Exame da Época de Recurso » Data: 07/07/2017 Código da prova: **0707201701**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $e^{-x} - 3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] **(a)** A equação tem uma única raiz real e positiva no intervalo $[1,2]$? Justifique.

[1.5] **(b)** Utilizando o método da bisseção uma vez, obtenha uma aproximação x_0 para a raiz positiva da equação e mostre que a mesma é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes.

2. A figura 1 representa um protótipo de um copo de espumante utilizado no **Convento de São Francisco nas Festas 2017 da Cidade de Coimbra**.

A região sombreada é limitada pela equação $y = e^{-x}$, por uma parábola e por segmentos de reta.

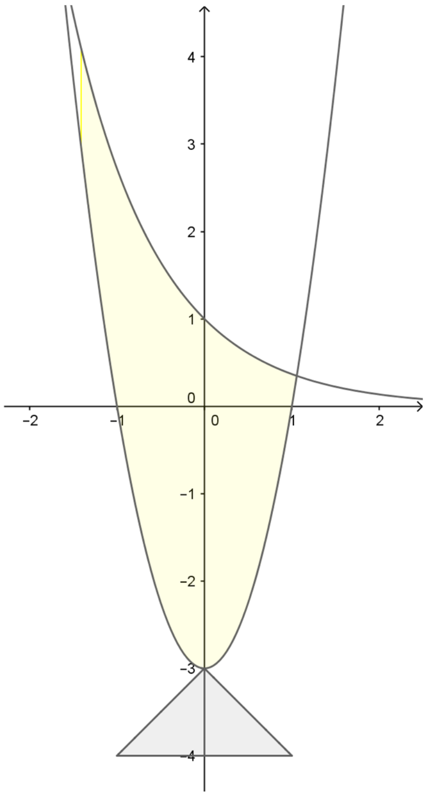

Figura 1

[1.5] **(a)** Usando Interpolação Polinomial determine a equação da parábola.

[1.5] **(b)** Aplicando a regra de Simpson simples ($n = 2$), obtenha um valor aproximado do integral $I = \int_0^{1.06} \int_{3x^2-3}^{e^{-x}} 1 dy dx$ com duas casas decimais e interprete o resultado obtido. Sugestão: comece por transformar o integral duplo num integral simples.

[1.5] **(c)** Alguma das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique convenientemente a sua resposta.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if ~mod(i,2)
      s=s+2*f(x);
    else
      s=s+f(x);
    end
end
S=h*(f(a)+s+f(b))/3;
```

```
function S = RSimpson_v2(f,b,a,n)
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
s=0;
for i=2:n-1,
    if mod(i,2)
      s=s+f(x(i));
    else
      s=s+4*f(x(i));
    end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

3. Considere o seguinte problema de valor inicial $y' = y - yt^2,\quad y(0) = 5,\quad t \in [0,2]$

[1.5] **(a)** Sabendo que $y(t) = 5\exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i\rvert$ RK4
0	0	5				0	0	0
1				7.5000				0.0772
2	2	2.5671			1.5599		6.3171	1.0072

[1.5] **(b)** Complete a função seguinte e acrescente comentários para explicar o algoritmo.

```
function y = RK4(f,a,b,n,y0)
h=_______________;          t=_________________;
y=_______________;      y(1)=_________________;
for i=___:___
    k1=______________________________; k2=______________________________;
    k3=______________________________; k4=______________________________;
    y(i+1)=__________________________;
end
```

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,;\qquad g(x,y) = -\sqrt{1 - f(x,y)}\,;\qquad h(x,y) := \left|\begin{array}{l} \text{se} \quad 1 < x^2 + y^2 \le 4 \\ \text{então } \; z = f(x,y) - 1 \end{array}\right.\,;\qquad j(x,y) = \begin{cases} g(x,y) \\ h(x,y) \end{cases}$$

[0.5] **(a)** Determine e represente graficamente o domínio das funções.

[1.0] **(b)** Defina a função j em forma de algoritmo e trace um esboço do seu gráfico.

[1.5] **(c)** Resolva apenas <u>**duas**</u> das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) O ponto $P(0,0)$ é um ponto de acumulação do domínio das funções f e g e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

ii) O vetor $\begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix}$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $P(0,0,-1)$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**uma**</u>

i) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dada por $V = \sqrt{f(x,y)}$, a taxa de variação máxima do potencial no ponto $P(2,2)$ ocorre na direção e sentido do vetor $\vec{w} = \langle -1,-1 \rangle$?
Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação do potencial em P segundo o vetor $\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Mostre que se $z = f(x,y) - (x+y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$,

então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial \rho} = \sin(\theta) - \cos(\theta)$.

5. A figura 5 representa um molde de uma taça de espumante, composto por quatro partes: segmento de um paraboloide de raio 2 e altura 4; calote esférica de raio 1; cone de raio e altura 2; cilindro de raio 2 e altura 0.25

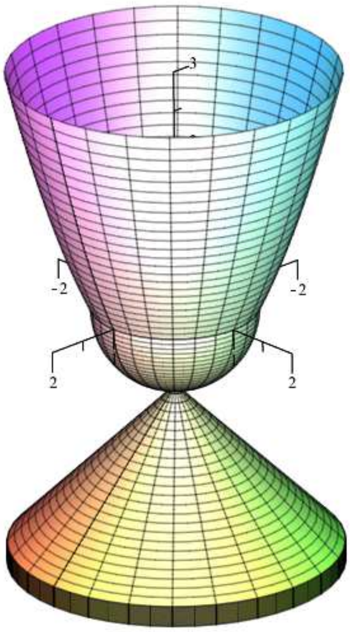

Figura 5

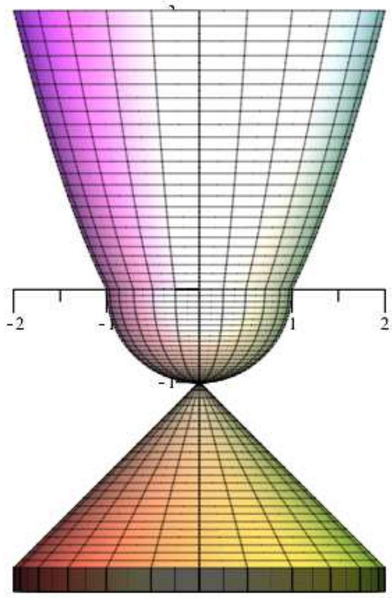

Figura 6

[1.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde:

$S_1 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le \rho \le 2 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge z = \rho^2 - 1\right\}$ $S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : R = 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\right\}$

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4 \wedge -3 \le z \le -\sqrt{x^2+y^2} - 1\right\}$

$S_4 = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 2 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -3.25 \le z \le -3\right\}$

[0.5] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_3? Justifique.

```
> addcoords(Zcylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(r-1, r=0..2, theta=0..2*Pi, coords=Zcylindrical)
```

[1.5] **(c)** Determine o volume que "ocupa" o **espumante Terras do Demo** dentro desta taça (capacidade da taça) e a massa da base da taça ($S_3 \cup S_4$) sabendo que a sua densidade é 3.

Nota: por uma questão de simplificação dos cálculos para o cálculo do volume do espumante, considere que a espessura da taça é desprezável.

[1.0] **(d)** Usando o integral triplo deduza as fórmulas do volume de um cone e de um cilindro de raio r e altura h.

[1.0] **(e)** Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
    local x, y;
    x := ______________________;
    y := ______________________;
    return [__,__];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- ☐ Sim
- ☐ Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não