CURSUL 1
ALGEBRĂ ŞI GEOMETRIE

BIBLIOGRAFIE

1. H. Anton, *Calculus with Analytic Geometry. Maple Problem's Manual*, Wiley, 1992.

2. M. Beger, *Geometrie, vol. 1-5, Cedric, Fernard, 2001.*

3. M. Craioveanu, I. Albu, Geometrie afină şi euclidiană, Ed. Facla, Timişoara, 1982.

4. J. Erdaman, Exercises and problems in Linear Algebra, Portland State University, 2014.

5. S. Friedberg, A. Insel, L. Spence,*Linear Algebra,* Pearson Education, Inc., 2003

6. G. Landi, A. Zampini, *Linear Algebra and Analytic Geometry for Physical Sciences,* Springer, 2018

7. D. Lay, S. Lay, J. McDonald, *Linear Algebra and its applications,* Pearson Education, Inc., 2016.

8. L. Ornea, A. Turtoi, *O introducere în geometrie,* Editura Theta, Bucureşti, 2011.

9. E. Sernesi, *Linear Algebra. A Geometric Approach,* C.R.C. Press, New York, 1993.

10. N. Soare, *Curs de geometrie,*Tipografia Universităţii Bucureşti, 1986.

11. K. Teleman, *Logică şi geometrie,* Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti, 1989.

12. I. Teodorescu, *Geometrie analitică şi elemente de algebră liniară,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.

13. C.Udrişte, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.

CUPRINS

1.Matrice. Determinanţi. Rang. Sisteme liniare.

2. Spaţii vectoriale. Repere. Aplicaţii liniare. Forme biliniare şi pătratice

3. Spaţii euclidiene. Aplicaţii ortogonale. Endomosfisme simetrice.

4. Geometrie analitică euclidiană.

5. Conice şi cuadrice

EXAMEN 19 ian.

Evaluare în timpul semestrului:

– 0.5 puncte teme curs şi seminar (minim 5 teme curs şi 5 teme seminar)-periodic, la 2 săptămâni se primeşte câte o temă la curs şi la seminar

– 0.5 puncte lucrări

– 0.5 puncte răspunsuri şi prezenţa la curs şi seminar

Se adaugă la nota de la examen (numai dacă nota este minim 5).

(C1) – AG.

Matrice. Determinanți. Rang. Teorema Hamilton-Cayley. Forma eșalon

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corp com.

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$(S_n, \cdot)$ grupul permutărilor, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$, $\forall \sigma \in S_n$.

$m(\sigma) =$ nr. de inversiuni, $(i,j) =$ inversiune $\Leftrightarrow \begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Def $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nesingulară $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

inversabilă $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

PROP • A nesingulară $\Leftrightarrow A$ inversabilă

OBS $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, $\det A \neq 0$, $A^* = (A^*_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matrice adjunctă

$A^*_{ij} =$ complemenții algebrici pt a_{ji}, $\forall i,j = \overline{1,n}$

Prop a) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$, $\det A \neq 0$.

b) $\det(A^*) = \det(A^{n-1}) = (\det A)^{n-1}$

c) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \mid \det \Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \mid \det$

$\frac{1}{\det A} = \left(\frac{1}{\det A}\right)^n \det(A^*) \Rightarrow \det(A^*) = (\det A)^{n-1}$.

1) $(GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}, \cdot)$ grupul general liniar.

2) $(O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A \cdot A^T = I_n\}, \cdot)$ grupul ortogonal.

3) $(SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \cdot)$ grupul special ortogonal

4) $(SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}, \cdot)$ grupul special liniar.

OBS $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{K})$

Teorema Hamilton-Cayley. Polinom caracteristic

Def $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$P_A(x) = \det(A - x I_n) = (-1)^n \left[x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n\right]$$

s.n. polinom caracteristic asociat lui A.

σ_k = suma minorilor diagonali de ordinul k, $\forall k = \overline{1,n}$

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = Tr(A) \text{ urma matrice}$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$\sigma_n = \det(A)$$

Cazuri particulare

1) $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{12}a_{21} =$$

$$= x^2 - x\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\sigma_1 = Tr(A)} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\sigma_2 = \det(A)}$$

$$P_A(x) = x^2 - x\, Tr(A) + \det(A)$$

2) $n = 3$ $\quad P_A(x) = -\left(x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3\right)$, $\sigma_1 = Tr A$, $\sigma_2 = Tr(A^*)$, $\sigma_3 = \det(A)$

Teorema Hamilton-Cayley

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$P_A(A) = O_n \Leftrightarrow A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n.$$

Aplicații

① Calculul lui A^{-1}

Exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = ?$

T.H-C: $A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A - \sigma_3 I_3 = O_3 \rightarrow A^3 - 3A^2 + A - I_3 = O_3 \mid \cdot A^{-1}$

$\sigma_1 = 1+1+1 = 3 = Tr(A)$

$\sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

$\sigma_3 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$C_3' = C_3 - C_1$

$A^2 - 3A + I_3 - A^{-1} = O_3 \Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3A + I_3.$

② Calcul prin recurență al puterilor unei matrice.

Exemplu $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^n = x_n A + y_n I_2$, $\forall n \geq 1$.

H-C: $A^2 - \sigma_1 A + \sigma_2 I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - 6A + 5I_2 = O_2$

$A^2 = 6A - 5I_2 \mid \cdot A \Rightarrow A^3 = 6\underline{A^2} - 5A = 6(6A - 5I_2) - 5A$

$= 31A - 30I_2$

$A^{n+1} = A^n A$

$x_{n+1} A + y_{n+1} I_2 = (x_n A + y_n I_2) A = x_n (\underline{6A} - 5I_2) + y_n \underline{A}$

$= (6x_n + y_n) A - 5x_n I_2$

$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + y_n \Rightarrow x_{n+1} - 6x_n + 5x_{n-1} = 0, \forall n \geq 1 \\ y_{n+1} = -5x_n \Rightarrow y_n = -5x_{n-1} \end{cases}$

$x_{n+1} - 6x_n + 5x_{n-1} = 0$.

$t^2 - 6t + 5 = 0 \nearrow t_1 = 1$, $\searrow t_2 = 5$ $\qquad x_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n \;, \forall n \geq 1.$

$A^n = x_n A + y_n I_2$ $\qquad n=1$ $\quad \boxed{x_1 = 1}, y_1 = 0$

$\qquad n = 2.$ $\quad \boxed{x_2 = 6}, y_2 = -5$

$n=1 \Rightarrow 1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 5$

$n=2 \Rightarrow 6 = C_1 \cdot 1^2 + C_2 \cdot 5^2$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 + 5C_2 = 1 \\ C_1 + 25 C_2 = 6 \end{cases}$ $\ominus$

$/ \quad 20 C_2 = 5 \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{1}{4}}$

$C_1 = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$

Deci $\begin{cases} x_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 5^n = \frac{5^n - 1}{4} \\ y_n = -5 X_{n-1} = -5 \cdot \frac{5^{n-1} - 1}{4} \end{cases}$ $\qquad A^n = x_n A + y_n I_2$

$\boxed{\text{OBS}}$ $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ de grad $\forall$ de mare.

$\exists R \in \mathbb{K}[X]$, grad $R \leq n-1$ aî $P(A) = R(A)$

unde $P = P_A \cdot C + R$

Exemplu $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad P_A(X) = X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2$

$\qquad = X^2 - 6X + 5$

$P = X^4 + 3X^3 + X^2 + X + 1 = P_A \cdot C + R \overset{H-C}{\Longrightarrow} P(A) = \underbrace{P_A(A)}_{O_2} C(A) + R(A)$

$= R(A)$

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 + 3X^3 + X^2 + X + 1 & X^2 - 6X + 5 \\
\underline{-X^4 + 6X^3 - 5X^2} & \underbrace{X^2 + 9X + 50}_{C} \\
/ \quad 9X^3 - 4X^2 + X + 1 & \\
\quad \underline{-9X^3 + 54X^2 - 45X} & \\
/ \quad 50X^2 - 44X + 1 & \\
\quad \underline{-50X^2 + 300X - 250} & \\
/ \quad 256X - 249 \longrightarrow R &
\end{array}
$$

Fie $B = A^4 + 3A^3 + A^2 + A + I_2$.

Să se det $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $B = aA + bI_2 = \underbrace{-256}_{a}A - \underbrace{249}_{b}I_2$

3). Rezolvarea de ec. matriceale binome în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Exemplu $X^4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$

$\det A = 0 \Rightarrow \det(X^4) = (\det X)^4 = 0 \Rightarrow \det X = 0$

$X^2 - Tr(X)X + \det(X)I_2 = O_2 \Rightarrow X^2 = Tr(X)X$

OBS $X^2 = \alpha X \Rightarrow X^n = \alpha^{n-1}X, \forall n \geq 2$

$X^4 = Tr(X)^3 \cdot X \Rightarrow A = Tr(X)^3 X \quad | Tr \Rightarrow \underbrace{Tr(A)}_{1} = (TrX)^4$

OBS $Tr(\alpha X) = \alpha Tr(X)$

$\frac{1}{i} = -i$

$(TrX)^4 = 1 \Rightarrow TrX \in \{\pm 1; \pm i\}$

$X = \frac{1}{(\pm 1)^3}A = \pm A$; $X = \frac{1}{(\pm i)^3}A = (\mp i)^3 A = \pm iA$

Def $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A \neq O_{m,n}$, $rgA = k \Leftrightarrow \exists$ un minor de ord k nenul ($k \leq \min\{m, n\}$) și toți minorii de ordin mai mare sunt nuli.

Convenție $rg(O_{m,n}) = 0$

OBS $\exists\ C_m^{k+1} \cdot C_n^{k+1}$ minori de ordin $k+1$.

Teoremă $rgA = k \Leftrightarrow \exists$ un minor Δ_k de ord k nenul și toți minorii de ordin $k+1$ (dc $\exists$) care îl conțin pe Δ_k sunt nuli

OBS $\exists\ (m-k) \cdot (n-k)$ minori de ordin $k+1$ care îl conțin pe Δ_k (am optimizat)

Algoritm

Fie $\Delta_k \neq 0$.

Fie toți minorii de ordin $k+1$, care îl conțin pe Δ_k.

a) Dc toți minorii Δ_{k+1} sunt nuli, at $rg A = k$.

b) Dc $\exists$ un minor $\Delta_{k+1} \neq 0$ se repetă raționamentul și după un nr finit de pași se obține rangul.

Exemple

1) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (pătratică : mare → mic)

$rg A = ?$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{L_1' = L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2' = C_2 - C_1 \\ C_3' = C_3 - C_1}}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

a) $\det A \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$rg A = 3$

b) $\det A = 0 \Rightarrow a \in \{-2, 1\}$

b₁) $a = -2$ $\quad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg A = 2$

b₂) $a = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$rg A = 1$

2) $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

nepătratică : mic → mare

$rg A = ?$

$|1| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1(8+4)+6(-1-a) = \quad 12-6-6a = 6-6a$$
$$= 6(1-a)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 & 4 \end{matrix} & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3+4 = 1 \neq 0$$

$rg A = 3$.

Ex. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^3 - A - I_n = O_n$

a) $rg A$; b) $rg(A+I_n)$

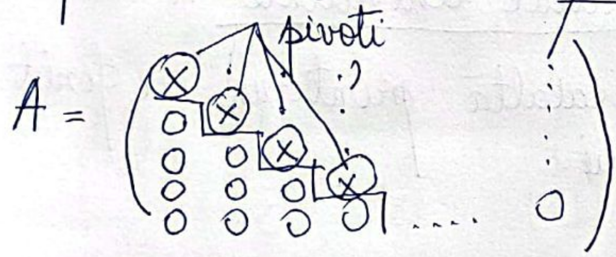
Sol

a) $A^3 - A = I_n \Rightarrow A(A^2 - I_n) = I_n \mid \det$

$\det(A) \cdot \det(A^2 - I_n) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rg A = n$

b) $A^3 = A + I_n \mid \det \Rightarrow \underbrace{(\det A)^3}_{\neq 0} = \det(A+I_n) \Rightarrow rg(A+I_n) = n$

Def O matrice este în <u>formă eșalon</u> (pe linii) dacă



1) liniile nule se află sub toate liniile nenule.

2) pe fiecare linie nenulă, primul element din stânga care este nenul s.n. <u>pivoți</u>

Pivotul de pe linia l_{i+1} este la dreapta pivotului de pe l_i

Este în <u>forma eșalon redusă</u> (pe linii) dacă, în plus

3) pivoții sunt toți 1

4) deasupra pivoților avem doar zerouri.

<u>OBS</u> MATLAB < forma eșalon pe linii: ref(A)
forma eșalon redusă pe linii: rref(A)

Def S.n. transformări elementare asupra liniilor matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

T_1: transformări prin care se „·" o linie cu un scalar nenul

T_2: —"— se schimbă între ele 2 linii

T_3: —"— se adună la elementele unei linii elementele coresp. altei linii, eventual „·" cu un scalar nenul

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \alpha L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \forall i,j = \overline{1,m}$$

Def $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s.n. <u>matrice echivalente</u> pe linii $A \sim B$ dacă una se obține din cealaltă printr-un nr finit de transf. elementare pe linii.

Prop $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Prop $\forall$ matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se poate transforma într-o matrice în forma eșalon (resp. eșalon redusă) după un nr finit de transf. elementare pe linii

OBS!
Forma eșalon nu este unică
Forma eșalon redusă este unică.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{pmatrix}$

a) Să se determine forma eșalon și forma eșalon redusă.

b) Precizați $rg A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$L_2 - L_1$; $L_3 + 2L_1$; $L_4 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_4 - L_3$

forma eșalon

Rescalăm $\frac{1}{2}L_1$, $\frac{1}{3}L_2$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 - 3L_3$; $L_1 + L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ forma eșalon redusă.

$rg A = 3$.