Exame Normal 2020

① a) Determinar as derivadas parciais em ordem a $\underline{x}$ e a $\underline{y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \xrightarrow{\text{WolframAlpha}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x,y) = 3\sqrt{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \xrightarrow{\text{WolframAlpha}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b) Determine a equação da reta tangente à curva C de interseção da superfície de equação $z = f(x,y)$ com o plano $x=3$ no ponto $P(x,y) = (3,1)$

$$\begin{cases} z = 3\sqrt{y^2+x^2} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3\sqrt{y^2+3^2} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3\sqrt{y^2+9} \\ x = 3 \end{cases} \text{ e } P(3,1)$$

$m_t = f_y(3,1) \rightarrow$ Derivada Parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(3\sqrt{y^2+9}) =$ ↓ WolframAlpha

$$= \frac{3y}{\sqrt{y^2+9}}$$

$m_t = \frac{3 \times 1}{\sqrt{1^2+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ i) Declive da reta tangente à curva C no ponto P.

$z - z_0 = m_t(y - y_0) \wedge x = x_0$ $\qquad P(3,1) \rightarrow z = 3\sqrt{1^2+9} = 3\sqrt{10}$

$z - 3\sqrt{10} = \frac{3}{\sqrt{10}}(y-1) \wedge x = 3$

$z - 3\sqrt{10} = \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \wedge x = 3$

$z = \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + 3\sqrt{10}_{\times\sqrt{10}} \wedge x = 3$

$z = \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{3\sqrt{10}\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \wedge x = 3$

$z = \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{30}{\sqrt{10}} \wedge x = 3$

$z = \frac{3y}{10} + \frac{27}{\sqrt{10}} \wedge x = 3$ ii) Equação da reta tangente.

c) $T(x, y) = 3\sqrt{y^2+x^2}$

Determine a taxa de variação de T em relação à distância no ponto $P(x,y) = (3,1)$ na direção.

WolframAlpha:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

i) eixo dos xx: $9/\sqrt{10}$

ii) eixo dos yy: $3/\sqrt{10}$

iii) do vetor que faz ângulo de 30° com a direção positiva do eixo dos xx:

$$30° = \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{6}\, i + \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\, j$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} + \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

d) $z = \frac{3\sqrt{y^2+x^2}}{3}$, $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta) \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial z}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$

Falsa! porque

e) O domínio da função f não é um círculo fechado!

Verdadeira! porque: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 \geq 0}_{\text{condição universal}}\}$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

② $SF = \{ \sin(4x), \cos(4x) \}$

a) Calcule o Wronskiano do sistema de funções SF

$(\sin(4x))' = 4\cos(4x)$
$(\cos(4x))' = -4\sin(4x)$

$$\begin{vmatrix} \sin(4x) & \cos(4x) \\ 4\cos(4x) & -4\sin(4x) \end{vmatrix}$$

$\sin(4x)(-4\sin(4x)) - 4\cos(4x)\cos(4x) =$

$= \underbrace{-4\sin^2(4x) - 4\cos^2(4x)}_{\det}$

b) SF constitui um Sistema Fundamental de soluções SFS de uma equação diferencial de ordem 2, linear e homogénea?

Verdadeira, porque:

$= -4(\sin^2(4x) + \cos^2(4x))$

$= -4 \times 1 \quad = -4 \quad \neq 0$

$\hookrightarrow \det(W) \neq 0$

c) As funções de SF são soluções da equação diferencial $y'' + 4y = 0$. Falsa, porque:

$(\sin(4x))'' = (4\cos(4x))' = -4 \times 4 \sin(4x)$

$y'' + 4y = 0 \iff y'' = -4y$

$-4^2 \sin(4x) = -4\sin(4x) \quad \times$

d) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' + 16y = 0$

$\boxed{y(x) = C_1 \sin(4x) + C_2 \cos 4x)}$

$y'' + 16y = 0 \iff y'' = -16y$

$(\sin(4x))'' = -16 \sin(4x)$

$-4^2 \sin(4x) = -16 \sin(4x) \quad \checkmark$

③ $\frac{dy}{dx} + 3y = A(x,y)$

a) A Equação diferencial é um EDP! Falsa!
é uma equação diferencial linear de primeira ordem
e não equação diferencial parcial / derivadas parciais

b) $A(x,y) = yx^2$, condição inicial $y(0) = 3$

$\frac{dy}{dx} + 3y = yx^2$, $y(0) = 3$ WolframAlpha

↓

$y(x) = 3 \; e^{x^3/3 - 3x}$

c) $A(x,y) = x$ a equação diferencial é linear de 1º ordem.

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x \xrightarrow[\text{WolframAlpha}]{} \text{Verdadeira}$$

d) $A(x,y) = x$ determine a solução geral na equação diferencial

$\frac{dy}{dx} + 3y = x$ WolframAlpha $\longrightarrow$ $y(x) = \frac{x}{3} + c_1 e^{-3x} - \frac{1}{9}$

$$e^{-3x}\left(\frac{(3x-1) \times e^{3x}}{9} + c\right)$$

$$e^{-3x}\frac{(3x-1)e^{3x}}{9} + e^{-3x}$$

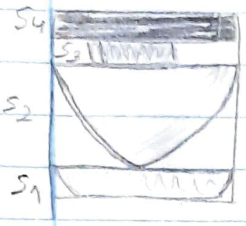
$$e^{0}\frac{(3x-1)}{9} + e^{-3x}$$

$$\frac{1(3x-1)}{9} + e^{-3x}$$

$$\frac{3x}{9} - \frac{1}{9} + e^{-3x}$$

$$\frac{x}{3} + e^{-3x} - \frac{1}{9}$$

④ a)



$r = 2$
$\theta_2 = 2\pi$
$\phi_2 = 2\pi/3$

$S_1 = \{(R, \theta, \phi) : 0 \leq R \leq r \wedge 0 \leq \theta \leq \theta_2 \wedge \pi/2 \leq \phi \leq \phi_2$

→ Calote esférica de raio $R = 2$

$f(x,y) = y^2 + x^2$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge f(x,y) \leq z \leq 4\}$

→ Paraboloide de altura $h = 4$ e raio max $= 2$

$R = 1$
$\theta_2 = 2\pi$
$z_1 = 4$

$S_3 = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq r \wedge 0 \leq \theta \leq \theta_2 \wedge z_1 \leq z \leq 5$

→ cilindro de raio $R = 1$ e altura $= 1$

$R = 2$
$\theta_1 = 0$
$z_1 = 5$

$S_4 = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq r \wedge \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi \wedge z_1 \leq z \leq 5{,}5\}$

→ cilindro de raio $R = 2$ e altura $h = 0{,}5$

b) i) $\rho(x, y, z) = 2$

$V(S) = V(S_2) + V(S_3) + V(S_4)$

$V(S_2) = 8\pi$

$V(S_3) + V(S_4) = 3\pi$

ii) $M(S_1) = \frac{16\pi}{3}$

c) $\rho_1 = 0$
$\rho_2 = 2$
$\theta_1 = 0$
$\theta_2 = 2\pi$
$z_1 = \rho^2$
$z_2 = 4$

(5) (P) $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

a) Determine a solução particular de P

$y = y(t) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}$ ←

$y'' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \xrightarrow{\text{WolframAlpha}} y(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}(e^{4x} + 1)$

$y(x) = \frac{e^{-2x} \times e^{4x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$

b) Transformar P num PVI de 1º ordem, isto é, com um sistema de duas equações diferenciais de ordem 1.

(Q) $\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$

$f(t, u, v) = v$

$g(t, u, v) = 4u$