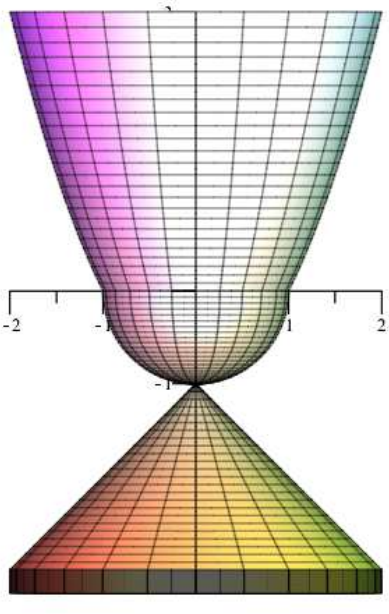

Figura 5

[3.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde:

$S_1 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge z = \rho^2 - 1\right\}$

$S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : R = 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right\}$

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3 \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} - 1\right\}$

$S_4 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -3.25 \leq z \leq -3\right\}$

[0.5] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_3? Justifique.

```
> addcoords(Zcylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(r-1, r=0..2, theta=0..2*Pi, coords=Zcylindrical)
```

[3.0] **(c)** Determine o volume que "ocupa" o **espumante Terras do Demo** dentro desta taça (capacidade da taça) e a massa da base da taça ($S_3 \cup S_4$) sabendo que a sua densidade é 3.

Nota: por uma questão de simplificação dos cálculos para o cálculo do volume do espumante, considere que a espessura da taça é desprezável.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **três**

i) Usando o integral triplo deduza as fórmulas do volume de um cone e de um cilindro de raio r e altura h.

ii) Determine a área da superfície parabólica do cálice.

iii) Deduza a fórmula da transformação de coordenadas polares para cartesianas e o respetivo jacobiano.

iv) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
    local x, y;
    x := ________________________;
    y := ________________________;
    return [__,__];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- ☐ Sim
- ☐ Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não