Primeira Teórica à distância (T_1)

ED lineares de ordem a n com coef constantes

$$a_n y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x) \quad (1)$$
$$a_i \in \mathbb{R}$$

- se $b(x) = 0$

então (1) diz-se EDL ou homogénea
senão (1) " " " " completa

s. geral de $a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ (2)

$$y_H = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

combinação de duas funções
$SFS = \{ y_1(x) \, , \, y_2(x) \}$

Funções linearmente independentes

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

<u>Wronskiano</u>

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad x_0 \in I \subset \mathbb{R}$$

então y_1 e y_2 são funções linearmente independentes.

ex: $y_1(x) = \operatorname{sen} x$; $y_2(x) = \cos x$

São l. independentes?

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = -(1)$$

Logo são l. independentes. $\neq 0$

ED linear de ordem 2 com coeficientes constantes e homogénea

$$a_2 . y'' + a_1 . y' + a_0 . y = 0 \quad (1)$$

1º passo → Estabelecer a equação característica de (1)

$$a_2 . \lambda^2 + a_1 . \lambda + a_0 = 0 \quad (2)$$

2º passo → Determinar as raízes de (2)

Fórmula resolvente $\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 . a_0}}{2a_2}$

Nota:

$Dy = y'$

matLab → dsolve

$D_2 . y = y''$

$$a_2 . y'' + a_1 y' + a_0 . y = 0$$
$$\Leftrightarrow a_2 . D^2 y + a_1 D^1 y + a_0 D^0 y = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_2 D^2 + a_1 D^1 + a_0 D^0) y = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_2 . D^2 + a_1 . D^1 + a_0) . y = 0 \Longrightarrow \text{Polinómio característico}$$
$$\Leftrightarrow a_2 . D^2 + a_1 . D + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_2 . \lambda^2 + a_1 . \lambda + a_0 = 0 \Longrightarrow \text{Equação característica}$$

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 . y = 0$ (1) ⟶ objetivo: chegar à sol. geral

$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ (2) ⟶ raízes de (2)

Raízes de (2) Contribuição SFS de (1)

1.

Ex: $y'' - y = 0 \quad (1)$

1º passo $\rightarrow$ caracterização de (1)

(1) ED linear de ordem com coef. constantes e homogénea

2º passo $\rightarrow$ $y_H = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (3) $\hookrightarrow$ eq. geral de (1)

3º passo $\rightarrow$ Equação característica

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (4)$$
$$\lambda^2 + 0 . \lambda^1 - 1 = 0$$

4º passo $\rightarrow$ Determinar as raízes de (4)

$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{1}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Raízes: $\lambda = 1$
$\lambda = -1$

5º passo $\rightarrow$ consultar a tabela SFS

$$\lambda = 1 \rightarrow SFS \rightarrow y_1(x) = e^{1x} \Leftrightarrow y_1(x) = e^x$$

$$\lambda = -1 \rightarrow SFS \rightarrow y_2(x) = e^{-1x} \Leftrightarrow y_2(x) = e^{-x}$$

$$SFS = \{ y_1(x), y_2(x) \} = \{ e^x, e^{-x} \}$$

6º passo $\rightarrow$ $y_H = c_1 . e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Nota:

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

$= -e^x . e^{-x} - e^x . e^{-x}$
$= -e^0 - e^0 = -1 - 1 = -2 \neq 0$,
logo são lin. indep.