CAPÍTULO 5

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

5.1 REGRA DOS TRAPÉZIOS

5.1.1 FÓRMULAS E APLICAÇÕES

Regra dos trapézios

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Fórmula do |erro| para a regra dos trapézios

$$\left| e_T(f) \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad \text{com} \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|$$

1. Pretende-se calcular o valor aproximado do integral $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sin x} dx$ pela ***Regra dos Trapézios*** com um erro que não exceda $\pi^3 \times 10^{-4}$.

a) Indique o menor número de subintervalos em que deve dividir $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ para obter o resultado pretendido.

b) Indique os pontos em que precisa de conhecer o valor da função integranda.

2. Considere o integral $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \ln(\sin x)\, dx$.

Calcule o valor aproximado de I, aplicando a Regra dos Trapézios, com um erro que não exceda 10^{-4}.

3. Determine um valor aproximado do comprimento do arco de curva $y = \frac{x^2}{2}$ entre $x = 0$ e $x = 1$, com uma casa decimal correcta, utilizando a Regra dos Trapézios.

5.2 REGRA DE SIMPSON

5.2.1 FÓRMULAS - APLICAÇÕES

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Fórmula do |erro| para a regra de Simpson

$$\left|e_S(f)\right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4, \quad \text{com} \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

4. Seja $I = \int_{-2}^{-1} x \; e^{2x} dx$.

a) Qual o menor número de pontos que deve considerar em [-2,-1] de modo que o erro no cálculo deste integral não exceda 5×10^{-4} , quando utiliza a ***Regra de Simpson***?

b) De acordo com a alínea anterior, calcule o valor aproximado de I.

5. Pretende-se determinar um valor aproximado de $\int_4^7 xe^{-x} dx$ utilizando a Regra de Simpson e com um erro que não exceda $\frac{3}{180e}$.

a) Qual o menor número de pontos em que se deve conhecer o valor da função integranda para atingir aquela precisão? Quais são esses pontos?

b) Indique um valor aproximado do integral, usando a referida regra.

6. Calcular um valor aproximado dos seguintes integrais, utilizando as regras dos Trapézios e de Simpson simples.

a) $\int_1^2 \ln x \; dx$; **b)** $\int_0^{0.1} x^{1/3} \; dx$; **c)** $\int_{1.1}^{1.5} e^x dx$.

Indicar uma estimativa para o erro cometido em cada uma das aproximações.

7. **a)** Utilizar as regras dos Trapézios composta e Simpson composta para calcular o valor aproximado dos seguintes integrais, utilizando o número de pontos indicado :

(1) $\int_0^2 x^3 dx, \quad n = 4$; **(2)** $\int_0^1 \sin \pi x \; dx, \quad n = 6$; **(3)** $\int_0^{1.5} (1+x)^{-1} dx, \quad n = 8$.

b) Determinar um limite superior para o erro em cada caso da alínea anterior. Comparar com os valores exactos.

8. Determinar o menor valor de n necessário para aproximar o valor do integral $\int_1^3 e^{-x} \sin(x) dx$ com erro não superior a 10^{-2} e determinar esse valor aproximado :

a) Utilizando a regra dos trapézios composta ;

b) Utilizando a regra de Simpson composta.

9. Calcular o valor aproximado da área limitada pela curva normal $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ e pelo eixo dos xx para $x \in$ [-1,1] :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx\ ,$$

utilizando a regra dos trapézios composta e a regra de Simpson com $n = 6$.

10. Usando a teoria da Interpolação Polinomial e Integração Numérica

a) Determine a equação $f(x)$ da parábola que passa pelos pontos (254, 11), (257, 14) e (258, 19).

b) Calcule o integral $\int_{255}^{257} f(x)dx$ onde $f(x)$ é a função determinada na alínea anterior.

5.2.2 Exercícios de Exame

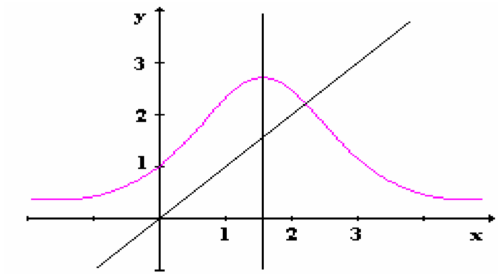
11. Calcule a área da região limitada por

$x=0,\ x=\pi/2,\ y=0$ e $y=e^{\sin x}$:

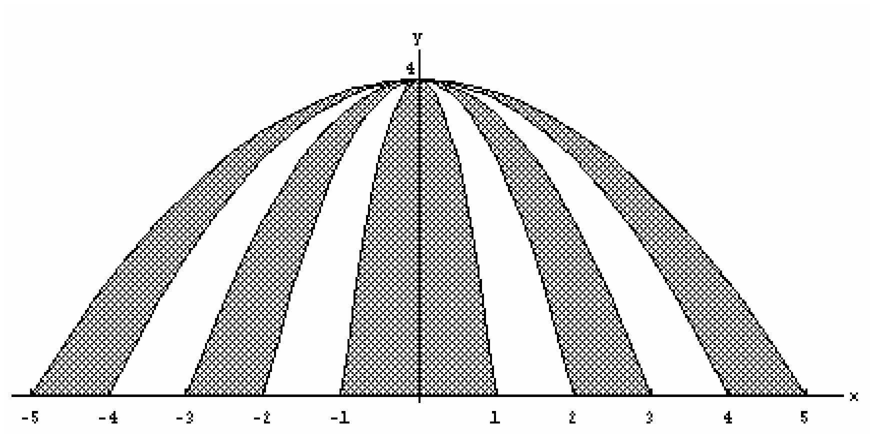
a) Pela regra dos trapézios ($n=2$).

b) Pela regra de Simpson ($n=2$).

c) Qual das regras anteriores lhe permite maior precisão? Justifique.

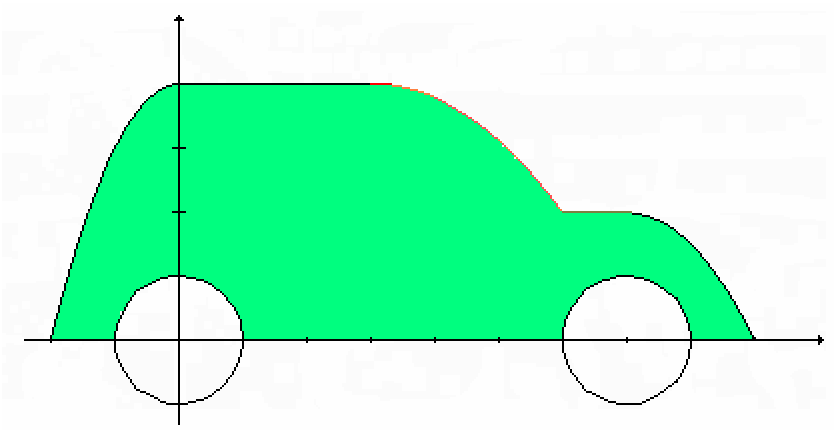


12. Na figura seguinte as curvas são parábolas. Aplicando a teoria da integração Numérica, calcule a área da figura a tracejado.



13. A figura seguinte representa um protótipo de um carro, cujos contornos são definidos por:

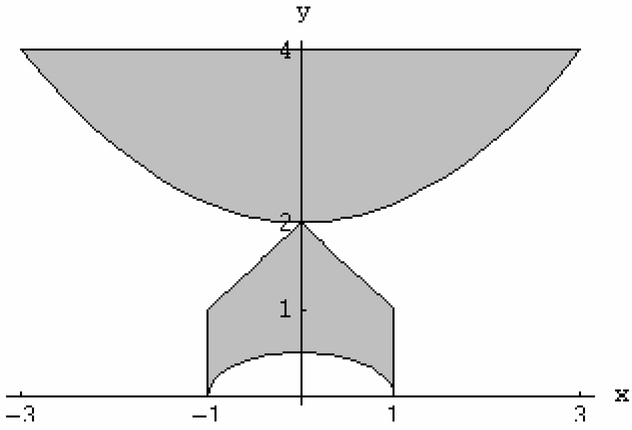
- rodas - circunferências de raio 1 centradas no eixo dos XX;
- mala - arco de parábola de eixo vertical com vértice (0, 4);
- vidro da frente - arco de parábola de eixo vertical com vértice (3, 4);
- parte da frente - arco de parábola de eixo vertical com vértice (7, 2).



Calcule a área da figura a sombreado, e nos casos em que tenha de usar integrais aplique a teoria da Integração Numérica.

14. A figura seguinte representa um protótipo de uma taça, para o *Euro 2000*, cujos contornos são definidos por:

- Segmentos de recta;
- arco de elipse de semi-eixos $a = 1$ e $b = 0.5$;
- arco de parábola de eixo vertical com vértice (0, 2);



a) Defina Polinómio Interpolador de uma função f em $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.

b) Usando a teoria da Interpolação Polinomial, determine a equação $f(x)$ da parábola que passa pelos pontos $(0,\ b)$, $(-a,\ 0)$ e $(a,\ 0)$ com $a, b \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$.

c) Prove, utilizando a teoria da Integração Numérica que:

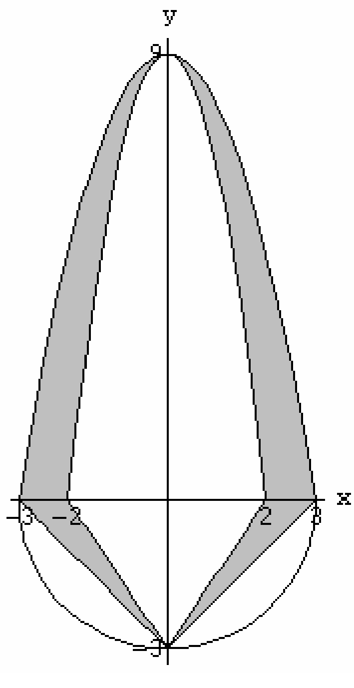
i) a área de região limitada por uma parábola de largura <u>$2a$</u> e com vértice a uma altura <u>b</u> é $\frac{4}{3}ab$.

ii) a área de um trapézio de altura <u>h</u> e bases <u>a</u> e <u>b</u> é: $\dfrac{a+b}{2}h$

d) Determine o volume do sólido recto limitados por planos de cota $z = -1$ e $z = 1$ que se projecta no plano XY segundo a região a sombreado.

15. A figura seguinte, representa uma *prancha de praia*, cujas linhas são:

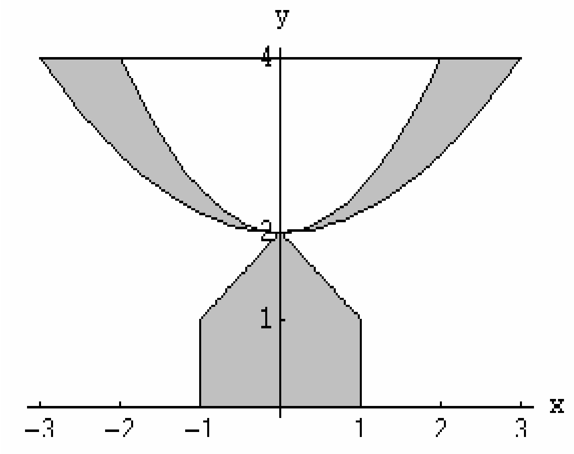
- arcos de parábola;
- segmentos de recta;
- arco de circunferência.



a) Aplicando a teoria da integração numérica, calcule a área das regiões a sombreado.

b) Escreva o pseudo-código, correspondente à implementação do algoritmo, das regras que utilizou na alínea anterior.

16. A figura seguinte representa um protótipo de uma *Pira Olímpica*, para os *Jogos Olímpicos de Sydney 2000*, cujos contornos são definidos por:



- Segmentos de recta;
- arcos de parábolas de eixo vertical com vértice (0, 2);

a) Defina Polinómio Interpolador de uma função f em $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

b) Usando a teoria da Interpolação Polinomial, determine a equação $f(x)$ da parábola que passa pelos pontos (0, b), (-a, 0) e (a, 0) com $a, b \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$.

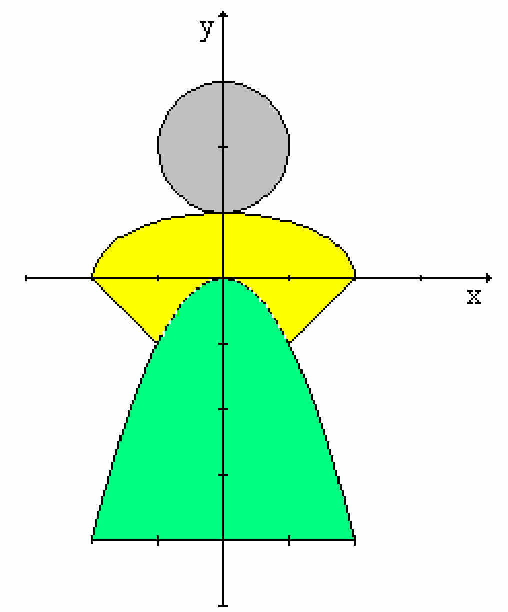
c) Prove, utilizando a teoria da Integração Numérica que:

i) A área de região limitada por uma parábola de largura $\underline{2a}$ e com vértice a uma altura $\underline{b}$ é $\frac{4}{3}ab$.

ii) A área de um trapézio de altura $\underline{h}$ e bases $\underline{a}$ e $\underline{b}$ é: $\dfrac{a+b}{2}h$

d) Determine o volume do sólido recto limitados por planos de cota $z = -2$ e $z = 2$ que se projecta no plano XY segundo a região a sombreado.

17. A figura ao lado, representa um protótipo de uma *marioneta*, alusiva a um dos programas da Programação Cultural da *Capital Europeia da Cultura – Porto 2001*



As linhas que contornam a figura são:

- Circunferência de raio 1;
- Arco de elipse de semi-eixos $a = 2$ e $b = 1$;
- Rectas;
- Parábola.

a) Determine, usando a teoria da Interpolação Polinomial, a equação da parábola e a equação do segmento de recta que passa nos pontos (1, -1) e (2, 0).

b) Prove, utilizando a teoria da Integração Numérica,

que a área da região que está sob o eixo dos XX é dada por: $\dfrac{32}{3} + 3 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{37}{3}$

c) Resolva apenas uma das alíneas seguintes ✂

i) Calcule, o volume do sólido, cuja projecção no plano XY coincide com a figura.

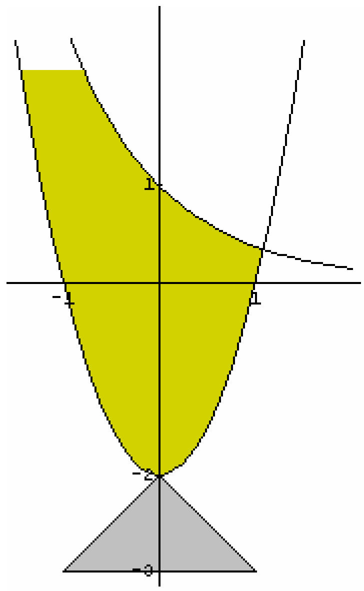
O sólido é formado por duas partes:

- Parte 1 - sólido de revolução que se obtém por rotação do círculo em torno do eixo dos YY.
- Parte 2 – sólido recto, para valores de $-4 \leq y \leq 1$, limitado pelos planos de cota $z =$ -1 e $z = 1$.

ii) Complete os algoritmos e, associe-os a dois métodos de integração numérica

Algoritmo - 1	Algoritmo - 2
Ler(n)	**Ler**(n)
Ler$(a,\ b)$	**Ler**$(a,\ b)$
$h \leftarrow \dfrac{b-a}{n}$	$h \leftarrow \dfrac{\_?\_}{n}$
$x \leftarrow a$	$x \leftarrow a$
$s \leftarrow 0$	$s \leftarrow \_?\_$
Para i **de** _?_ **até** _?_ **fazer**	**Para** i **de** _?_ **até** _?_ **fazer**
$x \leftarrow x + h$	$x \leftarrow x + h$
$s \leftarrow \_?\_ + f(x)$	**Se** i par **Então** $s \leftarrow s + \_?\_$
	Senão $s \leftarrow s + \_?\_$
$r \leftarrow \dfrac{h}{\_?\_}[f(a) + \_?\_ + f(b)]$	$r \leftarrow \dfrac{h}{\_?\_}[f(a) + \_?\_ + f(b)]$
Escrever(r)	**Escrever**(r)

18. Na figura ao lado, protótipo de um copo, para servir vinho do porto nas festas da *Capital Europeia da Cultura Porto 2001*, a região sombreada é limitada por $y = e^{-x}$, por uma parábola e por segmentos de recta.



a) Determine, usando a teoria da Interpolação Polinomial, a equação da parábola.

b) Estabeleça, o integral duplo, que lhe permitiria calcular a área da figura definida para valores de $x \geq 0$ e $y \geq -2$. Calcule, aproximadamente, a área em causa, usando:

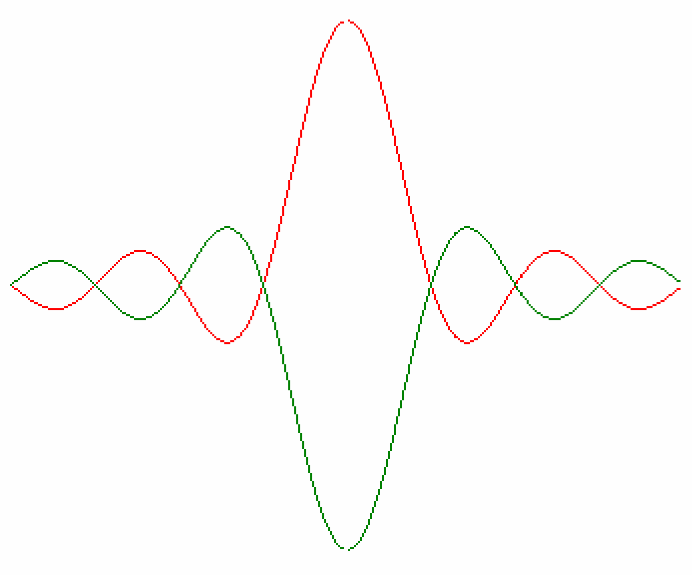
i) Regra dos trapézios composta com $n = 2$;

ii) Regra de *Simpson* simples;

c) Das regras que usou na alínea anterior, qual delas lhe permite obter maior precisão? Justifique.

4. Nas festas *2002 da Cidade de Coimbra - Rainha Santa Isabel*, a iluminação de algumas ruas da Cidade é feita por fios semelhantes às linhas que representam graficamente as funções:

$f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ $\qquad$ $g(x) = -f(x)$



Utilize, a regra de Simpson e a dos trapézios, com $n = 2$, para aproximar o integral $\int_1^2 g(x)dx$.

Interprete e comente o resultado obtido.