TESTE INTERCALAR A » Data: 27/04/2016 Código da prova: **2704201602**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2H00+30m

Nome do aluno: **Número:**

1.

[1.0] **(a)** Utilizando um polinómio de Taylor de grau 2, determine um valor aproximado de $\cos\left(30^{o}-2^{o}\right)$ com 2 casas decimais e um majorante para o erro cometido.

Sugestão: $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}\left(x-a\right)^i$ e $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1},\quad c\in\left(a,x\right)$

[0.25] **(b)** Complete as instruções seguintes em GeoGebra que lhe permitiriam resolver a questão anterior.

```
f(x)= [          ]        a= [          ]
  n= [          ]       x_0= [          ]

  P(x)= PolinómioTaylor[______,______,______]
cos_x0= P(_____)
```

[0.25] **(c)** Qual das figuras seguintes ilustra corretamente os dados e resultados da alínea anterior? Justifique.

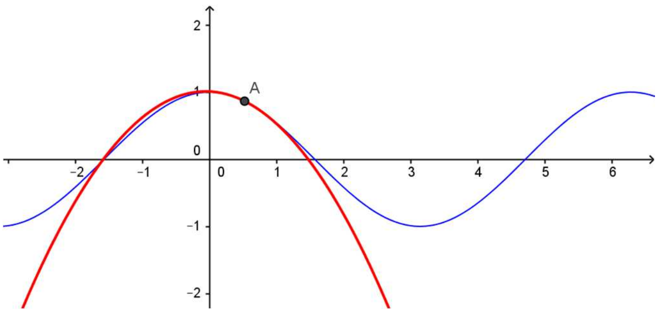

Figura 1

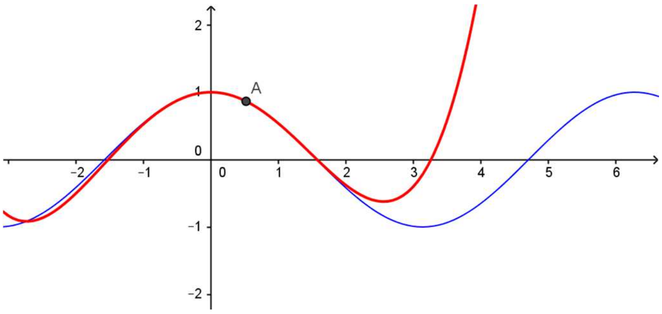

Figura 2

2. Considere a equação não linear $e^{-x}-\ln x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

[1.0] **(a)** Recorrendo a dois processos, indique um intervalo de amplitude igual a 1 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e positiva. Justifique a sua resposta!

[0.5] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

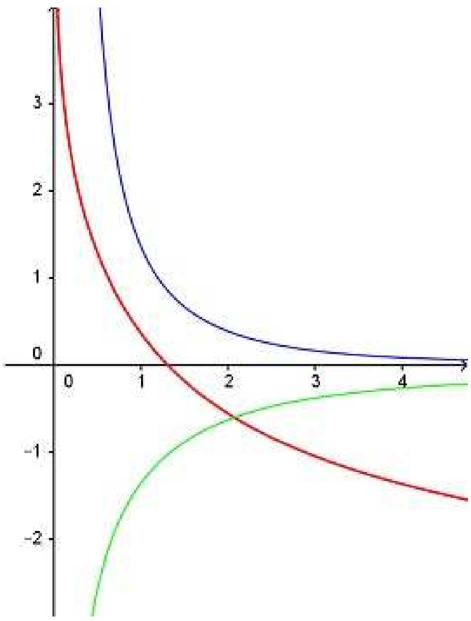

Figura 3 - Gráficos de f, f' e f''

[2.25] **(d)** Complete a função seguinte e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
  k=_________;
  x(k)=______;
  while(__________)
       x(k+1)=_____________________________;
       if(_________________________________)
          return;
       end
       k=__________;
end
```

```
% Script01 de interface do MTangentes
clear
clc
fprintf('-------MÉTODO DAS TANGENTES para f(x)=0-------\n')
strF='exp(x)-ln(x)';
f=@(x) vectorize(eval(strF));
while(1)
    a=str2num(input('a=','s'));
    b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&&isreal(a))&&(isscalar(b)&&isreal(b))&& b>a)
        continue
    end
    if (f(a)*f(b)>0)
        break;
    end
end

% 1ª e 2ª derivada da função
df     = diff(f('x')); % Derivada simbólica
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

% aproximação inicial
while(1)
    x0 = str2num(input('x0=','s'));
    if ~(isscalar(x0)&& isreal(x0))
        continue;
    end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max=');
tol  = str2num(input('tol=','s'));

% chamada do método das tangentes
xT = mTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol)
```

3. Na natureza existem formas e imagens expressas matematicamente por funções definidas por ramos.

Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad -2\pi \leq x < 0 \\ \text{então} \;\; y = -\cos x \\ \text{senão se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \qquad \text{então} \quad y = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad g(x) = -f(x)$$

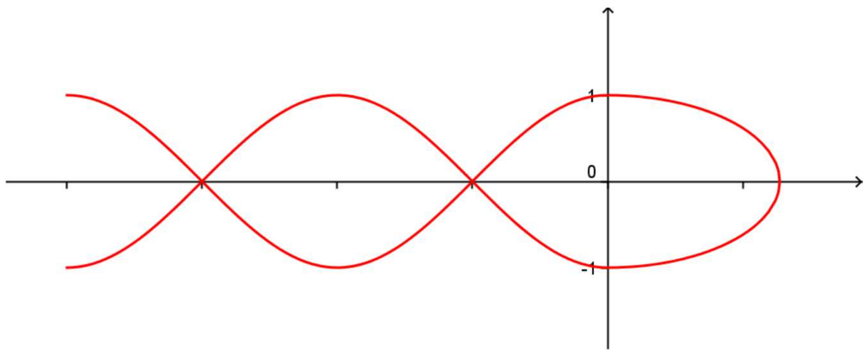

Figura 4 – Gráficos de f e g

[2.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função $g(x)$ para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$.

[0.25] **(b)** Redesenhe a figura 4, aproximando as funções por uma interpolação linear para $x \in \left[0, 2\right]$ e por uma interpolação quadrática para $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$.

[3.25] **(c)** Obtenha um valor aproximado dos integrais $I_1 = \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f(x)\,dx$ e $I_2 = \int_0^2 f(x)\,dx$, utilizando as regras simples de Simpson e dos trapézios respetivamente. Recorrendo à figura 4 interprete os resultados obtidos.

[0.5] **(d)** Aplicando as regras de Simpson e a dos trapézios com $n = 2$, qual delas lhe permite obter uma melhor aproximação à medida de área (πab) da região limitada por uma elipse de semieixos a e b? Justifique

[1.0] **(e)** Qual das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique a sua resposta.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0
        s=s+2*f(x);
    else
        s=s+4*f(x);
    end
end
S=h*(f(a)+s+f(b))/3;
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,h)
n=(b-a)/h;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)
        s=s+4*f(x);
    else
        s=s+2*f(x);
    end
end
S=h/3*f(a)+s+f(b);
```

4.

[0.75] **(a)** Qual é o valor lógico da seguinte afirmação? Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

A equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times \exp(-x^2)$ como integral geral é dada por $y' = -2xy$ cujo campo direcional é dado pela figura 6 e o gráfico da solução geral pela figura 5.

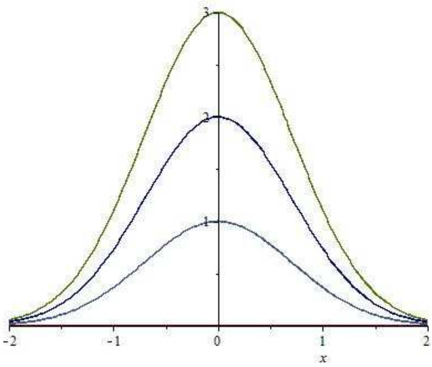

Figura 5

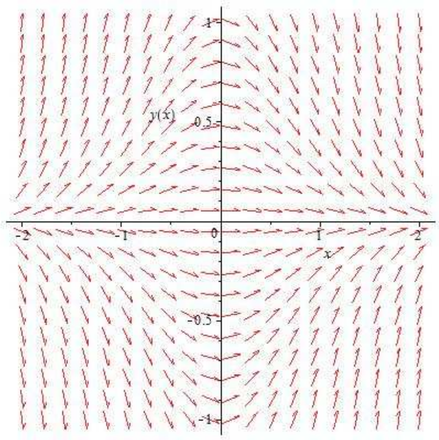

Figura 6

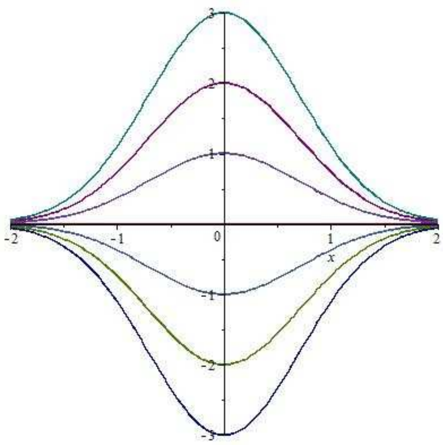

Figura 7

[0.25] **(b)** Verifique que $y(t) = 3\exp(-t^2)$ é a solução exata do problema de valor inicial seguinte

$$y' + 2ty = 0, \quad y(0) = 3, \quad t \in [0,2]$$

[2.0] **(c)** Relativamente ao PVI da alínea anterior, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	0	3				0	0	0
1				2.25	2.3359		0.0864	0.0005
2	1	1.1036		1.125	1.1041			
3					0.3350		0.2463	0.0188
4	2	0.0549		0.4219				0.0358

[0.25] **(d)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

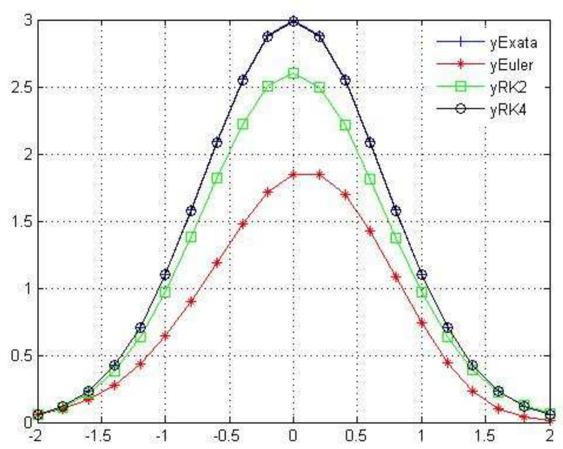

Figura 8

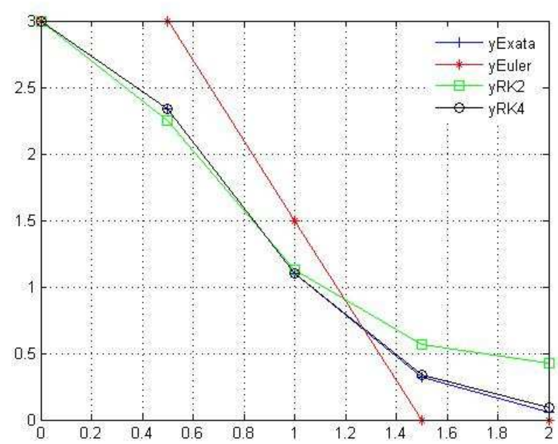

Figura 9

[0.5] **(e)** Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincide com a figura que excluiu na alínea anterior.

[1.25] **(f)** Complete as funções e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regras que lhes estão associadas.

```
function y = NEuler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/___;
t=a:__:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=___;
for i=1:n
    y(i+1)=______+____*f(t(i),y(i));
end
```

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=______________;
t=______________;
y=______________;
y(1)=_____;
for i=___:___,
    k1=________________________;
    k2=________________________;
    y(___)=____________________;
end
```

[1.25] **(g)** A *script* seguinte traduz corretamente a resolução em MATLAB do PVI dado? Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes.

```
clear;
clc;

strF = '2/t*y'
f    = @(t,y) vectorize(eval(strF));
a  = 2;
b  = 3;
n  = 3;
y0 = 1;

yEuler = NEuler(f,a,b,n,y0);
yRK2   = NRK2(f,a,b,n,y0);
yRK4   = NRK4(f,a,b,n,y0);

t = b:-(b-a)/n:a;
sExata = dsolve(['Dy=',strF],['y(',a,')=',num2str(0)]);
yExata = vectorize(eval(char(sExacta)));

plot(t,yExata,'-kd')
hold on
plot(t,yEuler,'-bo')
plot(t,yRK2,'-g*')
plot(t,yRK4,'-r+')
grid on
legend('RK4','RK2','Euler','Exata')
hold off

erroEuler = abs(yRK4-yEuler);
erroRK2   = abs(yRK4-yRK2);
erroRK4   = abs(yExata-yRK4);
tabela    = [t.',yExata.',yEuler.',yRK2.',yRK4.',...
             erroEuler.',erroRK2.',erroRk4.'];
disp(tabela);
```