Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste B**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$,

$h(x,y)$ e $j(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$h(x,y) =$

Se $16 < x^2 + y^2 \le 32$
Então $z := \sqrt{32 - f(x,y)}$
Senão Se $x^2 + y^2 \le 16$
Então $z := g(x,y)$

$j(x,y) =$

Se $x^2 + y^2 \le 16$
Então $z := -g(x,y)$
Senão $z := -\sqrt{32 - f(x,y)}$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[2.0] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$ é uma curva de nível comum às quatro funções.

(ii) O vector $[x, 5, \sqrt{7}]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $y = 5$ no ponto $P(0,5,\sqrt{7})$.

(iii) As funções f e g têm um ponto critico em $(0,0)$ e um mínimo absoluto em $(0,0,0)$.

(iv) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 16\right\}$.

(v) As funções h e j são simétricas.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **duas**

(i) Mostre que, se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P(1,1)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ é positiva, sendo mínima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dado por $V = f(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $(1,1)$ e $(3/2, 3/2)$.

(iii) Mostre que, se $z = g(x+1, y-1) \wedge x = -1 + \cos\theta \wedge \mathrm{y} = 1 + \sin\theta$, então $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = 1$.

(iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por

$z = 2 - g(x+1, y-1)$ se $(x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4$, no ponto $P\left(0,0,2-\sqrt{2}\right)$.

[2.0] **(e)** Resolva apenas **uma** das alíneas seguintes

(i) Mostre, utilizando o integral duplo, que a área da superfície cónica $z = g(x,y)$ se $x^2 + y^2 \le 16$ é igual a $A(S) = \pi r m = 16\sqrt{2}\pi$, em que r é o raio da curva de nível mais larga e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projecção da superfície no plano yOz ou xOz.

(ii) Determine o valor de $I = \int_0^{\sqrt{32}} \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \, d\rho - \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \, d\rho$ e interprete geometricamente o resultado obtido. Estabeleça, invertendo a ordem de integração, um integral que lhe permitiria obter o mesmo resultado de I.

2. Numa das tendas da *Feira Aquiliana 2010* existiam piões com a forma da *figura 1*, de densidade constante $\rho(x,y,z)=1$, compostos por três partes:

- Cone de raio $r=4$ e altura $h=4$; • Segmento de esfera de raio $r=\sqrt{32}$; • Cilindro de raio e altura 1.

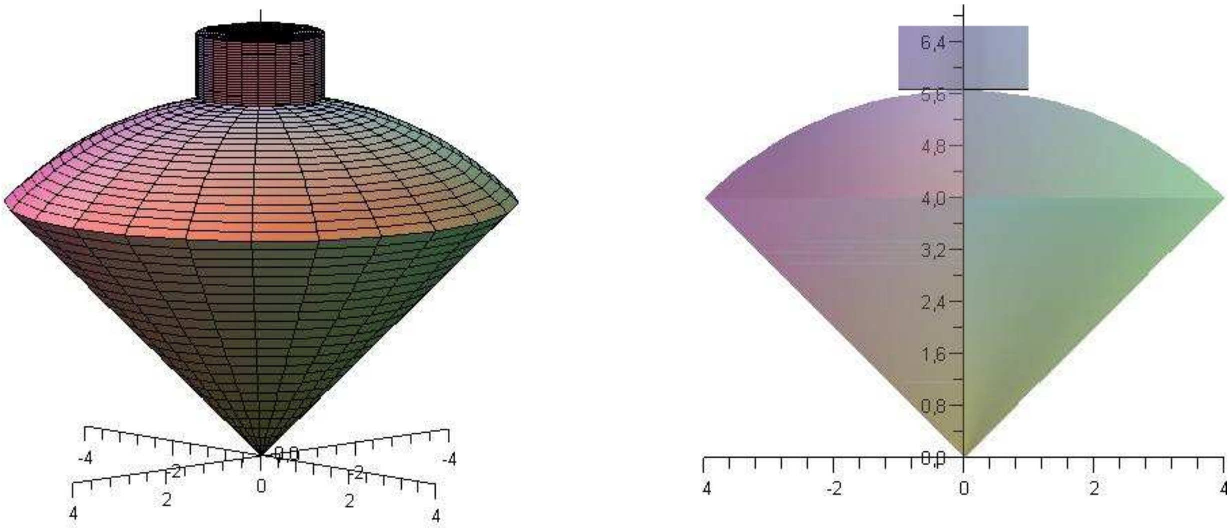

Figura 1

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S=S_1\cup S_2\cup S_3$, onde:

$$S_1\cup S_2=\left\{(R,\theta,\varphi):0\le R\le\sqrt{32}\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$S_3=\left\{(\rho,\theta,z):0\le\rho\le 1\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge\sqrt{32}\le z\le\sqrt{32}+1\right\}$$

[3.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**duas**</u>

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre, que em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à do pião é definido por:

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(x^2+y^2\le 16\wedge\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{32-x^2-y^2}\right)\vee\left(x^2+y^2\le 1\wedge\sqrt{32}\le z\le\sqrt{32}+1\right)\right\}$$

(iii) Qual das rotinas seguintes, implementadas em Maple, traduz correctamente a transformação de coordenadas cartesianas para esféricas? Justifique.

```
TransformaCoords01 :=proc(x, y, z)
 local R, θ, ϕ;
 R := sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
 if (x ≠ 0) then θ := arctan(y/x);
 elif (y = 0) then θ := 0;
 elif (y > 0) then θ := π/2;
 else θ := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then ϕ := 0; else ϕ := arccos(z/R);
 end if;
 return [R, θ, ϕ];
 end proc;
```

```
TransformaCoords02 :=proc(x, y, z)
 local R, θ, ϕ;
 R := -sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
 if (x ≠ 0) then θ := arctan(y/x);
 elif (y = 0) then θ := 0;
 elif (y > 0) then θ := -π/2;
 else θ := π/2;
 end if;
 if (R = 0) then ϕ := 0; else ϕ := arccos(z/R);
 end if;
 return [R, θ, ϕ];
 end proc;
```