3ºTeste - Parte 3 - Data: 10/02/2016

1 2.a) a equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = C x \exp(-x^2)$ como integral geral é dada por $y' + 2xy = 0$ cujo o campo direcional é dado pela figura 2 e o gráfico da solução pela figura 1. Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

Graficamente → a afirmação é verdadeira uma vez que, sobrepondo a fig1 e a fig2, a sobreposição é total e o ajuste é completo e perfeito.

Analiticamente → $y = Ce^{-x^2} \xrightarrow{?} y' + 2xy = 0$

Solução Geral ⟶ EDO de 1º ordem

1ºPASSO: Derivar

$$y' = (Ce)^{-x^2} = C(e^{-x^2}) = C(-x)e^{-x^2} = C(-2x)e^{-x^2}$$
$$y' = -2Cxe^{-x^2}$$

2ºPASSO: Substituir.

$$y' + 2xy = 0$$
$$-2Cxe^{-x^2} + 2x(Ce^{-x^2}) = 0$$
$$-2Cxe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} = 0 \iff 0 = 0$$ Proposição Verdadeira

2 EDO de 1º ordem e de variáveis separáveis

a) $y' = 1 \iff y' = f(x)$

$$y = \int 1\,dx \iff y = x + C, C \in \mathbb{R}$$

b) $x\,dx + y\,dy = 0$

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C$$ → integrando

$$\iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\iff x^2 + y^2 = 2C$$

$$\iff x^2 + y^2 = k, k \in \mathbb{R}$$

NOTA: $\int f' f^p = \frac{f^{p+1}}{p+1} + C, C \in \mathbb{R}$

3

ED Lineares de 1ª ordem

a) $y' - y = e^{3x}$ $y(x) = ?$

1º PASSO: Equação Diferencial Ordinária Linear de 1º Ordem do tipo variáveis separadas $\rightarrow$ $y' + a(x)y = b(x)$, sendo $a(x) = -1$ e $b(x) = e^{3x}$

2º PASSO: Método do fator integrante: $\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^{-x}$

$$y = e^{-(-x)} \cdot \left[\int e^{-x} \cdot e^{3x} dx \right]$$

$$y = e^{x} \left[\int e^{2x} dx \right]$$

$$y = e^{x} \left[\frac{1}{2} \int 2 e^{2x} dx \right]$$

$$y = e^{x} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + C \right] \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} e^{3x} + C e^{x}, \ C \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$

Solução Geral ou Integral Geral

b) Problema de valor inicial

$$P \begin{cases} y' = y + e^{3t} \\ t \in [0, 1.5] \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad y(t) = ?$$

1º PASSO: Determinar a solução Geral da ED $y' = y + e^{3t}$

$\hookrightarrow$ Pela alínea a) temos: $y = \frac{1}{2} e^{3t} + C e^{t}, \ C \in \mathbb{R}$

2º PASSO: $C = ?$

$y(0) = 2 \Leftrightarrow t = 0 \wedge y = 2$

$y = \frac{1}{2} e^{3t} + C e^{t} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} e^{3 \times 0} + C e^{0} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}$

3º PASSO:

$y(t) = \frac{1}{2} e^{3t} + \frac{3}{2} e^{t}$

4

3º Teste - 3ª Parte - Data: 10/02/2016

1) Considere a equação diferencial (ED) $\frac{dy}{dx} + A(x,y) = -y$

a) Para $A(x,y) = -yx^2$, mostre que a ED é de variáveis separáveis e determine a sua solução geral.

$$\frac{dy}{dx} - yx^2 = -y \Leftrightarrow dy - yx^2 \cdot dx = -y\,dx$$
$$\Leftrightarrow dy - yx^2 dx - y dx = 0$$
$$\Leftrightarrow (-yx^2 + y)\,dx + 1dy = 0$$
$$\Leftrightarrow y(1-x^2)\,dx + dy = 0 \rightarrow \text{equação diferencial de variáveis separáveis}$$
$$\Leftrightarrow (1-x^2)\,dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

$$\int 1-x^2\,dx + \int \frac{1}{y}\,dx = C \Leftrightarrow x \cdot \frac{x^3}{3} + \ln|y| = C,\ C \in \mathbb{R}$$

↳ equação geral na forma implícita

EXTRA:

$$|y| = e^{C' \cdot x + \frac{x^3}{3}}$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^{C} \cdot e^{-x + \frac{x^3}{x}}$$
$$\Leftrightarrow |y| = K \cdot e^{-x + \frac{x^3}{x}}$$
$$\Leftrightarrow y = C_1 \cdot e^{-x + \frac{x^3}{x}},\ C_1 \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow y = g(x; C_1) \rightarrow \text{solução geral da equação diferencial na forma explícita}$$

b) Para $A(x,y) = -x^2 y\cos(y)$ a ED é de variáveis separadas ou separáveis? Se não for, elimine a parte do cosseno em A e determine a solução particular da ED que satifaz a condição inicial $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{dx} - x^2 y\cos(y) = -y \Leftrightarrow dy - x^2 y\cos(y)\,dx = -y\,dx$$
$$\Leftrightarrow dy + (-x^2 y\cos(y))\,dx = 0 \rightarrow \text{não é de variáveis separáveis}$$
$$\Leftrightarrow dy + y(-x^2\cos(y))\,dx = 0$$

↳ não é possível separar

$$y = C_1 \cdot e^{-x + \frac{x^3}{3}}$$
$$y(0) = 1 \rightarrow C_1 \cdot e^{-0 + \frac{0}{3}} = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$y = e^{-x + \frac{x^3}{3}} \rightarrow \text{solução particular da equação diferencial}$$

Equação Diferencial linear de ordem 2 c/ coeficientes constantes:

$y'' - y = 0$

5

1º PASSO: Caracterização → equação diferencial linear de ordem 2 com coeficientes constantes e homogénea

2º PASSO: Equação Geral → $y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3º PASSO: Equação Característica → $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 0.\lambda - 1 = 0$

4º PASSO: Determinar as Raízes → $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{1}$ Raízes: $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$

5º PASSO: Consultar a tabela SFS

$\lambda = 1 \rightarrow$ SFS $\rightarrow y_1(x) = e^{1x} \Leftrightarrow y_1(x) = e^{x}$

$\lambda = -1 \rightarrow$ SFS $\rightarrow y_2(x) = e^{-1x} \Leftrightarrow y_2(x) = e^{-x}$

NOTA: $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = (-e^{-x} \cdot e^{-x}) - (e^{x} \cdot e^{x}) = -2 \neq 0$

↓

Logo não são linearmente independentes

6º PASSO: $y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

6

3º teste - Parte 3 - Data: 10/02/2016

2.b) $\begin{cases} e = Ri + L\dfrac{di}{dt} \\ e = 3\,\text{sen}(2t) \\ i(0) = 6 \end{cases}$

1º Método

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = e \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{a(t)} i = \underbrace{\frac{e}{L}}_{b(t)}$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t} = e^{\frac{10}{0.5}t} = e^{20t} \quad C=0$$

$$b(t) = \frac{3\,\text{sen}(2t)}{0.5} = 6\,\text{sen}(2t)$$

calculos auxiliares:

$$\int e^{20t}dt = \frac{1}{20}\int 20e^{20t}dt = \frac{e^{20t}}{20} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$(6\,\text{sen}(2t))' = 12\cos(2t)$$

$$(\cos(2t))' = 2\,\text{sen}(2t)$$

$$\int \mu(t)\,b(t)\,dt = \int \underbrace{e^{20t}}_{f(x)} \cdot \underbrace{6\,\text{sen}(2t)}_{g(x)}\,dt \quad \text{primitiva por partes}$$

$$= \int e^{20t}dt \cdot 6\,\text{sen}(2t) - \int\left[\int e^{20t}dt\,(6\,\text{sen}(2t))'\right]dt$$

$$= \frac{e^{20t}}{20} \cdot 6\,\text{sen}(2t) - \int \frac{e^{20t}}{20} \cdot 12\cos(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{10}e^{20t}\text{sen}(2t) - \frac{3}{5}\int e^{20t}\cos(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{10}e^{20t}\text{sen}(2t) - \frac{3}{5}\left(\frac{e^{20t}}{20}\cdot\cos(2t) - \int \frac{e^{20t}}{20}\cdot 2\,\text{sen}(2t)\,dt\right)$$

$$= \frac{3}{10}e^{20t}\cdot\text{sen}(2t) - \frac{3}{100}e^{20t}\cos(2t) - \frac{1}{100}\int e^{20t}\cdot 6\,\text{sen}(2t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int e^{20t}\cdot 6\,\text{sen}(2t)\,dt = \frac{3}{10}e^{20t}\cdot\text{sen}(2t) - \frac{3}{100}e^{20t}\cos(2t) - \frac{1}{100}\int e^{20t}\cdot 6\,\text{sen}(2t)\,dt$$

add: $\frac{1}{100}\int e^{20t}\,6\,\text{sen}(2t)$

$$\Leftrightarrow \frac{101}{100}\int e^{20t}\cdot 6\,\text{sen}(2t)\,dt = \frac{3}{10}e^{20t}\cdot\text{sen}(2t) - \frac{3}{100}e^{20t}\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow \int e^{20t}\,6\,\text{sen}(2t)\,dt = \frac{100}{101}\left(\frac{3}{10}e^{20t}\,\text{sen}(2t) - \frac{3}{100}e^{20t}\cos(2t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \int e^{20t}\cdot 6\,\text{sen}(2t)\,dt = \frac{30}{101}e^{20t}\,\text{sen}(2t) - \frac{3}{101}e^{20t}\cos(2t) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$i(0) = 6 \Leftrightarrow -\frac{3}{101} + C = 6 \Leftrightarrow C = 6 + \frac{3}{101} = \frac{609}{101}$$

Logo, $i(t) = \frac{1}{e^{20t}}\left(\frac{30}{101}\,\text{sen}(2t) - \frac{3}{101}\cos(2t) + \frac{609}{101}e^{-20t}\right)$

2º Método:

$$i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\,\text{sen}(2t) + \frac{3}{101}\cos(2t)$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{12180}{101}e^{-20t} - \frac{60}{101}\cos(2t) - \frac{6}{101}\,\text{sen}(2t)$$

$$e = Ri + L\,\frac{di}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\,\text{sen}(2t) = 10\left(\frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\,\text{sen}(2t) + \frac{3}{101}\cos(2t)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{12180}{101}e^{-20t} - \frac{60}{101}\cos(2t) - \frac{6}{101}\,\text{sen}(2t)\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\,\text{sen}(2t) = -\frac{3}{101}\,\text{sen}(2t) - \frac{3}{101}\,\text{sen}(2t)$$

$$\Leftrightarrow 3\,\text{sen}(2t) = -3\,\text{sen}(2t)\,,\quad \forall t \in \mathbb{R}$$