Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Página 1.6 ⑥ $f(x,y) = \sqrt{32 - x^2 - y^2}$ objetivo: gráfico de $z = f(x,y)$

PROCESSO ① → caminho + curto

$f(x,y) = \sqrt{32 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{32 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{32 - x^2 - y^2})^2$

$\Leftrightarrow z^2 = 32 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 32$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{32})^2 \rightarrow \underline{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$

superfície Esférica

$\Leftrightarrow z^2 = 32 - x^2 - y^2$

$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{32 - x^2 - y^2}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{32 - x^2 - y^2} \rightarrow \underline{z = f(x,y)}$

Semi-Superfície Esférica

PROCESSO ② → algoritmo de esboço 3D

1º PASSO: Domínio da função $f(x,y) = \sqrt{32 - x^2 - y^2}$

NOTA: o operador/principal da função é a $\sqrt{\ }$ e só existe $\sqrt{\ }$ em números não negativos !!!

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 32 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 32\}$

↓

circunferência de raio $\sqrt{32}$

$f(6,0) = ?$ → não definida

↳ porque $\sqrt{32} = 5.7$, ou seja, o ponto $(6,0)$ não está no Domínio da função f

NOTA: o Domínio de f é fechado pois a fronteira está contida no Domínio, ou seja, $fr(D) \subseteq D$

2º PASSO Curvas de Nível

$C_0 = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 0\}$

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{32 - x^2 - y^2} = 0 \Leftrightarrow 32 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 = -32 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 32$

$C_1 = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 1\}$

$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{32 - x^2 - y^2} = 1 \Leftrightarrow 32 - x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 31$

$C_4 = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 4\}$

$f(x,y) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{32 - x^2 - y^2} = 4 \Leftrightarrow 32 - x^2 - y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

$C_6 = \{ (x,y) \subset \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 6 \}$

$f(x,y) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{32 - x^2 - y^2} = 6 \Leftrightarrow 32 - x^2 - y^2 = 36 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = -4 \rightarrow$ impossível

Forma Geral das Curvas de Nível:

$C_k = \{ (x,y) \subset \mathbb{R}^2 : \sqrt{32 - x^2 - y^2} = k \}$

$\exists\ k \geq 0 \rightarrow 32 - x^2 - y^2 = k^2$

$-x^2 - y^2 = k^2 - 32$

$x^2 + y^2 = 32 - k^2 \rightarrow$ Todas as curvas de nível serão circunferências de raio $\sqrt{32 - k^2}$

3º PASSO: Interseção com os planos coordenados

① $xOy \rightarrow z = 0$

$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{32 - x^2 - y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{32 - x^2 - y^2} = 0 \end{cases}$

↳ Curva de Nível C_0

② $yOz \rightarrow x = 0$

$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{32 - 0 - y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{32 - y^2} \end{cases}$

$z = \sqrt{32 - y^2}$

$z^2 = 32 - y^2$

$y^2 + z^2 = 32$

Semi-Circunferência

③ $xOz \rightarrow y = 0$

$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{32 - x^2 - 0} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{32 - x^2} \end{cases}$

Semi-Circunferência

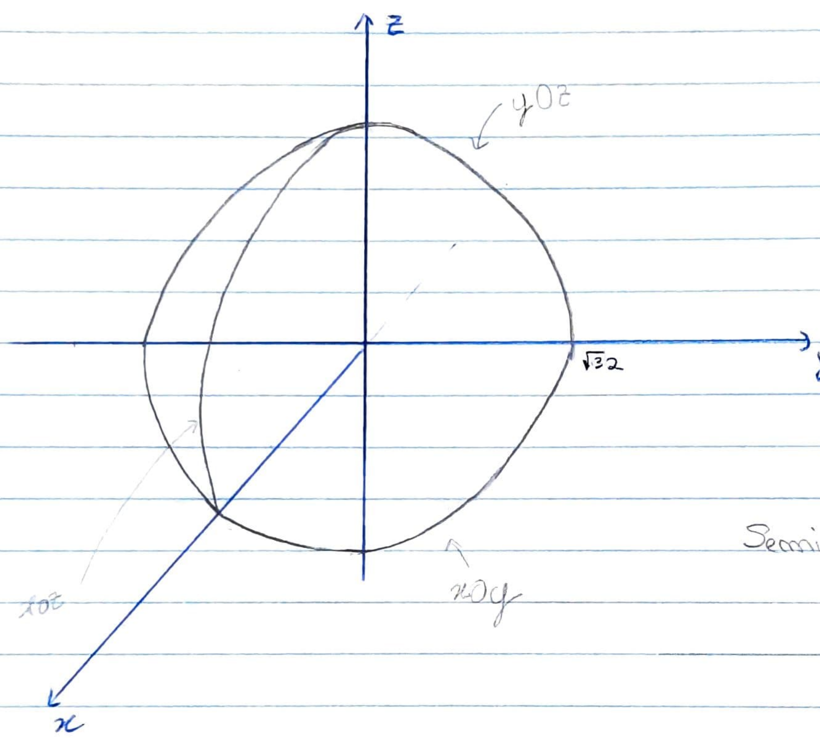
4º PASSO: Montagem

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 32\} \rightarrow$ Circunferência de Raio $\sqrt{32}$

plano $xOy \rightarrow z=0$ $\quad \sqrt{32-x^2-y^2}=0 \rightarrow$ Curva de Nível C_0 c/ raio $\sqrt{32-0^2} \simeq 5.7$

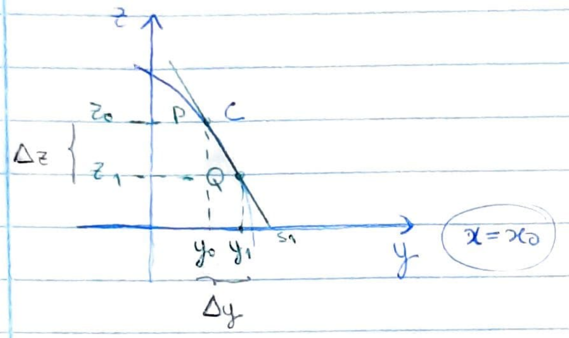
plano $yOz \rightarrow x=0$ $\quad z=\sqrt{32-y^2} \rightarrow$ Semi-Circunferência

plano $xOz \rightarrow y=0$ $\quad z=\sqrt{32-x^2} \rightarrow$ Semi-Circunferência



Semi-Superficie Esférica

→ Determinar reta da curva de intersecção (C) da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $x = x_0$.



$$C = \begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$

$Q = (x_0, y_1, z_1)$

$$m_{S_1} = \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{z_1 - z_0}{\Delta y}$$

$$m_{S_1} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Equação da reta:

$z = my + b \Leftrightarrow z = m_{S_1} + b$

Equação da reta tangente:

$z - z_0 = m_t (y - y_0) \wedge x = x_0$

$$\hookrightarrow m_t = \lim_{\Delta y \to 0} m_s = \lim_{\Delta y \to 0} f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$m_t = f_y(x_0, y_0)$

↓

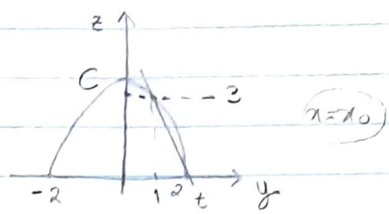
derivada parcial

Considere a função $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Determine a equação da reta tangente à curva C de interseção de $z = f(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto $P(0, 1, 3)$.

1º PASSO: análise do pedido

$$C = \begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{cases} z = -y^2 + 4 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad P(0,1,3)$$



2º PASSO: determinar declive no ponto $P(0,1,3)$

m_t = derivada

$m_t = f_y(0,1) = ?$ → Determinar a derivada parcial: $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$z = f(x,y) \longrightarrow f_y(x,y) = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta y}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(4) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 - 0 - 2y$$

↑ aplicar as regras de derivação mas, sendo que o deriv. é em ordem a "y", o "x" e as expressões em "x" funcionam como constantes.

$$\text{assim } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4 - x^2 - y^2) = -2y = f_P$$

$$m_t = f_P(0,1) = -2 \times 1 = -2$$

3º PASSO: Determinar a equação da reta tangente

$z - z_0 = m_t(y - y_0) \wedge x = x_0$ $\qquad$ $P(x_0, y_0, z_0) = P(0, 1, 3)$

$m_t = -2$

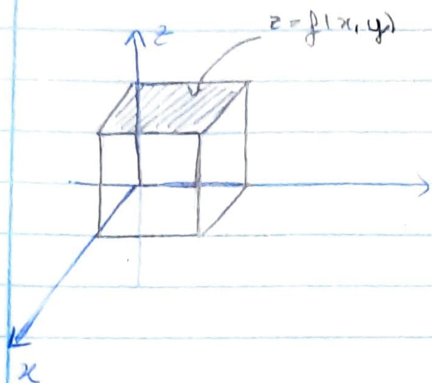
$$z - 3 = -2(y - 1) \wedge x = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 3 = -2y + 2 \wedge x = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2y + 5 \wedge x = 0 \Leftrightarrow t = my + b \wedge x = x_0$$

Integral Duplo

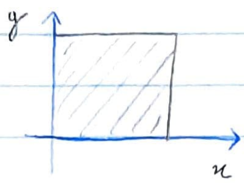
Cubo de Aresta 2



$V(S) = 8$

↳ Mostrar que Volume da superfície = 8.

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \wedge 0 \leq z \leq 2 \}$



$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \}$

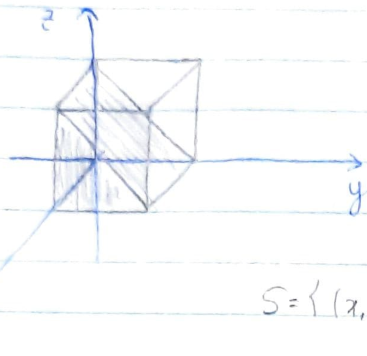
$$V(S) = \iint_D f(x,y)\, dy\, dx$$

$$V(S) = \iint_D 2\, dy\, dx \Leftrightarrow V(S) = 2 \iint_D 1\, dy\, dx \Leftrightarrow V(S) = 2 \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} 1\, dy\, dx$$

$$\Leftrightarrow V(S) = 2 \int_0^2 \int_0^2 1\, dy\, dx \Leftrightarrow V(S) = 2 \int_0^2 \left[\int_0^2 1\, dy \right] dx = 2 \int_0^2 \left[y \right]_0^2 dx =$$

$$= 2 \int_0^2 (2-0)\, dx = 4 \int_0^2 1\, dx = 4 \left[x \right]_0^2 = 4(2-0) = 8$$

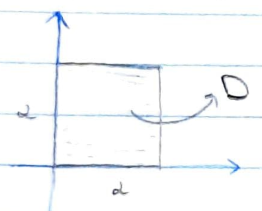
Integral Duplo



$V(S) = \dfrac{V(\text{cubo})}{2} = 4$

Mostrar que o Volume da Superfície $= 4$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge 0 \leq z \leq -y + 2\}$



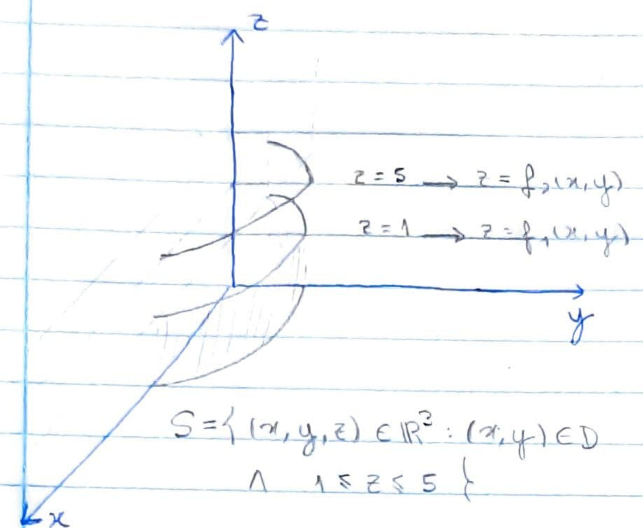
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$

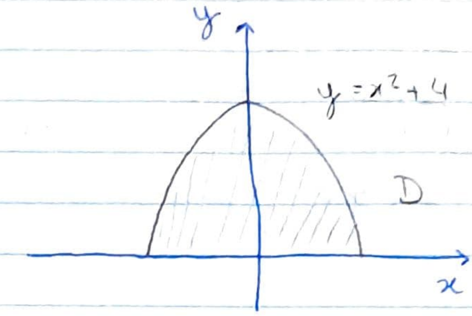
$$V(S) = \iint_D f(x, y)\, dy\, dx = \iint_D (-y + 2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^2 (-y + 2)\, dy \right] dx = \int_0^2 \left[-\frac{y^2}{2} + 2y \right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{-2^2}{2} + 2 \times 2 - \left(\frac{-0^2}{2} + 2 \times 0 \right) \right) dx = \int_0^2 2\, dx = 2 \left[x \right]_0^2 = 2(2 - 0) = 4$$

Integral Duplo





$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \wedge 1 \leq z \leq 5 \}$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 4 \}$

$$V(S) = \iint_D f_2(x,y) - f_1(x,y)\, dy\, dx = \iint_D 5 - 1\, dy\, dx = \iint_D 4\, dy\, dx =$$

$$= 4 \iint_D 1\, dy\, dx = 4 \int_{-2}^{2} \left[\int_0^{4-x^2} 1\, dy\, dx \right] = 4 \int_{-2}^{2} \left[y \right]_0^{4-x^2} dx =$$

$$= 4 \int_{-2}^{2} 4 - x^2 - 0\, dx = 4 \int_{-2}^{2} 4 - x^2\, dx = 2 \times 4 \int_0^2 4 - x^2\, dx =$$

$$= 8 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 \left(4 \times 2 - \frac{2^3}{3} - 0 \right) = 8 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{128}{3}$$

(Página 1.18) Derivadas Parciais / Direcionais

a) Gradiente da função no ponto de coordenadas (3,2).

1ºPASSO:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{9}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{9}x^2\right)+0 = \frac{1}{9}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = \frac{1}{9}\times 2x = \frac{2}{9}x$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{9}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{4}\right) = 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = \frac{1}{4}\times 2y = \frac{1}{2}y$$

2ºPASSO: estabelecer gradiente $f(x,y) = \nabla f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2}{9}x\right) i + \left(\frac{1}{2}y\right) j$$

3ºPASSO: calcular $\nabla f(3,2)$

$$\nabla f(3,2) = \frac{2}{9}\times 3i + \frac{1}{2}\times 2j \Leftrightarrow \nabla f(3,2) = \frac{2}{3}i + j \Leftrightarrow \nabla f(3,2) = \left\langle \frac{2}{3} ; 1\right\rangle$$

b) Taxa de variação da função na direcção $\theta = \frac{\pi}{4}$ no ponto de coordenadas (3,2)

taxa de variação $\equiv f_{\vec{u}}(3,2) = ?$ $\equiv$ Derivação Direcional

1ºPASSO. $f_u(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \vec{u}$

2ºPASSO: $\nabla f(3,2) = \frac{2}{3}i + j$

3ºPASSO: $\vec{u} = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$ com $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{4}\, i + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\, j = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

4ºPASSO:

$$f_u(3,2) = \left(\frac{2}{3}i + j\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)$$

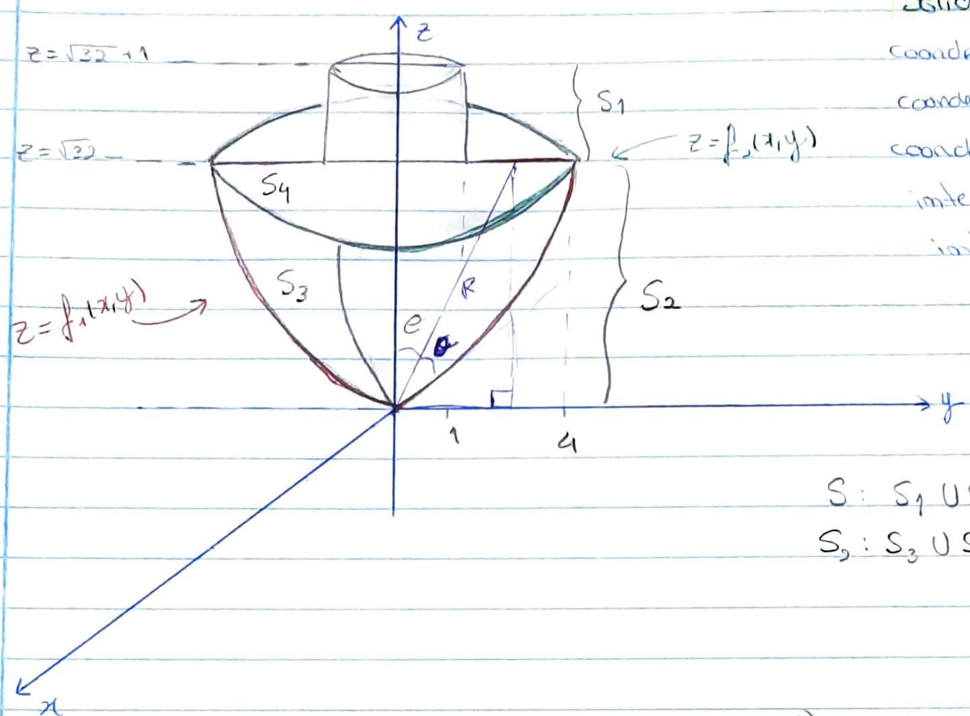
→ produto interno escalar

$$= \frac{\cancel{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Sólidos:
coordenadas cartesianas
coordenadas ~~cilin~~ cilíndricas
coordenadas esféricas
integral duplo
integral triplo



$S : S_1 \cup S_2$
$S_2 : S_3 \cup S_4$

→ Definição de S_1 : ① coordenadas cartesianas e ② cilíndricas

① $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R \wedge z_1 \leq z \leq z_2\}$ c/ $R = 1$, $z_1 = \sqrt{32}$, $z_2 = \sqrt{32} + 1$

② $S_1 = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \sqrt{32} \leq z \leq \sqrt{32} + 1\}$

→ Definição de S_2: ① coordenadas cartesianas e esféricas

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$

$z = f_2(x,y) \longrightarrow$ Segmento de Esfera

$z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{32})^2 \iff z = \pm\sqrt{32 - x^2 - y^2}$

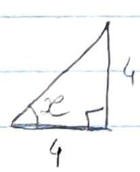
$z = f_1(x,y)$

$P(0,4,4) \longrightarrow z = k\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 4 = k\sqrt{0^2 + 4^2}$

$\iff k = 1 \longrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$

① $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{32 - x^2 - y^2}\}$

② $S_2 = \{(R, \theta, e) : 0 \leq R \leq \sqrt{32} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq e \leq e_2\}$



$\tan e_2 = \frac{4}{4} = 1 \iff \tan e_2 = 1 \iff e_2 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

→ Volume: $V(S) = V(S_1) + V(S_2)$ com $V(S_1) = V(\text{cilindro}) = \pi\, 1^2 \times 1 = \pi$

e $V(S_2) = \iiint_{S_2} 1 \, dz\, dy\, dx$

(...)