Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática**

TPC nº2 Data limite de entrega: 13/Out/2015 (23h59m)

Funções trigonométricas [**A. Conhecimento**]

2. Simplifique as seguintes expressões, considerando $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(a - 5\pi) + \tan\left(\frac{7\pi}{2} + a\right) - \cot\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)$.

Funções trigonométricas inversas [**D. Análise**]

4. Considere a função real de variável real $f(x) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x - \pi}{4}\right)$.

a) Determine o domínio e o conradomínio da função $f(x)$.

b) Calcule o valor de $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

c) Resolva a equação $f(x) = \frac{1}{2}$.

e) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

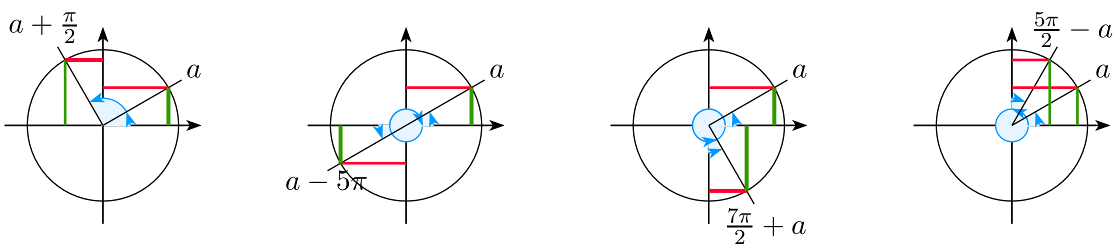
Sugestão de resolução:

Funções trigonométricas [**A. Conhecimento**]

2. Tem-se

$$\begin{array}{lcccc}
 & \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) & + \sin(a - 5\pi) & + \tan\left(\frac{7\pi}{2} + a\right) & - \cot\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) \\
= & \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) & + \sin(a - 5\pi) & + \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2} + a\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + a\right)} & - \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)}
\end{array}$$

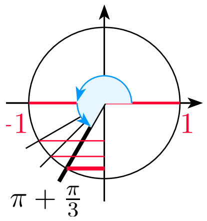
$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$



$$\begin{array}{lcccc}
= & -\sin(a) & -\sin(a) & + \frac{-\cos(a)}{\sin(a)} & - \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \\
= & -\sin(a) & -\sin(a) & -\cot(a) & -\tan(a)
\end{array}$$

$$= -2\sin(a) - \cot(a) - \tan(a)$$

4. Começamos por notar que $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ e $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$,



pelo que

$$f(x) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right).$$

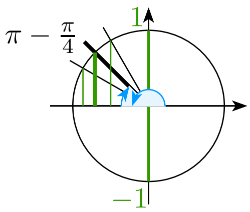
a) Não existe qualquer restrição associada à expressão analítica de $f(x)$, pelo que $D_f = \mathbb{R}$. Relativamente ao contradomínio, tem-se

$$\begin{aligned} & -1 \le \sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) \le 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \ge -2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) \ge -2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{2} \ge -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) \ge -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

pelo que $CD_f = [-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$.

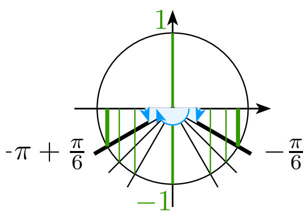
b) Tem-se

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{3\,\frac{4\pi}{3} - \pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$



c) Tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

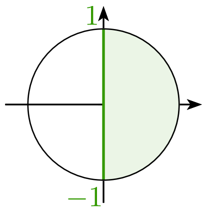


$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & \frac{3x-\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \ \vee\ \frac{3x-\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \\ \Leftrightarrow\ & 3x - \pi = -\frac{2\pi}{3} + k\,8\pi \ \vee\ 3x - \pi = -\frac{10\pi}{3} + k\,8\pi \\ \Leftrightarrow\ & 3x = \frac{\pi}{3} + k\,8\pi \ \vee\ 3x = -\frac{7\pi}{3} + k\,8\pi \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{9} + k\,\frac{8\pi}{3} \ \vee\ x = -\frac{7\pi}{9} + k\,\frac{8\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

e) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o seu domínio, o contradomínio e a sua expressão analítica, isto é, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} & ? \\ ? = x & \longleftrightarrow & y = -\dfrac{1}{2} - 2\sin\left(\dfrac{3x-\pi}{4}\right) \end{array}$$

O domínio natural de f é $\mathbb{R}$, como foi referido em (a). Porém, para definir a função inversa de f é necessário restringir o domínio de modo a garantir a injectividade da função. Neste caso essa restrição tem por base a restrição principal da função seno, que é definida por $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim,



$$\begin{array}{rcccc} & -\dfrac{\pi}{2} & \leq & \dfrac{3x-\pi}{4} & \leq & \dfrac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow & -2\pi & \leq & 3x-\pi & \leq & 2\pi \\ \Leftrightarrow & -\pi & \leq & 3x & \leq & 3\pi \\ \Leftrightarrow & -\dfrac{\pi}{3} & \leq & x & \leq & \pi\,. \end{array}$$

Na restrição principal determinada, tem-se ainda

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad y + \frac{1}{2} = -2\sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{y}{2} - \frac{1}{4} = \sin\left(\frac{3x-\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin\left(-\frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3x-\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 4\arcsin\left(-\frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right) = 3x - \pi \\ &\Leftrightarrow \quad 4\arcsin\left(-\frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right) + \pi = 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}\arcsin\left(-\frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{3} = x\,. \end{aligned}$$

O domínio da função inversa f^{-1} pode ser calculado recorrendo à expressão analítica acabada de determinar, mas uma vez que corresponde ao contradomínio da função f e este já foi determinado na alínea (a), então

$$\begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{3}, \pi\right] & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} & \left[-\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \\ \dfrac{4}{3}\arcsin\left(-\dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{\pi}{3} = x & \longleftrightarrow & y = -\dfrac{1}{2} - 2\sin\left(\dfrac{3x-\pi}{4}\right) \end{array}$$