INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

Plano de Treino Intensivo das Regras

Integrais Impróprios

A.Conhecimento

Determine a natureza dos seguintes integrais

Integrais impróprios de 1ª espécie

Caso 1: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx$, $f(x)$ continua em $[a,+\infty[$.

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

3. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

4. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2+x}}dx$

Caso 2: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$, $f(x)$ continua em $]-\infty,b]$.

5. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

6. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2}{xln(-x)}dx$

7. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{4+x^2}dx$

8. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

Integrais impróprios de 2ª espécie

Caso 3: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)dx$, para $t<b$, $f(x)$ continua em $[a,b[$ e não limitada em $x=b$.

9. $\int_{-8}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

10. $\int_{0}^{2} \frac{4}{\sqrt{2-x}}dx$

11. $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x+1}dx$

12. $\int_{0}^{\pi/2} tg(x)dx$

Caso 4: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)dx$, para $t>a$, $f(x)$ continua em $]a,b]$ e não limitada em $x=a$.

13. $\int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

14. $\int_{-1}^{0} \frac{2}{x+1}dx$

15. $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}dx$

16. $\int_{2}^{3} \frac{4}{\sqrt{x-2}}dx$

Resultados da Aprendizagem

Integrais Impróprios

B.Compreensão

1. Considere a seguinte função real de variável real $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$
   a. Determine o domínio da função e averigue a continuidade da função.
   b. Justifique que o seguinte integral $\int_1^2 \frac{x}{1-x^2}dx$ é de 2ª espécie.
   c. Determine a natureza do integral.
   d. Justifique que o seguinte integral $\int_2^{+\infty} \frac{x}{1-x^2}dx$ é de 1ª espécie.
   e. Determine a natureza do integral.
2. Justifique que os integrais seguintes são impróprios:

   a. $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt[3]{4-x}}dx$ b. $\int_{-\infty}^0 \frac{2}{x^2+1}dx$

C.Aplicação

Determine a natureza dos seguintes integrais:

1. $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt[3]{4-x}}dx$
2. $\int_{-\infty}^0 \frac{2}{x^2+1}dx$
3. $\int_{-1}^0 \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$
4. $\int_6^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{x-2}}dx$
5. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{4+9x^2}dx$
6. $\int_6^{+\infty} \frac{4}{x(1+ln(x))}dx$

D.Análise

Analise cada uma das expressões apresentadas e identifique qual(is) representa(m) o integral impróprio, justificando convenientemente a sua resposta e determine o seu valor no caso de ser possível o seu cálculo.

i. a. $\int_0^1 \frac{2}{x^3}dx$ b. $\int_{-1}^0 \frac{2}{x^3}dx$ c. $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}dx$ d. $\int_1^2 \frac{2}{x^3}dx$

ii. a. $\int_{-1}^0 \frac{2}{x(1+ln(x))}dx$ b. $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x(1+ln(x))}dx$ c. $\int_{1/e}^{e} \frac{2}{x(1+ln(x))}dx$ d. $\int_e^4 \frac{2}{x(1+ln(x))}dx$

iii. a. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ b. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ c. $\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ d. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

E.Sintese

1. Justifique convenientemente que os seguintes integrais impróprios são mistos e determine a sua natureza

   a. $\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ b. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$ c. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

   a. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ b. $\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{x^2+9}dx$

F.Avaliação

1. Considere a região do plano, definida pelo seguinte conjunto

$$E = \{(x, y)^2 : y \leq e^{-x} \wedge x \geq (y-1)^2 \wedge y \geq 0\}$$

   a. Represente geometricamente a região *E*.
   b. Explicite, através da utilização de integrais simples, uma expressão que permite calcular a medida da região da área.
   c. Que pode concluir da existência da medida identificada na alínea anterior.

2. Considere o seguinte integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

   a. Determine a natureza do integral.
   b. O integral representará a área de uma região plana? Justifique convenientemente a sua resposta.
   c. Prove que o integral representa o comprimento da semicircunferência de centro na origem e raio 1.