$\boxed{C_8}$ - AG

Forme biliniare. Forme pătratice. Forma canonică

$L(V,V;\mathbb{K}) = \{ g: V\times V \to \mathbb{K} \mid g$ formă biliniară$\}$

$L^s(V,V;\mathbb{K}) = \{ g \in L(V,V;\mathbb{K}) \mid g$ simetrică $\}$
i.e $g(x,y) = g(y,x), \forall x,y \in V$

$L^a(V,V;\mathbb{K}) = \{ g \in L(V,V;\mathbb{K}) \mid g$ antisimetrică
i.e $g(x,y) = -g(y,x), \forall x,y \in V$

- $g \in L(V,V;\mathbb{K})$

$\mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\} \xrightarrow{C} \mathcal{R}' = \{e_1', .., e_n'\}$ repere in V

$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ $\qquad G' = (g'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$ $\qquad g'_{ij} = g(e_i', e_j'), \forall i,j = \overline{1,n}$

$G' = C^T G C$

$rg\, G' = \underset{rg(g)}{\underset{\parallel}{rg\, G}}$ = invariant la sch reperelor

Def $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n. <u>formă pătratică</u> dacă
$\exists\, g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$ aî $Q(x) = g(x,x), \forall x \in V$.
(Q s.n. formă pătratică asociată lui g)

Prop $\exists$ o corespondență bijectivă între mult. formelor pătratice și mult. formelor biliniare simetrice definite pe V. ($ch\,\mathbb{K} \neq 2$ i.e $1+1 \neq 0$)

Dem

- Fie $g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$. Construim $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică aî $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$
- Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

Construim $g: V\times V \to \mathbb{K}$

Scanned with CamScanner

$g(x,x) = Q(x), \forall x \in V$

$g(x+y, x+y) = Q(x+y) \qquad g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$\underset{Q(x)}{\underset{\parallel}{g(x,x)}} + \underset{Q(y)}{\underset{\parallel}{g(y,y)}} + \underbrace{g(x,y) + g(y,x)}_{2g(x,y)} = Q(x+y)$

$g(x,y) = 2^{-1}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$

forma polară asociată lui Q.

<u>Def</u> $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică asociată lui $g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} g$

<u>OBS</u> $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V ; $g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$g(x,y) = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$g_{ij} = g_{ji}$

$Q(x) = X^T G X = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j =$

$= \sum_{i=1}^{n} g_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$

<u>Def</u> $g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$

$\operatorname{Ker} g = \{x \in V \mid g(x,y) = 0, \forall y \in V\}$

Dc. $\operatorname{Ker} g = \{0_V\}$, atunci g s.n. formă biliniară nedegenerată.

<u>OBS</u> $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow \begin{cases} g(x,e_1) = 0 \\ \vdots \\ g(x,e_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow (*) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g_{i1} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} g_{in} x_i = 0 \end{cases}$

(*) SLO are sol unică nulă $\Leftrightarrow \det G \neq 0$

Def $Q: V \to \mathbb{R}$ s.n. formă pătratică pozitiv definită

$\Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{0_V\} \\ Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$

$g \in L^s(V, V, \mathbb{R})$ s.n. poz.definită $\Leftrightarrow$ Q forma pătratică asociată este poz.def.

Prop $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

g este pozitiv def $\Rightarrow$ g nedegenerată.

Dem Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x, y) = 0, \forall y \in V$

Fie $y = x \Rightarrow g(x, x) = Q(x) = 0 \underset{Q\, p.def}{\Longrightarrow} x = 0_V$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Rightarrow g$ nedegenerată

Exemplu $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$\mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic.

a) G ; b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f.p. asociată

c) Este Q pozitiv definită?

a) $g(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$ $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

b) $Q(x) = g(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

c) $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3$; $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$\Leftrightarrow x = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Q este poz.def.

Problema Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

$\exists\, \mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V a.î. $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$= \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, $r = \operatorname{rg} G$?

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ formă canonică a lui Q.

Teorema Gauss

Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

$\Rightarrow \exists R$ reper în V aî Q are o formă canonică.

Dem

1) $Q(x) = 0$ (Q are formă canonică)

2) $Q(x) \neq 0$

Putem considera $g_{11} \neq 0$

a) $g_{11} \neq 0$

b) $g_{11} \neq 0$, dar $\exists\, g_{ii} \neq 0$, $i \neq 1$

Renumerotăm indicii (schimbare de reper) și considerăm $g_{11} \neq 0$

c) $g_{ii} = 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$

$G \neq O_n$ $\quad \exists\, g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$

Fie schimbarea de reper

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_k = x_k, \ \forall\, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j) \\ x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j) \\ x_k = y_k, \ k \neq i, j \end{cases}$$

$$Q(x) = 2\sum_{i<j} g_{ij}\, x_i x_j$$

$$g_{ij} x_i x_j = \frac{1}{4} g_{ij} (y_i^2 - y_j^2) = \underbrace{\frac{1}{4} g_{ij}}_{\neq 0} y_i^2 - \frac{1}{4} g_{ij} y_j^2$$

Aplicăm cazul b).

Dem prin inducție după nr. de componente ale lui x care apar în Q.

Ip. adev P_{k-1}: Dacă Q conține componentele $x_1, \dots, x_{k-1}$ ale lui x, at. $\exists^?$ un reper în V aî Q are o formă canonică.

Dem că P_k este adevărat:

Dacă Q conține $x_1, \dots, x_k$, at $\exists$ un reper aî Q are o formă canonică.

$$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2g_{1k} x_1 x_k + Q'(x)$$

term. care conțin $x_2, \dots, x_k$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} \left(g_{11}^2 x_1^2 + 2 g_{12} g_{11} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{11} g_{1k} x_1 x_k \right) + Q'(x)$$

$$= \frac{1}{g_{11}} \left(g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \dots + g_{1k} x_k \right)^2 + Q''(x)$$

conțin $x_2, \dots, x_k$.

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} y_1 = g_{11} x_1 + \dots + g_{1k} x_k \\ y_j = x_j, \quad j = \overline{2, n} \end{cases}$$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + Q''(x)$$

apar $y_2, \dots, y_k$.

cf. P_{k-1}: $\exists$ un reper în V a.î.

$$Q''(x) = a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2$$

$$Q(x) = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2, \quad r = rg\, Q$$

$y_1 = z_1$

<u>Def</u> $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 \dots - x_r^2, \quad r = rg\, Q.$$

formă normală a lui Q.

$(p, r-p)$ signatura lui Q

$\downarrow$ nr. "+" $\quad \downarrow$ nr. "−"

<u>Prop</u> Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$\Rightarrow \exists$ un reper în V a.î. Q are forma normală

<u>Dem</u> cf. th Gauss $\Rightarrow \exists$ un reper în V a.î.

$$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2, \quad r = rg\, Q.$$

Considerăm $a_1 > 0, \dots, a_p > 0$ (eventual sch. reperul
$a_{p+1} < 0, \dots, a_r < 0$ și renumerotăm indicii)

Fie sch. de reper:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{a_1}\, x_1 & y_{p+1} = \sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1} & y_j = x_j,\ \forall j = \overline{r+1, n} \\ y_p = \sqrt{a_p}\, x_p & y_r = \sqrt{-a_r}\, x_r \end{cases}$$

$$Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

<u>Teorema de inerție Sylvester</u>

$Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

Nr „+", resp nr „−" din forma normală reprezintă invarianți la sch. de reper.

<u>OBS</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică poz def.

$\Leftrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \Leftrightarrow$

$(n, 0)$ signatura

<u>EX1</u> $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) Să se det $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asoc. lui g

c) Să se aducă Q la o formă canonică

Este Q poz def?

<u>SOL</u>

a) $G = G^T \Rightarrow g$ simetrică

b) $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

$$= \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}_{(x_1+x_2)^2} + \underbrace{x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2}_{(x_2-x_3)^2} - x_3^2$$

<u>nu</u> e poz def

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \qquad Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \qquad (2,1) \text{ signatura}$$

Ex2 $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_3 y_1 + 2y_1 x_3 = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$$

a) G b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asoc. lui g

c) Să se aducă Q la forma normală.

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $Q(x) = 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3$.

Fie sch. de reper:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$Q(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2) y_3$$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + 2y_1 y_3 + 2y_2 y_3$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} y_1^2 + y_1 y_3\right) - \frac{1}{2} y_2^2 + 2y_2 y_3$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right)^2 - 2y_3^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + 2y_2 y_3$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4} y_2^2 - y_2 y_3\right) - 2y_3^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} y_2 - y_3\right)^2 + \cancel{2y_3^2} - \cancel{2y_3^2}$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} y_2 - y_3\right) \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$Q(x) = z_1^2 - z_2^2$

$(1,1)$

Metoda Jacobi

$Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper in V (reper arbitrar)

Dacă matricea G, asociată lui Q în rap cu R, verifica: minorii diagonali

$$\Delta_1 = \det(g_{11}), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt nenuli,

atunci $\exists$ un reper in V aî

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2$$

Mai mult, daca $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, atunci Q este poz definită.

OBS a) metoda Jacobi este restrictiva

b) metoda Gauss se poate aplica întotdeauna

EX Fie $Q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$.

Să se aducă la forma normală, utilizând met Jacobi / Gauss

SOL

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_4 = \det G = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}$$

$\exists$ un reper R aî

$$Q(x) = \frac{1}{1} x_1'^2 - 4 x_2'^2 + x_3'^2 - 4 x_4'^2$$

$\mathcal{R} = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$

$\mathcal{R}' = \{e_1', e_3', e_2', e_4'\}$ $\quad Q(x) = x_1''^2 + x_2''^2 - 4x_3''^2 - 4x_4''^2$

$$\begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_2'' \\ x_3''' = 2x_3'' \\ x_4''' = 2x_4'' \end{cases} \qquad Q(x) = x_1'''^2 + x_2'''^2 - x_3'''^2 - x_4'''^2$$

(2,2) signatura

Met 2 $\quad Q(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_3^2 + x_3 x_4$

$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_4$

$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ y_2 = x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_3 = \frac{1}{2}x_2 \\ y_4 = \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \qquad Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$$

(2,2) signatura

Spații vectoriale euclidiene.

Def $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. vect. real.

$g : V \times V \to \mathbb{R}$ s.n. produs scalar $\iff$

1) $g \in L^s(V, V; \mathbb{R})$

2) g este pozitiv definita. $\left(\begin{array}{l} g(x,x) > 0, \forall x \in V \setminus \{0_V\} \\ g(x,x) = 0 \iff x = 0 \end{array} \right)$

Not (V, g), (E, g), $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$\|x\| = \sqrt{g(x,x)} = \sqrt{Q(x)}$ norma vectorului

Def $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r., $\mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ reper in V.

1) $\mathcal{R}$ s.n. reper ortogonal $\iff \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j$

2) $\mathcal{R}$ s.n. reper ortonormat $\iff \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \; \forall i, j = \overline{1,n}$

Prop $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r.

$\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ repere ortonormate

$\Rightarrow A \in O(n)$ i.e. $A \cdot A^T = I_n$.

Dem

$\langle e_k', e_r' \rangle = \delta_{kr}$

$\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{jr} e_j \rangle = \delta_{kr}$

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ik} a_{jr} \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \delta_{kr} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{ir} = \delta_{kr}$.

$A^T A = I_n$

OBS

~~a)~~ Dacă $A \in SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$, at $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ sunt repere la fel orientate

~~b) Dacă~~

Prop. $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ $(k \leq n)$

S mulțime de vectori nenuli mutual ortogonali, atunci S este SLI.

Dem Fie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ ai $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = 0$.

$\langle a_1 x_1 + \dots + a_k x_k, x_1 \rangle = \langle 0, x_1 \rangle = 0$

$a_1 \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{\|x_1\|^2} + a_2 \underbrace{\langle x_1, x_2 \rangle}_{0} + \dots + a_k \underbrace{\langle x_k, x_1 \rangle}_{0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

Analog $\langle a_1 x_1 + \dots + a_k x_k, x_j \rangle = 0, \ \forall j = \overline{2,k} \Rightarrow$

$a_j = 0, j = \overline{2,k} \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0 \Rightarrow S$ este SLI