1 Obtenha, utilizando a definição do polinómio interpolador de grau 2 (interpolação quadrática) a função definida pela seguinte tabela:

x_i	0	1	-1
$F(x_i)$	3	2	6

Pedido $f(x) \approx P_2(x)$

$\hookrightarrow P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\hookrightarrow$ Pontos interpoladores da tabela

$\hookrightarrow P_2(x_i) = f(x_i), \ i \in i = 0,1,2$

<u>1º PASSO</u>: $i = 0,1,2$

$$\begin{matrix} i=0 \longrightarrow \\ i=1 \longrightarrow \\ i=2 \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2(x_1) = f(x_1) \\ P_2(x_2) = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2(0) = f(0) \\ P_2(1) = f(1) \\ P_2(-1) = f(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = 3 \\ a_0 + a_1 \times 1 + a_2 x^2 = 2 \\ a_0 + a_1 \times (-1) + a_2 x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

NOTA: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

<u>2º PASSO</u>:

$P_2(x) = 3 - 2x + 1x^2$

$F(0,5) \approx P(0,5) \Leftrightarrow F(0,5) \approx 3 - 2(0,5) + 1(0,5)^2 \Leftrightarrow F(0,5) \approx 2,25$

2 Obtenha uma estimativa do número de mortos associados a 2000 infetados usando interpolação linear.

a)

x_i	y_i
1000	3
10000	10

a_0

$\frac{10-3}{10000-1000} = \frac{7}{9000} = a_1$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + m(x - x_0)$

$P_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_m(x - x_0)\dots(x - x_{m-1})$

$P_1(2000) = a_0 + a_1(x - x_0) = 3 + \frac{7}{9000}(x - 1000) = 3 + \frac{7}{9000}(2000 - 1000) = 3 + \frac{7}{9} = 3.78$ mortes

b)

x_i	y_i
500	2
1000	3
10000	10

a_0

$\frac{2-3}{500-1000} = \frac{1}{500}$ a_1

$\frac{10-3}{10000-1000} = \frac{7}{9000}$

$\frac{\frac{7}{9000} - \frac{1}{500}}{10000 - 500} = -1.3 \times 10^{-7}$

$P_2(2000) = 2 + 0,002(x - 500) - 1.3 \times 10^{-7}(x - 500)(x - 1000) = 4.8$ mortes

TesteA - Data: 15/5/2019

3.b) Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine
3 o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in [-\pi, 0]$ e a
equação do segmento de reta com declive negativo da parte da cabeça da
guitarra.

$$f(x) := \begin{cases} \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \text{então } y = 3\sqrt{1 - x^2/4} \\ \text{senão se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \text{então } y = 3\cos(\tfrac{1}{2}x) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = -f(x)$$

grau 2 $\rightarrow$ 2 pontos

$-\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \qquad 0$

x_i	$y_i = f(x_i)$		
$-\pi$	0 a_0		
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ a_1	$\frac{6-6\sqrt{2}}{\pi^2}$ a_2
0	3	$\frac{6-3\sqrt{2}}{\pi}$	

$3\cos(\frac{1}{2}\cdot(-\pi)) = 3\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

$3\cos(\frac{1}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})) = 3\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$3\cos(\frac{1}{2}\cdot 0) = 3\cos(0) = 3$

$\rightarrow \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0}{-\frac{\pi}{2} - (-\pi)} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\pi}$

$\rightarrow \dfrac{3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{0 - (-\frac{\pi}{2})} = \dfrac{\frac{6-3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{6-3\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{6-3\sqrt{2}}{\pi}$

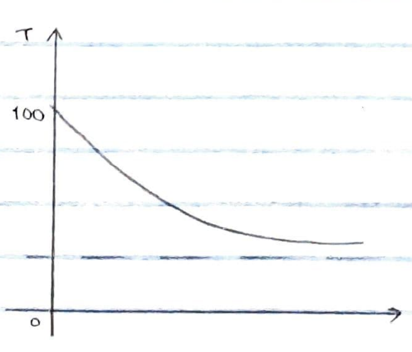
$\rightarrow \dfrac{\frac{6-3\sqrt{2}}{\pi} - \frac{3\sqrt{2}}{\pi}}{0 - (-\pi)} = \dfrac{6 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{\pi} \times \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{6-6\sqrt{2}}{\pi^2}$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 0 + \frac{3\sqrt{2}}{\pi}(x + \pi) + \frac{6-6\sqrt{2}}{\pi^2}(x + \pi)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\rightarrow$ Continuação do exercício 7

5º PASSO: a temperatura do objeto varia de acordo com o tempo (t) e segundo a lei $T(t) = 30 + 70e^{-0.169t}$

6º PASSO: Resultado Final



O que se pretende determinar é t tal que

$T(t) = 31$ $\quad 30 + 70e^{-0.169t}$

$31 = 30 + 70e^{-0.169t} \Leftrightarrow t = 25.0722$ min

Dada a tabela:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

4 determine a aproximação para $f(1)$, usando a interpolação quadrática.

↳ Resolução usando a interpoladora de Newton

1ºPASSO: identificar o problema e aquilo que é pedido

- interpolação quadrática $\rightarrow P_2(x)$
- $f(x) \approx P_2(x)$
- $P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

2ºPASSO: obter a_0, a_1, a_2 através da tabela das diferenças divididas

x_i	$f(x_i)$	dd1	dd2
-1	4	$\frac{1-4}{0-(-1)} = -3$	$\frac{-1-(-3)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$
0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	
2	-1		

3ºPASSO: substituir com os valores obtidos no 2ºPASSO

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

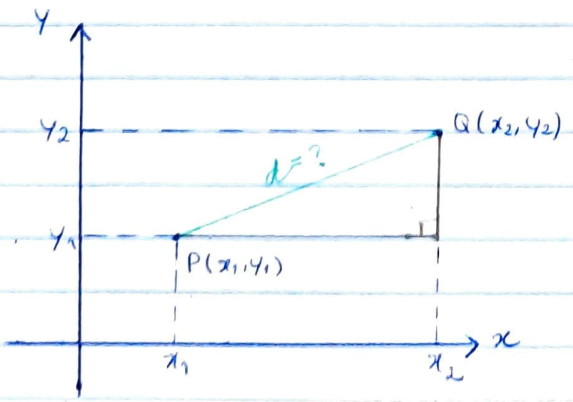
$$\Leftrightarrow P_2(x) = 4 - 3(x+1) + \tfrac{2}{3}(x+1)\,x$$

$$\Leftrightarrow P_2(x) = (x+1)\left(-3 + \frac{2}{3}x\right) + 4$$

4ºPASSO: $f(1) \approx P_2(1)$

$$P_2(1) = (1+1)\left(-3 + \frac{2}{3} \times 1\right) + 4 = -\frac{2}{3}$$

5



$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

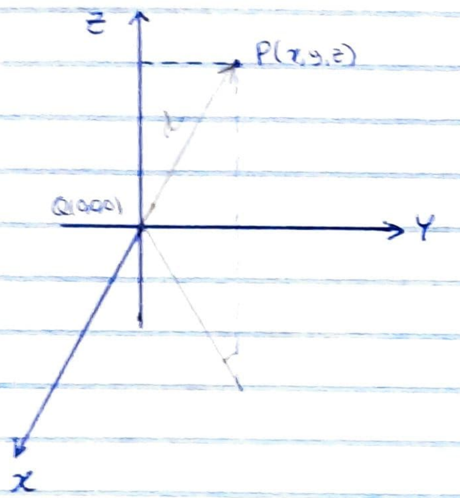
$$d(P,Q) = \|\overline{PQ}\| = d\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1) \quad \left(\text{Teorema de Pitágoras}\right)$$

$(d>0)$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(x^2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6

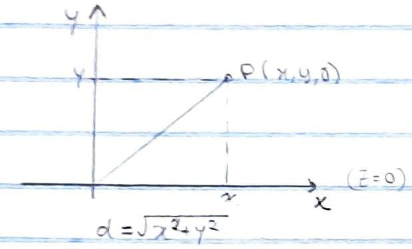


$d(Q,P) = ?$

$d(Q,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pelo teorema de Pitágoras:



$d = \sqrt{x^2 + y^2}$

$d^2 = d_1^2 + z^2$

$d^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2$

$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7 Um objeto metálico à temperatura de 100°C é mergulhado em água. A temperatura da água é mantida a 30°C. Ao fim de 5 minutos a temperatura do objeto desceu para 60°C. Determine o instante em que a temperatura do objeto atinge os 31°C. NOTA: A velocidade do arrefecimento de um corpo é proporcional à diferença entre a sua temperatura em cada instante e a do meio ambiente.

1º PASSO: equacionar o problema

$\underbrace{\frac{dT}{dt} = K(T-30)}_{\text{equação diferencial}}, \quad T(0) = 100$ → Atendendo à nota do problema tem-se um problema de valor inicial onde T representa a temperatura do objeto e t a variável independente tempo.

2º PASSO: Resolução da equação diferencial

$\frac{dT}{dt} = K(T-30) \Leftrightarrow dT = K(T-30)\,dt \Leftrightarrow K(T-30)\,dt - dT = 0$ $\quad \times\left(\frac{1}{T-30}\right)$

$\Leftrightarrow K\,dt - \frac{1}{T-30}\,dT = 0$

$\Leftrightarrow \int K\,dt - \int \frac{1}{T-30}\,dT = C_1 \Leftrightarrow Kt - \ln|T-30| = C_1 \Leftrightarrow \underbrace{\ln|T-30| = Kt + C_1}_{\text{Solução Geral Implícita ou integral geral}}$

$\Leftrightarrow T - 30 = e^{kt-c} \Leftrightarrow T = 30 + e^{kt}e^{-c} \Leftrightarrow T = 30 + Ce^{kt}$

$\underbrace{T(t) = 30 + Ce^{kt}, \; K, C \in \mathbb{R}}_{\text{Solução Geral Explícita}}$

3º PASSO: determinar a solução particular

$T(0) = 100 \Rightarrow 100 = 30 + Ce^{k \times 0} \Leftrightarrow 70 = C$ Assim: $T(t) = 30 + 70e^{kt}, \; K \in \mathbb{R}$

4º PASSO: determinar K Como $T(5) = 60$

$60 = 30 + 70e^{5k} \Leftrightarrow e^{5k} = 30/70 \Leftrightarrow 5k = \ln|30/70| \Leftrightarrow K = \frac{1}{5}\ln|30/70| \Leftrightarrow K \doteq -0.169$ (continua passos 5 e 6)