Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste B**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2$;

$g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$; $\quad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 16 \\ \text{então } z = g(x,y) \end{array} \right.$; $\quad j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{32 - f(x,y)}, & \text{se } 16 < x^2 + y^2 \leq 32 \\ h(x,y) \end{cases}$

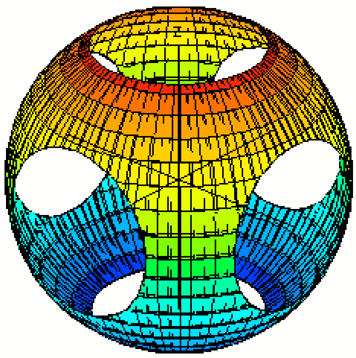

Figura 1

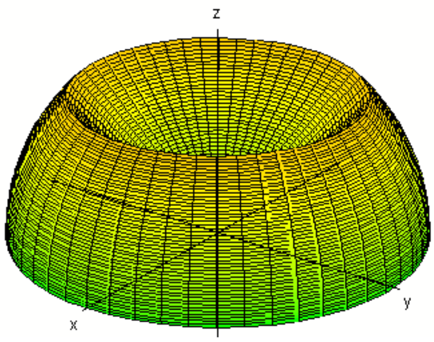

Figura 2

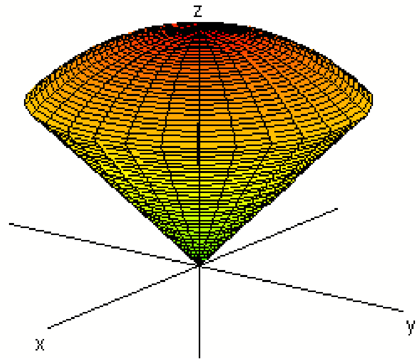

Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função $j(x,y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.0] **(b)** Estabeleça a expressão analítica da função $h(x,y)$ e um algoritmo para a função $j(x,y)$.

Mostre, que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$ é uma curva de nível comum a todas as funções

[2.0] **(c)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[3.0] **(d)** Resolva apenas **<u>três</u>** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras apresentadas, apenas a figura 2 representa o gráfico de uma função/campo escalar.

ii) O vetor $\left[x \quad 5 \quad \sqrt{7} \right]$ define vectorialmente a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $y = 5$ no ponto de coordenadas $P(0,5,\sqrt{7})$.

iii) A função $j(x,y)$ é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$.

iv) As funções f, g e h têm um máximo absoluto em $(0,0)$ e a função j não tem extremos.

v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2 <= 16, -sqrt(x^2+y^2),
                     16 < x^2+y^2 <= 32, -sqrt(32-x^2-y^2), undefined)
```

[3.0] **(e)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>duas</u>**

i) Se o potencial elétrico em qualquer ponto do plano xOy for dada por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação mínima e máxima do potencial no ponto $P(1,1)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 2,2 \rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2,-2 \rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

ii) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dado por $T = g(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de temperatura entre os pontos $(2,2)$ e $(2.33, 2.33)$.

iii) Mostre que se $z = f(x,y)$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e $x = r\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 4 - f(x, y-2)$ se $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$, no ponto $P\left(0,2,4\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. A figura 4 representa um sólido, de densidade igual a 1, composto por três partes:

- cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$
- cilindro de raio $r = 4$ e altura $h = 4$
- segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$

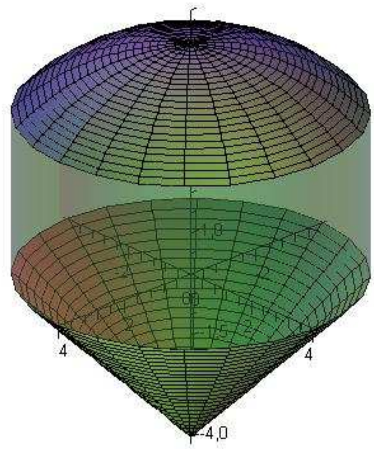

Figura 4

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4} \wedge \tfrac{4}{\cos\varphi} \leq R \leq \sqrt{32}\right\}$$
$$S_2 = \{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 4 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 4\}$$
$$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge \sqrt{x^2+y^2} - 4 \leq z \leq 0\right\}$$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_3? Justifique.

```
> addcoords(MyCylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z])
> plot3d(r-4,r=0..4,theta=0..2*Pi,coords=MyCylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**três**</u>

i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cilindro de raio r e altura h é $\pi r^2 h$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 16\sqrt{2}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

<u>Sugestão</u>: A área de uma superfície de equação $z = g(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x,y))^2 + 1}\; dydx$, com g_x e g_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge \sqrt{x^2+y^2} - 4 \leq z \leq \sqrt{32 - x^2 - y^2}\right\}$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
Cartesianas2Esfericas := proc(x, y, z)
 local R, theta, phi;
 R := sqrt(--?--);
 if (x ≠ 0) then theta := arctan(--?--);
 elif (y = 0) then theta := 0;
 elif (y > 0) then theta := --?--; else theta := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then phi := --?--; else phi:=arccos(--?--); end if;
 return [R, theta, phi];
 end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não