Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Departamento de Física e Matemática

Exame de Análise Matemática II

11/09/09 » Duração: 2h30+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Adicional**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2 - 29$, $g(x,y) = (-f(x,y))^{\frac{1}{2}}$,

$h(x,y)$ e $L(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$h(x,y) ::=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := 5$
Senão Se $4 < x^2 + y^2 \leq 29$
Então $z := g(x,y)$

$L(x,y) ::=$
Se $x^2 + y^2 \leq 4$
Então $z := -5$
Senão $z := -g(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função $h(x,y)$ e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[3.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>duas</u>**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[1, y, -5]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = L(x,y)$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1,1,-5)$.

(ii) Se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P(1,1)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ é positiva, sendo mínima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(iii) As funções f e g têm um ponto critico em $(0,0)$ e a função L não tem extremos.

(iv) Se $z = f(x,y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, então $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. A *figura 1* representa um sólido, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 1$, composto por duas partes:

- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{29}$ seccionado por um cilindro de raio $r = 2$ e altura $h = 5$;
- Casca cilíndrica de raio exterior $r = \sqrt{29}$, raio interior $r = 2$ e altura $h = 5$.

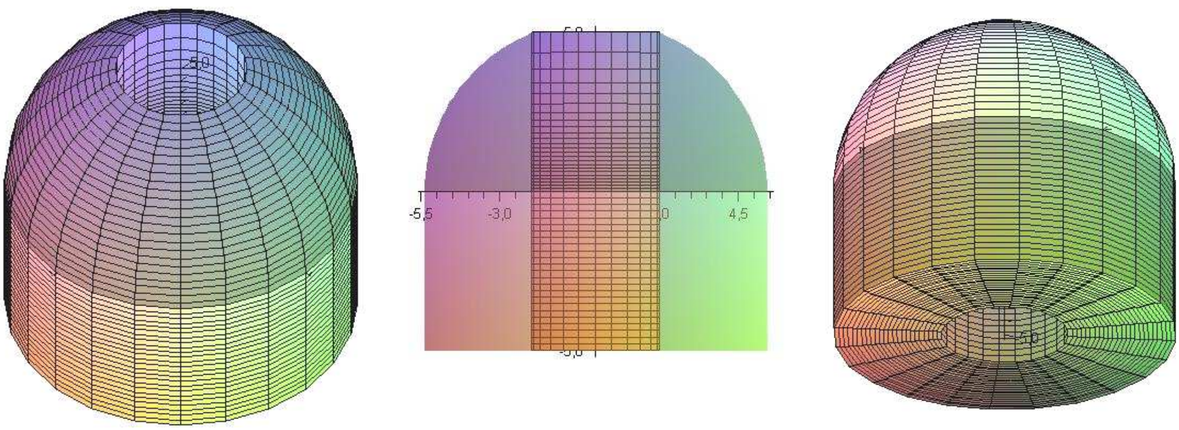

Figura 1

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por

$S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le \theta \le 2\pi \ \wedge \ \arctan(\frac{2}{5}) \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \ \wedge \ \frac{2}{\sin\varphi} \le R \le \sqrt{29}\right\}$$

$$S_2 = \{(\rho,\theta,z) : 2 \le \rho \le \sqrt{29} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -5 \le z \le 0\}$$

[2.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**uma**</u>

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a equação de uma superfície cilíndrica de raio $r = 2$ e altura $h = 5$, definida em coordenadas cartesianas por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \le z \le 5\}$, é dada em coordenadas cilíndricas por $S = \{(\rho,\theta,z) : \rho = 2 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le z \le 5\}$ e em coordenadas esféricas por

$$S = \left\{(R,\theta,\varphi) : R = \frac{2}{\sin\varphi} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\frac{2}{5}) \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

iii) Complete o procedimento seguinte e associe-o a uma transformação/mudança de variável em 3D

```
Transforma01 :=proc(x, y, z)
    local R, theta, phi;
    R := sqrt( ? );
    if (x ≠ 0) then theta := arctan( ? );
    elif (y = 0) then theta := 0;
    elif (y > 0) then theta := Pi/2;
    else theta := -Pi/2;
    end if;
    phi := arccos( ? );
    return [R, theta, phi]
end proc
```

3. Considere a equação não linear $e^x - \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.5] **(a)** Indique, justificando, um intervalo de amplitude igual a um, no qual a equação dada tem uma única raiz real negativa.

[1.5] **(b)** Recorrendo à figura 2, estabeleça uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton/Raphson ou das tangentes e aproxime a raiz x_r efectuando uma iteração. Marque as aproximações e estabeleça uma simulação gráfica do método.

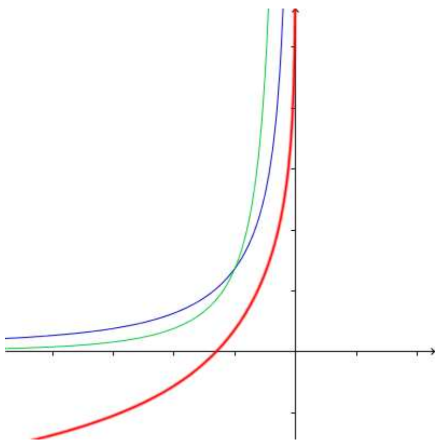

Figura 2 – Gráficos de f, f' e f''

4. Considere as funções $f(x) = -\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ e $g(x) = -f(x)$ representadas na figura 3.

[1.5] **(a)** Determine o polinómio interpolador de grau 2 para $f(x)$ com $x \in [1,2]$.

[1.5] **(b)** Obtenha, usando a regra de Simpson simples, $n = 2$, um valor aproximado do integral $\int_1^2 f(x)\ dx$

Recorrendo ao gráfico representado na figura 3, interprete e comente o resultado obtido.

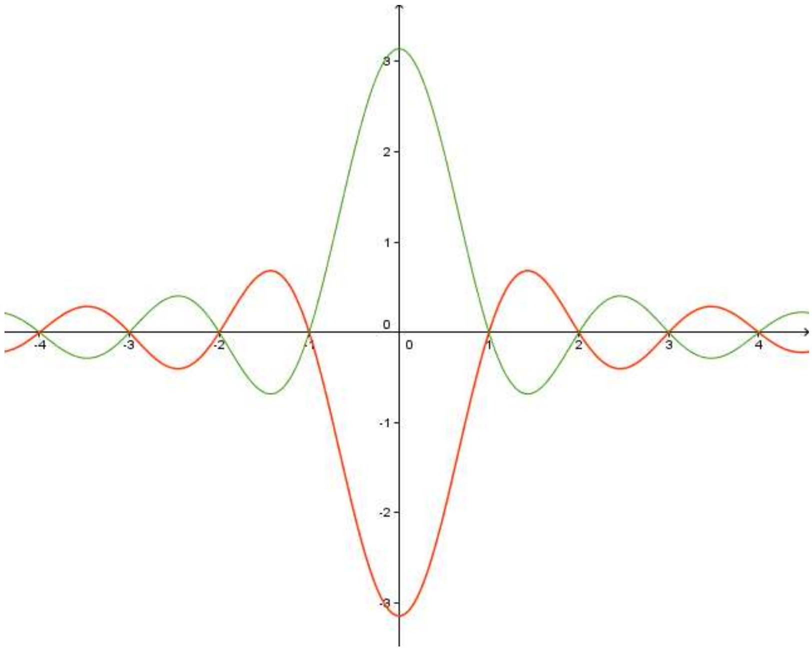

Figura 3

5. Considere o problema de condição inicial $y' = ty^2, \quad y(-1) = 2, \quad t \in [-1,1]$

[2.0] **(a)** Mostre que $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$ é a solução exacta do problema. Complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	-1			2				0
1		1			0,666667		1	
2	1			0				1,001899

[1.0] **(b)** Complete a função e acrescente comentários para explicar o método de Euler.

Nota: a sintaxe usada é a da programação em *Matlab*.

```
function y = Euler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/_?_;
t(1)=a;
y(1)=y0;
for i=1:n,
    y(i+1)=_?_+_?_*feval(f,t(i),y(i));
    t(_?_)=t(i)+_?_;
end
```