ISEC ENGENHARIA

LICENCIATURAS EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Unidade Curricular: **ANÁLISE MATEMÁTICA II**

Ano Letivo: **2016/2017**

EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE B » Data: 19/06/2017 Código da prova: **1906201701**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y)=x^2+y^2\,; \qquad g(x,y)=-\sqrt{1-f(x,y)}\,; \qquad h(x,y):=\left|\begin{array}{l}\text{se} \quad 1<x^2+y^2\le 4\\ \text{então } z=f(x,y)-1\end{array}\right. ; \quad j(x,y)=\begin{cases} g(x,y)\\ h(x,y)\end{cases}$$

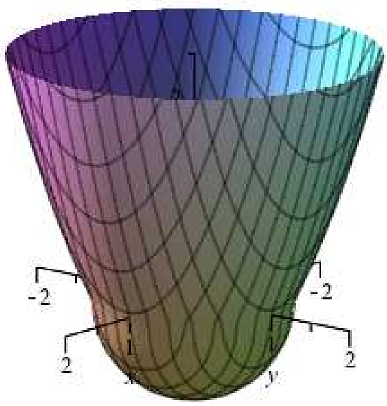

Figura 1

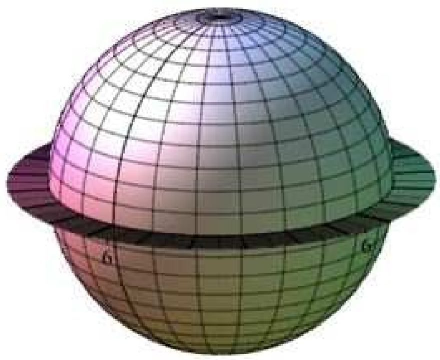

Figura 2

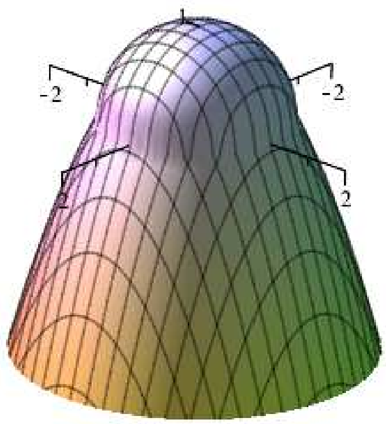

Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.0] **(b)** Defina a função j em forma de algoritmo.

$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$ é uma curva de nível comum a todas as funções? Justifique a sua resposta.

[2.0] **(c)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço da superfície de equação $z=j(x,y)$.

[3.0] **(d)** Resolva apenas **<u>três</u>** das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras 1, 2 e 3, as figuras 1 e 3 representam funções simétricas e a figura 2 não é gráfico de nenhuma função real de duas variáveis reais.

ii) O vetor $\begin{bmatrix} x & 0 & 1\end{bmatrix}$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z=j(x,y)$ com o plano $x=0$ no ponto de coordenadas $P(0,0,-1)$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.

iv) As funções f, g e h têm um mínimo absoluto em $(0,0)$ e a função j tem extremos.

v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2<=1,sqrt(1-x^2+y^2),x^2+y^2<=4,-x^2-y^2),undefined)
```

[3.0] **(e)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>duas</u>**

i) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dada por $V=\sqrt{f(x,y)}$, a taxa de variação máxima do potencial no ponto $P(2,2)$ ocorre na direção e sentido do vetor $\vec{w}=\langle -1,-1\rangle$?

Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação do potencial em P segundo o vetor $\vec{u}=-\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Utilizando diferenciais e supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dado por $T = \sqrt{f(x,y)}$, obtenha uma aproximação da diferença da temperatura entre os pontos $(2,2)$ e $(2.22, 2.22)$.

iii) Mostre que se $z = f(x,y) - (x+y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$,

então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho} = \sin(\theta) - \cos(\theta)$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por

$z = 1 + f(x-1, y-1)$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$, no ponto $P\left(1,1,1\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. A figura 4 representa um molde de um cálice, de densidade igual a 3, composto por quatro partes: paraboloide de raio 2 e altura 4; calote esférica de raio 1; cone de raio e altura 2; cilindro de raio 2 e altura 0.25

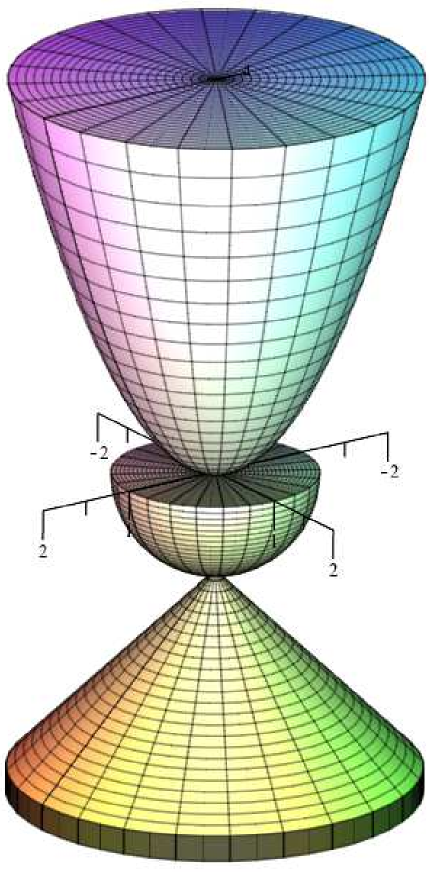

Figura 4

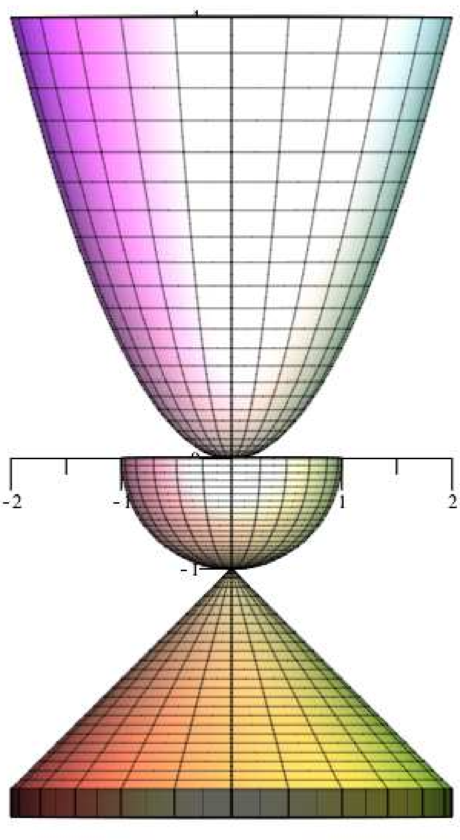

Figura 5

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde:

$S_1 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \rho^2 \leq z \leq 4\right\}$

$S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right\}$

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3 \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} - 1\right\}$

$S_4 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -3.25 \leq z \leq -3\right\}$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_3? Justifique.

```
> addcoords(Zcylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(-r-1, r=0..2, theta=0..2*Pi, coords=Zcylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**três**</u>

i) Usando coordenadas cilíndricas, prove que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

ii) Determine a área da superfície parabólica do cálice.

<u>Sugestão</u>: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$, com f_x e f_y funções contínuas em D.

iii) Mostre que em coordenadas cartesianas o cálice é definido por:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 4\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\right\}$$

$$S_3 \cup S_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3.25 \leq z \leq -\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right\}$$

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
Cartesianas2Esfericas :=proc(x, y, z)
 local R, theta, phi;
 R := sqrt(--?--);
 if (x ≠ 0) then theta := arctan(--?--);
 elif (y=0) then theta := 0;
 elif (y>0) then theta :=--?--; else theta :=-π/2;
 end if;
 if (R=0) then phi :=--?--; else phi:=arccos(--?--); end if;
 return [R, theta, phi];
 end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- ☐ Sim
- ☐ Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não