Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época de Recurso**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = -\sqrt{f(x,y)}$, $h(x,y)$ e $j(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$h(x,y)$ ::=
Se $16 < x^2 + y^2 \leq 32$
Então $z := -\sqrt{32 - f(x,y)}$
Senão Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z := g(x,y)$

$j(x,y)$ ::=
Se $x^2 + y^2 \leq 16$
Então $z := -g(x,y)$
Senão $z := \sqrt{32 - f(x,y)}$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[5, y, -\sqrt{7}]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h\left(x,y\right)$ com o plano $x = 5$ no ponto $P(5,0,-\sqrt{7})$.

(ii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

(i) Mostre que, se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P(1,1)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ é negativa, sendo máxima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Mostre que, se $z = g(x-2, y+2) \wedge x = 2 + \cos\theta \wedge \mathrm{y} = -2 + \sin\theta$, então $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{d\theta}\right)^2 = 1$.

(iii) Qual das rotinas seguintes, implementadas em Maple, traduz correctamente a avaliação se uma função é harmónica, isto é, se satisfaz a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$? Justifique e mostre que a função f não é harmónica.

```
Harmonica_v1 := proc(f)
   if diff(f, x, x)= - diff(f, y, y)
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;

Harmonica_v2 := proc(f)
   if diff(f, x) + diff(f, y) = 0
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;
```

2. Numa das tendas da *Feira Aquiliana 2010* existiam piões com a forma da *figura 1*, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 2$, compostos por três partes:

- Cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$;
- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$;
- Cilindro de raio e altura 1.

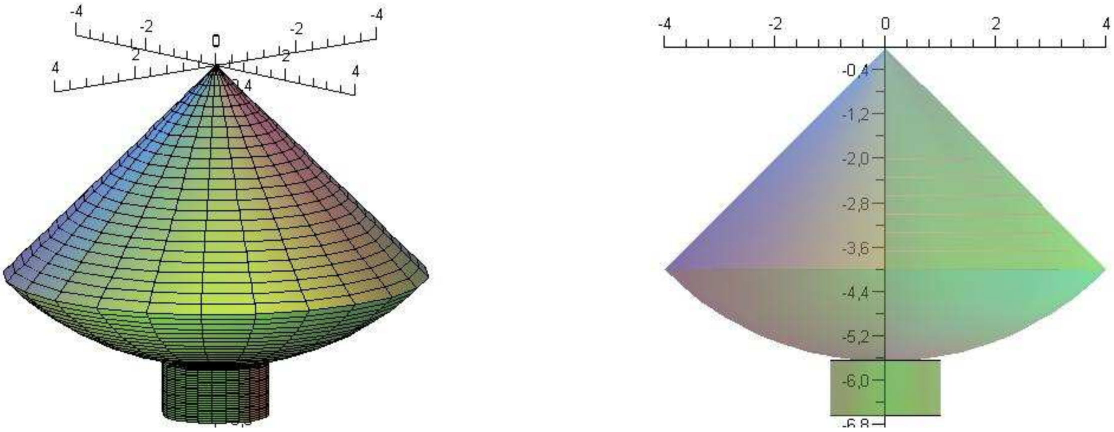

Figura 1

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ (R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \frac{3}{4}\pi \le \varphi \le \pi \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -\sqrt{32} - 1 \le z \le -\sqrt{32} \right\}$$

[2.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre, que em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à do pião é definido por:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x^2 + y^2 \le 16 \wedge -\sqrt{32 - x^2 - y^2} \le z \le -\sqrt{x^2 + y^2} \right) \vee \left(x^2 + y^2 \le 1 \wedge -\sqrt{32} - 1 \le z \le -\sqrt{32} \right) \right\}$$

(iii) Complete a rotina seguinte e apresente uma 2ª versão, em Maple ou Matlab, com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x = ? ;
   y = ? ;
   return [x, y]
end proc;
```

3. Considere a equação não linear $e^{-x} - 2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] **(a)** Determine, um intervalo de amplitude igual a 1 onde a equação dada tem uma única raiz real x_r positiva.

[2.0] **(b)** Mostre que $x_0 = 2$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes, e, aplicando o método uma vez, obtenha uma aproximação da raiz real x_r positiva da equação.

4. Uma vez mais, nas *Festas 2010 da Cidade de Coimbra e da Rainha Santa Isabel*, algumas ruas estão iluminadas com fios modelados matematicamente pelas funções $f(x) = -\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ e $g(x) = -f(x)$ representadas na figura 2.

[1.5] **(a)** Determine o polinómio interpolador de grau 2 para $g(x)$ com $x \in [1,2]$.

[1.5] **(b)** Obtenha, usando a regra de Simpson simples, $n = 2$, um valor aproximado do integral $\int_1^2 -g(x)dx$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

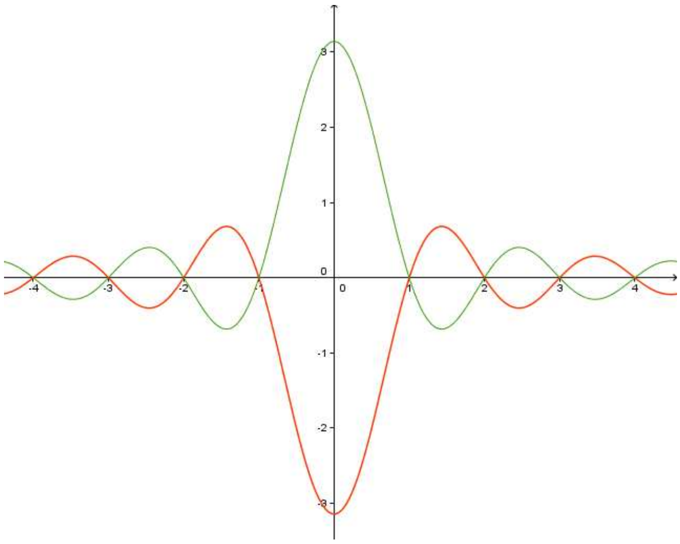

Figura 2

5. Considere o problema de condição inicial $y' = -ty, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0,2]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ é a solução exacta do problema.

[1.5] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0						0	0
1		0.6065					0.1065	0.0024
2	2			0.2500	0.1510			

[1.0] **(c)** Alguma das funções seguintes, implementadas em Matlab, traduz correctamente o método de Euler para a resolução numérica de PVI? Justifique a sua resposta, efectuando as correcções que achar convenientes e necessárias.

```
function y = MEuler_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
t=a;
y=0;
for i=1:n,
  y(i+1)=y(i)+h*feval(f,t(i),y(i));
  t(i+1)=t(i)+h;
end
```

```
function y = MEuler_v2(f,a,b,n,y0)
h=-(a-b)/n;
t(1)=a;
y(1)=y0;
for i=1:n,
  t(i+1)=t(i)+h;
  y(i+1)=h*feval(f,y(i));
end
```