Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática**

TPC nº7 Data limite de entrega: 17/Nov/2015 (23h59m)

Integral definido - Aplicações: áreas, volumes e comprimentos de curvas

Considere a região

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 2 \; \wedge \; x \leq -y^2\right\}$$

1) Represente graficamente a região D.

2) Explicite, através da utilização de integrais definidos, uma expressão que lhe permita calcular a área da região D.

3) Explicite, através da utilização de integrais definidos, expressões que lhe permitam calcular os volumes dos sólidos de revolução que se obtêm pela rotação da região D

   a) em torno do eixo Ox;

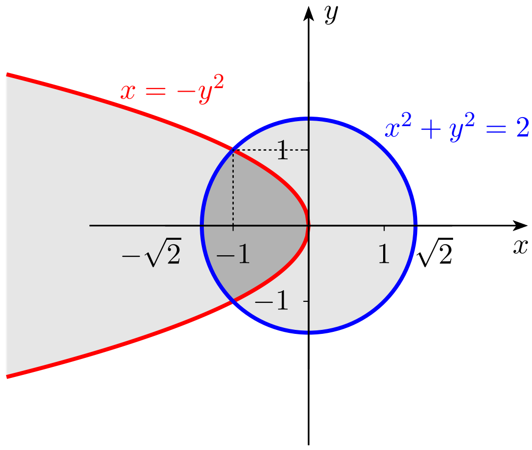
   b) em torno do eixo Oy;

4) Explicite, através da utilização de integrais definidos, uma expressão que lhe permita calcular o perímetro da região D.

Sugestão de resolução:

---

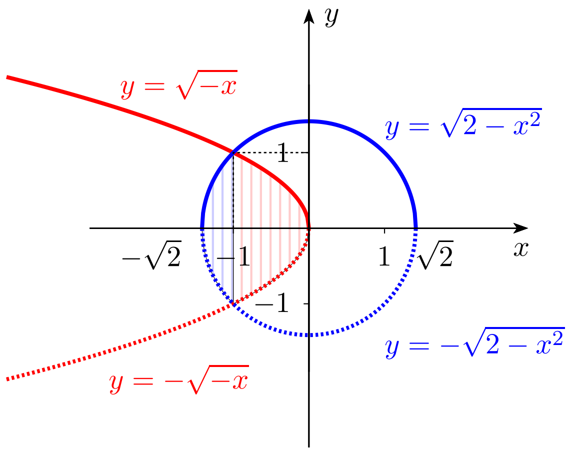
1) A representação gráfica da região D é a seguinte:



2) Se optarmos por descrever a região em função da variável x, temos que definir as curvas em função dessa variável. Nesse caso, tem-se

$$x = -y^2 \;\Leftrightarrow\; y^2 = -x \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{-x}$$
$$x^2+y^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 2-x^2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{2-x^2}$$

pelo que



Então

$$\begin{aligned}\text{Área}(D) &= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \sqrt{2-x^2} - \left(-\sqrt{2-x^2}\right) dx + \int_{-1}^{0} \sqrt{-x} - \left(-\sqrt{-x}\right) dx \\ &= 2\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \sqrt{2-x^2}\, dx + 2\int_{-1}^{0} \sqrt{-x}\, dx\,.\end{aligned}$$

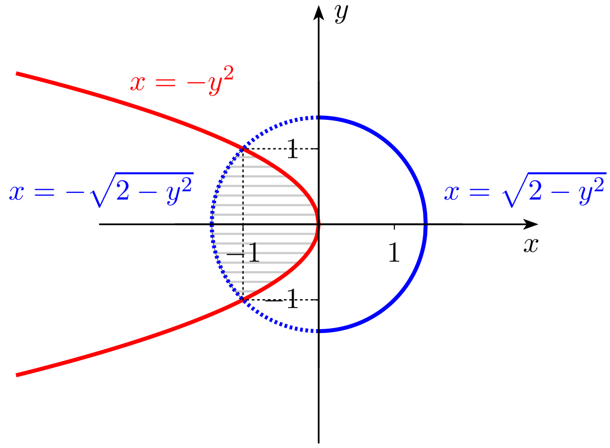
Resolução alternativa:

Se optarmos por descrever a região em função da variável y, temos que definir as curvas em função dessa variável. Nesse caso, tem-se

$$x = -y^2$$

$$x^2+y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2-y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2-y^2}$$

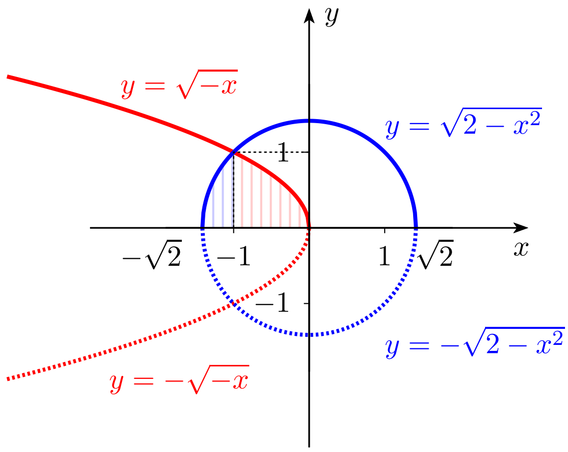
pelo que

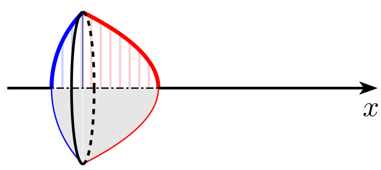


Então

$$\begin{aligned}\text{Área}(D) &= \int_{-1}^{1} -y^2 - \left(-\sqrt{2-y^2}\right) dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(-y^2 + \sqrt{2-y^2}\right) dy\,.\end{aligned}$$

3) a) Começamos por observar que a região é simétrica relativamente ao eixo Ox pelo que, para efeito de rotação, consideraremos apenas a metade superior (caso contrário o volume calculado seria duplo do volume real). Atendendo aos cálculos já apresentados na alínea anterior, tem-se então



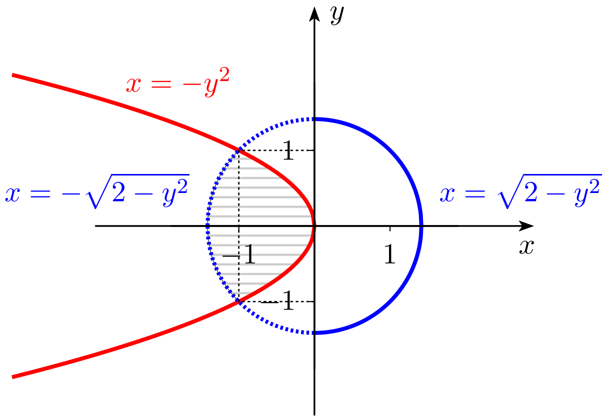


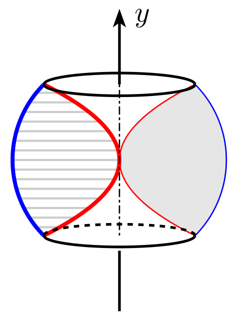
pelo que

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(D_{Ox}) &= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \pi \big(\underbrace{\sqrt{2-x^2}}_{\text{R exterior}} \big)^2 \, dx + \int_{-1}^{0} \pi \big(\underbrace{\sqrt{-x}}_{\text{R exterior}} \big)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{-1} (2-x^2) \, dx + \pi \int_{-1}^{0} -x \, dx \, .
\end{aligned}$$

b) em torno do eixo Oy;

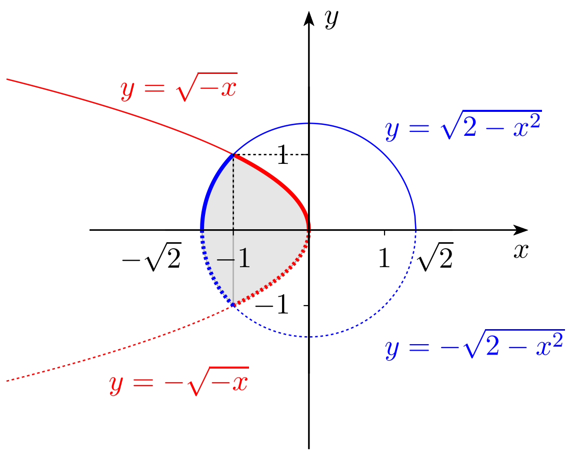
Atendendo aos cálculos já apresentados na alínea anterior, tem-se





$$\begin{aligned}
\text{Volume}(D_{Oy}) &= \int_{-1}^{1} \pi \big(\underbrace{-\sqrt{2-y^2}}_{\text{R exterior}} \big)^2 - \pi \big(\underbrace{-y^2}_{\text{R interior}} \big)^2 \, dy \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (2-y^2-y^4) \, dy \, .
\end{aligned}$$

4) Se optarmos por descrever as curvas em função da variável x, tem-se

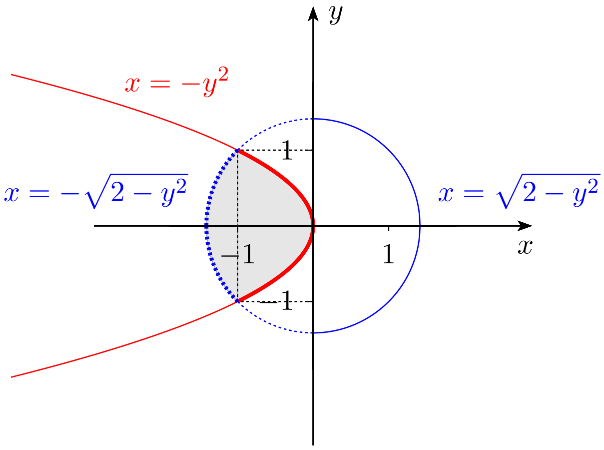


pelo que (note-se que a região é simétricas relativamente ao eixo Ox)

$$\begin{aligned}
\text{Perímetro}(D) &= 2\Big(\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\sqrt{1+\left[(\sqrt{2-x^2}\,)'\right]^2}\,dx + \int_{-1}^{0}\sqrt{1+\left[(\sqrt{-x}\,)'\right]^2}\,dx\Big)\\
&= 2\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}\right]^2}\,dx + 2\int_{-1}^{0}\sqrt{1+\left[\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\right]^2}\,dx\\
&= 2\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx + 2\int_{-1}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{-4x}}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Resolução alternativa:

Se optarmos por descrever as curvas em função da variável y, tem-se



pelo que

$$\begin{aligned}
\text{Perímetro}(D) &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left[(-\sqrt{2-y^2}\,)'\right]^2}\,dy + \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left[(-y^2\,)'\right]^2}\,dy\\
&= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left[\frac{y}{\sqrt{2-y^2}}\right]^2}\,dy + \int_{-1}^{1}\sqrt{1+[-2y]^2}\,dy\\
&= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{y^2}{2-y^2}}\,dy + \int_{-1}^{1}\sqrt{1+4y^2}\,dy\,.
\end{aligned}$$