A Álgebra do Crescimento

Módulo I – Crescimento exponencial

O crescimento exponencial está, regra geral, associado a um comportamento incontrolável. No final deste módulo os formandos terão apreendido e associado o crescimento exponencial a fenómenos do nosso quotidiano. Pretende-se ainda, estabelecer os princípios elementares da modelação matemática desses fenómenos, isto é, introduzir as definições e propriedades da exponencial.

Unidade 2 – Definições e propriedades da exponencial

A operação resultante de somar um número *x* por si mesmo *n* vezes, resulta numa multiplicação, isto é:

$$\underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ vezes}} = x \cdot n$$

Da mesma forma, a multiplicação de um número *x* por si mesmo n vezes dá lugar à **potenciação**, isto é:

$$\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}} = x^n$$

Diz-se que uma sucessão de números **cresce linearmente** quando estes têm uma taxa de aumento constante, quer dizer, quando cada um deles se pode obter do anterior somando-lhe uma quantidade fixa. Por exemplo:

4, 7, 10, 13, 16, ...

onde a taxa de aumento é três, que é a quantidade fixa (denominada **razão** ou **incremento**) que se deve somar a cada número para obter o seguinte. Em termos algébricos, se *n* é a posição que ocupa um termo na **sucessão numérica** anterior, o seu valor, que designaremos por $f(n)$, é $f(n) = n + 3$.

No entanto, quando esta taxa de aumento não cresce com a soma mas com o produto, de forma que cada número se obtém multiplicando o anterior por uma quantidade fixa, diz-se que a sucessão tem um **crescimento exponencial**, como é o caso da sucessão seguinte:

2, 4, 8, 16, 32, ...

em que, cada elemento da série se obtém multiplicando o anterior por uma quantidade fixa (**razão**), que neste caso é 2. Em termos algébricos $f(n) = 2^n$.

Os dois tipos de sucessões numéricas anteriores designam-se de **progressão aritmética** e **progressão geométrica** respectivamente, sendo que, a soma dos *n* primeiros elementos de uma:

- Progressão aritmética é igual a

$$\frac{1^{\text{o}}\text{termo} + \text{último termo}}{2} \cdot \text{número de termos} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

- Progressão geométrica é igual a

$$1^{\text{o}}\,\text{termo} \cdot \frac{\text{razão}^n \text{ - 1}}{\text{razão - 1}} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad \text{com } r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

2.1 Exponencial

A função $f(n) = 2^n$ é um exemplo de uma função exponencial, ou simplesmente exponencial, do tipo:

$$f(x) = a^x$$

em que ***a*** (base da exponencial) é um número fixo/constante, positivo e diferente de 1 e ***x*** (expoente da exponencial) é um número qualquer.

Sejam *a* e *b* dois números reais positivos e, *x* e *y* dois números reais quaisquer:

$(a,b \in \mathbb{R}^+;\ x,y \in \mathbb{R})$	Exemplos
▪ $a^0 = 1$	$2^0 = 1$
▪ $a^x > 0$	$2^x > 0; \quad (\frac{1}{2})^x > 0$
▪ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = (\frac{1}{2})^x; \quad 1^x = 1$

$(a,b \in \mathbb{R}^+;\ x,y \in \mathbb{R})$	Exemplos
▪ $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$	$(0.1)^x = (\frac{1}{10})^x = \frac{1}{10^x}$
▪ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$
▪ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, $e \approx 2.71$ (número de *Neper*)
▪ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(10^x)^y = 10^{x \cdot y}$
▪ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$(20)^x = (2 \cdot 10)^x = 2^x \cdot 10^x$
▪ $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$	$(0.1)^x = (\frac{1}{10})^x = \frac{1^x}{10^x} = \frac{1}{10^x}$
▪ $1^x = 1$	$1^{-x} = \frac{1}{1^x} = \frac{1}{1} = 1$

2.2 Potências de números reais

Uma potência é representada algebricamente por uma função do tipo:

$$f(x) = x^n$$

em que ***x*** (base da potência) é um número qualquer, excepto zero, e ***n*** (expoente da potência) é um número fixo/constante qualquer.

$(n \in \mathbb{N};\ x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	Exemplos
▪ $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
▪ $x^0 = 1$	$2^0 = 1;\quad (-\sqrt{2})^0 = 1$
▪ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3};\quad (-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5}$
▪ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3};\quad (-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5}$
▪ $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;\quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
▪ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$2^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ ou $2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

Leis da potenciação

$(m,n \in \mathbb{N};\ x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	Exemplos
▪ $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^7 = 2^{10} = 1024$
▪ $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(2^2)^5 = 2^{10} = 1024$
▪ $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	$20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
▪ $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$