№ 1.

$$\underbrace{(A+UCV)^{-1}}_{M_1^{-1}} = \underbrace{A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}}_{M_2}.$$ Покажем, что $M_1 M_2 = I$. Тогда $M_1^{-1} = M_2$ (M_1 невырожденная по условию)

$$(A+UCV)(A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = I - IU(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) + (UCVA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}$$

$$+ VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = I + UCVA^{-1} - U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = I + UCVA^{-1}$$

$$- (U+UCVA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = I + UCVA^{-1} - \underbrace{UC(C^{-1}+VA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}}_{I}VA^{-1} =$$

$$= I + UCVA^{-1} - UCVA^{-1} = I \text{ чтд}.$$

№2

a) $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2 = \langle uv^T - A, uv^T - A\rangle - \langle A, A\rangle = \langle uv^T - A, uv^T\rangle +$

$+ \langle uv^T - A, -A\rangle - \langle A, A\rangle = \langle uv^T, uv^T\rangle + \langle -A, uv^T\rangle + \langle uv^T, -A\rangle + \langle -A, -A\rangle$

$+ \langle A, A\rangle = \langle uv^T, uv^T\rangle - 2\langle A, uv^T\rangle + \langle A, A\rangle - \langle A, A\rangle = \langle uv^T - 2A, uv^T\rangle$

Ответ: $\langle uv^T - 2A, uv^T\rangle$

в) $tr((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T)) = \{$По тождеству Вудбери: $A = I_n \cdot 2$; $U = a$ $C = 1$ $V = a^T\}$

$= tr(((2I_n)^{-1} - (2I_n)^{-1} a (1^{-1} + a^T (2I_n)^{-1} a)^{-1} a^T (2I_n)^{-1})(2uv^T))$ с учетом, что $uv^T = vu^T$

$= tr(\frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} I_n a (1 + \frac{1}{2} a^T I_n a)^{-1} a^T \frac{1}{2} I_n)(2uv^T)) = \frac{1}{2} tr((I_n - I_n a (1 + \frac{1}{2} a^T a)^{-1} \cdot$

$\frac{1}{2} a^T) 2uv^T) = \frac{1}{2} tr((I_n - a(1 + \frac{a^T a}{2})^{-1} a^T \cdot \frac{1}{2}) 2uv^T) = \frac{1}{2} tr((2I_n - a(1 + \frac{a^T a}{2})^{-1} a^T) uv^T)$

$= \frac{1}{2} tr((2I_n - (\frac{2 + \|a\|^2}{2})^{-1} aa^T) uv^T) = \frac{1}{2} tr((2I_n - \frac{2}{2 + \|a\|^2} \cdot aa^T) uv^T)$

Ответ: $\frac{1}{2} tr((2I_n - \frac{2}{2 + \|a\|^2} aa^T) uv^T)$

c) $\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i\rangle$ $\quad S = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T$

Заметим, что для скалярного евклидова пр-я верно: $\langle XY, X\rangle = \langle X, XY^T\rangle$
Вручную это легко доказать.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1}, a_i a_i^T\rangle = \langle S^{-1}, \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T\rangle = \langle S^{-1}, S\rangle$

Ответ: $\langle S^{-1}, S\rangle$

N4

a) $f(x) = \|xx^T - A\|_F^2$

$df(x) = \frac{1}{2} d\|xx^T - A\|_F^2 = \frac{1}{2} d\langle xx^T - A, xx^T - A\rangle = \frac{1}{2}\langle (xx^T - A)2, d(xx^T - A)\rangle =$

$= \langle xx^T - A, x\,dx^T + dx\cdot x^T\rangle = \langle xx^T - A, \underbrace{x(dx)^T + dx\cdot x^T}\rangle = \langle xx^T - A, 2dx\cdot x^T\rangle =$

$= 2\langle xx^T - A, dx\cdot x^T\rangle = 2\langle (xx^T - A)x, dx\rangle$ Можно заметить, что это одно и то же

$\boxed{\nabla f(x) = 2(xx^T - A)x}$

$d^2 f(x) = 2d\langle (xx^T - A)x, dx_1\rangle = 2\langle d(xx^Tx - Ax), dx_1\rangle = 2\langle dx(x^Tx) + x\,d(x^Tx) - dAx,$

$dx_1\rangle = 2\langle \underbrace{dx\cdot x^Tx + x\,dx^Tx + xx^Tdx}_{\text{Одно и то же } = xx^Tdx} - Adx, dx_1\rangle = 2\langle 3xx^Tdx_2 - Adx_2, dx_1\rangle =$

$= \langle (6xx^T - 2A)dx_2, dx_1\rangle = d^2f(x)$ Приведем в каноническую форму: $\langle dx_2, \underbrace{(6xx^T - 2A)^T}_{\nabla^2 f(x)} dx_1\rangle$

$\Rightarrow$ Гессиан $\nabla^2 f(x) = (6xx^T - 2A)^T = (6xx^T)^T - 2A^T = 6xx^T - 2A$ т.к. $xx^T, A \in S_n$.

Ответ: $\nabla f(x) = 2(xx^T - A)x$; $\nabla^2 f(x) = 6xx^T - 2A$

в) $f(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle} = g(x)^{g(x)}$

Производная g^g: $dg^g = d\,e^{g\ln g} = e^{g\ln g}(dg\cdot\ln g + g\cdot d\ln g) = g^g(dg\cdot\ln g +$

$g\cdot\frac{dg}{g}) = g^g(\ln g + 1)dg.$

Значит, $df(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}(\ln\langle x, x\rangle + 1)\,d\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}(\ln\langle x, x\rangle + 1)\cdot$

$\langle 2x, dx\rangle. \Rightarrow df(x) = \langle \underbrace{2\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}(\ln\langle x, x\rangle + 1)x}_{\nabla f(x)}, dx\rangle$

$\boxed{\nabla f(x) = 2\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}(\ln\langle x, x\rangle + 1)x}$

Для удобства $\langle x, x\rangle = a$

$\nabla f(x) = 2a^a(\ln a + 1)x \quad df(x) = 2a^a(\ln a + 1)\langle x, dx\rangle$

$d^2 f(x) = d(2a^a(\ln a + 1))\langle x, dx_1\rangle + 2a^a(\ln a + 1)\langle dx_2, dx_1\rangle =$

$= (2\,da^a\cdot(\ln a + 1) + 2a^a\,d(\ln a + 1))\langle x, dx_1\rangle + 2a^a(\ln a + 1)\langle dx_2, dx_1\rangle =$

$= \left(2\cdot 2a^a(\ln a + 1)\langle x, dx_2\rangle(\ln a + 1) + 2a^a\frac{\langle 2x, dx_2\rangle}{a}\right)\langle x, dx_1\rangle + 2a^a(\ln a + 1)\langle dx_2, dx_1\rangle$

$= \left(4a^a(\ln a + 1)^2\langle x, dx_2\rangle + \frac{4a^a}{a}\langle x, dx_2\rangle\right)\langle x, dx_1\rangle + 2a^a(\ln a + 1)\langle dx_2, dx_1\rangle =$

$= \left(4a^a(\ln a + 1)^2 + \frac{4a^a}{a}\right)\langle x, dx_2\rangle\langle x, dx_1\rangle + 2a^a(\ln a + 1)\langle dx_2, dx_1\rangle =$

$= \left(4a^a(\ln a + 1)^2 + \frac{4a^a}{a}\right)xx^T\langle dx_2, dx_1\rangle + 2a^a(\ln a + 1)\langle dx_2, dx_1\rangle =$

$= \left(\left(4a^a(\ln a + 1)^2 + \frac{4a^a}{a}\right)xx^T + 2a^a(\ln a + 1)\right)\langle dx_2, dx_1\rangle$

Откуда $\nabla^2 f(x) = \left(4a^a(\ln a + 1)^2 + \frac{4a^a}{a}\right)xx^T + 2a^a(\ln a + 1) =$

$= \left(4\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}(\ln\langle x, x\rangle + 1)^2 + \frac{4\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}}{\langle x, x\rangle}\right)xx^T + 2\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}(\ln\langle x, x\rangle + 1)$

$= \boxed{\langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}\left(4(\ln\langle x, x\rangle + 1)^2 xx^T + \frac{4xx^T}{\langle x, x\rangle} + 2I_n(\ln\langle x, x\rangle + 1)\right)}$

c) $f(x) = \|Ax - b\|^p$

$$df(x) = d\langle Ax-b, Ax-b\rangle^{p/2} = p/2\,\langle Ax-b, Ax-b\rangle^{p/2-1} d\langle Ax-b, Ax-b\rangle = p/2\,\|Ax-b\|^{p-2}$$

$$2\langle Ax-b, d(Ax-b)\rangle = \boxed{p\,\|Ax-b\|^{p-2}\langle Ax-b, A\,dx\rangle}$$

Приведем в каноническую форму:

$$d\langle p\|Ax-b\|^{p-2}(A^TAx - A^Tb), dx\rangle \Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = p\,\|Ax-b\|^{p-2}(A^TAx - A^Tb)}$$

$$d^2f(x) = d\cdot\left(p\|Ax-b\|^{p-2}\langle(Ax-b), A\,dx\rangle\right) = p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}\langle Ax-b, A\,dx_2\rangle\langle Ax-b, A\,dx_1\rangle$$

$$+\ p\,\|Ax-b\|^{p-2}\langle d(Ax-b), A\,dx_1\rangle = p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}\langle Ax-b, A\,dx_2\rangle\langle Ax-b, A\,dx_1\rangle$$

$$+\ p\,\|Ax-b\|^{p-2}\langle A\,dx_2, A\,dx_1\rangle = p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T\langle A\,dx_2, A\,dx_1\rangle$$

$$+\ p\,\|Ax-b\|^{p-2}\langle A\,dx_2, A\,dx_1\rangle =$$

$$\langle A^T\left(p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + p\,\|Ax-b\|^{p-2}\right)dx_1, dx_2\rangle$$

$$\boxed{\nabla^2 f(x) = A^T\left(p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + p\,\|Ax-b\|^{p-2}\right.}$$

Ответ: $\nabla f(x) = p\,\|Ax-b\|^{p-2}(A^TAx - A^Tb)$

$$\nabla^2 f(x) = A^T\left(p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + p\,\|Ax-b\|^{p-2}\right.$$

5.

а) $f(x) = tr(x^{-1}) = \langle I_n, X^{-1} \rangle$

$df = d\langle I_n, X^{-1}\rangle = \langle I_n, dX^{-1}\rangle = \langle I_n, -X^{-1}dX X^{-1}\rangle$. Приведем к канонической форме $\langle \nabla f(x), dX\rangle = \langle -X^{-T} I_n, dX X^{-1}\rangle = \langle -(X^{-1})^T I_n (X^{-1})^T, dX\rangle = \{$поскольку $X \in S^n_{++}\} = \langle -X^{-1} I_n X^{-1}, dX\rangle$ ~~...~~ $= \langle -X^{-1}X^{-1}, dX\rangle = \langle -X^{-2}, dX\rangle$

$\Rightarrow \nabla f(x) = -X^{-2}$

$d^2 f = d\langle -X^{-2}, dx_1\rangle = \langle d(-X^{-2}), dX_1\rangle = \langle -2d(X^{-1}), dX_1\rangle = -2\langle -X^{-1}dX_2X^{-1}, dX_1\rangle \Rightarrow \boxed{d^2f(x) = \langle 2X^{-1}dX_2X^{-1}, dX_1\rangle}$ билинейная форма от приращений dX_1, dX_2

Рассмотрим $\Delta^2 f(x)[H,H] = \langle 2X^{-1}HX^{-1}, H\rangle = 2\langle X^{-1}HX^{-1}, H\rangle$. Т.к $X^{-1} = X^{-1/2}\cdot X^{-1/2}$, то

$\Delta^2 f(x)[H,H] = 2\langle X^{-1/2}HX^{-1/2}, X^{-1/2}HX^{-1/2}\rangle = 2\|X^{-1/2}HX^{-1/2}\|^2 \Rightarrow \Delta^2 f(x) > 0$

Ответ: действительно, $\Delta^2 f(x)[H,H]$ имеет положительный знак.

в) $f(x) = (\det X)^{1/n}$

$df(x) = d(\det X)^{1/n} = 1/n \det X^{\frac{1}{n}-1} \det X \langle X^{-T}, dX\rangle = 1/n \det X \langle X^{-1}, dX\rangle$ т.к $X \in S^n_{++}$

$\nabla f(x) = 1/n(\det X)^{1/n} X^{-1}$

$d^2 f(x) = d\left(1/n(\det(X))^{1/n}\langle X^{-1}, dX_1\rangle\right) = d\left(1/n(\det X)^{1/n}\right)\langle X^{-1}, dX_1\rangle + \frac{1}{n}(\det X)^{1/n}\langle dX^{-1}, dX_1\rangle$

$= 1/n^2(\det X)^{1/n}\langle X^{-1}, dX_2\rangle\langle X^{-1}, dX_1\rangle + 1/n(\det X)^{1/n}\langle -X^{-1}dX_2X^{-1}, dX_1\rangle =$

$=$ ~~...~~ Это билинейная форма от приращений dX_1, dX_2.

$\Delta^2 f(x)[H,H] = 1/n^2(\det X)^{1/n}\langle X^{-1}, H\rangle\langle X^{-1}, H\rangle + 1/n(\det X)^{1/n}\langle -X^{-1}HX^{-1}, H\rangle =$

$= (\det X)^{1/n}\left(1/n^2\langle X^{-1}, H\rangle^2 + 1/n\langle -X^{-1}HX^{-1}, H\rangle\right) =$

$=$ ~~...~~

Рассмотрим $1/n^2\langle X^{-1}, H\rangle^2 - 1/n\langle X^{-1}HX^{-1}, H\rangle = 1/n^2\langle X^{-1}, H\rangle - 1/n\langle X^{-1}H, H(X^{-1})^T\rangle =$

$= 1/n^2\langle X^{-1}, H\rangle^2 - 1/n\langle X^{-1}H, HX^{-1}\rangle$ Поскольку $X \in S^n_{++}$ $= 1/n^2\langle X^{-1}, H\rangle^2 -$

$- 1/n\langle X^{-1}H, X^{-1}H\rangle$ Поскольку $X, H \in S^n_{++}$ $= 1/n^2\langle X^{-1}, H\rangle^2 - 1/n\|X^{-1}H\|^2$ (*)

Покажем, что $\frac{1}{n^2}\langle X^{-1}, H\rangle^2 \le \frac{1}{n}\|X^{-1}H\|^2$. Т.е $\frac{1}{n}\langle X^{-1}, H\rangle \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|X^{-1}H\|$.

$\langle X^{-1}, H\rangle = \sum_{ij} x_{ij}h_{ij}$. Это, очевидно $\le$ сумма всех эл-в матрицы $X^{-1}H$:

~~...~~

Потому как $\langle X^{-1}, H\rangle$ является суммой диагональных элементов $X^{-1}H$

$\left(c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}h_{ji} \Rightarrow \text{сумма } \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}h_{ji}\right)$.

Значит, $\langle X^{-1}, H\rangle <$ Сумма всех $c_{ij} = \sum_i\sum_j c_{ij} = \sum_{ij} c_{ij}$. $\Rightarrow \frac{\langle X^{-1}, H\rangle}{n} \le \frac{\sum c_{ij}}{n}$

По нерав-у Коши-~~Буняковского~~ $\frac{\sum c_{ij}}{n} \le \sqrt{\frac{\sum c_{ij}^2}{n}} = \frac{\|X^{-1}H\|}{\sqrt{n}}$

Значит, $\frac{\langle X^{-1}H\rangle}{n} \le \frac{\|X^{-1}H\|}{\sqrt{n}}$ чтд. $\Rightarrow \Delta^2 f(x)$ имеет всюду отрицательный знак.

Ответ: всюду отрицательный.

№6

a) $f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{8}{3}\|x\|^3$

$df(x) = d\langle c,x\rangle + \frac{8}{3} d\|x\|^3 = \langle c,dx\rangle + \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2} \langle x,x\rangle^{\frac{3}{2}-1} d\langle x,x\rangle = \langle c,dx\rangle +$

$+ \frac{8}{2}\|x\|\langle 2x,dx\rangle = \langle c,dx\rangle + 8\|x\|\langle x,dx\rangle = \langle c+8\|x\|x, dx\rangle.$

По условию оптимальности $1^{\text{го}}$ порядка $df(x)=0 \Leftrightarrow \nabla f(x)=0$

$\Rightarrow c + 8\|x\|x.$ $\Rightarrow$ стационарная точка - решение $\boxed{\|x\|x = -c/8}$

в) $f(x) = \langle a,x\rangle - \ln(1-\langle b,x\rangle)$

$df(x) = \langle a,dx\rangle - \frac{d(1-\langle b,x\rangle)}{1-\langle b,x\rangle} = \langle a,dx\rangle + \frac{\langle b,dx\rangle}{1-\langle b,x\rangle} =$

$= \langle a + \frac{b}{1-\langle b,x\rangle}, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = a + \frac{b}{1-\langle b,x\rangle} = 0$ По у. опт. $1^{\text{го}}$ пор.

$\Rightarrow \frac{1}{1-\langle b,x\rangle} = -\frac{a}{b} \Rightarrow \langle b,x\rangle = 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$

c) $f(x) = \langle c,x\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle}$

$df(x) = \langle c,dx\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle} + \langle c,x\rangle(-\langle 2Ax,dx\rangle) e^{-\langle Ax,x\rangle} =$

$= \langle e^{-\langle Ax,x\rangle}(c + \langle c,x\rangle(-2Ax)), dx\rangle \Rightarrow$

$\nabla f(x) = e^{-\langle Ax,x\rangle}(c - \langle c,x\rangle 2Ax)$

По у. опт. $1^{\text{го}}$ п. : $\nabla f = 0 \Leftrightarrow df = 0 \Rightarrow e^{-\langle Ax,x\rangle}(c - \langle c,x\rangle 2Ax) = 0$

$\Rightarrow c = \langle c,x\rangle 2Ax \Rightarrow \frac{c}{2} = Ax\langle c,x\rangle \Rightarrow A^{-1}\frac{c}{2} = x\langle c,x\rangle$

$\Rightarrow$ Стационарные точки - решение $\boxed{\frac{A^{-1}c}{2} = x\langle c,x\rangle.}$