Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I - **Engenharia Informática**

TPC nº5 Data limite de entrega: 3/Nov/2015 (23h59m)

PRIMITIVAÇÃO IMEDIATA [**E. Síntese**]
Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando a técnica de primitivação por decomposição,

$$\text{[LINEARIDADE]} \quad \boxed{\int (c_1\, f \pm c_2\, g)\, dx \;=\; c_1 \int f\, dx \;\pm\; c_2 \int g\, dx\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

a) $x^3 - 5x^2 + 2x + 1\,;$ c) $\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}\,;$ g) $\dfrac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,;$ h) $\left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2.$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE DOMÍNIOS PLANOS

1 **Função afim.** Represente graficamente, no mesmo referencial, as rectas $y = x$, $y = 2x$ e $y = 2x + 1$.

2-c1-(b) **Função quadrática** Represente graficamente a parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

2-c2-(b) **Função quadrática** Represente graficamente a parábola $x = 2y^2 - 3y + 1$ e explicite-a na forma $y = f(x)$.

3(b) **Cónicas** Represente graficamente a circunferência $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ e defina-a como funções $f(x)$ e $f(y)$.

5 **Função logarítmica** Represente graficamente as seguintes funções:
e) $f(x) = \ln(-x)\,;$ f) $f(x) = -\ln(-x)\,;$

Sugestão de resolução:

PRIMITIVAÇÃO IMEDIATA [**E. Síntese**]

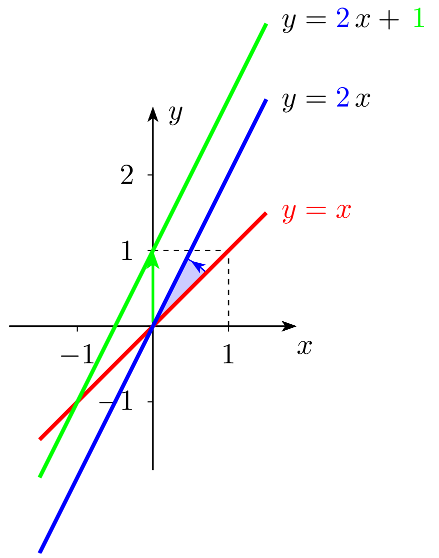
a) $$\int \left(x^3 - 5x^2 + 2x + 1\right) dx \;=\; \int \underbrace{x^3 \cdot 1}_{R2}\, dx - 5 \int \underbrace{x^2 \cdot 1}_{R2}\, dx + 2 \int \underbrace{x \cdot 1}_{}\, dx + \int \underbrace{1}_{R1}\, dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - 5\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} + x + c \;=\; \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{5}{3}\,x^3 + x^2 + x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,;$$

c) $$\int \left(\frac{x^3}{4} + \frac{\tan x}{\cos^2 x}\right) dx \;=\; \frac{1}{4}\int \underbrace{x^3 \cdot 1}_{R2} + \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4} + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\, dx + c$$
$$= \frac{1}{16}\,x^4 + (-) \int \underbrace{\cos^{-3} x\,(-\sin x)}_{R2}\, dx + c \;=\; \frac{1}{16}\,x^4 - \frac{\cos^{-2} x}{-2} + c \;=\; \frac{1}{16}\,x^4 + \frac{1}{2}\,\sec^2 x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,;$$

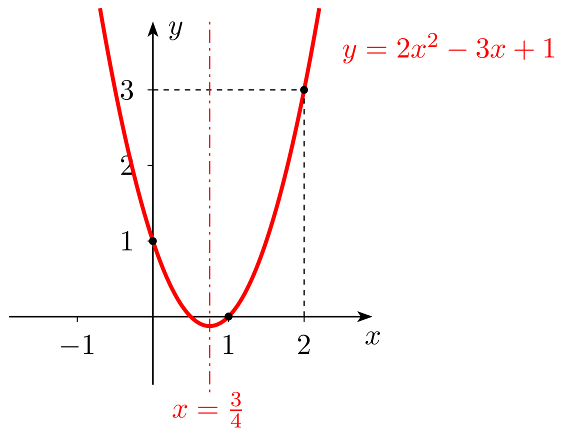
g) $$\int \frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \int \frac{x^2 + 2\,x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx \;=\; \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx + 2\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx \;=\; \int x^2 x^{-\frac{1}{2}}\, dx + 2\int x^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \int \underbrace{x^{\frac{3}{2}} \cdot 1}_{R2}\, dx + 2\int \underbrace{x^{-\frac{1}{6}} \cdot 1}_{R2}\, dx \;=\; \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\,\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + c \;=\; \frac{2}{5}\,\sqrt{x^5} + \frac{12}{5}\,\sqrt[6]{x^5} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,;$$

h) $$\int \left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2 dx \;=\; \int \left(\left(e^{2x}\right)^2 + 2e^{2x}e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \underbrace{e^{4x} \cdot 4}_{R3}\, dx + 2\int \underbrace{e^{x} \cdot 1}_{R3}\, dx + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \underbrace{e^{-2x} \cdot (-2)}_{R3}\, dx \;=\; \frac{1}{4}\,e^{4x} + 2\,e^{x} - \frac{1}{2}\,e^{-2x} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

1 **Função afim.**



2-c1-(b) **Função quadrática**



Observações:

i) *Note-se que*

$$\begin{aligned} y = 2x^2 - 3x + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2\Big(x^2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}\Big) \;\Leftrightarrow\; y = 2\Big(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x + \frac{1}{2}\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad y = 2\Big(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad y = 2\Big(x^2 - 2\,\frac{3}{4}\,x + \frac{9}{16}\Big) - \frac{9}{8} + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 2\Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 - \frac{1}{8}\,, \end{aligned}$$

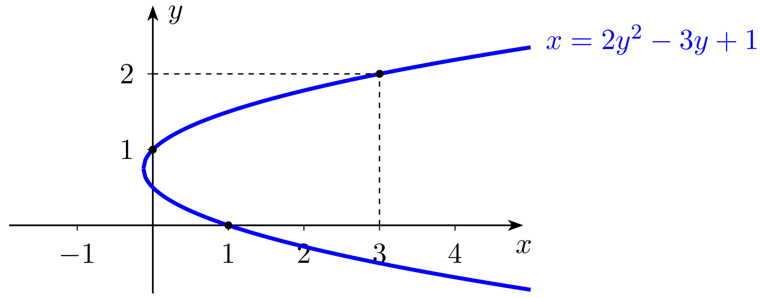
pelo que o vértice da parábola tem coordenadas $V = \left(\frac{3}{4},\, \frac{1}{8}\right)$.

ii) *Alternativamente, como o vértice corresponde ao ponto onde a tangente ao gráfico é horizontal, podemos determiná-lo calculando o ponto onde a derivada é nula. Como* $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ *então* $f'(x) = 4x - 3$, *pelo que a abcissa do vértice é dada por*

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{4}$$

e a ordenada é dada por $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\,\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{8}$, *ou seja,* $V = \left(\frac{3}{4},\, \frac{1}{8}\right)$.

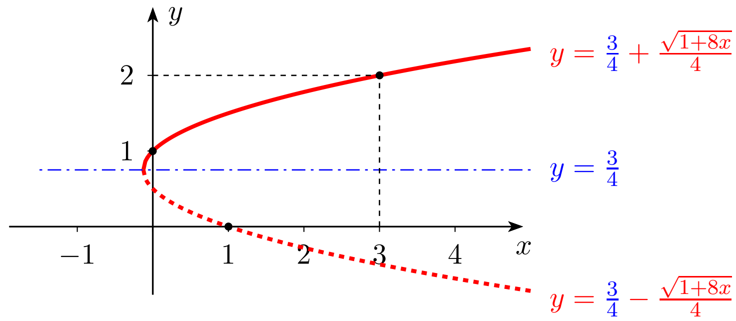
2-c2-(b) **Função quadrática**



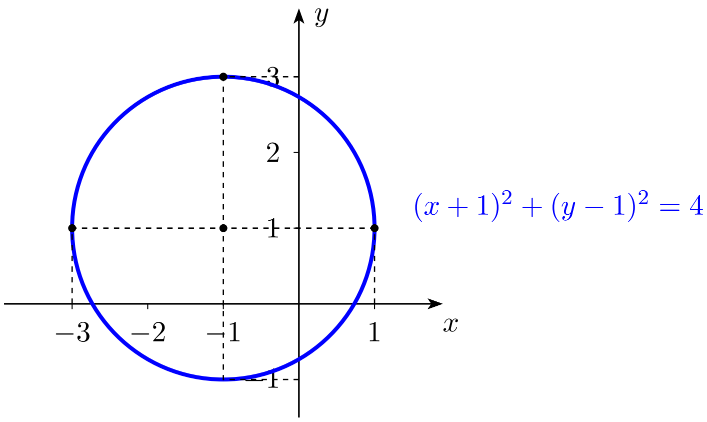
Note-se agora que, recorrendo à fórmula resolvente em ordem a y, tem-se

$$x = 2y^2 - 3y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2y^2 - 3\,y + 1 - x \;\Leftrightarrow\; y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - x)}}{2 \cdot 2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{1 + 8x}}{4}\,.$$

pelo que



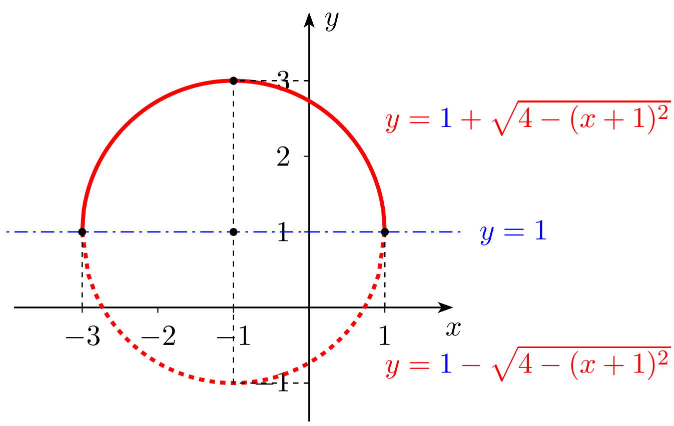
3(b) **Cónicas**



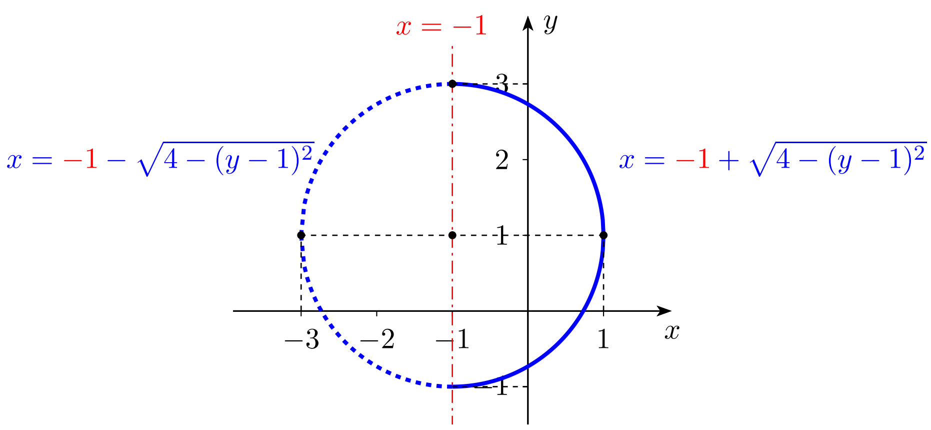
Note-se agora que

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad (y - 1)^2 = 4 - (x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y - 1 = \pm\sqrt{4 - (x + 1)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{4 - (x + 1)^2}\,.\end{aligned}$$

pelo que



Analogamente, tem-se $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{4-(y-1)^2}$, pelo que



5) **Função logarítmica**

O gráfico de $y = \ln(-x)$ pode obter-se do gráfico de $y = \ln(x)$ efectuando uma **simetria horizontal**, isto é, relativamente ao eixo Oy. O gráfico de $y = -\ln(-x)$ pode depois obter-se do gráfico de $y = -\ln(-x)$ efectuando uma **simetria vertical**, isto é, relativamente ao eixo Ox.