Departamento de Física e Matemática

Exame de Análise Matemática II

23/06/2014 » Duração:2h30+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste A+B**

1. Considere a equação não linear $4 - x^2 - \sin x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a 1, no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e positiva.

[1.5] **(b)** Mostre que $x = 2$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes. Obtenha um valor aproximado da raiz positiva efetuando uma iteração.

2. A figura 1 representa um ovo da Páscoa. As linhas que contornam e definem a forma do ovo são definidas pelo gráfico das funções:

$$f(x) = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\ ,\ g(x) = -\sqrt{4 - x^2}\ \text{ e }\ h(x) = \sin(x)$$

[1.5] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função f.

[0.5] **(b)** Sem deduzir a expressão dos polinómios interpoladores, redesenhe a figura 1, aproximando a função h por uma interpolação linear e as outras funções por uma interpolação quadrática.

[2.0] **(c)** Utilize a regra de Simpson simples para determinar um valor aproximado para $I = \int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx$ e interprete o resultado obtido.

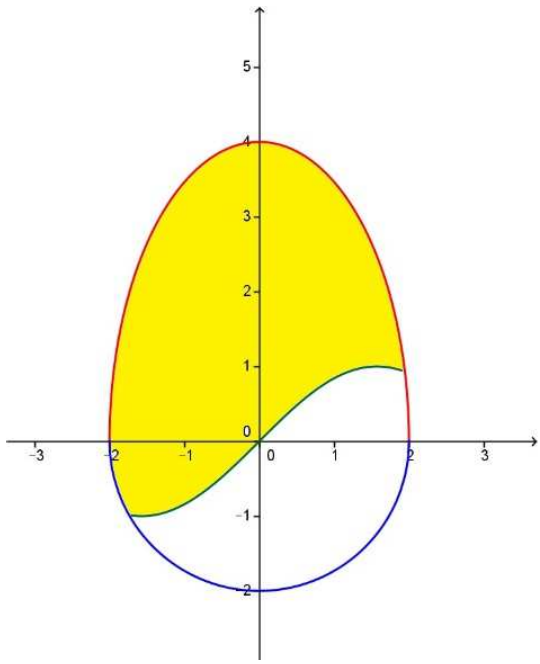

Figura 1 - Gráficos de f, g e h

3. Considere o problema de valor inicial $y' = \dfrac{2y}{t},\ \ y(1) = 1,\ \ t \in [1, 4]$

[2.0] **(a)** Sabendo que $y(t) = t^2$ é a solução exata do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	1		1		1		0	
1		4		3.50				0.06
2					8.86		1.42	
3	4	16		13.27				0.25

[1.0] **(b)** Complete a função seguinte e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regra que lhes está associada.

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=______________;
t=______________;
y=zeros(__,____);
y(1)=___;
for i=___:___
    k1=______________________;
    k2=______________________;
    y(i+1)=__________________;
end
```

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2$;

$g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$; $\quad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 16 \\ \text{então} \quad z = -g(x,y) \end{array} \right.$; $\quad j(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{32 - f(x,y)}, \text{ se } 16 < x^2 + y^2 \leq 32 \\ h(x,y) \end{cases}$

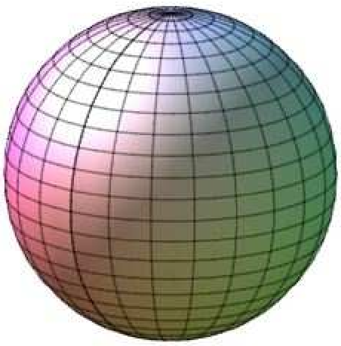

Figura 2

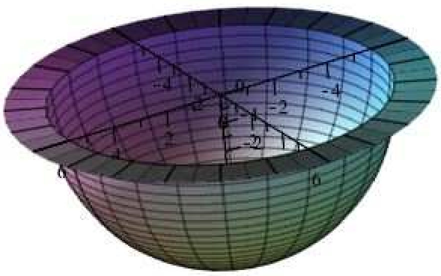

Figura 3

Figura 4

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **duas** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras apresentadas, apenas a figura 3 representa o gráfico de uma função/campo escalar.

ii) O vetor $\begin{bmatrix} x & 5 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $y = -5$ no ponto de coordenadas $P(0,-5,-\sqrt{7})$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = g(x,y)$, as taxas de variação máxima e mínima da temperatura no ponto $P\left(-1,-1\right)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 2,2\rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2,-2\rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

ii) Mostre que se $z = \left(g(x,y)\right)^2$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ e $x = \rho\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$.

5. A figura 5 representa um sólido, de densidade igual a 2, composto por três partes:

- Cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$;
- Cilindro de raio $r = 4$ e altura $h = 4$;
- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$.

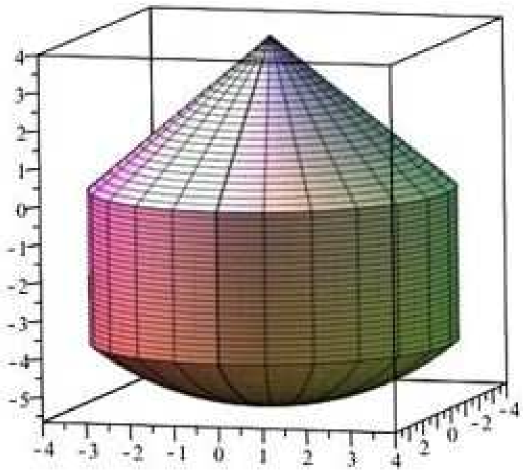

Figura 5

[2.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge 0 \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} + 4\right\}$

$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 4 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -4 \leq z \leq 0\right\}$

$S_3 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi \wedge -\frac{4}{\cos\varphi} \leq R \leq \sqrt{32}\right\}$

[2.0] **(b)** Calcule o volume do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 16\sqrt{2}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

Sugestão: A área de uma superfície de equação $z = g(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$, com g_x e g_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -\sqrt{32 - x^2 - y^2} \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} + 4\right\}$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
> Esfericas2Cartesianas :=proc(r, theta, phi)
   local x, y, z;
   if evalf(                              )
   then
       x :=                    ;
       y :=                    ;
       z :=                    ;
       return ([x, y, z]);
   else error "                            ";
   end if
   end proc
```

Nome Completo:______________________________

Número:______________________________

Nome/login utilizado no LVM:______________________________

Curso

- [ ] Licenciatura em Eng. Informática
- [ ] Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- [ ] Licenciatura em Eng. Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- [ ] Sim
- [ ] Não

Frequência às aulas de AM2

- [ ] Regime diurno
- [ ] Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- [ ] Não
- [ ] Sim
  - [ ] At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - [ ] At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - [ ] At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - [ ] At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - [ ] At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - [ ] Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- [ ] Sim
- [ ] Não