2008

Fórmula de Taylor

Aproximação Polinomial

Apontamentos e anotações da autoria do Professor Arménio Correia

Eduardo Domingues – 21170432 – Eng. Mecânica
ISEC – Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
07-08-2008

f é um polinómio de grau ***n*** se $\boxed{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}$ para todo o x, onde cada a_i é um número real e os expoentes são inteiros não negativos.

Os polinómios são as funções mais simples para o cálculo (menos esforço computacional), uma vez que os seus valores podem ser obtidos apenas empregando-se adições e multiplicações de números reais.

Assim… para calcular valores de funções normais e transcendentes (operações complexas), podem-se utilizar polinómios, no sentido de…

Polinómio de Taylor – seja f uma função que possui derivadas f^n de ordem $n \geq 1$ num intervalo I, e seja ***a*** um número fixo em I. Então o polinómio de Taylor do enésimo grau da função f em (torno) de ***a*** é a função polinomial P_n definida por:

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Mas $P_n(x)\approx f(x) \quad x\in V_\delta(a)$, seja $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

O problema é como avaliar $R_n(x)$, e pelo teorema se:

$$f^{(n+1)}(\varepsilon) \quad \text{existe} \quad \forall \varepsilon\in(a,x) \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon\in(a,x): \underbrace{\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}}}_{\text{Forma de Lagrange}}$$

EXERCÍCIOS

1.) Determine o polinómio de Taylor em ***a = 0*** (McLaurin)

a.) De grau ***n*** para a função e^x.

Resolução:

Dados: $f(x) \quad ; \quad a$

Tem-se: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

Se: $f(x)\approx P_n(x) \quad \text{comete-se o erro} \quad R_n(x)$

Onde: $P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \text{ com } \varepsilon\in(a,x)$$

Para: ***a = 0***

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$, como $f(x)=e^x$ obtêm-se:

$f(x)=e^x \to f(0)=1$ $\qquad$ $f'(x)=e^x \to f'(0)=1$

$f''(x)=e^x \to f''(0)=1$ $\qquad$ $f^{(n)}(x)=e^x \to f^{(n)}(0)=1$

Então: $$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

b.) De grau ***2n*** para a função $\cos x$.

Resolução:

O polinómio de Taylor de ordem ***n*** em torno de ***a = 0*** é:

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

em que:

$$f(x)=\cos(x)\to f(0)=1$$

$$f'(x)=-\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\to f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\cos(x)=\cos(\pi+x)\to f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\sin(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\to f'''(0)=0$$

$$f^{IV}(x)=\cos(x)=\cos(2\pi+x)\to f^{IV}(0)=1$$

$$f^{(n)}(x)=\ldots=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\to f^{(n)}(0)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2n)}(x)=\ldots=\cos(n\pi+x)\to f^{(2n)}(0)=\cos(n\pi)$$

Uma vez que: $\cos(n\pi)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad n \ \text{par} \\ -1 & \text{se} \quad n \ \text{ímpar}\end{cases}=(-1)^n$ tem-se que:

$$
\begin{aligned}
P_{2n}(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} \\
&=1+0\times x+\frac{(-1)}{2!}x^2+0\times x^3+\ldots+\frac{\cos(n\pi)}{(2n)!}x^{2n} \\
&=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{\cos(n\pi)}{(2n)!}x^{2n}
\end{aligned}
$$

c.) De grau ***2n + 1*** para a função $\sin x$.

<u>Resolução</u>:

O polinómio de Taylor de ordem ***2n + 1*** em torno de ***a = 0*** é:

$$
P_{2n+1}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}
$$

tem-se que:

$$
\begin{aligned}
& f(x)=\sin(x)\to f(0)=0 \\
& f'(x)=\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\to f'(0)=1 \\
& f''(x)=-\sin(x)=\sin(\pi+x)\to f''(0)=0 \\
& f'''(x)=-\cos(x)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\to f'''(0)=-1 \\
& f^{(n)}(x)=\ldots=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\to f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
& f^{(2n+1)}(x)=\ldots=\sin\left(\frac{(2n+1)\pi+x}{2}\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)\to f^{(2n+1)}(0)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Uma vez que: $\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad n \ \text{par} \\ -1 & \text{se} \quad n \ \text{ímpar}\end{cases}=(-1)^n$ tem-se que:

$$
\begin{aligned}
P_{2n+1}(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} \\
&=0+x+0\times x^2+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&=x+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

d.) De grau ***n*** para a função $\ln(x+1)$, $x>-1$.

Resolução:

O polinómio de Taylor de ordem ***n*** em torno de ***a = 0*** é:

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ tem-se que:

$$f(x)=\ln(1+x)\rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}\rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}=-(1+x)^{-2}\rightarrow f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2(1+x)^3}=2(1+x)^{-3}\rightarrow f'''(0)=2$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{1}{6(1+x)^4}=-6(1+x)^{-4}\rightarrow f^{IV}(0)=-6$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!(1+x)^n}=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}\rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\begin{aligned}P_n(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\&=0+x-\frac{1}{2}x^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n\\&=x-\frac{1}{2}x^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

2.) Utilizando os resultados do exercício anterior e com ajuda das propriedades dos polinómios de Taylor, deduza os polinómios de Taylor, para ***a = 0***.

a.) De grau ***n*** para a função e^{-x}.

Resolução:

Do exercício **1.a.)** tinha-se que:

$$e^x\quad\rightarrow\quad P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} \quad \to \quad P_n(x) = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!}$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

b.) De grau ***n*** para a função $\dfrac{1}{1+x}$.

Resolução:

Do exercício **1.d.)** tinha-se que:

$$\ln(1+x) \quad \to \quad P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Derivando:

$$\frac{1}{1+x} \quad \to \quad P_{n-1}(x) = 1 - x + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\cancel{n}\,x^{n-1}}{\cancel{n}}$$

$$\downarrow n-1 \underbrace{\to}_{+1} n$$

$$P_n(x) = 1 - x + \ldots + (-1)^{n+2} x^n$$

c.) De grau ***n*** para a função $5+e^x$.

Resolução:

Do exercício **1.a.)** tinha-se que:

$$e^x \quad \to \quad P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Somar 5

$$5+e^x \quad \to \quad P_n(x) = 5 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$
$$= 6 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

d.) De grau ***2n + 1*** para a função $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

Resolução:

Do exercício **1.d.)** tinha-se que:

$$\ln(1+x) \quad \to \quad P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Atendendo a que: $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$

Aplicando a linearidade associada aos polinómios de Taylor, tem-se que:

$$\begin{aligned}\ln(1-x) \quad \to \quad P_n(x) &= -x - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}(-1)^n\frac{x^n}{n} \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{2n+1}\frac{x^n}{n} \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots - \frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

Donde: $\frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$

$$\begin{aligned}P(x) &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots - \frac{x^n}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2x + \frac{2x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n}\underbrace{\left((-1)^{n+1} + 1\right)}_{\substack{\text{se } n \text{ ímpar } \to 2 \\ \text{se } n \text{ par } \to 0}}\right]\end{aligned}$$

apenas não existem termos de ordem ímpar

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[2x + \ldots + 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right] \Leftrightarrow P_{2n+1}(x) = x + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

d.) De grau ***2n*** para a função e^{x^2}.

Resolução:

Do exercício **1.a.)** tinha-se que:

$$e^x \quad \rightarrow \quad P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Para:

$$e^{x^2} \quad \rightarrow \quad P_{2n}(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x^2)^n}{n!}$$
$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

3.) Encontre o polinómio de Taylor de grau ***n*** com a forma de Lagrange do resto no ponto ***x = a***, para as seguintes funções:

a.) $f(x) = \sin x \qquad a = \frac{\pi}{6} \qquad n = 3$

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$ e

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right|$$ com $\varepsilon \in \left(\frac{\pi}{6}, x\right)$

<u>Solução</u>:

$$f(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin(x) \quad \rightarrow \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \quad \rightarrow \quad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(IV)}(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad f^{(IV)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin(\varepsilon)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right|$$ com $\varepsilon \in \left(\frac{\pi}{6}, x\right)$

b.) $f(x)=\ln x$ $\quad a=1$ $\quad n=3$

$$P_3(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$ e

$$|R_3(x)|=\left|\frac{f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}(x-1)^4\right| \quad \text{com } \varepsilon\in(1,x)$$

Solução:

$$f(x)=\ln(x) \quad\rightarrow\quad f(1)=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad\rightarrow\quad f'(1)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \quad\rightarrow\quad f''(1)=-1$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \quad\rightarrow\quad f'''(1)=2$$
$$f^{(IV)}(x)=-\frac{6}{x^4} \quad\rightarrow\quad f^{(IV)}(\varepsilon)=-\frac{6}{\varepsilon^4}$$

$$P_3(x)=0+(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$|R_3(x)|=\left|-\frac{6}{4!\varepsilon^4}(x-1)^4\right| \quad \text{com } \varepsilon\in(1,x)$$

4.) Determine um valor aproximado de $\cos(47^\circ)$, utilizando o polinómio de Taylor, com o resto de Lagrange de grau 3, encontrado para a função $f(x)=\cos x$ no ponto $x=\frac{\pi}{4}$. Indique o grau de precisão.

Solução:

$$\left| \begin{array}{l} P_3(x)=? \\ R_3(x)=? \end{array} \right. \qquad \cos(x) \quad \text{em torno} \quad x=\frac{\pi}{4}$$

$$f(x)=\cos(x) \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = -\sin(x) \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = -\cos(x) \quad \rightarrow \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(IV)}(x) = \cos(x) \quad \rightarrow \quad f^{(IV)}(\varepsilon) = \cos(\varepsilon)$$

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\cos(\varepsilon)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right| \quad \text{com } \varepsilon \in \left(\frac{\pi}{4}, x\right)$$

$$\cos(47^\circ) = ? \quad \rightarrow \quad \underbrace{47^\circ = 45^\circ + 2^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{180}}_{\text{Transformação de Graus em Radianos}}$$

Donde:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cancel{\frac{\pi}{4}} + \frac{2\pi}{180} - \cancel{\frac{\pi}{4}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cancel{\frac{\pi}{4}} + \frac{2\pi}{180} - \cancel{\frac{\pi}{4}}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\cancel{\frac{\pi}{4}} + \frac{2\pi}{180} - \cancel{\frac{\pi}{4}}\right)^3$$

$$= 0,707 - 0,0247 - 0,00043 + 0,000005$$

$$\cong 0,681998$$

Precisão do Resultado:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right|, \text{ com } \varepsilon \in \left(\frac{\pi}{4}, x\right), \text{ para } x = \frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{180} \text{ tem-se:}$$

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\cos(\varepsilon)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right|, \text{ atendendo a que } |\cos(\varepsilon)| \leq 1$$

$$\left|R_3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{180}\right)\right| = \left|\frac{\cos(\varepsilon)}{4!}\left(\frac{2\pi}{180}\right)^4\right| \leq \left|\frac{1}{4!}\left(\frac{2\pi}{180}\right)^4\right| \leq 6,2\times10^{-8} \quad (\textit{erro cometido})$$

5.) Use um polinómio de Taylor em zero para encontrar o valor de $\sqrt{e}$ com uma aproximação de 4 casas decimais. Prove a correcção da sua resposta, mostrando que $\left|R_n(x)\right| \le 0,5\times10^{-4}$.

Solução:

$$\sqrt{e} = ? \qquad \rightarrow \qquad f(x) = e^x \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Para: $f(x) = e^x$ tem-se $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \quad \text{e} \quad f^{(n)}(0) = 1$

Então: $P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$

Com: $\left|R_n(x)\right| = \left|\dfrac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}\right| = \left|\dfrac{e^\varepsilon}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$, com $\varepsilon \in (0, x)$

$$\text{Objectivo}\begin{cases}\text{Calcular:} \quad \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \quad \text{logo} \quad x = \dfrac{1}{2} \\ \text{Tal que:} \quad \left|R_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \le 0,5\times10^{-4} \quad (\text{precisão de 4 casas decimais})\end{cases}$$

$\left|R_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{e^\varepsilon}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right|$, com $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

Seja $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ (maior valor que pode tomar) $\equiv$ <u>Maximizar o Erro</u>

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

Determinar ***n*** tal que:

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} \le 0,5\times10^{-4} \quad \ldots \quad \boxed{n=5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2^5(6!)} \le 0,5\times10^{-4}$$

Conclusão:

$$\sqrt{e} \approx P_5\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} \approx 1,6487$$

6.) Use um polinómio de Taylor em zero para a função definida por $f(x)=\ln(1+x)$ para calcular o valor de $\ln(1,2)$ com uma aproximação de 4 casas decimais. Prove a correcção da sua resposta, mostrando que $|R_n(x)|\leq 0,5\times 10^{-4}$.

<u>Solução</u>:

$f(x)=\ln(1+x)$ pelo exercício **1.d.)**, tem-se:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!(1+x)^n}=\boxed{(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}} \rightarrow f^{(n)}(0)=\boxed{(-1)^{n+1}(n-1)!}$$

Então: $P_n(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+2}n!(1+\varepsilon)^{-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}(n+1)}x^{n+1},$$

com $\varepsilon\in(0,x)$

$$\text{Objectivo}\begin{cases}\text{Calcular:}\quad \ln(1,2) \quad \text{logo} \quad x=0,2\\ \text{Tal que:}\quad |R_n(0,2)|\leq 0,5\times 10^{-4} \quad (\text{precisão de 4 casas decimais})\end{cases}$$

$|R_n(0,2)|=\left|\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}(n+1)}(0,2)^{n+1}\right|$, com $\varepsilon\in(0;0,2)$ seja $\varepsilon=0$

$$|R_n(0,2)|<\frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)}$$

Determinar ***n*** tal que:

$$\frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)}\leq 0,5\times 10^{-4} \quad \ldots \quad \boxed{n=3} \rightarrow \frac{(0,2)^4}{4}=\cancel{0,0004}$$

$$\ldots \quad \boxed{n=5} \rightarrow \frac{(0,2)^6}{6}=0,00001<0,5\times 10^{-4}$$

Conclusão:

$$\ln(1,2)\approx P_5(0,2)=0,2-\frac{1}{2}(0,2)^2+\frac{1}{3}(0,2)^3-\frac{1}{4}(0,2)^4+\frac{1}{5}(0,2)^5\approx 0,1823$$