A Álgebra do Crescimento

Módulo II – Aplicações e representação gráfica da da exponencial

No final deste módulo, pretende-se que os formandos solidifiquem os conhecimentos adquiridos no módulo01, recorrendo à representação gráfica da exponencial.

Unidade 1 – A lenda sobre o xadrez e a exponencial

Existe uma lenda, que se utiliza como exemplo quase proverbial sobre o crescimento exponencial.

Conta que quando o inventor do jogo do xadrez o mostrou ao seu rei, este ficou tão satisfeito com o invento que lhe ofereceu qualquer coisa que ele quisesse como presente. O inventor respondeu que se conformava se lhe oferecessem 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 pela segunda, 4 pela terceira e assim sucessivamente até completar o tabuleiro. O rei, que não imaginava o que isso era, acedeu com prazer à sua vontade, sem saber que não chegava toda a produção mundial de trigo para satisfazer semelhante recompensa.

Apesar de muita gente conhecer esta história ou ouviu falar dela, não é difícil, ainda hoje em dia, enganar alguém com um «pagamento» deste tipo. Basta simplesmente propor-lhe que deposite 1 cêntimo de € na primeira casa, 2 na segunda, 4 na terceira, etc. Não é necessário fazer um contrato no notário, porque nunca ninguém poderia pagar uma quantia que não é alcançável, nem de longe, com o equivalente à riqueza gerada pela humanidade ao longo da sua história, já que estamos a falar de uma quantia de dinheiro de 18.446.744.073.709.551.615 € a colocar na última casa.

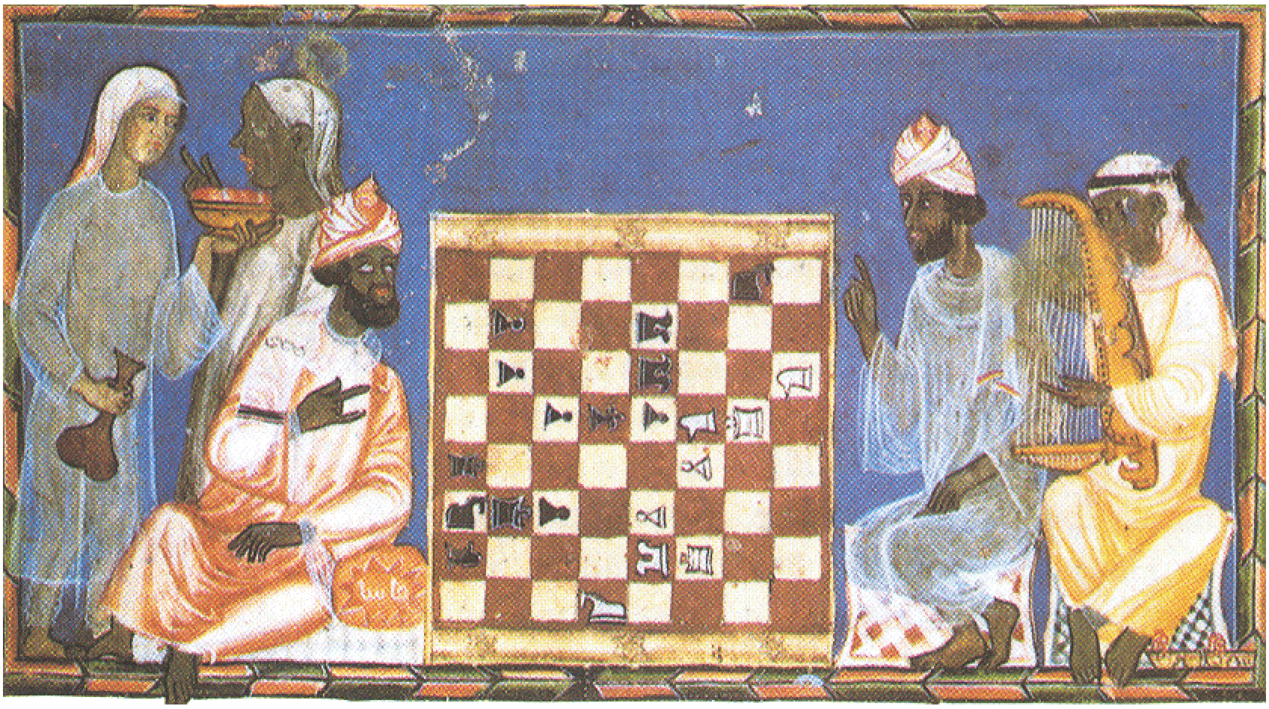

Figura 1

Página de “O livro dos jogos”, escrito no reinado de Afonso X de Castela, que evoca a origem oriental do xadrez. Uma lenda relacionada com a sua invenção associa 1 grão de trigo para a primeira e o dobro da anterior para cada uma das sucessivas, isto é:

$$1,2,4,8,\ldots,2^n$$

representa uma progressão geométrica de razão 2, uma vez que, o quociente entre de dois termos consecutivos é constante e igual a dois:

$$\frac{2}{1}=2;\quad \frac{4}{2}=2;\ \ldots;r=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2^{n-(n-1)}=2^{n-n+1}=2^{0+1}=2^1=2$$

A sucessão, progressão geométrica, é galopante, uma vez que, o seu último termo é dado por $2^{63}=9.223.372.036.854.775.808$ e a soma dos seus termos é dada por:

$$S_n=1^{\text{o}}\,termo\times\frac{raz\tilde{a}o^n-1}{raz\tilde{a}o-1}\Leftrightarrow S_{64}=1\times\frac{2^{64}-1}{2-1}\Leftrightarrow S_{64}=2^{64}-1$$

$$S_{64}=18.446.744.073.709.551.615$$

O termo geral da progressão geométrica é dado por:

$a_n=1^{\text{o}}\,termo\times raz\tilde{a}o^{n-1}\Leftrightarrow a_n=a_1\times r^{n-1}$ com $r=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, logo o último elemento (a casa 64 do tabuleiro) é dado por $a_{64}=a_1\times r^{64-1}\Leftrightarrow a_{64}=1\times 2^{63}=2^{63}$