EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE A+B » Data: 19/06/2017 Código da prova: **1906201701**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $e^x - \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique um intervalo de amplitude igual a 1 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e negativa. Justifique a sua resposta!

[0.5] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[0.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.

[1.5] **(d)** Complete a função seguinte e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
 k=_________; x(k)=_________;
 while(__________)
     x(k+1)=_____________________________;
     if(_________________________________)  return;  end
     k=__________;
end
```

```
% Script01 de interface do MTangentes
Clear;clc;
strF='exp(x)-ln(x)';
f=@(x) vectorize(eval(strF));

while(1)
    a=str2num(input('a=','s'));   b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&&isreal(a))&&(isscalar(b)&&isreal(b))&& b>a) continue end;
    if (f(a)*f(b)>0) break; end
end
df     = diff(f('x')); % Derivada simbólica
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

while(1)
    x0 = str2num(input('x0=','s'));
    if ~(isscalar(x0)&& isreal(x0)) continue; end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max='); tol  = str2num(input('tol=','s'));

xT = MTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol) % Chamada do método das tangentes
```

2. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos.

Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 0 \le x \le 2\pi \\ \text{então} \;\; y = \cos x \\ \text{senão se} \quad -2 \le x < 0 \\ \qquad \text{então} \quad y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = -f(x)$$

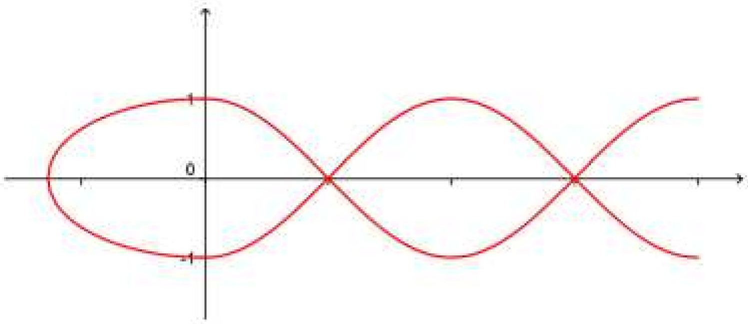

Figura 1 – Gráficos de f e g

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $f(x)$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Redesenhe a figura 1, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in [-2, 0]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

[2.5] **(b)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\, dx$ e $I_2 = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx$, utilizando as regras simples de Simpson e dos trapézios respetivamente. Recorrendo à figura 1 interprete os resultados obtidos.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial $y' = y - yt^2, \quad y(0) = 5, \quad t \in [0, 2]$

[2.5] **(a)** Sabendo que $y(t) = 5\exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK4
0	0	5				0	0	0
1				7.5000				0.0772
2	2	2.5671			1.5599		6.3171	1.0072

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f\left(x,y\right)=x^2+y^2\,;\qquad g\left(x,y\right)=-\sqrt{1-f(x,y)}\,;\qquad h\left(x,y\right):=\left|\begin{array}{l}\text{se}\quad 1<x^2+y^2\le 4\\ \text{então}\ \ z=f(x,y)-1\end{array}\right.\,;\quad j\left(x,y\right)=\begin{cases}g(x,y)\\ h(x,y)\end{cases}$$

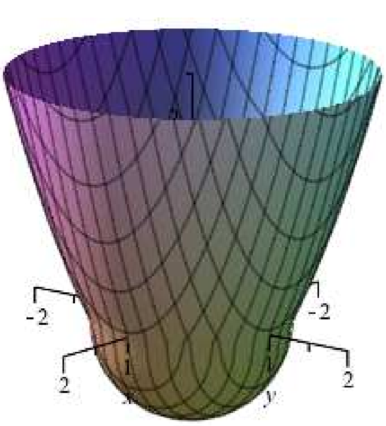

Figura 2

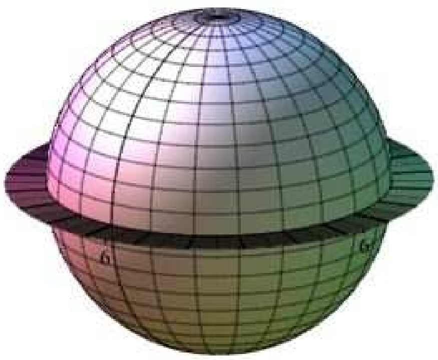

Figura 3

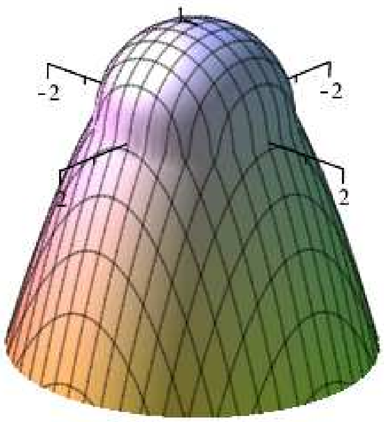

Figura 4

[0.5] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço da superfície de equação $z=j(x,y)$.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **<u>duas</u>** das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras 2, 3 e 4, as figuras 2 e 4 representam funções simétricas e a figura 3 não é gráfico de nenhuma função real de duas variáveis reais.

ii) O vetor $\begin{bmatrix} x & 0 & 1\end{bmatrix}$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z=j\left(x,y\right)$ com o plano $x=0$ no ponto de coordenadas $P(0,0,-1)$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.

iv) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2<=1,sqrt(1-x^2+y^2),x^2+y^2<=4,-x^2-y^2),undefined)
```

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

i) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dada por $V=\sqrt{f(x,y)}$, a taxa de variação máxima do potencial no ponto $P\left(2,2\right)$ ocorre na direção e sentido do vetor $\vec{w}=\left\langle -1,-1\right\rangle$?
Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação do potencial em P segundo o vetor $\vec{u}=-\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Utilizando diferenciais e supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dado por $T=\sqrt{f(x,y)}$, obtenha uma aproximação da diferença da temperatura entre os pontos $(2,2)$ e $(2.22,2.22)$.

iii) Mostre que se $z=f(x,y)-(x+y)$, $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$,

então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho}=\sin(\theta)-\cos(\theta)$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por
$z=1+f(x-1,y-1)$ se $(x-1)^2+(y-1)^2\le 4$, no ponto $P\left(1,1,1\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

5. A figura 5 representa um molde de um cálice, de densidade igual a 3, composto por quatro partes: paraboloide de raio 2 e altura 4; calote esférica de raio 1; cone de raio e altura 2; cilindro de raio 2 e altura 0.25

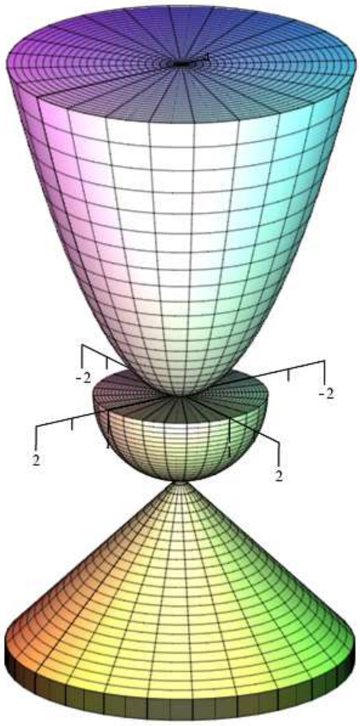

Figura 5

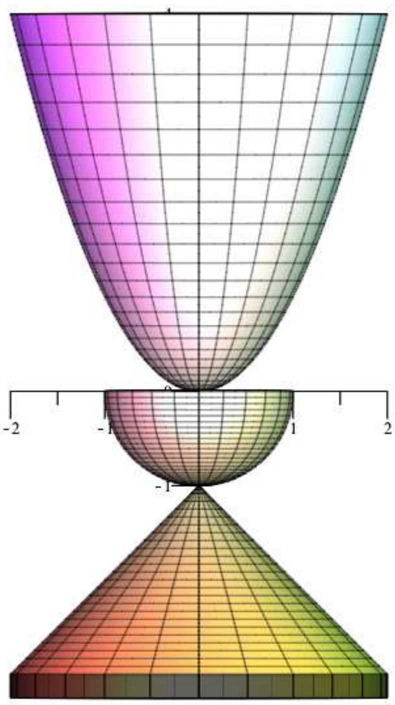

Figura 6

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde:

$S_1 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \rho^2 \leq z \leq 4\right\}$

$S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right\}$

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3 \leq z \leq -\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right\}$

$S_4 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -3.25 \leq z \leq -3\right\}$

[2.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

i) Usando coordenadas cilíndricas, prove que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

ii) Determine a área da superfície parabólica do cálice.

<u>Sugestão</u>: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$, com f_x e f_y funções contínuas em D.

iii) Mostre que em coordenadas cartesianas o cálice é definido por:

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 4\right\}$

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\right\}$

$S_3 \cup S_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3.25 \leq z \leq -\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right\}$

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
Cartesianas2Esfericas := proc(x, y, z)
 local R, theta, phi;
 R := sqrt(--?--);
 if (x ≠ 0) then theta := arctan(--?--);
 elif (y = 0) then theta := 0;
 elif (y > 0) then theta := --?--; else theta := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then phi := --?--; else phi:=arccos(--?--); end if;
 return [R, theta, phi];
 end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- [ ] Licenciatura em Eng. Informática
- [ ] Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- [ ] Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- [ ] Sim
- [ ] Não

Frequência às aulas de AM2

- [ ] Regime diurno
- [ ] Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- [ ] Sim
- [ ] Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- [ ] Não
- [ ] Sim
    - [ ] At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
    - [ ] At02_Matlab – MNEDO_PVI
    - [ ] At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
    - [ ] At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
    - [ ] Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- [ ] Sim
- [ ] Não