Seminar

① $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$ sp. și $R_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ - reper canonic

$R'=\{e_1'=e_1+2e_2+e_3,\ e_2'=e_1+7e_2+e_3,\ e_3'=-e_1+e_2+e_3\}$

a) Dem R' e reper în $\mathbb{R}^3$ și $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A=?$ (matr. de trecere)

b) coord $x=(3,2,1)$ în rap cu R'

M I $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&7&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\det A=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&7&1\\1&1&1\end{vmatrix}=10\neq 0$

$(1,2,1)$ coord. lui e_1' în rap cu $R_0 \to$ coloana 1

rang $A=3=\max \overset{SLI}{\Longrightarrow} R'$ este SLI

card $R'=3=\dim \mathbb{R}^3$ $\Big\} \overset{Prop}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow R'$ e reper în $\mathbb{R}^3$

Obs: $R' \xrightarrow{B} R_0 \Rightarrow B=A^{-1}$

$x=(3,2,1)=x_1'e_1'+x_2'e_2'+x_3'e_3'$

$=x_1'(e_1+2e_2+e_3)+x_2'(e_1+7e_2+e_3)+x_3'(-e_1+e_2+e_3)$

$=e_1(x_1'+x_2'-x_3')+e_2(2x_1'+7x_2'+x_3')+e_3(x_1'+x_2'+x_3')$

$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)$

$\begin{cases}x_1'+x_2'-x_3'=3 & (1)\\2x_1'+7x_2'+x_3'=2 & (2)\\x_1'+x_2'+x_3'=1 & (3)\end{cases}$ M II $X=AX' \Rightarrow A^{-1}X=X'$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&7&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$

$(1)+(2) \Rightarrow \begin{cases}3x_1'+8x_2'=5\\2x_1'+2x_2'=4\ /\end{cases}$ $(1)+(3)$

$5x_2'=-1 \Rightarrow x_2'=-\frac{1}{5}$

$x_1'=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

$x_3'=-1$

$(x_1',x_2',x_3')=\left(\frac{11}{5},-\frac{1}{5},-1\right)$ coord lui x în rap cu R'

Scanned with CamScanner

② Fie $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)|_{\mathbb{R}}$ $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ rep can

$R' = \{-1 + 2X + 3X^2, X - X^2, X - 2X^2\}$

a) Să se arate că R' este reper în $R_2[X]$

$R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) Să se afle coord lui $P = 3 - X + X^2$ în rep c

Obs: $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \to (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

$\cap$

$\mathbb{R}_2[X]$

a) $R' = \{e_1' = \underbrace{(-1, 2, 3)}_{-e_1 + 2e_2 + 3e_3}, e_2' = (0, 1, -1), e_3' = (0, 1, -2)\}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1(-2+1) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow r_A = 3 = $ max nr vect din $R' \overset{CL_i}{\Longrightarrow} R'$ este SL

card $R' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow R'$ e reper

b) $(3, -1, 1) = x_1' \cdot (-1, 2, 3) + x_2'(0, 1, -1) + x_3'(0, 1, -$

$$\begin{cases} -x_1' = 3 & \Rightarrow x_1' = -3 \\ 2x_1' + x_2' + x_3' = -1 & \Rightarrow \\ 3x_1' - x_2' - 2x_3' = 1 & \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x_2' + x_3' = 5 \\ -x_2' - 2x_3 = 10 \end{cases} \quad (+)$$

$-x_3' = 15 \Rightarrow x_3' = -15$

$x_2' = 5 + 15 = 20$

$(x_1', x_2', x_3') = (-3, 20, -15)$

④ $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot) / \mathbb{R}$

$V_1 = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \}$ $\quad P = \tilde{?}$

$V_2 = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \}$

$V_3 = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $(\forall)\, i = \overline{1,3}$ subsp. vect

$(\forall)\, P, Q \in V_1$ și $(\forall)\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$aP + bQ \in V_1$

$(aP + bQ)(0) = a\underbrace{P(0)}_{0} + b\underbrace{Q(0)}_{0} = 0$

$\Rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}_3[X]$ subspațiu vect.

analog pt V_2 și V_3

Obs: $V_1 = \{ (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4 / a_0 = 0 \}$ $A_1 = (1\ 0\ 0\ 0)$

b) R_i reper în V_i, $i = \overline{1,3}$

$R_1 = \{ X, X^2, X^3 \} = SG$ pt V_1

? $R_1 \subset R_0 = \{ 1, X, X^2, X^3 \}$ $\left.\begin{matrix} \\ R_0 = SLi \end{matrix}\right\} \Rightarrow R_1 = SLi$

$R_3 = \{ -X + X^2, -X + X^3 \}$ $\quad R = \{X, X^2, X^3\}$ $\quad R_2 = \{ -1 + X, -1 + X^2, -1 + X^3 \}$

c) $P_1 = X + 2X^2 + 3X^3 \in V_1$

coord în rap cu R_1 $\quad (1, 2, 3)$

$P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3 \in V_2$ coord în rap cu R_2

$P_2 = a(-1 + X) + b(-1 + X^2) + c(-1 + X^3) =$

$= -a - b - c + Xa + bX^2 + cX^3$

$$\begin{cases} -a - b - c = 1 \\ a = 0 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \quad (0, 2, -3)$$

$P_3 = X + 3X^2 - 4X^3 \in V_3$ coord în rap cu R_3

$P_3 = a'(-X + X^2) + b'(-X + X^3)$

$= -(a' + b')X + X^2 a' + X^3 b'$

$$\begin{cases} -a' - b' = 1 \\ a' = 3 \end{cases} \quad (3, -4) \text{ în rap cu } R_3$$

Scanned with CamScanner

d) $\mathbb{R}_3[x] = V_i \oplus V_i'$, $i = \overline{1,3}$

$V_i' = ?$ subspațiu complementar lui V_i

$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$

completăm la un reper în $\mathbb{R}_3[x]$

$R_1 \cup \{1\}$ este reper în $\mathbb{R}_3[x]$

V_1' spațiu generat de vect adăugați $<\{1\}>$.

$R_2 = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\ max = 4$$

$V_2' = <\{1\}>$

$R_3 = \{-x+x^2, -x+x^3\}$

completăm la un reper în $\mathbb{R}_3[x]$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$V_3' = <\{1, x\}>$

e) $\mathbb{R}_3[x] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

$R_0 = \{1, x^2, x^3\} = \underbrace{\{1, x\}}_{R_1} \cup \underbrace{\{x^2\}}_{R_2} \cup \underbrace{\{x^3\}}_{R_3}$

$W_i = < R_i >$ (spațiu generat de R_i)

$\mathbb{R}_3[x] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$R_0 = \underbrace{\{1\}}_{R_1'} \cup \underbrace{\{x\}}_{R_2'} \cup \underbrace{\{x^2\}}_{R_3'} \cup \underbrace{\{x^3\}}_{R_4'}$

$U_i = < R_i' > \Rightarrow i = \overline{1,4}$

5) $(\mathbb{R}_4, +, \cdot)/\mathbb{R}$ $< V'$ s sp. generat $= \{(\underbrace{1,2,-1,0}_{\mu}), (\underbrace{1,0,0,3}_{v})\}$

a) Să se descrie V' printr-un sist de ec liniare

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 = \max \quad R' = \{\mu, v\} \text{ -reper}$$

$(\forall)\ x \in V'$ $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = a\cdot\mu + b\cdot v$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(1,2,-1,0) + b(1,0,0,3)$

$$\begin{cases} a+b = x_1 \\ 2a = x_2 \\ -a = x_3 \\ 3b = x_4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 3 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\det c_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_3 - x_2 = 0$$

$$\det c_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0$$

$$V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \ / \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\} = S(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$