2. Seja f um campo escalar definido por $f(x,y) = x^2 + y^2$

(a) Resolva **apenas duas** das alíneas seguintes

A temperatura T em (x,y) é dada por $T = f(x,y)$.

i) Calcule a taxa de variação de T em (1, 1) segundo a direcção e sentido do vector $\vec{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Interprete o resultado obtido.

ii) Determine, a direcção, sentido e magnitude da taxa de variação máxima da temperatura em (1, 1).

iii) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de temperatura entre os pontos (1,1) e (1.3, 1.3).

(b) Resolva **apenas uma** das alíneas seguintes

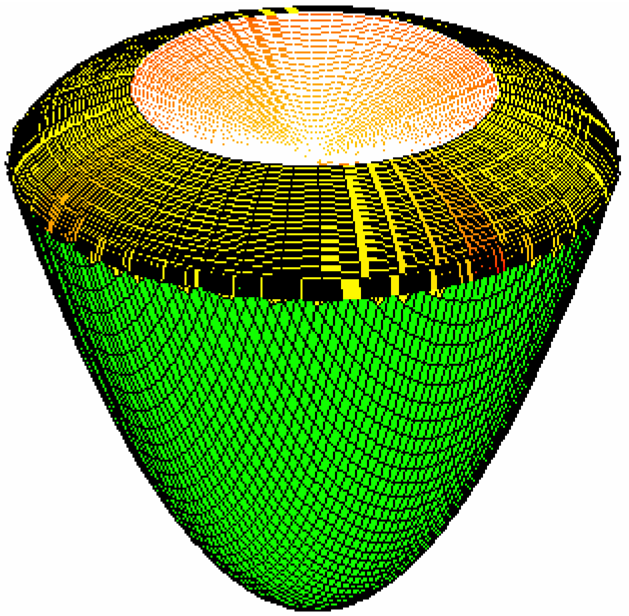
i) Mostre que, se $z = \sqrt{f(x-1, y+1)} \ \wedge \ x = 1 + \cos\theta \ \wedge \ y = -1 + \sin\theta$, então verifica-se a seguinte identidade: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = 1$.

ii) Para a superfície de equação $z = 1 + f(x-1, y-1)$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$, determine: a expressão geral das curvas de nível C_k, o ponto crítico e respectivo mínimo absoluto e o plano tangente à superfície no ponto $P(1,1,1)$.

Sugestões: Uma equação do plano tangente a uma superfície $z = f(x,y)$, num ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, é dada por $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Um ponto (x_0, y_0) para o qual $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ é designado ponto crítico.

3. A figura representa uma bolota achatada/enfeite de Natal formada por duas partes:



- *calote esférica* de raio $r = 5$ *seccionada por um cone* de raio $r = 3$ e altura $h = 4$;
- paraboloide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$

(a) Justifique, que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde :

$S_1 = \{(r,\theta,\varphi) : 0 \leq r \leq 5 \wedge \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \wedge \ \arctan(\frac{3}{4}) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 25 \ \wedge \ x^2 + y^2 - 25 \leq z \leq 0\}$

associando as definições de S_1 e S_2 a dois sistemas de coordenadas 3D.

(b) Diga, justificando, qual das funções seguintes não está relacionada com a definição do sólido:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \qquad h(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \qquad i(x,y) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 + y^2} \qquad g(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

(c) Calcule o volume do sólido.

(d) Complete os algoritmos e, associe-os a duas transformações/mudança de variáveis em 3D

Algoritmo 1:	**Algoritmo 2:**
Ler (x,y,z)	**Ler** (R,θ,φ)
Se _?_	**Se** $R \geq$ _?_ e _?_ $\leq \theta \leq$ _?_ e _?_ $\leq \varphi \leq$ _?_
Então $R \leftarrow \sqrt{\_?\_}$	**Então** $x \leftarrow R * \sin\_?\_ * \cos\theta$
$\theta \leftarrow \arctan \frac{\_?\_}{x}$	$y \leftarrow R * \sin\varphi * \_?\_$
$\varphi \leftarrow \_?\_$	$z \leftarrow \_?\_ * \cos\varphi$
Escrever (R,θ,φ)	**Escrever** (x,y,z)
Senão _?_	**Senão** _?_

② $f(x,y) = x^2+y^2$

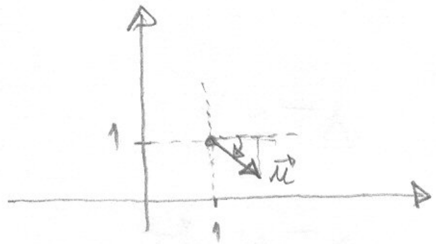
(a) $T = f(x,y)$ temperatura

(i) Taxa de variação de T em $(1,1)$ $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$ } Derivada direccional $T_{\vec{u}}(1,1) = ?$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = \sqrt{1}$



$\vec{u} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ $\qquad \theta = -\pi/4$

- $T_{\vec{u}}(1,1) = \nabla T(1,1)\cdot\vec{u} \Leftrightarrow T_{\vec{u}}(1,1) = (2\hat{i}+2\hat{j})\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$

$\nabla T(1,1) = T_x(1,1)\hat{i} + T_y(1,1)\hat{j} \rightarrow \nabla T(1,1) = 2\hat{i}+2\hat{j}$

$T_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x \rightarrow T_x(1,1) = 2$

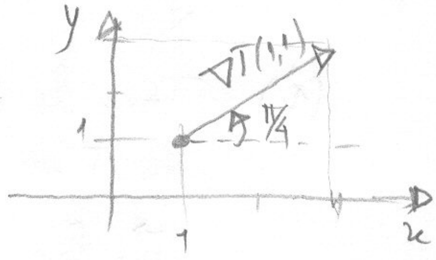
$T_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y \rightarrow T_y(1,1) = 2$

$T_{\vec{u}}(1,1) = (2\hat{i}+2\hat{j})\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$

$= 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 0$ ⟷ taxa de variação nula na direcção e sentido de $\vec{u}$ ⇒ Temperatura mantém-se constante

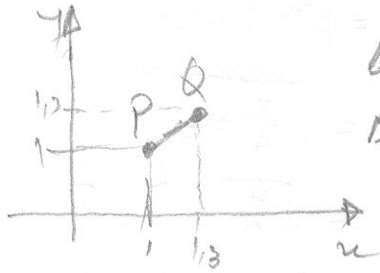
(ii) De acordo com o Teorema do Gradiente a TAXA de variação máxima ocorre na direcção e sentido do vector gradiente



$\nabla T(1,1) = 2\hat{i} + 2\hat{j}$

magnitude $\rightarrow \|\nabla T(1,1)\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(iii) $\Delta T \cong ?$



$\Delta x = dx = 0.3$

$\Delta y = dy = 0.3$

$P(1,1)$

$\Delta T \cong dT$

$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy$

$\frac{\partial T}{\partial x}(1,1) = 2$

$dT = 2*(0.3) + 2*(0.3)$

$\frac{\partial T}{\partial y}(1,1) = 2$

$dT = 2(0.6) = 1.2$

$\Delta T \cong 1.2$

(b) (i) $z = \sqrt{f(x-1,y+1)} \wedge x = 1+\cos\theta \wedge y = -1+\sin\theta$ se então

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = 1$$

$f(x-1, y+1) = (x-1)^2 + (y+1)^2$

$z = \sqrt{f(x-1,y+1)} \Leftrightarrow z = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$

- $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^{-1/2} \cancel{2}(x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}$

- $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}$

• $\frac{dz}{d\theta} = ?$

<u>1º Processo</u> $\underbrace{z = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \ \wedge \ x = 1+\cos\theta \ \wedge \ y = -1+\sin\theta}$

$$z = \sqrt{(1+\cos\theta \cancel{-1})^2 + (\cancel{-1}+\sin\theta \cancel{+1})^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 1$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(1) = 0$$

<u>2º Processo</u> Regra da Cadeia

$$z \begin{array}{l} \diagup \ x \ — \ \theta \\ \diagdown \ y \ — \ \theta \end{array} \qquad \frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}(-\sin\theta) + \frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}\cos\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\cancel{1}+\cos\theta \cancel{-1}}{1}(-\sin\theta) + \frac{\cancel{-1}+\sin\theta \cancel{+1}}{1}\cos\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \cancel{-\cos\theta\sin\theta} + \cancel{\sin\theta\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{dz}{d\theta} = 0$$

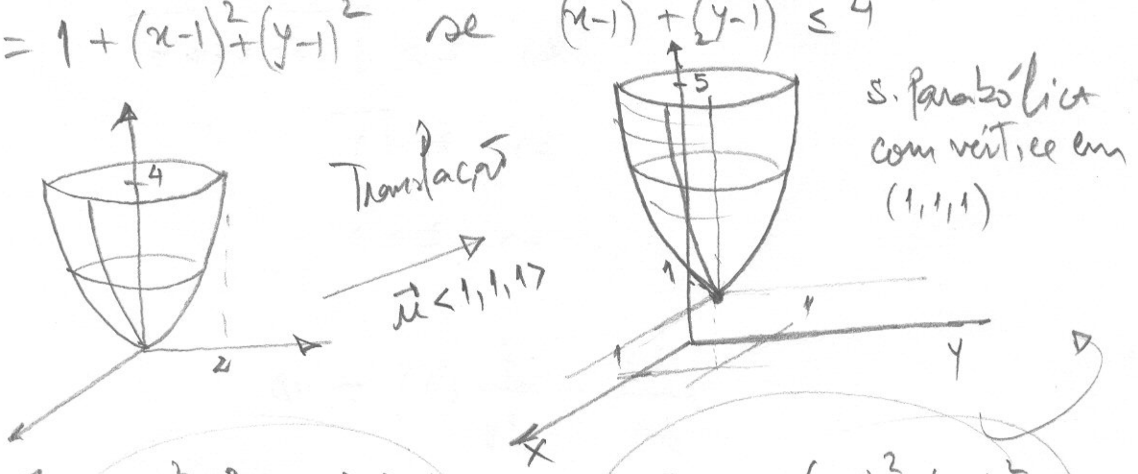
Assim: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}\right)^2 + (0)^2$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} + \frac{(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} = 1 \quad \text{c.q.d.} \checkmark$$

(ii) $z = 1 + f(x-1, y-1)$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4$

$f(x-1, y-1) = (x-1)^2 + (y-1)^2 \longleftarrow f(x,y) = x^2 + y^2$

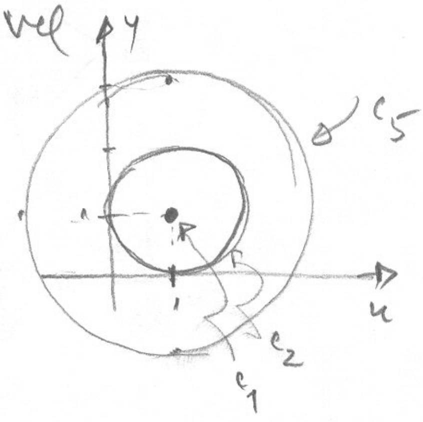
$z = 1 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4$



$z = x^2 + y^2$ se $x^2 + y^2 \le 4$

$z - 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2$ se $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4$

- expressão geral das curvas de nível



$C_k = \{(x,y) \in D : 1 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = k\}$

$= \{(x,y) \in D : (x-1)^2 + (y-1)^2 = k-1\}$

circunferências centradas em (1,1) com raio $r = \sqrt{k-1}$

- Ponto crítico

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$z = 1 + (x-1)^2 + (y+1)^2$

$z = 1$

$(1,1,1)$

Mínimo Absoluto

pelo gráfico

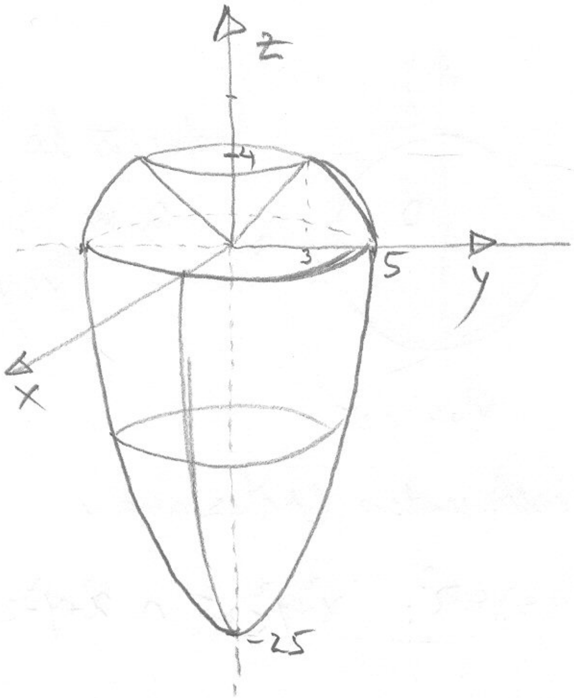
- Plano tangente $P(x_0, y_0, z_0)$ $P(1,1,1) \rightarrow z = 1$

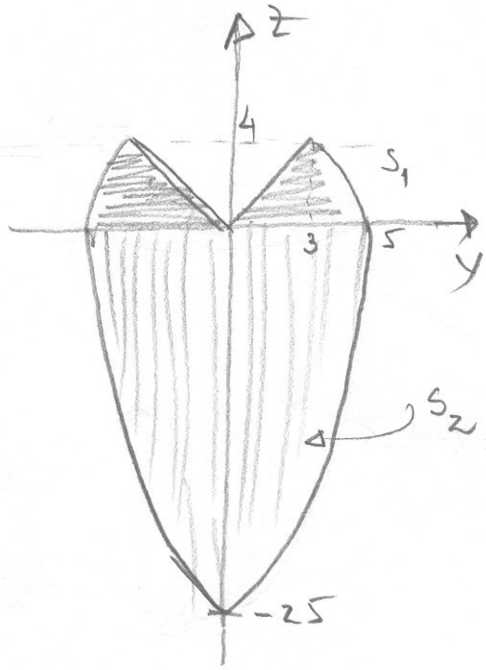
$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

$f_x(1,1) = 0 \; ; \; f_y(1,1) = 0$

$z - 1 = 0(x-1) + 0(y-1) \Leftrightarrow z = 1$

3.



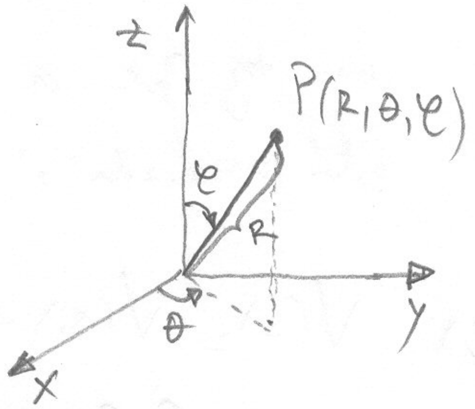


tendo em atenção resultados obtidos no exercício (1)

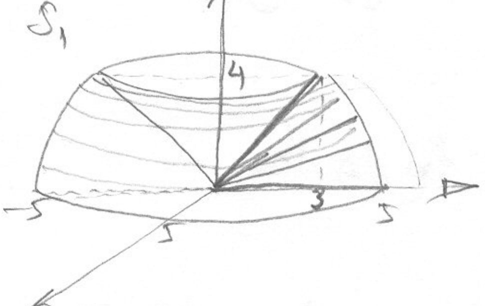
— SISTEMA COORDENADAS ESFÉRICAS

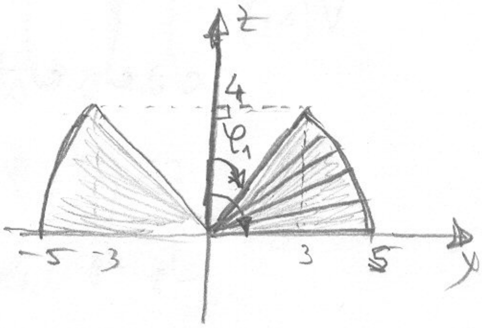
$$T_{\Theta} = \begin{cases} x = R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = R \cos\varphi \end{cases}$$

$$J = -R^2 \operatorname{sen}\varphi$$



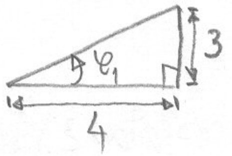
S_1





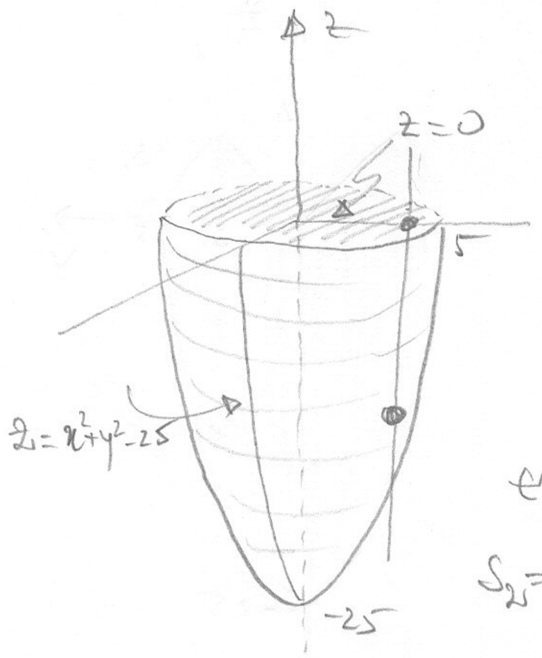
$$S_1 = \{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq 5 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \varphi_1 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

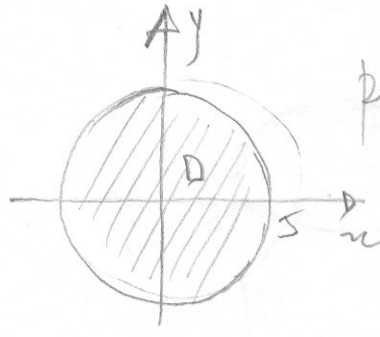
$\varphi_1 = ?$



$$\tan(\varphi_1) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \varphi_1 = \operatorname{atan}\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

$$S_1 = \{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq 5 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \operatorname{atan}\left(\tfrac{3}{4}\right) \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$





projecção do sólido S_2 no plano xoy

$x^2+y^2\leq 25$

em coordenadas cartesianas

$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq 25\ \wedge\ x^2+y^2-25\leq z\leq 0\}$$

(b) $j(x,y)=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}$ não está relacionada com o sólido uma vez que a superfície parabólica que lhe está associada é $h(x,y)=\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ ...

(c) $V(S)=V(S_1)+V(S_2)$

$$V(S_1)=\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{atan}(3/4)}^{\pi/2} 1\,|-R^2\operatorname{sen}\varphi|\,d\varphi\,d\theta\,dR$$

$$=\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{atan}3/4}^{\pi/2} R^2\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dR$$

$$=\int_0^5 R^2\int_0^{2\pi}\int_{\operatorname{atan}3/4}^{\pi/2}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dR=\int_0^5 R^2\int_0^{2\pi}\left[-\cos\varphi\right]_{\operatorname{atan}3/4}^{\pi/2}d\theta\,dR$$

$$=\int_0^5 R^2\int_0^{2\pi}\Big(\underbrace{-\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0}+\cos\left(\operatorname{atan}\tfrac{3}{4}\right)\Big)d\theta\,dR=\cos\left(\operatorname{atan}\tfrac{3}{4}\right)\int_0^5 R^2\int_0^{2\pi}1\,d\theta\,dR$$

$$V(S_1) = \cos\left(\operatorname{atan}\frac{3}{4}\right)\int_0^5 R^2\left[\theta\right]_0^{2\pi} dR$$

$$= \cos\left(\operatorname{atan}\frac{3}{4}\right)\int_0^5 R^2 (2\pi - 0)\, dR$$

$$= 2\pi\cos\left(\operatorname{atan}\frac{3}{4}\right)\int_0^5 R^2\, dR$$

$$= 2\pi\cos\left(\operatorname{atan}\frac{3}{4}\right)\left[\frac{R^3}{3}\right]_0^5$$

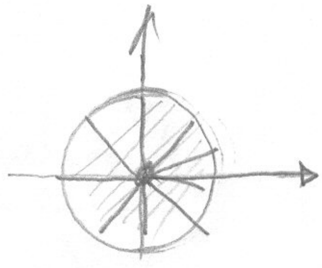
$$= 2\pi\cos\left(\operatorname{atan}\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5^3}{3} - 0\right)$$

$$= \frac{250}{3}\pi\cos\left(\operatorname{atan}\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftarrow \quad V(S_2) = \iiint_{S_2} 1\, dz\, dy\, dx$$

$$V(S_2) = \iint_D \left(0 - (x^2+y^2-25)\right) dy\, dx$$

$$= \iint_D \left(25 - (x^2+y^2)\right) dy\, dx$$



efetuando uma mudança para coordenadas polares

$$D = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$T_p = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$J = \rho$$

$$V(S_2) = \int_0^5\int_0^{2\pi}(25 - \rho^2)\,\rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^5 (25\rho - \rho^3)\left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho = 2\pi\left[25\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^5$$

$$= 2\pi\left(25\frac{5^2}{2} - \frac{5^4}{4}\right)$$

(d) <u>Algoritmo 1</u> : Coordenadas Esféricas → Cartesianas

Ler (x, y, z)

<u>Se</u> $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$

<u>Então</u>

$R \leftarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta \leftarrow \operatorname{atan} \frac{y}{x}$

$\varphi \leftarrow \operatorname{acos} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Escrever (R, θ, φ)

<u>senão</u> "ERRO"

$x \neq 0$

<u>Algoritmo 2</u>: Coordenadas Cartesianas → Esféricas

Ler (R, θ, φ)

<u>Se</u> $R \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

<u>Então</u>

$x \leftarrow R \sin\varphi \cos\theta$

$y \leftarrow R \sin\varphi \sin\theta$

$z \leftarrow R \cos\varphi$

Escrever (x, y, z)

<u>senão</u> "erro... nos dados"