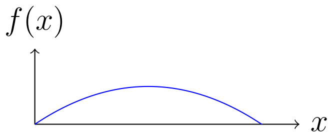
# 3 Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Contínuas

## 3.1 Introdução

**Exemplo ilustrativo**

O **tempo** (medido em unidades de 100 horas) que uma pessoa demora, por ano, nas viagens de autocarro entre a sua casa e o seu local de trabalho, é uma variável aleatória $X$, com *função densidade de probabilidade* dada por $f(x) = \frac{2}{9}(3x - x^2)$, se $x \in [0,3]$, e $f(x) = 0$, se caso contrário.




Nestas condições, qual é a probabilidade daquela pessoa demorar entre 100 e 200 horas naquelas viagens, $P(1 < X < 2)$?

Uma v.a. **X** diz-se (absolutamente) contínua se existir uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique

$$\begin{array}{lll} (i) & f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} & \text{(não negativa)} \\ (ii) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty & \text{(integrável em } \mathbb{R}) \\ (iii) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 & \end{array}$$

e tal que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

- À função $f$ chama-se **função densidade de probabilidade** de **X**.

Para $a, b \in \mathbb{R}$,

- $P(X = a) = \displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$
- $P(X \geq a) = P(X > a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$

Seja $X$ uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f$. Chama-se **função distribuição de** $X$ à função $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(a)\, da, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A definição de função distribuição é a mesma, quer as variáveis aleatórias sejam discretas ou contínuas. A integração no caso contínuo é a extensão "natural" da soma (caso discreto). Assim, também os parâmetros de localização e de dispersão de uma v.a. contínua se definem de modo análogo ao caso discreto.

## Parâmetros de localização e de dispersão

No que se segue, seja $X$ uma v.a. contínua de densidade $f$.

- A **esperança matemática** de $X$, caso exista, é definida por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

(A existência do valor médio de $X$ depende da convergência do integral anterior)

▹ Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(X)$ é uma v.a. contínua. Então

$$E[\, g(X)\, ] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx.$$

Exemplo: $k \in \mathbb{N}$ (arbitrariamente fixo), $E(X^k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx$

- Considere $E(X) = \mu$. A **variância** de X é definida por

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

- A **mediana** de $X$ é o número real $M_d$ tal que

$$F(M_d) = 0.5\,.$$

(Note que $F$ é uma função contínua)

## 3.2 Distribuições Especiais Contínuas

### 3.2.1 Distribuição Uniforme (Contínua)

Seja $[a,b]$ um intervalo real não vazio. Diz-se que uma v.a. **X segue a lei** (ou **X tem distribuição**) **Uniforme no intervalo** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X} \sim \mathcal{U}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$, se $X$ for uma variável contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{se} \quad x < a \vee x > b \end{cases} = \frac{1}{b-a}\, \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

- A função distribuição de $X$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{se} \quad x > b \end{cases} .$$

- Se $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ então $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ e $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

A distribuição Uniforme é usada para descrever medidas que variam aleatoriamente num certo intervalo não vazio $[a,b]$ e cuja probabilidade de tomar valores num subintervalo de $[a,b]$ é proporcional ao seu comprimento. De facto, se $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$,

$$\forall [c,d] \subseteq [a,b],\; P(c \leq X \leq d) = k(d-c), \text{com } k = \frac{1}{b-a} .$$

### 3.2.2 Distribuição Exponencial

Seja $\lambda$ um parâmetro real positivo. Diz-se que uma v.a. **X tem distribuição Exponencial de parâmetro** $\lambda$, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X} \sim \mathcal{E}(\lambda)$, se $X$ for uma variável contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} = \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

- A função distribuição de $X$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} .$$

- Se $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ então $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ e $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Se a distribuição de Poisson é aplicada na contagem de eventos independentes num certo intervalo de tempo, a distribuição Exponencial é usada para representar intervalos de tempo entre eventos independentes!!

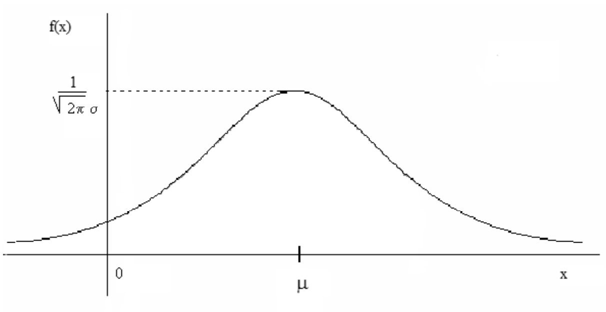
### 3.2.3 Distribuição Normal

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Diz-se que uma v.a. **X tem distribuição Normal de parâmetros** $\mu$ e $\sigma$, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, se $X$ for uma variável contínua com função densidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diz-se também que $X$ é Normalmente distribuída, ou que $X$ segue a lei Normal, ou ainda que $X$ é uma v.a. Gaussiana (de Gauss), de parâmetros $\mu$ e $\sigma$.

**Representação gráfica de f** ($\mu > 0$)




**Características principais:**

- Forma de "sino"
- Máximo global para $x = \mu$
- Simétrica relativamente a $x = \mu$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (eixo $xx$ é uma assimptota)

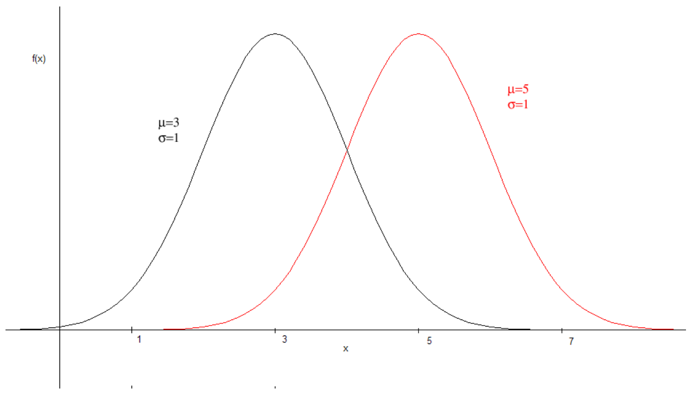
Para $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, de densidade $f$,

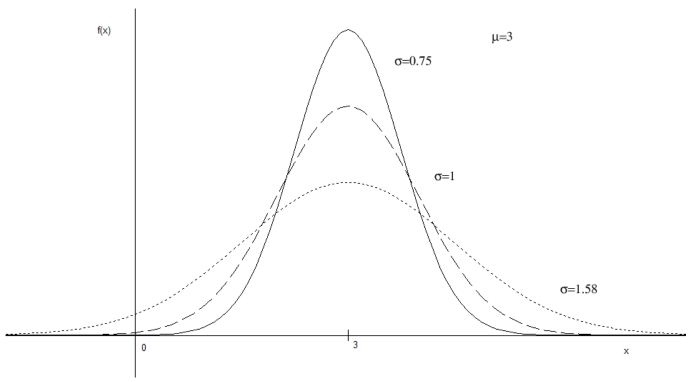
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$
- $P(X \in [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = ...!?$
- $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0.5.$

**Parâmetros**

Mostra-se que

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \mu \quad \text{(parâmetro de localização)} \\
V(X) &= \sigma^2 \Longrightarrow \sigma(X) = \sigma \quad \text{(parâmetro de dispersão)}
\end{aligned}
$$



**Caso particular:** $\mu = \mathbf{0}$ e $\sigma = \mathbf{1}$.

- A distribuição $\mathcal{N}(0,1)$ é chamada normal estandardizada (*standard*) ou normal centrada e reduzida.

- Se $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ então $F_Z(z) = P(Z \leq z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt,\ \forall z \in \mathbb{R}.$

- Estão disponíveis (em tabelas ou máquinas de calcular) as probabilidades $F_Z(z)$, para alguns valores de $z$. Em particular, nas tabelas de ME podem ser consultadas as probabilidades $F_Z(z)$, para alguns $z \geq 0$!


**Propriedades da Lei Normal**

**1.** Se $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ então $\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

$$\begin{aligned} \bullet P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

**2.** Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ e $a,\, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ então $\quad Y = aX + b \sim \mathcal{N}\left(a\mu + b, \sqrt{a^2\sigma^2}\right)$.

**3.** (**Estabilidade da Lei Normal**)

Sejam $X_1, X_2, ...X_n$ v.a.'s independentes e tais que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, com $\mu_i \in \mathbb{R}$ e $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ para $i = 1, 2, ..., n$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \ \sim\ \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2}\right)$$

"a combinação linear de v.a.'s independentes com distribuição normal é (ainda) uma v.a. normalmente distribuída"

**Casos particulares**

Sejam $X_1, X_2, ...X_n$ v.a.'s independentes e tais que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$ para $i = 1, 2, ...n$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i &\sim \mathcal{N}\left(n\mu,\, \sqrt{n}\,\sigma\right) \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i &\sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

**Aproximações da Binomial e da Poisson à Normal**

As aproximações das distribuições Binomial e Poisson à distribuição normal são consequência do Teorema do Limite Central (Capítulo 4).

- Se $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $[E(X) = np$ e $V(X) = np(1-p)]$, para $n$ *suficientemente grande* e $p \in ]0.1, 0.9[$,

$$X \dot{\sim}\, \mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \;\Leftrightarrow\; Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \;\dot{\sim}\, \mathcal{N}(0,1)$$

- Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $[E(X) = V(X) = \lambda]$, para $\lambda$ *suficientemente grande*,

$$X \dot{\sim}\, \mathcal{N}\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right) \;\Rightarrow\; Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \;\dot{\sim}\, \mathcal{N}(0,1)$$

**Notas**

• A aproximação à Normal é tanto melhor quanto maior for o valor de $n$ (no caso da Binomial) ou de $\lambda$ (caso da Poisson), mas na prática pode ser efetuada com resultados razoáveis desde que $n > 20$ ou $\lambda > 20$.

• Na aproximação de uma distribuição discreta à normal, como nos casos anteriores, deve estar presente que a normal é uma distribuição contínua. Com o objetivo de reduzir o erro de aproximação é usual efetuar-se uma **correção de continuidade**. Não a efetuaremos nas aulas de ME, mas fica a nota de que se $X$ é uma v.a. discreta, a **correção de continuidade** consiste em *converter* $X$ numa v.a. contínua, do modo seguinte (por exemplo):

$P(X = x) \simeq P(x - 0.5 \leq X \leq x + 0.5)$

### 3.2.4 Outras Distribuições Especiais

Seja $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que uma v.a. **X tem distribuição Qui-quadrado com n graus de liberdade**, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X \sim \chi^2_n}$ , se $X$ for uma variável contínua com função densidade

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{n}{2}-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx,\ \alpha > 0$ (chamada função Gama)

- A distribuição Qui-quadrado é uma distribuição **assimétrica**, enviesada à direita. À medida que o número de graus de liberdade $n$ aumenta, o enviesamento diminui e aproxima-se da distribuição normal.
- A distribuição Qui-quadrado tem um papel fundamental *no estudo* da variância de uma população, como veremos mais tarde.
- **Tabela de ME**: Seja $X \sim \chi^2_n$. Para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$ e $p \in ]0,1[$, pode ser consultado na Tabela de ME o quantil de ordem $p$ de $X$, isto é, $x_p : P(X \leq x_p) = p \Leftrightarrow F_X(x_p) = p \Leftrightarrow x_p = F_X^{-1}(p)$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que uma v.a. **X tem distribuição t-Student com n graus de liberdade**, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X \sim t_n}$ , se $X$ for uma variável contínua com função densidade

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

com $\Gamma$ a função Gama.

- A distribuição t-Student é uma distribuição **simétrica** relativamente a $x = 0$ e tem forma de "sino", tal como a normal, mas a t-Student tem caudas mais "pesadas". À medida que o número de graus de liberdade $n$ aumenta ($n > 30$), aproxima-se da distribuição normal centrada e reduzida.
- A distribuição t-Student tem um papel fundamental *no estudo* da esperança de uma população.
- **Tabela de ME** : Para $X \sim t_n$, pode ser consultado o quantil de ordem $p$ de $X$, para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$ e $p \in ]0,1[$.