EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

24/06/10 » Duração: 2h30+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste A+B**

1. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$,
$h(x,y)$ e $j(x,y)$ campos escalares dados sob a forma dos algoritmos seguintes:

$h(x,y) :=$
Se $16 < x^2 + y^2 \le 32$
Então $z := \sqrt{32 - f(x,y)}$
Senão Se $x^2 + y^2 \le 16$
Então $z := g(x,y)$

$j(x,y) :=$
Se $x^2 + y^2 \le 16$
Então $z := -g(x,y)$
Senão $z := -\sqrt{32 - f(x,y)}$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função h e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = h(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vector $[x, 5, \sqrt{7}]$ define parametricamente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = h(x,y)$ com o plano $y = 5$ no ponto $P(0, 5, \sqrt{7})$.

(ii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 16\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Mostre que, se o potencial em qualquer ponto do plano xOy for dado por $V = f(x,y)$, então a taxa de variação do potencial em $P(1,1)$ segundo a direcção e sentido do vector $\vec{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ é positiva, sendo mínima na direcção e sentido do vector $\vec{v} = -\vec{u}$.

(ii) Mostre que, se $z = g(x+1, y-1) \wedge x = -1 + \cos\theta \wedge \mathrm{y} = 1 + \sin\theta$, então $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{d\theta}\right)^2 = 1$.

2. Numa das tendas da *Feira Aquiliana 2010* existiam piões com a forma da *figura 1*, de densidade constante $\rho(x,y,z) = 1$, compostos por três partes:

- Cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$; • Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$; • Cilindro de raio e altura 1.

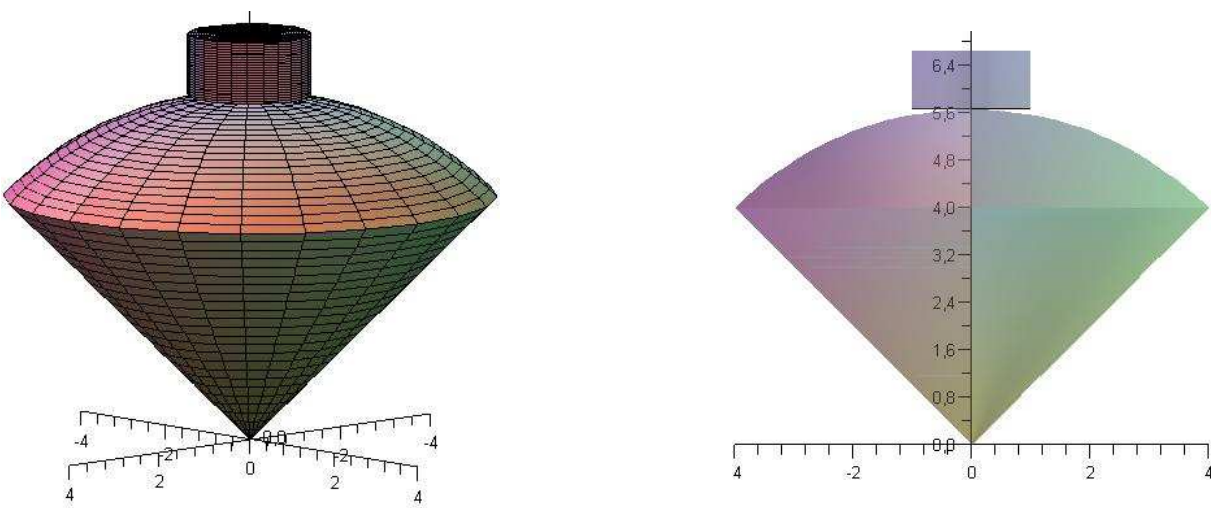

Figura 1

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 \cup S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$S_3 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \sqrt{32} \le z \le \sqrt{32}+1\right\}$$

[2.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre, que em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à do pião é definido por:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x^2+y^2 \le 16 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{32-x^2-y^2}\right) \vee \left(x^2+y^2 \le 1 \wedge \sqrt{32} \le z \le \sqrt{32}+1\right)\right\}$$

(iii) Qual das rotinas seguintes, implementadas em Maple, traduz correctamente a transformação de coordenadas cartesianas para esféricas? Justifique.

```
TransformaCoords01 :=proc(x, y, z)
 local R, θ, ϕ;
 R := sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
 if (x ≠ 0) then θ := arctan(y/x);
 elif (y = 0) then θ := 0;
 elif (y > 0) then θ := π/2;
 else θ := -π/2;
 end if;
 if (R = 0) then ϕ := 0; else ϕ := arccos(z/R);
 end if;
 return [R, θ, ϕ];
 end proc;
```

```
TransformaCoords02 :=proc(x, y, z)
 local R, θ, ϕ;
 R := -sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
 if (x ≠ 0) then θ := arctan(y/x);
 elif (y = 0) then θ := 0;
 elif (y > 0) then θ := -π/2;
 else θ := π/2;
 end if;
 if (R = 0) then ϕ := 0; else ϕ := arccos(z/R);
 end if;
 return [R, θ, ϕ];
 end proc;
```

3. Considere a equação não linear $2x^2 - 2 - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[1.0] **(a)** Determine, um intervalo de amplitude igual a 1 onde a equação dada tem uma única raiz real x_r negativa.

[2.0] **(b)** Mostre que $x_0 = -2$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes, e, aplicando o método uma vez, obtenha uma aproximação da raiz real x_r negativa da equação.

4. Na *Festa da Flor 2010* da Madeira um tapete de flores preenchia as regiões limitadas pelas linhas da figura, que representam graficamente as funções:

$$f(x) = \frac{-\cos(\pi x)}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = -f(x)$$

[1.5] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função g para $x \in \left[-3/2, -1/2\right]$.

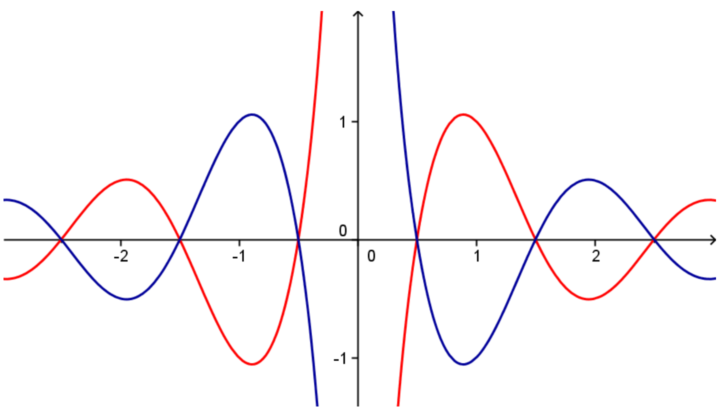

Figura 2

[1.5] **(b)** Obtenha, usando a regra de Simpson simples, $n = 2$, um valor aproximado do integral $\int_{-3/2}^{-1/2} g(x)\,dx$

Recorrendo ao gráfico representado na figura 2, interprete e comente o resultado obtido.

[1.0] **(c)** Qual das funções seguintes traduz correctamente a regra dos trapézios? Justifique.

```
function T = RTrapezios_v1(f,a,b,n)
h=(a+b)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    s=s+2*feval(f,x);
end
T=h/2*(feval(f,a)+2*s+feval(f,b));
```

```
function T = RTrapezios_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    s=s+feval(f,x);
end
T=h/2*(feval(f,a)+2*s+feval(f,b));
```

5. Considere o problema de condição inicial $y' = ty^2, \quad y(-1) = 2, \quad t \in [-1,1]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$ é solução exacta do problema.

[1.5] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	-1			2				0
1		1			0,666667		1	
2	1			0				1,001899