Seminar 4

① Fie sp. vect $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$

a) Fie sist de vect $S = \{(1,m,1), (m,1,1), (1,0,m)\} \subset \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$

- $m = ?$ a.î. S este SLI
- $m = ?$ a.î. S este SLD
- dc $m = 2$, at S este bază

$B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bază canonică

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$

- Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î.

$$a(1,m,1) + b(m,1,1) + c(1,0,m) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$$

$$(a, am, a) + (bm, b, b) + (c, 0, cm) = (0,0,0)$$

$$(a + bm + c, am + b, a + b + cm) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + bm + c = 0 \\ am + b = 0 \\ a + b + cm = 0 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ m & 1-m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m+1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = (m-1)(-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= -(m-1)\left(m(m+1) - 1\right)$$

$(0,0,0)$ sol unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ S.C.D.

$\Rightarrow -(m-1)(m^2 + m - 1) \neq 0$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$

$m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5$

$m_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow S$ este SLI $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \left\{1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

•2 SLO (omogen) are și sol nenulă (SCN) $\Leftrightarrow$ det A=0

$\Rightarrow$ S este SLD $\Leftrightarrow$ $m \in \{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$

•3 $m = 2 \Rightarrow S = \{(1,2,1), (2,1,1), (1,0,2)\}$ este SLi

cf •1

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

det A = -5 $\neq 0$ (SLi)

Prop: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$ · $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ card S = m

1) S = SLi.

2) S = SG

3) S = bază

MI $\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3 = \text{card } S \\ S = SLi \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{cf Prop}}$ S = bază

MII Obs: S bază $\Leftrightarrow$ S = SG
S = SLi

S este SG $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$ $\Leftrightarrow$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^3$ $\exists$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a \cdot (1,2,1) + b(2,1,1) + c(1,0,2) = x$

$= (x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b + c = x_1 \\ 2a + b \quad = x_2 \\ a + b + 2c = x_3 \end{cases} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 & x_3 \end{array}\right)$$

det A = -5 $\neq 0$ $\Rightarrow$ SCD $\to$ S. Cramer $\Rightarrow$ sist

are sol unică $\Rightarrow$ SG

b) Fie $S' = \{(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)\} \subset \mathbb{R}$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Ce relație verifică a_1, a_2, a_3 a.î. S' bază

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card } S'$

Verif. dc $S' = SLi \Leftrightarrow SLO$ are sol unică nulă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î.

$a(1, a_1, a_1^2) + b(1, a_2, a_2^2) + c(1, a_3, a_3^2) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a a_1 + b a_2 + c a_3 = 0 \\ a a_1^2 + b a_2^2 + c a_3^2 = 0 \end{cases} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 \end{array}\right)$$

$\det A = (a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) \neq 0$

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ - distincte două câte două

② $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$

a) $S_1 = \{(1,1,0), (1,-1,-1), (2,0,-1)\}$

Să se extragă din S_1 un SLi maximal S_1' și să se extindă acesta la o bază

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S_1 - SLD$$

$S_1 \setminus \{(2,0,-1)\} \Rightarrow SLi$ maximal

$B_1 = \{(1,1,0), (1,-1,-1), \underline{(1,0,0)}\}$

$$\det A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow B_1 \text{ SLi}$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card}(B_1)$

$\overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} B_1 =$ bază

Scanned with CamScanner

b) $S_2 = \{(1,2,3)\}$

•₁ Să se arate că e SLi și nu este SG

•₂ Să se extindă S_2 la o bază.

•₁ $(1,2,3) \neq (0,0,0) \Rightarrow S_2$ - SLi

$$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \\ \text{card } S_2 < 3 \\ 3 \text{ este nr minim de vect care formează SG.} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow S_2$ nu este SG

•₂ $B_2 = \{(1,2,3), (1,0,0), (0,1,0)\}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-3) = 3 \neq 0 \Rightarrow B_2 = SLi$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B_2 = SLi \\ \text{card } B_2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Prop}} B_2 \text{ bază}$$

c) $S_3 = \{(1,0,-1), (2,1,3), (1,1,1), (-1,2,3)\}$

• $\dim(\langle S_3 \rangle)$

• det. $S_3' \subset S_3$ SLi maximal și extindeți la o bază

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$S_3' = S_3 \setminus \{(-1,2,3)\}$ SLi maximal și bază

$\dim \langle S_3 \rangle = 3.$

Scanned with CamScanner

OBS: $\left.\begin{array}{l} V' \subseteq V \text{ subsp.} \\ \dim V' = \dim V = n \end{array}\right\} \Rightarrow V' = V$

③ Fie $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}_2[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{gr}\, P \leq 2 \}$

a) Fie $f = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow B_1 = \{(f, f', f'')\}$ bază. Generalizare.

b) $B_2 = \{(1, X-1, (X-1)^2)\}$ bază. Generalizare

OBS: $\tilde{f}$ funcția polinomială asociată

$\tilde{f}(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $\qquad B_0 = \{1, x, x^2\}$ bază canonică

$\tilde{f} = f$

a) $f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$

$f''(x) = (4x-3)' = 4$

$B_1 = \{(1 - 3x + 2x^2, -3 + 4x, 4)\}$ bază în $\mathbb{R}_2[X]$

$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$B_1' = \{(1, -3, 2), (-3, 4, 0), (4, 0, 0)\}$ bază în $\mathbb{R}^3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 4 \cdot (-8) = -32 \neq 0$

$\text{rg}\, A = 3 = \text{maxim} \Rightarrow B_1' = SLI \xrightarrow{\text{Prop}} B_1'$ bază în $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow B_1$ bază în $\mathbb{R}[X]$

Generalizare:

Fie $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; $a_2 \neq 0$!

$B_1 = \{f, f', f''\}$ bază

b) $B_2 = \{1, X-1, (X-1)^2\}$ bază + generalizare.

MI Dem că B_2 este SLI $\xrightarrow{PROP}$ B_2 bază

$B_2' = \{(1,0,0), (-1,1,0)(1,-2,1)\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \Rightarrow B_2' \text{ SLI}$$

MII OBS: Dezvoltare în serie Taylor în jurul lui x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a \cdot 1 + b \cdot (x-1) + c(x-1)^2$$

$$f(x) = f(1) + f'(1) \frac{(x-1)}{1} + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$\Rightarrow a = f(1) = a_0 + a_1 + a_2$$

$$b = f'(1) = a_1 + 2a_2$$

$$c = \frac{f''(1)}{2!} = 2a_2$$

B_2 este SG $\xrightarrow{PROP}$ B_2 bază

Generalizare:

$B_2 = \{1, X-a, (X-a)^2\}$ bază $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$