Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

08/07/2013 » Duração:2h30+30m

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época de Recurso**

1. Considere a equação não linear $x-1-\sin x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

[1.5] **(a)** A equação tem uma única raiz real no intervalo $[1,2]$? Justifique.

[2.5] **(b)** Mostre que $x_0=2$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes. Aplique o método uma vez e obtenha uma aproximação da raiz real x_r da equação.

2. A figura 1 representa um bacalhau "fiel amigo". As linhas que contornam a figura são:

- Arcos de circunferência de raio 1/2;
- Parábolas de eixo vertical com vértice de abcissa 2;
- Segmentos de reta.

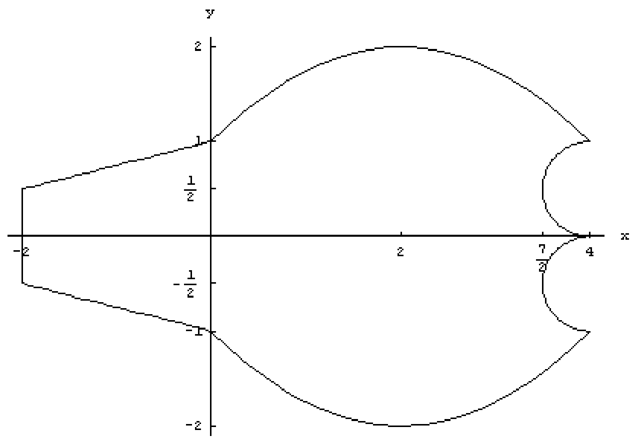

Figura 1

[1.0] **(a)** Determine, usando Interpolação Polinomial, as equações da parábola e do segmento de reta que se intersectam no ponto de coordenadas (0, -1)

[1.0] **(b)** Aplicando a regra de Simpson simples, calcule o valor do integral $I=\int_0^4\int_0^{2-\frac{1}{4}(x-2)^2} 1dydx$. Interprete o resultado obtido.

[1.0] **(c)** Qual das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if ~mod(i,2)
      s=s+2*f(x);
    else
      s=s+4*f(x);
    end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)
      s=s+2*feval(f,x);
    else
      s=s+4*feval(f,x);
    end
end
S=h/3*feval(f,a)+s+feval(f,b);
```

3. Considere o problema de valor inicial $y' = ty^2, \quad y(-1) = 2, \quad t \in [-1,1]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$ é a solução exata do problema.

[1.5] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	-1			2				0
1					0,6667		1	
2	1			0				1,0019

4. Considere as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = 9 - f(x,y)$ se $x^2 + y^2 \leq 9$, $h(x,y) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{f(x,y)}$

e j dada sob a forma do algoritmo seguinte:

$j(x,y) :=$

Se $5 < x^2 + y^2 \leq 9$

Então $z := -\sqrt{g(x,y)}$

Senão Se $x^2 + y^2 \leq 5$

Então $z := h(x,y)$

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é aberto? Justifique.

[1.5] **(b)** Trace um esboço da superfície definida por $z = j(x,y)$.

[1.5] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(i) O vetor $[0,y,9]$ define vectorialmente a equação da recta tangente à curva de intersecção da superfície $z = g(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto $P(0,0,9)$.

(ii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

(i) Determine a derivada direccional da função g em $P\left(-1,-1\right)$ segundo a direção e sentido do vetor $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Em que direcção e sentido a função cresce mais rapidamente? Justifique.

(ii) Mostre que, se $z = -\frac{\sqrt{5}}{2}h(x,y) \wedge x = \rho\cos\theta \wedge \mathrm{y} = \rho\sin\theta$ então $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho}$ para $\rho > 0$.

(iii) Qual das rotinas seguintes, implementadas em Maple, traduz correctamente a avaliação se uma função é harmónica, isto é, se satisfaz a equação de Laplace?

A função f é harmónica? Justifique.

```
Harmonica_v1 := proc(f)
   if diff(diff(f, x),x)-diff(diff(f, y),y) = 0
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc

Harmonica_v2 := proc(f)
   if diff(f, x, x)+diff(f, y, y) = 0
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;
```

5. A figura 2 representa uma bolota do Vale Côa de densidade $\rho(x,y,z)=2$ formada por duas partes:

- Paraboloide de altura $h=9$ e largura máxima de raio $r=3$
- Calote esférica de raio $r=3$ seccionada por um cone de raio $r=\sqrt{5}$ e altura $h=2$.

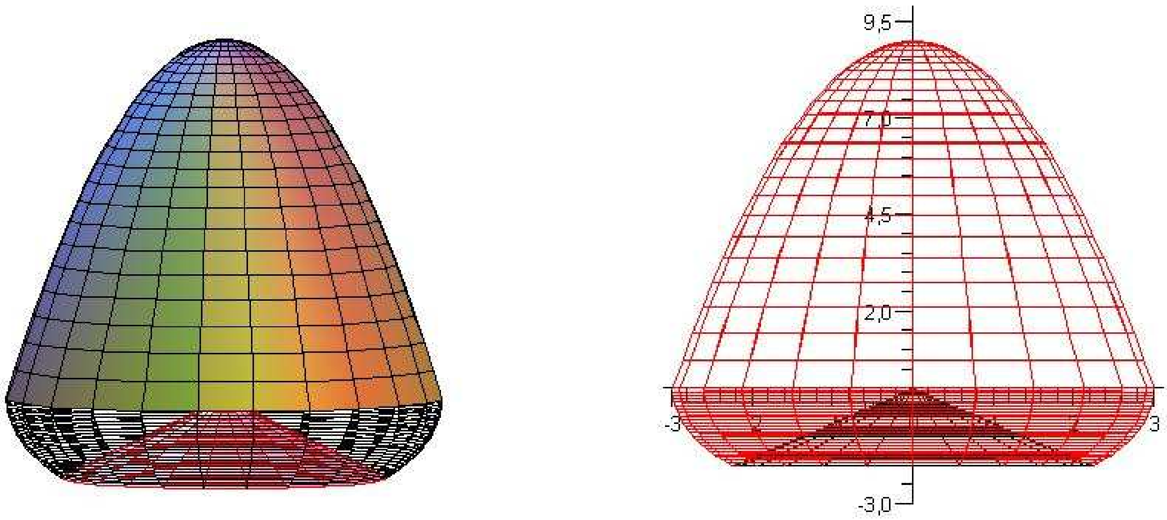

Figura 2

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S=S_1\cup S_2$, onde:

$S_1=\left\{(\rho,\theta,z): 0\le\rho\le 3\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge 0\le z\le 9-\rho^2\right\}$

$S_2=\left\{(r,\theta,\varphi): 0\le r\le 3\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi-\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})\right\}$

[2.5] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

(i) Prove, usando coordenadas cilíndricas, que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(ii) Mostre que em coordenadas cartesianas o sólido é definido por $S=S_1\cup S_2$, onde:

$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 9\wedge 0\le z\le 9-x^2-y^2\right\}$

$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left(5< x^2+y^2\le 9\wedge -\sqrt{9-x^2-y^2}\le z\le 0\right)\vee\left(x^2+y^2\le 5\wedge -\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 0\right)\right\}$

(iii) Complete a rotina seguinte e apresente uma 2ª versão, em Maple ou Matlab, com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := --?-- ;
   y := --?-- ;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não