

Curso: Engenharia de Software

Turno: Noturno

Disciplina: Matemática Discreta e Lógica

Professor: Azuaite A. Schneider

Lista 7 – Relações e Funções

1. I) Enumere pares ordenados.
II) Represente por meio de flechas.
III) Faça o gráfico cartesiano das relações binárias de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definidas por:
 - (a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 2$
 - (b) $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x^2 = y$
 - (c) $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow |x| = |y|$
 - (d) $x\mathcal{V}y \Leftrightarrow x + y > 2$
 - (e) $x\mathcal{W}y \Leftrightarrow (x - y)^2 = 1$
2. Dado o conjunto $A = \{m \in \mathbb{Z} : -7 \leq m \leq 7\}$, construa o gráfico cartesiano da relação binária \mathcal{R} em A definida por:
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$
3. Estabeleça o domínio e a imagem das seguintes relações:
 - (a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$
 - (b) $\mathcal{R} = \{(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1 - \sqrt{3}, 1)\}$
 - (c) $\mathcal{R} = \{(-2, 4), (-1, 1), (3, -7), (2, 1)\}$
 - (d) $\mathcal{R} = \left\{\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -1\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\right\}$
 - (e) $\mathcal{R} = \{(2, 1), (1, -3), (5, \sqrt{2})\}$
4. Estabeleça o domínio e a imagem das relações binárias do exercício 1.
5. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e \mathcal{R} a relação binária de A em B definida por:
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$$
 - (a) Enumere os pares ordenados de \mathcal{R} .
 - (b) Enumere os elementos do domínio e da imagem de \mathcal{R} .
 - (c) Faça o gráfico cartesiano de \mathcal{R} .
6. Enumere os elementos de \mathcal{R}^{-1} , relação inversa de \mathcal{R} , nos seguintes casos:
 - (a) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3)\}$
 - (b) $\mathcal{R} = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1), (-2, 1)\}$
 - (c) $\mathcal{R} = \{(-3, -2), (1, 3), (-2, -3), (3, 1)\}$
7. Enumere os elementos e esboce os gráficos de \mathcal{R} e \mathcal{R}^{-1} , relações binárias em $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$, nos seguintes casos:
 - (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 8\}$
 - (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A^2 : x + 2y = 10\}$
 - (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A^2 : y = (x - 3)^2 + 1\}$
 - (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A^2 : y = 2^x\}$
8. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 2 \leq y \leq 10\}$ e as seguintes relações binárias:

- (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : x = y\}$
- (b) $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B : y = 2x\}$
- (c) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 2\}$
- (d) $\mathcal{V} = \{(x, y) \in A \times B : x + y = 7\}$

dê o gráfico cartesiano dessas relações e das respectivas relações inversas.

9. Seja $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. Verifique se as relações binárias em A são reflexivas, irreflexivas, simétricas, antissimétricas e/ou transitivas:

- (a) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$
- (b) $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$
- (c) $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
- (d) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$
- (e) $\mathcal{R} = \emptyset$

10. Classifique as relações binárias a seguir nos conjuntos S dados como reflexivas, irreflexivas, simétricas, antissimétricas e/ou transitivas:

- (a) $S = \mathbb{N}$
 $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x \cdot y$ é par
- (b) $S = \mathbb{N}$
 $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x$ é ímpar
- (c) $S =$ conjunto de todos os quadrados no plano
 $S_1\mathcal{R}S_2 \leftrightarrow$ tamanho do lado de $S_1 =$ tamanho do lado de S_2
- (d) $S =$ conjunto de todas as cadeias finitas de caracteres

$x\mathcal{R}y \leftrightarrow$ número de caracteres em $x =$ número de caracteres em y

- (e) $S =$ conjunto de todas as pessoas do Brasil

$x\mathcal{R}y \leftrightarrow x$ é irmão de y

- (f) $S = \wp(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$

$A\mathcal{R}B \leftrightarrow |A| = |B|$

- (g) $S = \wp(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$

$A\mathcal{R}B \leftrightarrow |A| \neq |B|$

- (h) $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 \leq x_2$ e $y_1 \geq y_2$

11. Para cada caso abaixo, apresente um conjunto S e uma relação binária \mathcal{R} em S (diferente das apresentadas nos exemplos e nos problemas) que satisfaça às condições pedidas.

- (a) \mathcal{R} é reflexiva e antissimétrica, mas não é transitiva.
- (b) \mathcal{R} é reflexiva e transitiva, mas não é simétrica.
- (c) \mathcal{R} não é reflexiva nem simétrica, mas é transitiva.
- (d) \mathcal{R} é reflexiva, mas não é simétrica nem transitiva.

12. Um programa de computador para gerar o dicionário ou o índice de um livro será escrito. Assumiremos um tamanho máximo de n caracteres por palavra. Temos, portanto, um conjunto S com palavras de, no máximo, n caracteres e desejamos gerar uma lista ordenada alfabeticamente com estas palavras. Existe a ordem natural dos caracteres do alfabeto \preceq ($a \preceq b$, $b \preceq c$ etc.), e admitimos que nos-

as palavras contenham apenas caracteres alfabéticos. Definindo uma ordenação total \preceq em S (ordenação lexicográfica), que ordene S alfabeticamente, aplique a ordenação total descrita às palavras **roupa**, **rua**, **remédio**, **rato** e **ruga**. Perceba que cada palavra precede a próxima.

Os exercícios de 13 a 19 são dos slides

13. Qual é inversa da relação “ $>$ ”? E da relação “ $=$ ”? E da relação “ \subseteq ”?
14. Se A é um conjunto com m elementos, quantas relações distintas existem sobre A ? Se B é um conjunto com n elementos, quantas relações existem de A para B ?
15. Seja \mathcal{R} a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se existe um inteiro positivo k tal que $a = kb$. Mostre que \mathcal{R} é uma relação de ordem.
16. Seja A o conjunto dos inteiros de 0 a 9, e \mathcal{R} a relação sobre A tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se a é par e b é ímpar, ou ambos são pares e $a \leq b$, ou ambos são ímpares e $a \geq b$. Esta é uma relação de ordem?
17. Considere a relação \mathcal{R} sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que

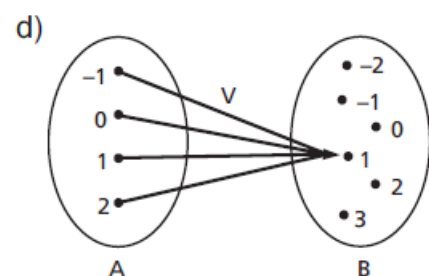
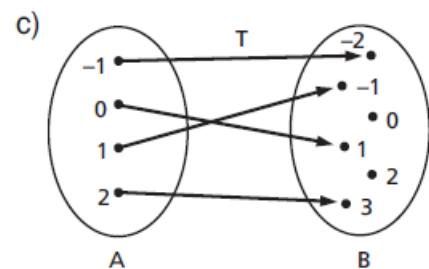
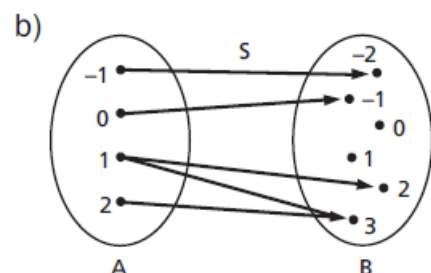
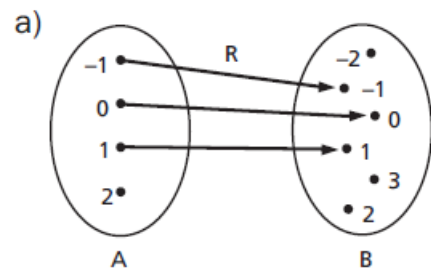
$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \leftrightarrow (a \leq c) \vee (b \leq d)$$

para quaisquer inteiros a, b, c e d . Esta é uma relação de ordem?

18. Para quaisquer relações de ordem \mathcal{R} e \mathcal{S} sobre um conjunto A , a relação $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é sempre uma

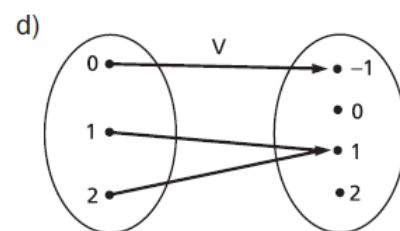
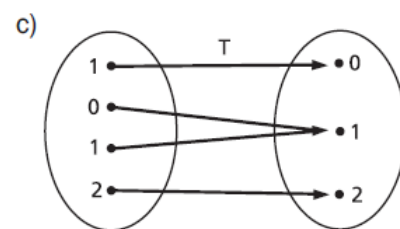
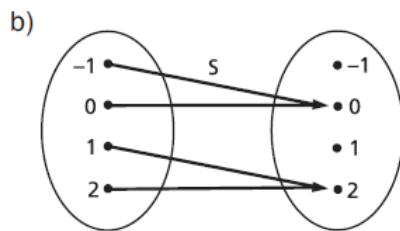
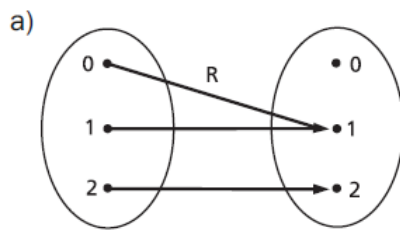
relação de ordem sobre A ? E a relação $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$? Prove suas respostas.

19. Seja A um conjunto de caixas, e \mathcal{R} a relação sobre A tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se a caixa a cabe dentro da caixa b . Prove que esta é uma relação de ordem estrita.
20. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justifique.

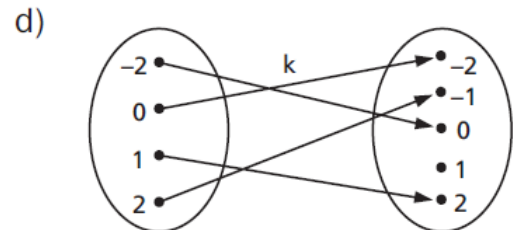
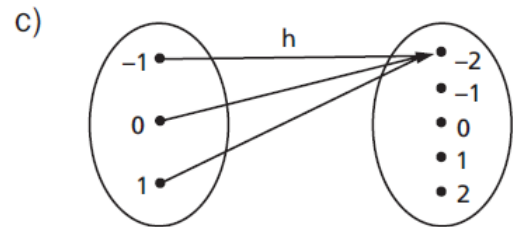
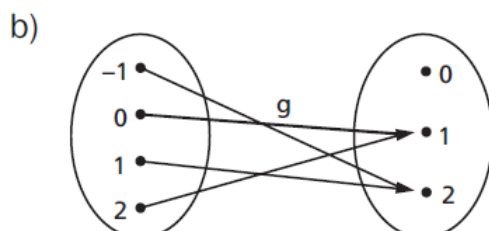
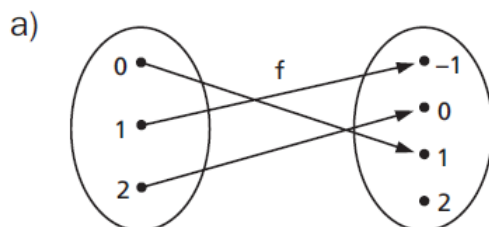


21. Quais dos esquemas abaixo definem uma função

de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$? Justifique.



22. Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:



23. Sejam $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2 + 7x$. Determine:

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

(c) $f \circ f$

(d) $g \circ g$

(e) f^{-1}

24. Dê um exemplo, representando através do diagrama de flechas, de uma função:

(a) que não seja nem injetiva e nem sobrejetiva.

(b) que seja injetiva mas não seja sobrejetiva.

(c) que seja sobrejetiva mas não seja injetiva.

(d) que seja bijetiva.

Gabarito

1. a)

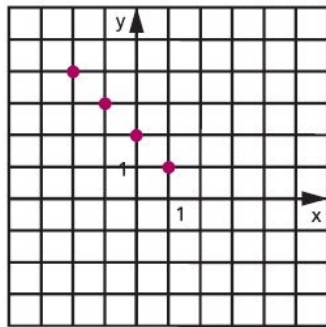
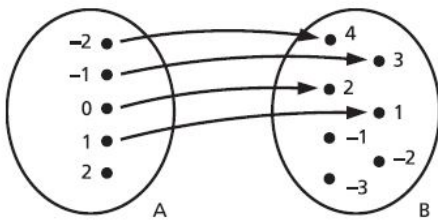
$$(-2, 4) \in \mathcal{R} \text{ porque } (-2) + (4) = 2$$

$$(-1, 3) \in \mathcal{R} \text{ porque } (-1) + (3) = 2$$

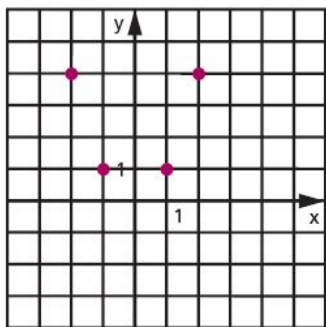
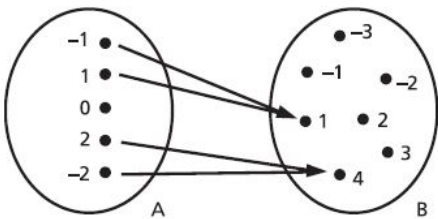
$$(0, 2) \in \mathcal{R} \text{ porque } (0) + (2) = 2$$

$$(1, 1) \in \mathcal{R} \text{ porque } (1) + (1) = 2$$

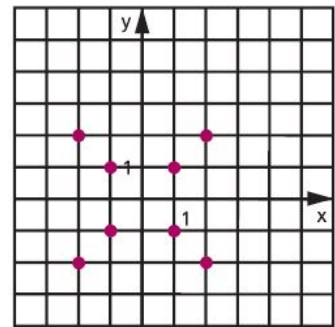
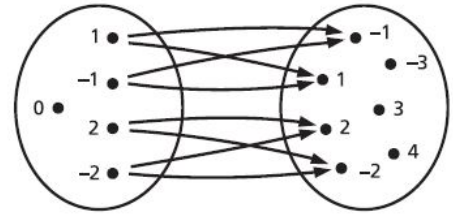
$$\text{Logo, } \mathcal{R} = \{(-2, 4); (-1, 3); (0, 2); (1, 1)\}$$



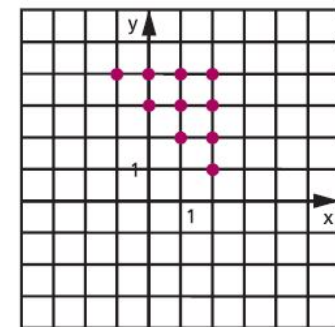
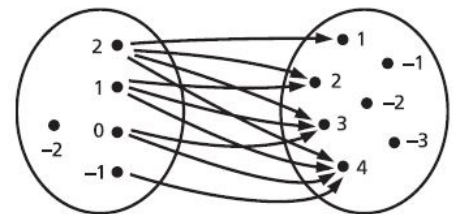
b) $\mathcal{S} = \{(-2, 4), (2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$



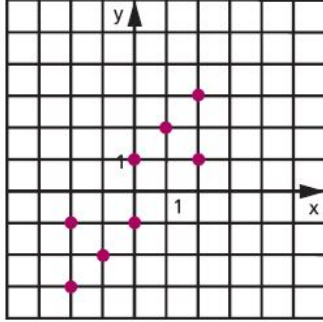
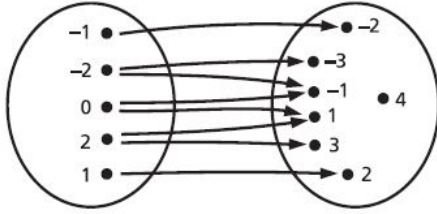
c) $\mathcal{T} = \{(-2, -2), (-2, 2), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -2), (2, 2)\}$



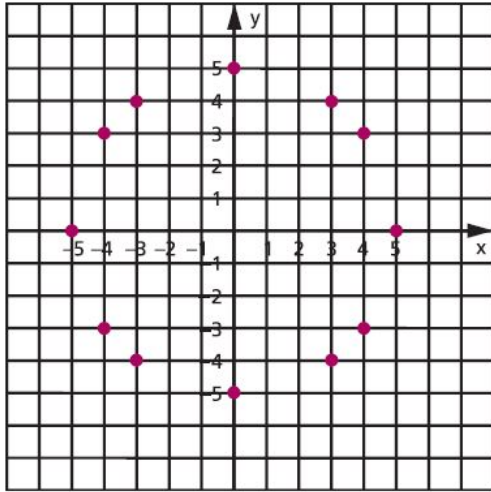
d) $\mathcal{V} = \{(-1, 4), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$



e) $\mathcal{W} = \{(-2, -3), (-2, -1), (-1, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$



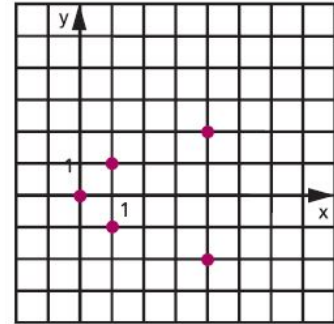
2. $\mathcal{R} = \{(-5, 0); (-4, -3); (-4, 3); (0, 5); (3, -4); (3, 4); (5, 0); (0, -5); (-3, -4); (4, 3); (4, -3); (-3, 4)\}$



3. a) $\text{Dom } \mathcal{R} = \{1, 2\}$ e $\text{Img } \mathcal{R} = \{1, 3, 4\}$
 b) $\text{Dom } \mathcal{R} = \{-2, -1, 3, 2\}$ e $\text{Img } \mathcal{R} = \{-7, 4, 1\}$
 c) $\text{Dom } \mathcal{R} = \{2, 1, 5\}$ e $\text{Img } \mathcal{R} = \{1, -3, \sqrt{2}\}$
 d) $\text{Dom } \mathcal{R} = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}\}$ e $\text{Img } \mathcal{R} = \{\sqrt{2}, 1\}$
 e) $\text{Dom } \mathcal{R} = \left\{3, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ e $\text{Img } \mathcal{R} = \left\{\frac{1}{2}, -1, 0\right\}$

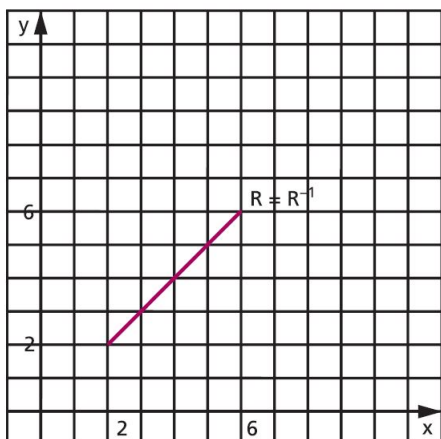
4. a) $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $\text{Img}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$
 b) $\text{Dom}(\mathcal{S}) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $\text{Img}(\mathcal{S}) = \{1, 4\}$
 c) $\text{Dom}(\mathcal{T}) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $\text{Img}(\mathcal{T}) = \{-2, -1, 1, 2\}$
 d) $\text{Dom}(\mathcal{V}) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Img}(\mathcal{V}) = \{1, 2, 3, 4\}$
 e) $\text{Dom}(\mathcal{W}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Img}(\mathcal{W}) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

5. a) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$
 b) $\text{Dom } \mathcal{R} = \{0, 1, 4\}$ e $\text{Img } \mathcal{R} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 c)

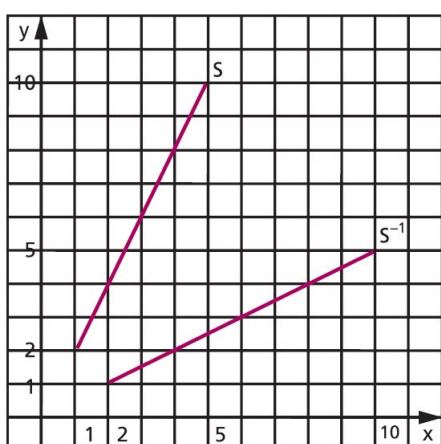


6. a) $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (1, 3), (3, 2)\}$
 b) $\mathcal{R}^{-1} = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, -2)\}$
 c) $\mathcal{R}^{-1} = \{(-2, -3), (3, 1), (-3, 2), (1, 3)\}$
7. a) $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1} = \{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)\}$
 b) $\mathcal{R} = \{(0, 5), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (10, 0)\}$ e $\mathcal{R}^{-1} = \{(5, 0), (4, 2), (3, 4), (2, 6), (1, 8), (0, 10)\}$
 c) $\mathcal{R} = \{(0, 10), (1, 5), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 5), (6, 10)\}$ e $\mathcal{R}^{-1} = \{(10, 0), (5, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 5), (10, 6)\}$
 d) $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$ e $\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3)\}$

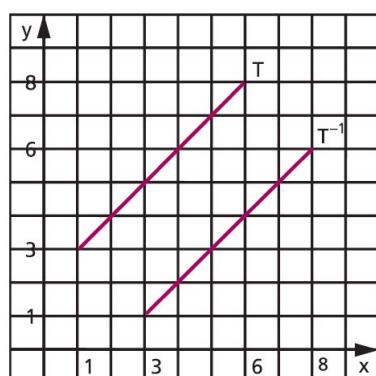
8. a)



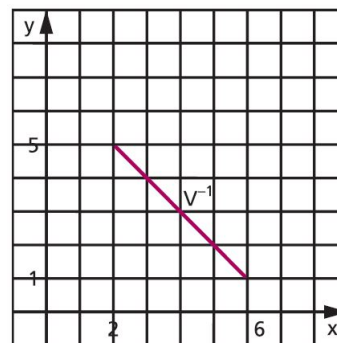
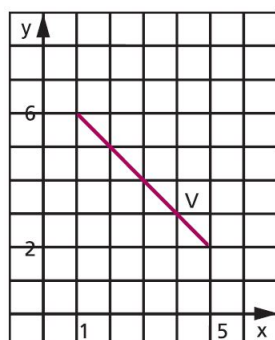
b)



c)



d)



9. a) Reflexiva e antissimétrica.

b) Irreflexiva e simétrica.

c) Simétrica e transitiva.

d) Reflexiva, simétrica e transitiva.

e) Irreflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva.

10. a) Simétrica e transitiva.

b) Transitiva.

c) Reflexiva, simétrica e transitiva.

d) Reflexiva, simétrica, transitiva.

e) Irreflexiva, simétrica, transitiva.

f) Reflexiva, simétrica, transitiva.

g) Irreflexiva e simétrica.

h) Reflexiva, antissimétrica e transitiva.

11. Pessoal

12. Ordenação:

$\text{rato} \preceq \text{remédio} \preceq \text{roupa} \preceq \text{rua} \preceq \text{ruga}$

20. a) Não define função de A em B , pois o elemento $2 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B .

b) Não define função de A em B , pois o elemento $1 \in A$ está associado a dois elementos de B .

c) Define função de A em B , pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B .

d) Define função de A em B , pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B .

21. Somente d), pois o conjunto de partida é $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto de chegada é $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

22. a) $\text{Dom}(f) = \{0, 1, 2\}$ e $\text{Img}(f) = \{-1, 0, 1\}$

b) $\text{Dom}(g) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Img}(g) = \{1, 2\}$

c) $\text{Dom}(h) = \{-1, 0, 1\}$ e $\text{Img}(h) = \{-2\}$

d) $\text{Dom}(k) = \{-2, 0, 1, 2\}$ e

$\text{Img}(k) = \{-2, -1, 0, 2\}$

23. a) $f(g(x)) = 3x^2 + 21x - 1$

b) $g(f(x)) = 9x^2 + 15x - 6$

c) $f(f(x)) = 9x - 4$

d) $g(g(x)) = x^4 + 14x^3 + 56x^2 + 49x$

e) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

24. Pessoal