Exame Época Normal → 27/6/2019

① $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$g(x,y) := \{$ se $x^2+y^2 \leq 16$ então $z = f(x,y)$ $\Leftrightarrow$ $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \leq 16$

$h(x,y) = \begin{cases} g(x,y) \\ \sqrt{32 - f^2(x,y)} & \text{se } 16 < x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$ $\Leftrightarrow h(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 16 \\ \sqrt{32-(x^2+y^2)} & \text{se } 16 < x^2+y^2 \leq 32 \end{cases}$

a) Domínio das funções

$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\text{condição universal}} \}$, assim $D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$D_g : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\text{condição universal}} \wedge x^2+y^2 \leq 16 \}$

$\Leftrightarrow D_g \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 16}_{x^2+y^2 \leq \text{raio}^2} \}$

$D_h = D_{h_1} \cup D_{h_2}$

$h_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \leq 16$, assim $D_{h_1} = D_g$

$h_2(x,y) = \sqrt{32-x^2-y^2}$ se $16 < x^2+y^2 \leq 32$

$D_{h_2} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 32-x^2-y^2 \geq 0 \wedge 16 < x^2+y^2 \leq 32 \}$

cálculos auxiliares:

$32-x^2-y^2 \geq 0 \wedge 16 < x^2+y^2 \leq 32$

$-x^2-y^2 \geq -32 \wedge 16 < x^2+y^2 \leq 32$

$x^2+y^2 \leq 32 \wedge 16 < x^2+y^2 \leq 32$

$16 < x^2+y^2 \leq 32$

$\Leftrightarrow D_{h_2} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 < x^2+y^2 \leq 32 \}$

→ O Domínio de h é fechado visto que a fronteira faz parte do domínio.

b) h em forma de algoritmo   sendo $z = h(x,y)$

$h(x,y) :=$
- se $x^2+y^2 \leq 16$
- então $z = \sqrt{x^2+y^2}$
- senão se $16 \leq x^2+y^2 \leq 32$
  - então $z = \sqrt{32-x^2-y^2}$

c) Definir curva de nível.

$C_k = \{ (x,y) \in D : f(x,y) = k \}$ sendo $\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = k \end{cases}$

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 16 \}$

$\rightarrow z = f(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow z = \sqrt{16} \Leftrightarrow z = 4$

$C_4 = \{ (x,y) \in D_f : f(x,y) = 4 \}$

$f(x,y) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 16$

pela função $z = \sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \leq 16$

$\rightarrow z = \sqrt{16} = 4 \longrightarrow z = 4 \longrightarrow C = C_4$

$C_4 = \{ (x,y) \in D_g : g(x,y) = 4 \} \Leftrightarrow C_4 = \{ (x,y) \in D_g : x^2+y^2 \geq 16 \}$

$C_4 = C \rightarrow$ a curva de nível C é comum a todas as funções e ocorre em plano $C = 4$

d) Caracterização das superfícies.

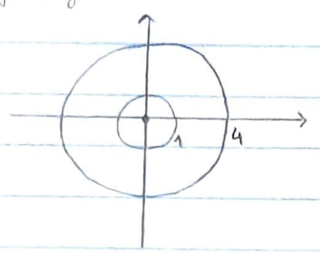
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow$ superfície cónica

i) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

ii) Mapa das curvas de nível / expressão geral das curvas de nível

$C_k = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = k\}$

$f(x,y) = k \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = k \Leftrightarrow x^2+y^2 = k^2$ c/ $k \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = k^2$



iii) $xOy \to z = 0$

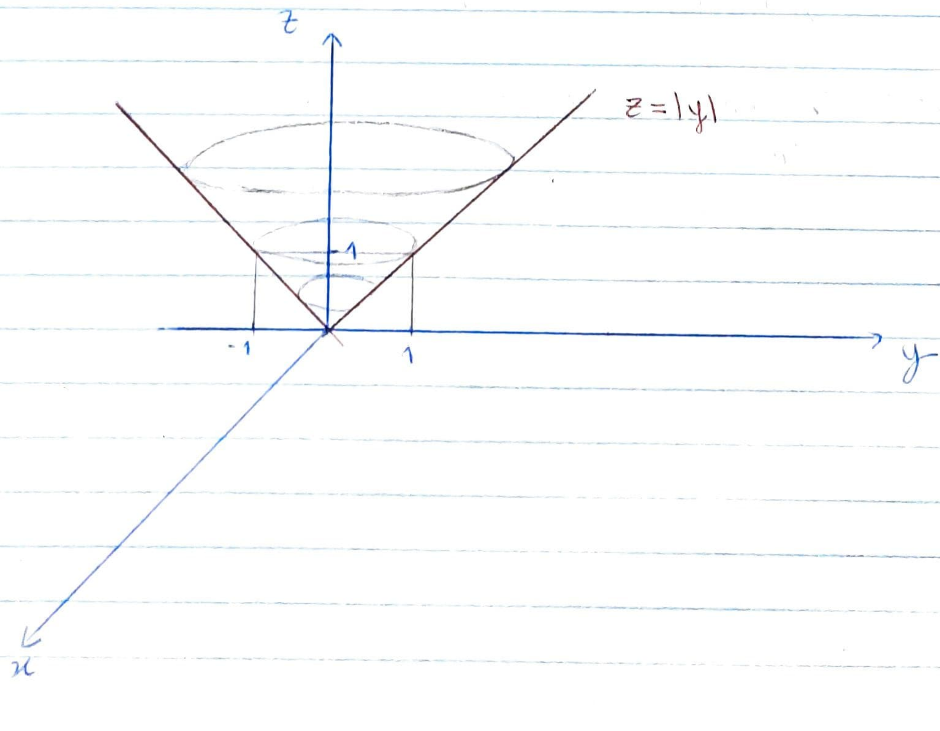
$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$yOz \to x = 0$

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{y^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$xOz \to y = 0$

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2} \\ y = 0 \end{cases}$$



e)

i) Falsa! → Uma vez que a projeção da figura 3 no plano xOy é um circulo de raio 4, que seria o domínio de uma função real de duas variáveis reais, o que não é verdade. Pela figura 2 a um ponto do domínio não corresponde uma e uma só imagem z.

ii) Falsa! → Pela definição

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(x, y+\Delta y) - h(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,5) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(0, 5+\Delta y) - h(0,5)}{\Delta y}$$

iii)

1º PASSO: $t = [5, y, \sqrt{7}] \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{7} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \wedge x = 5$

2º PASSO:

$z - z_0 = m_t (y - y_0) \wedge x = x_0$ constante

$z = m_t \cdot y + b \wedge x = x_0$

$m_t = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{32 - x^2 - y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(32 - x^2 - y^2)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}(32 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}-1} \times \frac{\partial}{\partial y}(32 - x^2 - y^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(32 - x^2 - y^2)^{1/2}} \times (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{32 - x^2 - y^2}}$$

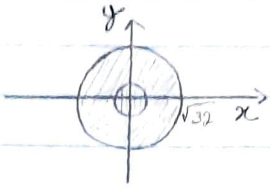
$m_t = \frac{\partial h}{\partial y}(5,0) = \frac{-0}{\sqrt{32 - 5^2 - 0^2}} = 0$ → assim a reta tangente é horizontal

3º PASSO

$z - z_0 = m_t (y - y_0) \wedge x = x_0$

$z - \sqrt{7} = 0 (y - 0) \wedge x = 5$

$z = \sqrt{7} \wedge x = 5$ → conclui-se que a proposição é verdadeira iv)



$D_h = D_{h_1} \cup D_{h_2}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = ?$$

$(x_0, y_0) \in C \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 16$

<u>Aplicar Limites Direcionais:</u> $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = ?$

1. $$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} h(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x_0^2+y_0^2} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$$

2. $$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} h(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} \sqrt{32-x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{32-(x_0^2+y_0^2)} = \lim \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$$

Assim, h é contínua em C visto que:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ h(x_0,y_0) = \sqrt{x_0^2+y_0^2} = \sqrt{16} = 4 \\ 2.\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = 4 \\ 3.\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = h(x_0,y_0) \end{array}\right\}$$

Concluindo iv) é falsa

v) Falsa

NOTA: extremos = máximos ou mínimos

f)

i) $j(x,y) = \sin(f(x,y) - (x^2 - x) - (y^2 + y))$

$= \sin(x^2 + y^2 - x^2 + x - y^2 - y)$

$= \sin(x - y)$

$P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(x-y)) = \frac{\partial \sin(u)}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y}$, sendo $u = x - y$ e $\frac{\partial}{\partial y}(\sin(u)) = \cos(u)$

$= \cos(x-y)\left(\frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial y}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \cos(x-y)$

$= 0 - \frac{\partial}{\partial y}(y) \cos(x-y)$

$= -1 \times \cos(x-y) = -\cos(x-y)$

$-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

→ O potencial decresce à taxa de $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Extra! Determinar o ângulo ~~[illegible]~~ em que a taxa de variação é maxima.

↳ utilizar a teoria do gradiente.

$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$

$\nabla V(x,y) = V_x(x,y)\vec{i} + V_y(x,y)\vec{j}$

$\nabla V(x,y) = \cos(x)\vec{i} - \cos(y)\vec{j}$

$\nabla V(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2})\vec{i} - \cos(\frac{\pi}{4})\vec{j} = 0\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$

valor $= \|\nabla(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{1}}{2}$

$V_{\vec{w}}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \nabla V(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \cdot \vec{w} = \left(0\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}\right)$

$= 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{5}$