**Instituto Superior de Engenharia de Coimbra**
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº10 Data limite de entrega: 9/dez/2016 (18h)

---

Primitivação de funções trigonométricas - Tabelas, páginas 6 e 7

- Tabelas de Matemática - página 6: I. potências
- Tabelas de Matemática - página 7: II. produtos de potências
- Tabelas de Matemática - página 7: III. produtos de senos e cossenos com argumentos diferentes

**B. Compreensão**
Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções trigonométricas.

1) $\displaystyle\int \cos^3(2x)\sin^2(2x)\,dx\,;$

4) $\displaystyle\int x\,\cos^2(x^2)\,dx\,;$

**C. Aplicação**
Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções trigonométricas.

5) $\displaystyle\int \sin(5x-1)\cos(3x+1)\,dx\,;$

Primitivação de funções racionais - Tabelas de Matemática, página 8

**A. Conhecimento**
Resolva as seguintes primitivas, utilizando a técnica de primitivação de funções racionais.

Caso 4-(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}\,dx\,;$

*Sugestão de resolução:*

---

Primitivação de funções trigonométricas

**B. Compreensão**

1) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (em particular as regras R2, R6 e R7), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções trigonométricas. Neste caso a função é definida por um produto de potências de seno e cosseno e o **expoente do cosseno é ímpar**, pelo que vamos aplicar a técnica descrita no caso II.(2) da página 7 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(2x)\sin^2(2x) &= \int \cos(2x)\,\underbrace{\cos^2(2x)}_{=\,1\,-\,\sin^2(2x)}\,\sin^2(2x)\,dx \\
&= \int \cos(2x)\big(1-\sin^2(2x)\big)\sin^2(2x)\,dx \\
&= \int \cos(2x)\big(\sin^2(2x)-\sin^4(2x)\big)\,dx \\
&= \int \Big(\cos(2x)\sin^2(2x)-\cos(2x)\sin^4(2x)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{2\cos(2x)\sin^2(2x)}_{R2}\,dx - \frac{1}{2}\int \underbrace{2\cos(2x)\sin^4(2x)}_{R2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3(2x)}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin^5(2x)}{5} + c \\
&= \frac{1}{6}\sin^3(2x) - \frac{1}{10}\sin^5(2x) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (em particular as regras R2 e R6), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções trigonométricas. Neste caso a função é definida por uma potência de cosseno, de **exponente par**, pelo que vamos aplicar a técnica descrita no caso I.(2) da página 6 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$\begin{aligned}
\int x \underbrace{\cos^2(x^2)}_{=\frac{1}{2}(1+\cos(2x^2))} dx &= \int x \, \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2x^2)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \Big(x + x\cos(2x^2)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{x^1 \cdot 1}_{R2}\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\int \underbrace{4\, x\cos(2x^2)}_{R6}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}\sin(2x^2) + c \\
&= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\sin(2x^2) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

**C. Aplicação**

5) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (por exemplo, a regra R2 não é aplicável porque os argumentos do seno e do cosseno são diferentes), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções trigonométricas. Como a função é definida por um produto de seno e cosseno com argumentos diferentes, vamos aplicar a técnica descrita no caso III da página 7 das Tabelas de Matemática. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \sin(5x-1)\cos(3x+1)\, dx &= \int \frac{1}{2}\Big(\sin\big(5x-1+3x+1\big) + \sin\big(5x-1-(3x+1)\big)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \Big(\sin(8x) + \sin(2x-2)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\int \underbrace{8\sin(8x)}_{R7}\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2\sin(2x-2)}_{R7}\, dx \\
&= \frac{1}{16}\big(-\cos(8x)\big) + \frac{1}{4}\big(-\cos(2x-2)\big) + c \\
&= -\frac{1}{16}\cos(8x) - \frac{1}{4}\cos(2x-2) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

**A. Conhecimento**

Caso 4-(4) Começamos por notar que nenhuma das regras de aplicação imediata é aplicável (em particular as regras R5, R2 e R19), pelo que vamos recorrer à técnica de primitivação de funções racionais (quocientes de polinómios). Como a fracção é imprópria (grau do numerador = grau do denominador = 2), começamos por efectuar a divisão dos polinómios. Assim,

$$\begin{array}{rrrr|l} & x^2 & & +1 & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5} -( & x^2 & -2x & +1\ ) & 1 \\ \cline{1-4} & & 2x & & \end{array}$$

e então

$$\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{2x}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção própria}}.$$

A fracção própria resultante da divisão também não é primitivável de forma imediata, pelo que é necessário decompô-la numa soma de elementos simples. Comecemos por isso por determinar a factorização do denominador. Como

$$x^2-2x+1=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} \;\Leftrightarrow\; x=\frac{2\pm 0}{2} \;\Leftrightarrow\; x=1 \;\vee\; x=1\,.$$

então

$$x^2-2x+1 = (x-1)(x-1)\,.$$

A raiz $x=1$ de multiplicidade dois, determina duas fracções simples da decomposição, pelo que

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{A}{\underbrace{x-1}_{\cdot(x-1)}}+\frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\,.$$

Substituindo, **na igualdade definida pelos numeradores** da primeira e da última fracções, $x$ por $x=1$ (a raiz do denominador!) e por $x=0$ (por exemplo), obtemos um sistema linear de duas equações e duas incógnitas que permite determinar os valores de $A$ e $B$:

$$\begin{array}{c|rcl} & 2x & = & A(x-1)+B \\ \hline x=1 & 2 & = & 0+B \\ x=0 & 0 & = & -A+B \end{array} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} B=2 \\ A=B=2 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\,,$$

e consequentemente a fracção racional imprópria tem decomposição definida por

$$\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{2x}{x^2-2x+1}}_{\text{fracção própria}} = 1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\,.$$

O cálculo da primitiva pode agora ser realizado recorrendo à decomposição anterior e às regras de primitivação imediata.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}\,dx &= \int \left(1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= \int \underbrace{1}_{R1}\,dx + 2\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx + 2\int \underbrace{(x-1)^{-2}\cdot 1}_{R2}\,dx \\ &= x+2\,\ln|x-1|+2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c \;=\; x+2\,\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+c\,,\;\; c\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$