MATEMÁTICA DISCRETA E LÓGICA

Engenharia de Software

INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Paranavaí

Professor
Azuaite
Schneider

Material didático - 2023

Sumário

Capítulo 1 Lógica Formal

Este capítulo sobre lógica matemática foi adaptado do livro Introdução à Lógica Matemática de Carlos Alberto F. Bispo, Luiz B. Castanheira e Oswaldo Melo S. Filho (BISPO, CASTANHEIRA e FILHO (2012)) e temos uma versão física na Biblioteca.

Boa parte do conteúdo apresentado neste material também possui adaptações e exercícios da bibliografia principal da disciplina, o livro Fundamentos matemáticos para a ciência da computação (GERSTING (2004)).

1.1 Proposição

Considera-se uma **proposição**, ou um enunciado, qualquer sentença declarativa que assume um dos dois valores-verdade: **verdade** e **falsidade**; ou seja, uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser verdadeira (**V**) ou falsa (**F**). Essa propriedade da proposição é usualmente denominada **valor-verdade**.

Exemplo 1.1. Exemplos de sentenças declarativas:

a) $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ (é uma proposição verdadeira (V).)

b) Júpiter está a 100 km da Terra, (é uma proposição falsa (F).)

c) Os suíços fabricam os melhores relógios e os franceses, o melhor vinho. (é uma proposição verdadeira (V), isto em certo período de tempo.)

Exemplo 1.2. Exemplos de sentenças não declarativas:

a) Venha aqui! (sentença imperativa)

b) Não corra tão rápido! (sentença imperativa)

c) Pela mãe do guarda! (sentença exclamativa)

d) Quantas vezes terei de repetir isso? (sentença interrogativa)

Essas sentenças do Exemplo 1.2 não são proposições, pois é impossível estabelecer um valor-verdade para elas.

No Exemplo 1.1, as proposições tratam os assuntos: a) matemática; b) astronomia; e c) vinhos e relógios. O Cálculo Proposicional analisa a relação entre as proposições, considerando a forma que essa relação assume e não especificamente o seu conteúdo, ou seu significado.

As proposições podem ser substituídas por letras maiúsculas do alfabeto latino: A, B, $\ldots$, Z.

Exemplo 1.3. a) Os suíços fabricam os melhores relógios e os franceses, o melhor vinho. Se tomarmos:

R = Os suíços fabricam os melhores relógios.
S = Os franceses fabricam o melhor vinho.

Teremos: R e S, a tradução simbólica da proposição.

b) Se prestar atenção na aula, então tirarei boa nota na prova. Se tomarmos:

A = Eu prestar atenção na aula.
P = Eu tirarei boa nota na prova.

Teremos: Se A então P, a tradução simbólica da proposição.

1.1.1 Princípios da lógica clássica

A Lógica Matemática na sua versão clássica assume como regras fundamentais do pensamento válido três princípios básicos.

Princípio da Identidade

"Toda proposição é idêntica a si mesma."
P é P

Princípio da Não Contradição

"Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo."
não (P e não P)

Princípio do Terceiro Excluído

"Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir."

P ou não P (ou exclusivo)

1.1.2 Proposição simples e composta

Uma proposição é simples se, e somente se, contiver uma única afirmação.

Uma proposição é composta quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições simples.

No Exemplo 1.1 de sentenças declarativas, a e b são proposições simples, e c é uma proposição composta.

1.1.3 Conectivos proposicionais

Na linguagem comum, usam-se palavras explícitas ou não para interligar frases dotadas de algum sentido. Tais palavras são substituídas, na Lógica Matemática, por símbolos denominados **conectivos lógicos**.

Em nosso estudo, nos restringiremos inicialmente ao chamado **cálculo proposicional**; por essa razão, os conectivos utilizados são conhecidos por sentenciais ou proposicionais.

Trabalharemos com cinco conectivos que substituirão simbolicamente as expressões:

- e
- se, e somente se
- ou
- não
- se ..., então ...

Exemplo 1.4. a) Somos pobres mortais e fanáticos torcedores da vida. É uma proposição composta:

Somos pobres mortais, a primeira proposição, e somos fanáticos torcedores da vida, a segunda proposição, sendo **e** a palavra de ligação.

b) Se não nos alimentarmos, morreremos. É uma proposição composta:

não nos alimentarmos, a primeira proposição, e (nós) morreremos, a segunda.

As palavras que unem essas proposições são

Se ......, então ......

c) Vamos ao cinema ou ao teatro.

É uma proposição composta:

Vamos ao cinema, a primeira proposição,
e (vamos) ao teatro, a segunda proposição,
sendo **ou** a palavra de ligação.

Os símbolos especiais da Lógica Matemática expõem com maior clareza as estruturas lógicas de proposições e argumentos, que muitas vezes, na linguagem comum, ficam obscurecidas.

A Lógica Matemática trata da relação entre proposições, considerando a forma que essa relação assume e não o seu conteúdo. Em função disso, as proposições são representadas por letras maiúsculas do alfabeto latino. Cada letra maiúscula é usada para representar uma proposição bem definida (uma constante) e cada minúscula para representar uma proposição qualquer (uma variável).

É importante assinalar que a Lógica Matemática é uma ciência não empírica, isto é, não depende de observações como nas ciências naturais. Portanto, tem afinidades com a Matemática e dela se aproxima.

1.1.4 Classificação dos conectivos

Apresentaremos a seguir os conectivos que, com suas representações simbólicas, serão usados na tradução de proposições para a linguagem simbólica.

1.1.5 Conjunção

A **conjunção** é o resultado da combinação de duas proposições ligadas pela palavra **e**, que será substituída pelo símbolo $\wedge$. Cada proposição também será traduzida, utilizando-se a primeira letra de sua palavra-chave. A conjunção pode também ser expressa por palavras como: mas, todavia, contudo, no entanto, visto que, enquanto, além disso, embora.

Exemplo 1.5. a) Maria foi ao cinema e Marta, ao teatro.

Tradução:

C = Maria foi ao **c**inema.
T = Marta foi ao **t**eatro.

Simbolicamente, temos: $C \wedge T$.

b) José é jogador de futebol do Flamengo e Leandro seguiu a carreira de Medicina.

Tradução:

F = José é jogador de **f**utebol do Flamengo.
M = Leandro seguiu a carreira de **M**edicina.

Simbolicamente, temos: $F \wedge M$.

c) André foi ao baile, mas Maria ficou em casa.

Tradução:

B = André foi ao **b**aile.
C = Maria ficou em **c**asa.

Simbolicamente, temos: B ∧ C.

1.1.6 Disjunção

A **disjunção** é o resultado da combinação de duas proposições ligadas pela palavra **ou**, que será substituída pelo símbolo $\vee$. Cada proposição também será traduzida, utilizando-se a primeira letra de sua palavra-chave.

Na linguagem coloquial, a palavra ou pode ser empregada em dois sentidos, **inclusivo** ou **exclusivo**.

Tomando-se as seguintes proposições:

A = Paulo é matemático ou físico.
B = João é paulistano ou gaúcho.

Em A, pode ocorrer de Paulo ser matemático e físico, trata-se do **ou inclusivo**. Em B, não é possível que João seja paulistano e gaúcho ao mesmo tempo, trata-se do **ou exclusivo**.

No cálculo proposicional, somente o ou inclusivo será abordado.

Exemplo 1.6. a) Maria foi ao cinema ou ao teatro.

Tradução:

C = Maria foi ao cinema.
T = Maria foi ao teatro.

Simbolicamente, temos: $C \vee T$.

b) José será jogador de futebol ou seguirá a carreira de Medicina.

Tradução:

F = José será jogador de futebol.
M = José seguirá a carreira de Medicina.

Simbolicamente, temos: $F \vee M$.

1.1.7 Condicional

Duas proposições formam uma **condicional** quando for possível colocá-las na seguinte forma:

Se (proposição 1), então (proposição 2).

- a proposição 1 é chamada de antecedente, e a proposição 2 de consequente;
- o símbolo utilizado para ligar as duas proposições de uma condicional é $\rightarrow$;
- as proposições condicionais podem ter sentidos diferentes em sua composição, veja os exemplos a seguir.

Exemplo 1.7. a) Se Alberto é poliglota, então fala várias línguas.

Aqui, a consequente depende da definição da palavra poliglota.

Tradução:

P = Alberto é poliglota.
L = (Alberto) fala várias línguas.

Simbolicamente, temos: $P \rightarrow L$.

b) Se colocarmos em um ácido papel de tornassol, o papel ficará vermelho.

A consequente decorre da atuação química e física da antecedente.

Tradução:

C = Colocarmos em um ácido papel de tornassol.
V = O papel ficará vermelho.

Simbolicamente, temos: $C \to V$

c) Se Fernando é inteligente, eu sou um gênio.

Não existe uma conexão real entre a antecedente e a consequente.

Tradução:

$$\begin{aligned} F &= \text{Fernando é inteligente.} \\ E &= \text{eu sou um gênio.} \end{aligned}$$

Simbolicamente, temos: $F \to E$.

d) Se o Brasil for campeão, eu vou para o Japão.

A consequente reflete uma vontade própria, que depende da antecedente.

Tradução:

$$\begin{aligned} B &= \text{O Brasil for campeão.} \\ J &= \text{Eu vou para o Japão.} \end{aligned}$$

Simbolicamente, temos: $B \to J$.

e) Se todos os homens são mortais e Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal.

Nesse caso, a consequente depende logicamente da antecedente.

Tradução:

$$\begin{aligned} H &= \text{Todos os homens são mortais.} \\ S &= \text{Sócrates é um homem.} \\ M &= \text{Sócrates é mortal.} \end{aligned}$$

Simbolicamente, temos: $(H \wedge S) \to M$

Desses exemplos, apenas o último tem relevância para o cálculo proposicional, pois seu valor-verdade depende apenas do valor-verdade atribuído a suas proposições simples.

1.1.8 Bicondicional

Toda proposição composta, formada por duas proposições, que pode ser colocada na forma:

(proposição 1) se, e somente se, (proposição 2) é chamada de **bicondicional** e seu conectivo de ligação é representado pelo símbolo $\leftrightarrow$.

A proposição bicondicional pode ser entendida como uma conjunção de dois condicionais, ou seja, dado $P \leftrightarrow Q$, temos $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$.

Exemplo 1.8. a) Só ganharás o dinheiro se completares o trabalho.

Tal proposição é equivalente a:

Ganharás o dinheiro se, e somente se, completares o trabalho.

Tradução:

$$\begin{aligned} D &= \text{Ganharás o dinheiro.} \\ T &= \text{Completares o trabalho.} \end{aligned}$$

Simbolicamente, temos: $D \leftrightarrow T$.

b) Só haverá diminuição da violência se a educação for prioridade governamental.

Tal proposição é equivalente a:

Se houver diminuição da violência, a educação é prioridade governamental.
e
Se a educação for prioridade governamental, a violência diminuirá.

Tradução:

$$\begin{aligned} V &= \text{Haverá diminuição da violência.} \\ E &= \text{A educação é prioridade governamental.} \end{aligned}$$

Simbolicamente, temos: $V \leftrightarrow E$.

1.1.9 Negação

O conectivo de **negação** não liga duas proposições, mas simplesmente nega a afirmação da proposição que o precede. Em virtude disso, é um conectivo unário, enquanto os anteriores são conectivos binários, pois ligam duas proposições. Se o valor-verdade de uma proposição é (V), quando acompanhado do conectivo de negação, passará a ser (F) e vice-versa. O símbolo utilizado para esse conectivo é $\neg$, colocado antes da letra que traduz a proposição.

Exemplo 1.9. a) Luís não recebeu o seu pagamento na data prevista.

Tradução:

P = Luís recebeu o seu pagamento na data prevista.

Simbolicamente, temos: $\neg P$.

b) Alfredo não gosta de trabalhar.

Tradução:

T = Alfredo gosta de trabalhar.

Simbolicamente, temos: $\neg T$.

c) A estabilidade não gera desemprego.

Tradução:

E = A estabilidade gera desemprego.

Simbolicamente, temos: $\neg E$.

1.1.10 Formalização

O processo de formalização consiste em converter um conjunto de proposições interligadas em uma estrutura composta de letras proposicionais, conectivos lógicos e símbolos de pontuação. Os símbolos usados nessa operação são:

- letras proposicionais: A, B, ..., P, Q etc., ou P_1, P_2, ..., ou a, b, c, ... ou p_1, p_2, p_3, ...
- conectivos proposicionais: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- parênteses: ( ).

Em geral, para evitar ambiguidades nas proposições compostas, é necessário estabelecer uma pontuação adequada. Tal pontuação é idêntica à utilizada em expressões algébricas, seguindo as seguintes regras:

- cada parêntese aberto deve ser fechado; os internos à expressão precedem aos mais externos;
- a ordem de prioridade dos conectivos é:

$$
\begin{array}{ll}
1^\circ & \neg \\
2^o & \wedge \text{ e } \vee \\
3^\circ & \rightarrow \text{ e } \leftrightarrow
\end{array}
$$

Exemplo 1.10. Se tomarmos café ou comermos algo, chegaremos atrasados à conferência, mas, se isso for um problema, é melhor despedir-mo-nos agora.

Tradução:

T = tomarmos café;
C = comermos algo;
A = chegaremos atrasados à conferência;
P = isso é um problema;
D = é melhor despedir-mo-nos agora.

Simbolicamente, temos: $((T \vee C \to A) \wedge (P \to D))$.

No processo de formalização, passa-se de uma **linguagem natural** ou do cotidiano para uma **linguagem artificial** (simbólica) formada pelos três tipos de símbolos: letras, conectivos e parênteses. Na verdade, essa operação de tradução é muito mais complexa, sendo um assunto que não cabe discutir aqui. Por isso, é mais conveniente e mais correto dizermos que esses símbolos constituem propriamente o vocabulário do cálculo proposicional.

1.1.11 Fórmula bem formada

Uma sequência qualquer de elementos do vocabulário do cálculo proposicional constitui uma **fórmula**. No entanto, nem toda fórmula é aceitável para o cálculo proposicional. Uma fórmula aceitável para o cálculo proposicional é denominada **fórmula bem formada**, FBF (ou wff, *well-formed formula*), abreviadamente.

Para se obter as wffs, é preciso definir as **regras de formação para o cálculo proposicional**, que são a gramática do cálculo proposicional. Portanto, qualquer fórmula construída de acordo com essas regras de formação é uma wff.

1.1.12 Regras de formação

As regras de formação para o cálculo proposicional são:

1. Uma letra proposicional isolada é uma wff;
2. Se P é uma wff, então $\neg P$ também é;
3. Se P e Q são wffs, então $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \to Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ também são.

Exemplo 1.11. Exemplo e contraexemplos de fórmulas bem formadas:

a) A fórmula $P \to Q \wedge R$ é uma wff; observemos que não há a necessidade da colocação de parênteses visto que a conjunção tem precedência sobre a condicional.

b) A fórmula $P \rightarrow Q \leftrightarrow R$ não é uma wff, pois a condicional e a bicondicional têm a mesma precedência. Nesse caso, a fórmula seria uma wff se fosse dada por $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ ou $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$

c) A fórmula (A $\wedge(B \leftrightarrow C)$ não é uma wff, pois um dos parênteses foi aberto, mas não foi fechado.

d) A fórmula $A\wedge \rightarrow B$ não é uma wff, pois desobedece à regra 3 .

1.1.13 Exercícios

1. Determine se as fórmulas a seguir são wffs.

   (a) A

   (b) $(A \rightarrow B) \wedge C$

   (c) $B \wedge (C \vee D))$

   (d) $B \wedge C \vee D$

   (e) $\neg(A \vee B) \vee C \rightarrow D$

   (f) $(\neg((A \vee B) \wedge C \leftrightarrow ((D \vee \neg E) \rightarrow F))$

   (g) $((\neg(A \vee (\neg B) \leftrightarrow P) \vee E)$

2. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições, usando letras maiúsculas para abreviar as proposições simples.

   (a) Se Alfredo escrever para Maria, ela não irá para outra cidade.

   (b) Ou Alfredo escreve para Maria ou ela irá para outra cidade.

   (c) Alfredo não escreveu para Maria e ela irá para outra cidade.

   (d) Alfredo escreverá para Maria se, e somente se, ela for para outra cidade.

   (e) Se Alfredo escrever para Maria e João for ao encontro dela, então Maria não irá para outra cidade.

   (f) Se Alfredo for ao encontro de Maria ou João for ao encontro de Maria, ela não ficará mais na cidade.

   (g) João só irá ao encontro de Maria se Alfredo não estiver na cidade.

   (h) Se Maria se encontrar com João, ou se não for ao encontro com Alfredo, Maria irá para outra cidade.

   (i) O gerente despedirá Maria ou despedirá João.

   (j) Se João é vizinho de Maria, então João conhece Maria.

   (k) Se João ama Maria e Maria ama Paulo, então João não terá chance com Maria.

(l) Se João for despedido e procurar um emprego, com certeza ganhará um salário melhor.

(m) O número de acidentes diminuirá nas estradas se, e somente se, houver mais policiamento e os motoristas forem mais conscientes.

(n) Todos acertaram todas as questões, mas isso não significa que não devam estudar mais.

(o) Se Eduardo não apresentar uma queixa, então, nem Fernando investigará, nem Geraldo será classificado.

(p) Ou Eduardo apresentará uma queixa, ou, se Fernando investigar, então Geraldo será desclassificado.

3. Sejam as proposições: $A =$ Carlos é argentino e $B =$ João é brasileiro. Traduza para a linguagem natural as seguintes proposições simbólicas:

   (a) $A \vee B$

   (b) $\neg A \wedge B$

   (c) $A \rightarrow B$

   (d) $A \rightarrow \neg B$

   (e) $\neg A \leftrightarrow B$

   (f) $\neg A \wedge \neg B$

4. Coloque em linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas:

   (a) x é menor que 3 e maior que 0, ou, x não é igual a 7.

   (b) Se x é menor que 4 e maior que 2, então x é igual a 3.

   (c) Ou x é maior que 0, ou x é menor que 3 e y é maior que 0.

   (d) x é igual a 3 se, e somente se, y for maior que 0 .

   (e) Se x é diferente de 2, então y é igual a 9 e z é maior que 3.

5. Dadas as proposições: $A =$ Luiz é administrador, $B =$ Alfredo é bancário e $C =$ Maria é comerciante, traduza para a linguagem simbólica as proposições a seguir.

   (a) Ou Luiz é administrador ou Alfredo é bancário, mas Maria não é comerciante.

   (b) Luiz não é administrador e Maria é comerciante.

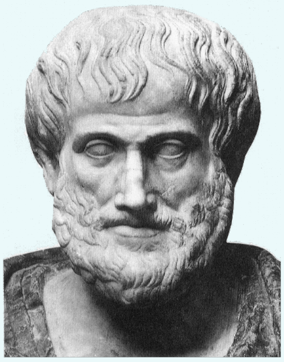
   (c) Se Alfredo é bancário e Maria é comerciante, então Luiz é administrador.

   (d) É mentira que Luiz é administrador, que Alfredo é bancário ou que Maria seja comerciante.

   (e) Luiz é administrador se, e somente se, Alfredo não é bancário e Maria não é comerciante.

Um pouco de história

A lógica, como ciência, foi criada por Aristóteles (384-322 a.C.). Mas, embora Aristóteles considerasse sua criação uma ciência independente da matemática e anterior a esta, as bases para a estruturação e sistematização da lógica empreendidas por ele já haviam sido lançadas antes pelos matemáticos gregos, ao criarem e desenvolverem o método dedutivo. De fato, esse método pressupõem, antes de tudo, leis corretas para o raciocínio, e isso se insere nos domínios da lógica. Entre essas leis, há que se destacar a lei da não contradição, que estatui que uma proposição no pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, e a lei do terceiro excluído, que estatui que uma proposição só pode ser verdadeira ou falsa, ambas introduzidas por Aristóteles.



Aristóteles

A lógica de Aristóteles, cujas fórmulas (por exemplo, silogismos) se expressavam em palavras da linguagem comum, sujeitas a regras sintáticas comuns, reinou soberanamente até o século XIX - quando foi criada a lógica matemática -, a despeito do significativo papel desempenhado pela lógica escolástica da Idade Média.

Gottfried W. Leibniz

Mas há que registrar, no século XVII, o trabalho desenvolvido por G. W. Leibniz (1646-1716) no sentido de criar uma álgebra simbólica formal para a lógica. A motivação para Leibniz foi a forte impressão que lhe causava o poder enorme da álgebra simbólica em campos diversos, e o objetivo de sua álgebra lógica seria o de conduzir o raciocínio mecanicamente e sem esforços demasiados em todos os campos do conhecimento. Mas Leibniz deixou apenas escritos fragmentos sobre o assunto, escritos que, ademais, só se tornaram conhecidos em 1901.

Fonte: Domingues e Iezzi (2003)

1.2 Tabela-Verdade

O valor-verdade de uma proposição composta é obtido de forma única a partir dos valores-verdade atribuídos à proposições simples que a compõem. A atribuição de um valor-verdade para uma proposição simples depende do seu contexto e faz parte do estudo semântico.

Para determinar o valor-verdade (V) ou (F) de uma proposição composta, usa-se um instrumento denominado tabela-verdade, na qual figuram todas as possíveis combinações dos valores-verdade das proposições simples.

Tomando-se P e Q como proposições simples quaisquer, a tabela-verdade de cada um dos conectivos binários já apresentados é dada por:

		Conjunção	Disjunção	Condicional	Bicondicional
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

No caso específico da negação (conectivo unário), tomando-se P como uma proposição simples qualquer, sua tabela-verdade é:

	Negação
P	$\neg P$
V	F
F	V

O número de linhas de uma tabela-verdade depende do número de proposições simples presentes; no caso anterior, há duas proposições simples e quatro linhas com valores-verdade. Para obtermos o número de linhas de uma tabela, basta usarmos a fórmula 2^n, sendo n o número de proposições simples envolvidas, no caso $n = 2$ e a tabela tem 4 linhas.

1.2.1 Critérios para o valor-verdade

O valor-verdade de uma proposição composta depende unicamente do valor lógico de suas proposições simples, seguindo os critérios a seguir.

Conjunção ($\wedge$)

Uma conjunção tem seu valor lógico (V) se, e somente se, as duas proposições que a compõem forem verdadeiras (V). Observe que, na tabela apresentada, a conjunção tem valor lógico (V) somente na primeira linha, onde as proposições P e Q são verdadeiras.

Disjunção ($\vee$)

Uma disjunção tem valor-verdade (F) se, e somente se, ambas as proposições que a compõem forem falsas (F) (é o caso da última linha da disjunção).

Condicional ($\rightarrow$)

Uma proposição condicional é falsa (F) se, e somente se, a proposição antecedente for verdadeira (**V**) e a consequente for falsa (F) (é o caso da segunda linha da condicional).

Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Uma proposição bicondicional tem valor-verdade (V) se, e somente se, as duas proposições que a compõem tiverem o mesmo valor-verdade (V) ou (F) (caso da primeira e quarta linhas).

Negação ($\neg$)

A negação de uma proposição verdadeira (V) é uma proposição falsa (F) e a de uma proposição falsa (F) é uma proposição verdadeira (V).

Exemplo 1.12. Verifique quais das proposições a seguir são verdadeiras:

a) O Brasil foi colônia de Portugal, mas hoje é um país independente.

$$
\begin{aligned}
C &= \text{O Brasil foi colônia de Portugal. } \textit{Valor-verdade } (\mathbf{V}) \\
I &= \text{Hoje (o Brasil) é um país independente. } \textit{Valor-verdade } (\mathbf{V})
\end{aligned}
$$

$$C\ (\mathbf{V}) \quad \wedge \quad I\ (\mathbf{V})$$

$$(\mathbf{V})$$

b) Vivemos em um país da América Latina, portanto, nosso idioma é proveniente do Latim.

P = Vivemos em um país da América Latina. (**V**)
L = Nosso idioma é proveniente do Latim. (**V**)

$$P\ (\mathbf{V}) \quad \rightarrow \quad L\ (\mathbf{V})$$
$$(\mathbf{V})$$

c) Só cursaremos a faculdade, se obtivermos aprovação no vestibular.

F = Cursaremos a faculdade. (**V**)
V = Obtivermos aprovação no vestibular. (**V**)

$$F\ (\mathbf{V}) \quad \leftrightarrow \quad V\ (\mathbf{V})$$
$$(\mathbf{V})$$

d) Se D. Pedro proclamou a independência do Brasil, ou declarou guerra à Inglaterra, então, o Brasil foi colônia da Inglaterra.

I = D. Pedro proclamou a independência do Brasil. (**V**)
G = (D. Pedro) declarou guerra à Inglaterra. (**F**)
C = O Brasil foi colônia da Inglaterra. (**F**)

$$I\ (\mathbf{V}) \quad \vee \quad G\ (\mathbf{F}) \quad \rightarrow \quad C\ (\mathbf{F})$$
$$(\mathbf{V})$$
$$(\mathbf{F})$$

Exemplo 1.13. Dados P, Q e R proposições quaisquer, construa a tabela-verdade da proposição $(P \rightarrow P \vee Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)$.

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \to P \vee Q$	$R \leftrightarrow Q$	$(P \to P \vee Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

1.2.2 Exercícios

1. Atribuindo um valor lógico a cada uma das proposições simples, de acordo com o contexto atual, conclua qual o valor lógico das seguintes proposições compostas:

   (a) O Brasil é um país emergente e o Japão está em crise.

   (b) O Brasil não é um país emergente, mas o Japão está em crise.

   (c) Se o Brasil é um país emergente, o Japão está em crise.

   (d) O Brasil é um pais emergente se, e somente se, o Japão estiver em crise.

   (e) Ou o Brasil não é um pais emergente ou o Japão não está em crise.

   (f) A seleção brasileira de futebol foi pentacampeã, mas se o técnico fosse outro, talvez ela não tivesse sido.

   (g) A inflação é praticamente nula, e o desemprego não para de crescer.

   (h) Ou os salários aumentam, ou as vendas diminuem.

   (i) Se São Paulo é a maior cidade da América Latina, sua arrecadação de impostos é alta ou parte do dinheiro arrecadado é desviado.

   (j) O azul é uma das cores da bandeira brasileira, e a bandeira de Portugal tem as cores verde e vermelho.

   (k) Se a Alemanha perdeu a Segunda Guerra Mundial e o Japão era seu aliado, então o Japão também perdeu a Segunda Guerra Mundial.

   (l) Se Cuba é o único pais comunista do Continente Americano e os Estados Unidos são um país capitalista, então Cuba será arrasada pelos Estados Unidos.

   (m) Se o Brasil já teve várias moedas, é provável que o real seja a última.

   (n) Se o Mercosul incomoda os países desenvolvidos, e o Brasil é país integrante desse mercado, então os países desenvolvidos tentarão conter o desenvolvimento brasileiro.

2. Dado que o valor lógico das proposições P e Q é (**V**), e de R e S é (**F**), determine o valor lógico das seguintes proposições:

   (a) $\neg P \vee \neg Q$

   (b) $P \vee \neg Q$

   (c) $\neg P \wedge (Q \rightarrow R)$

   (d) $\neg P \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$

   (e) $R \vee S \rightarrow P \wedge Q$

   (f) $P \wedge Q \leftrightarrow R \wedge S$

   (g) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

   (h) $((P \vee Q) \vee (S \rightarrow (P \rightarrow R))$

   (i) $((P \wedge Q) \vee (P \wedge (R \vee S)) \rightarrow S) \leftrightarrow S$

   (j) $((R \rightarrow P) \vee (R \vee S)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee S))$

3. Considerando-se P, Q e R proposições simples, construa as tabelas-verdade das seguintes proposições:

   (a) $(P \vee Q) \rightarrow R$

   (b) $\neg(P \vee Q) \wedge P$

   (c) $(\neg P \rightarrow Q) \vee R$

   (d) $P \wedge Q \rightarrow (R \leftrightarrow Q)$

   (e) $\neg P \wedge P \rightarrow (R \leftrightarrow Q)$

   (f) $(\neg P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow \neg P)$

   (g) $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \rightarrow R \wedge \neg Q)$

1.3 Classificação das proposições

No estudo das proposições compostas, feito com o auxílio da tabela-verdade, observa-se que existem as que são sempre verdadeiras, independentemente do valor lógico atribuído a cada uma de suas premissas simples. O mesmo ocorre com as proposições compostas que são sempre falsas. Em virtude disso, classificam-se as proposições compostas em *tautológicas*, *contraditórias* e *contingentes*.

Exemplo 1.14. Dadas P e Q proposições simples quaisquer, construa a tabela-verdade para as seguintes proposições:

a) $P \vee \neg P$ Construindo a tabela-verdade, temos:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

b) $P \wedge \neg P$

Construindo a tabela-verdade, temos:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

Observe que no exemplo 1.14 (a), o valor lógico da proposição é sempre (**V**), independentemente do valor lógico de P, e no item (b), o valor lógico é sempre (**F**).

1.3.1 Tautologia

Uma proposição composta é tautológica ou uma tautologia se, e somente se, seu valor lógico é sempre verdade (**V**), independentemente do valor lógico das proposições simples que a compõem.

Exemplo 1.15. a) A proposição $\neg(P \wedge \neg P)$ é uma tautologia, conforme demonstra sua tabela-verdade:

P	$\neg P$	$(P \wedge \neg P)$	$\neg(P \wedge \neg P)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Tal exemplo traduz a ideia do *Princípio da não contradição*:

> Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira (**V**) e falsa (**F**).

b) Um outro exemplo de tautologia envolve o princípio do *Terceiro Excluído*:

> Uma proposição ou é verdadeira (**V**) ou é falsa (**F**).

Tal princípio pode ser representado pela proposição $P \vee \neg P$, que a tabela a seguir demonstra ser uma tautologia.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

c) Finalmente, temos o *Princípio da Identidade*:

Toda proposição é idêntica a ela mesma.

Tal princípio pode ser representado pela proposição $P \leftrightarrow P$ cuja condição de ser uma tautologia pode ser percebida sem dificuldades.

Esses três princípios são a base para todo o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

d) A proposição $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ também é uma tautologia, o que pode ser demonstrado com sua respectiva tabela- verdade.

1.3.2 Contradição

Uma proposição composta é chamada de contradição se, e somente se, o seu valor lógico for sempre falso (**F**), independentemente do valor lógico das proposições simples que a compõem.

Exemplo 1.16. a) Como já foi demonstrado em um exemplo anterior, a proposição $P \wedge \neg P$ é uma contradição.

b) A proposição $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$ é contraditória. Veja a tabela a seguir:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F

1.3.3 Contingência

Chama-se uma proposição composta de contingente, ou uma contingência, quando o seu valor lógico pode ser (**V**) ou (**F**), dependendo do valor de suas proposições simples.

Exemplo 1.17. a) A proposição $P \rightarrow \neg P$ é uma contingência, de acordo com a sua tabela-verdade:

P	$\neg P$	$P \rightarrow \neg P$
V	F	F
F	V	V

b) A proposição $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee R) \wedge \neg P$ é uma contingência. (Faça a demonstração com o uso da tabela-verdade)

Como já deve estar claro, para se provar que uma proposição composta é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência, usa-se a última coluna de sua tabela-verdade. Se essa coluna apresentar somente valores lógicos (**V**), tem-se uma tautologia, se só apresentar valores (**F**), uma contradição, e quando apresentar os dois valores será uma contingência.

1.3.4 Exercícios

1. Use a tabela-verdade para classificar as proposições como tautologias, contingências ou contradições, sendo P, Q e R proposições quaisquer.

   (a) $P \rightarrow (P \vee R)$

   (b) $P \rightarrow (P \wedge Q)$

   (c) $P \vee Q \rightarrow P$

   (d) $P \rightarrow (Q \rightarrow P) \vee Q$

   (e) $P \leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$

   (f) $P \wedge (P \wedge (P \vee Q))$

   (g) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

   (h) $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$

   (i) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

   (j) $P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$

   (k) $P \rightarrow (P \rightarrow Q \vee Q)$

   (l) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$

   (m) $P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q \vee \neg Q)$

   (n) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg P$

   (o) $\neg(P \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q)))$

   (p) $(P \rightarrow Q \vee R) \wedge Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

   (q) $P \wedge Q \leftrightarrow (P \vee Q \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q))$

   (r) $P \rightarrow (P \rightarrow Q \wedge \neg Q)$

   (s) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

   (t) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1.4 Implicações e equivalências tautológicas

1.4.1 Equivalências tautológicas

Quando duas proposições possuem o mesmo valor lógico, a bicondicional formada por elas é uma tautologia. Dizemos então que a bicondicional é uma **equivalência tautológica**.

Exemplo 1.18. $\neg(P \wedge Q)$ é equivalente a $(\neg P \vee \neg Q)$, pois possuem o mesmo valor lógico. (Veja a quarta e a sétima coluna da tabela a seguir). Consequentemente, a bicondicional $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ formada por elas é uma tautologia como pode ser verificado na última coluna da tabela-verdade.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	V	V	**V**
F	V	F	V	V	F	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

Logo, $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ é uma equivalência tautológica.

1.4.2 Implicação tautológica

É uma proposição condicional que é uma tautologia.

Exemplo 1.19. A proposição $P \wedge Q \rightarrow P$ é uma implicação tautológica. Para provarmos essa afirmação usamos a tabela-verdade:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow P$
V	V	V	**V**
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**
F	F	F	**V**

Como pode ser observado na última coluna, a condicional é uma tautologia e portanto é uma implicação tautológica.

Podemos então afirmar que $P \wedge Q$ implica tautologicamente P.

A implicação tautológica é fundamental para o estudo da validade de um argumento, assunto que será tratado posteriormente.

Quando temos equivalências tautológicas e implicação tautológicas, trocamos os conectivos $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$ por $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$, respectivamente, para indicar que são tautologias. Quando duas expressões são equivalentes, uma pode ser trocada pela outra em uma proposição composta.

A seguir, temos uma tabela com as equivalências e implicações tautológicas mais utilizadas.

Nome	Equivalência
Idempotente (IDEM)	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Comutativa (COM)	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Associativa (ASSOC)	$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
Distributiva (DIST)	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Identidade (IDENT)	$P \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow P$ $P \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow P$
Complementar (COMPL)	$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathbf{V}$ $P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathbf{F}$
Lei de Morgan (DM)	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $(P \vee Q) \leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $(P \wedge Q) \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \rightarrow P$
Implicação material (IM)	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
Dupla Negação (DN)	$P \Leftrightarrow \neg\neg P$
Transposição (TRANS)	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
Exportação (EXP)	$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Tabela 1.1: Tabela das Equivalências Tautológicas

Nome	Regra de Inferência
Adição (AD)	$P \Rightarrow P \vee Q$ $Q \Rightarrow P \vee Q$
Simplificação (SIMP)	$P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge Q \Rightarrow Q$
Modus Ponens (MP)	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
Modus Tollens (MT)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
Silogismo Disjuntivo (SD)	$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$
Silogismo Hipotético (SH)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$
Dilema Construtivo (DC)	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)$
Dilema Destrutivo (DD)	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow (\neg P \vee \neg R)$
Contradição (CONTR)	$\mathbf{F} \Rightarrow P$
Tautologia (TAUT)	$P \Rightarrow \mathbf{V}$

Tabela 1.2: Tabela das Inferências (Implicações) Tautológicas

Usaremos as equivalências e implicações (regras de inferência) para mostrar que argumentos são válidos.

1.4.3 Exercícios

1. Verifique se as proposições a seguir são equivalências tautológicas.

   (a) $(P \to Q) \leftrightarrow ((P \vee R) \to Q)$

   (b) $(P \to Q) \leftrightarrow ((P \vee Q) \leftrightarrow Q)$

   (c) $((P \to Q) \to R) \leftrightarrow ((Q \to P) \to R)$

   (d) $(P \to Q) \leftrightarrow (P \to (P \wedge Q))$

2. Verifique se as proposições a seguir são implicações tautológicas.

   (a) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee R) \to (Q \vee R))$

   (b) $(P \wedge Q) \to (P \to \neg Q)$

   (c) $(P \to Q) \to ((P \wedge R) \to (Q \to R))$

   (d) $(P \to Q) \to (P \to (Q \vee R))$

   (e) $((P \to \neg Q) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge R) \to \neg P$

   (f) $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$

   (g) $(P \vee Q) \to (\neg(P \wedge R))$

   (h) $(\neg Q \vee P) \to (Q \to P)$

   (i) $((\neg Q \vee P) \to Q) \to P$

3. Mostre que as seguintes condicionais não são implicações tautológicas.

   (a) $P \to (P \wedge Q)$

   (b) $(P \vee Q) \to P$

   (c) $((P \to Q) \wedge \neg P) \to \neg Q$

   (d) $Q \to (P \to Q)$

4. Prove, usando a tabela-verdade, que a bicondicional $(P \to Q) \leftrightarrow (P \vee Q \leftrightarrow Q)$ é uma equivalência tautológica.

5. Use tabelas-verdade para concluir se as equivalências a seguir são tautológicas.

   (a) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

   (b) $P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))$

   (c) $(P \to (Q \to P)) \leftrightarrow ((P \to Q) \to (R \to R))$

   (d) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

1.5 Argumentos

Um argumento é uma wff que possui a seguinte forma simbólica

$$\boxed{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to C}$$

em que P_i, sendo $i = 1, 2, \dots, n$ são proposições (compostas ou não) chamadas de **premissas** ou **hipóteses** do argumento e C é chamada **conclusão** do argumento. As premissas devem servir para provar ou, no mínimo, formar alguma evidência para a conclusão de um argumento.

Outra forma de representar um argumento é colocar cada premissa em uma linha e a conclusão na última linha precedida da palavra "*portanto*", que na matemática é representada pelo símbolo $\therefore$.

Essa representação chamada de forma do argumento fica da seguinte forma:

1.	P_1	Premissa
2.	P_2	Premissa
⋮	$\vdots$	
n.	P_n	Premissa
(n+1).	$\therefore C$	Conclusão

Os livros didáticos costumam utilizar muito essa segunda forma.

Exemplo 1.20. A wff a seguir é um argumento

$$\underbrace{(A \to B) \;\wedge\; (A \vee B) \;\wedge\; (\neg\, C)}_{\text{Premissas}} \;\to\; \underbrace{B}_{\text{Conclusão}}$$

que também pode ser representado pela seguinte sequência de linhas:

1.	$A \to B$	(premissa)
2.	$A \to C$	(premissa)
3.	$\neg\, C$	(premissa)
4.	$\therefore B$	(conclusão)

Exemplo 1.21. Se tivesse dinheiro, iria ao cinema. Se fosse ao cinema, me encontraria com Júlia. Não me encontrarei com Júlia. Portanto, não tenho dinheiro.

Nesse argumento, temos:

a premissa P_1, é: Se tivesse **d**inheiro, iria ao **c**inema.

a premissa P_2 é: Se fosse ao **c**inema, me encontraria com **J**úlia.

a premissa P_3 é: Não me encontrarei com **J**úlia.

a conclusão C é: Não tenho **d**inheiro.

Considerando as proposições:

$$\begin{aligned} D = &\quad \text{Tenho dinheiro} \\ C = &\quad \text{Vou ao cinema} \\ J = &\quad \text{Encontrarei Júlia} \end{aligned}$$

o argumento simbolicamente fica da seguinte forma:

$$(D \to C) \land (C \to J) \land (\neg J) \to \neg D$$

ou representando em uma sequência de linhas:

1. $D \to C$ (premissa 1)
2. $C \to J$ (premissa 2)
3. $\neg J$ (premissa 3)
4. $\therefore \neg D$ (conclusão)

Exemplo 1.22. Se alguém é político, então faz promessas. Se alguém faz promessas, mente. Logo, se alguém é político, mente. Se tomarmos:

$$\begin{aligned} A = &\quad \text{Alguém é político.} \\ P = &\quad \text{Alguém faz promessas.} \\ M = &\quad \text{Alguém mente.} \end{aligned}$$

Teremos a seguinte forma de argumento:

1. $A \to P$
2. $P \to M$
3. $\therefore A \to M$

Algumas palavras indicadoras de premissas e conclusão:

Premissas	**Conclusão**
pois	portanto
desde que	logo
como	por conseguinte
porque	dessa maneira
assumindo que	consequentemente
visto que	assim sendo
admitindo que	segue que
dado que	de modo que
supondo que	resulta que
como consequência	então

1.5.1 Validade de um argumento

Um argumento é **válido** se, e somente se, for uma implicação tautológica, em que o antecedente é a conjunção das premissas e o consequente, a conclusão. Em outras palavras, um argumento é válido quando for impossível todas as premissas serem verdadeiras e a conclusão ser falsa.

Dado um argumento qualquer:

$$\begin{array}{rl} 1. & P_1 \\ 2. & P_2 \\ \vdots & \vdots \\ n. & P_{n-1} \\ (n+1). & \therefore C \end{array} \qquad \text{ou} \qquad P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow C$$

Se a conclusão C puder ser deduzida das premissas P_1, P_2, ..., P_n, ou seja, se o argumento é válido, escrevemos:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash C$$

O símbolo $\vdash$, chamado de **traço de asserção**, afirma que a proposição à sua direita pode ser deduzida utilizando como premissas somente as proposições que estão à sua esquerda.

Exemplo 1.23. O argumento $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ é válido. De fato, observe na tabela a seguir, que a única linha que as premissas $(A \rightarrow B)$ e A são ambas verdadeiras é na primeira linha e nessa linha a conclusão B também é verdadeira.

A	B	$A \rightarrow B$
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	V
F	F	V
Premissa	Conclusão	Premissa

Podemos conferir também, que esse argumento é válido pela sua tabela-verdade. Observe que na última coluna da tabela-verdade só temos valores lógicos verdadeiros, logo o argumento é uma tautologia e portanto é válido.

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A$	$(A \to B) \wedge A \to B$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Um argumento é **inválido** somente quando todas as suas premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Portanto, existe uma conexão entre o valor-verdade das proposições e a validade ou invalidade de um argumento. No entanto, é importante enfatizar que validade e valor-verdade são questões distintas.

A verdade e a falsidade são propriedades das proposições, enquanto a validade e a invalidade são propriedades dos argumentos. Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa e não pode ser válida ou inválida; do mesmo modo, um argumento pode ser válido ou inválido e não pode ser verdadeiro ou falso. O valor-verdade de uma proposição depende do contexto, enquanto a validade de um argumento depende da forma.

Exemplo 1.24. O argumento a seguir é, para a Lógica Matemática, um argumento válido, mas, no contexto astronômico, nem todas as afirmações são verdadeiras.

1. Se a Terra é uma estrela, então ela gira em torno do Sol.
2. A Terra é uma estrela.
3. Portanto, a Terra gira em torno do Sol.

Exemplo 1.25. O argumento a seguir é, para a Lógica Matemática, um argumento válido, assim como, no contexto astronômico, possui afirmações verdadeiras.

1. Se a Lua é satélite da Terra, então tem órbita em torno do Sol.
2. A Lua é satélite natural da Terra.
3. Portanto, a Lua tem órbita em torno do Sol.

Os assuntos tratados nos argumentos dos exemplos 1.24 e 1.25 são distintos, mas podem ser colocados na mesma forma, exatamente a forma do exemplo 1.23, que vimos ser válido. Portanto, quando provamos a validade dessa forma de argumento, estamos provando a validade de todos os argumentos que possuem a mesma forma.

1.5.2 Prova direta de validade

Vimos que a tabela verdade pode ser utilizada para provar a validade de um argumento. Mas dependendo do número de proposições simples que compõe um argumento, a construção de sua tabela-verdade é um trabalho exaustivo.

Uma outra maneira para se provar a validade de um argumento é a **prova direta** por meio da regras de dedução, que utiliza as implicações (regras de inferência) e equivalências tautológicas.

Observações

- As regras de equivalência podem ser utilizadas nos dois sentidos, isto é, a expressão da esquerda do símbolo $\Leftrightarrow$ pode ser trocada pela expressão da direita e vice-versa.
- Já as regras de inferência, podem ser utilizadas em um único sentido. A expressão da esquerda do símbolo $\Rightarrow$, pode ser trocada pela a da direita, mas o contrário NÃO pode ser feito.

Para uma melhor compreensão dos exemplos a seguir tenha em mãos a tabela com as regras de equivalência e inferência.

Exemplo 1.26. Mostre que o argumento $(A \to B) \wedge A \to B$ do exemplo 1.23 é válido usando as regras de dedução.

1ª forma

Colocamos na primeira linha TODAS as premissas e manipulamos as premissas usando as regras de dedução até obter a conclusão, indicando em cada linha qual regra foi utilizada.

1. $(A \to B) \wedge A$ (todas as premissas)
2. $A \wedge (A \to B)$ Comutativa (COM) na linha 1 para trocá-las de posição
3. $\therefore B$ Modus Ponens (MP) na linha 2 para chegar a conclusão

Veja que usando regras de equivalência e inferência chegamos à conclusão B do argumento. Logo o argumento é válido.

2ª forma

Colocamos cada premissa em uma linha e a dedução feita é colocada na linha seguinte, sempre indicando quais linhas e quais regras foram utilizadas para fazer a dedução.

1. $(A \to B)$ (Primeira premissa)
2. A (Segunda premissa)
3. $\therefore B$ Modus Ponens (MP) em 1 e 2

Exemplo 1.27. Construa uma prova direta de validade para os argumentos a seguir.

a) Ou voltamos ao baile ou ficamos na rua conversando. Decidimos não voltar ao baile. Logo, ficamos na rua conversando.

Antes de aplicarmos as regras de dedução, devemos obter o argumento na sua forma simbólica:

$$\begin{aligned} B &= \text{Voltamos ao baile.} \\ R &= \text{Ficamos na rua conversando.} \end{aligned}$$

Assim, o argumento será

(a) $B \vee R$

(b) $\neg B$

(c) $\therefore R$

Analisando as equivalências e as implicações tautológicas, o melhor a ser feito é aplicar a implicação tautológica do Silogismo Disjuntivo (SD) nas premissas das linhas 1 e 2, que formam seu antecedente. Aplicando essa implicação, deduzimos a premissa R. Como a fórmula da nova premissa é idêntica à fórmula da conclusão do argumento, obtivemos a prova de validade desse argumento. Simbolicamente, a prova completa seria dada por:

1. $B \vee R$ (Primeira premissa)
2. $\neg B$ (Segunda premissa)
3. $\therefore R$ Silogismo Disjuntivo (SD) em 1 e 2

b) Não é o caso de irmos ao baile ou ficarmos na rua conversando. Portanto, não ficaremos na rua conversando.

Primeiro é preciso obter a forma simbólica do argumento:

$$\begin{aligned} B &= \text{Voltamos ao baile.} \\ R &= \text{Ficamos na rua conversando.} \end{aligned}$$

Assim, o argumento será

(a) $\neg(B \vee R)$

(b) $\therefore \neg R$

Consultando as equivalências e as implicações tautológicas, o melhor a ser feito é aplicar a equivalência Lei de De Morgan (MOR) na premissa 1, obtendo uma nova premissa contendo a sua equivalência: $\neg B \wedge \neg R$. Portanto, usamos MOR na regra de dedução 1 a para introduzirmos a nova premissa, ficando assim este passo da prova de validade do argumento:

1. $\neg(B \vee R)$
2. $\therefore \neg R$
3. $\neg B \wedge \neg R$ Lei De Morgan (DM) em 1

A fórmula obtida na nova premissa ainda não é idêntica à conclusão do argumento, portanto é necessário prosseguir com a prova. Analisando novamente a premissa original do argumento e a nova premissa obtida, o melhor a ser feito é aplicar a implicação tautológica da Simplificação (SIM) na nova premissa, obtendo assim uma nova premissa cuja fórmula é $\neg R$, idêntica à fórmula da conclusão. Portanto, a prova de validade do argumento foi obtida:

1. $\neg(B \vee R)$
2. $\therefore \neg R$
3. $\neg B \wedge \neg R$ Lei De Morgan (DM) em 1
4. $\neg R$ Simplificação (SIM) em 1 e 3

Exemplo 1.28. Mostre que o argumento $(D \to C) \wedge (C \to J) \wedge (\neg J) \to \neg D$ do exemplo 1.21 é válido usando as regras de dedução.

Apresentaremos a prova de validade de duas maneiras diferentes, cabendo a você optar qual prefere.

1ª forma:

Colocamos na primeira linha TODAS as premissas e manipulamos as premissas usando as regras de dedução até obter a conclusão, indicando em cada linha qual regra foi utilizada.

1. $(D \to C) \wedge (C \to J) \wedge (\neg J)$ (todas as premissas)
2. $(D \to J) \wedge (\neg J)$ (SH) na linha 1 em $(D \to C)$ e $(C \to J)$
3. $\therefore \neg D$ (MT) na linha 2 para chegar a conclusão

Usando regras de equivalência e inferência chegamos à conclusão $\neg D$ do argumento. Logo o argumento é válido.

2ª forma

Colocamos cada premissa em uma linha e apenas a troca feita por meio das regras é colocada na linha seguinte. Indicando sempre quais linhas e quais regras foram utilizadas para fazer as trocas.

1. $(D \to C)$ (Primeira premissa)
2. $(C \to J)$ (Segunda premissa)
3. $(\neg J)$ (Terceira premissa)
4. $\therefore \neg D$ (Conclusão)
5. $(D \to J)$ Silogismo Hipotético (SH) em 1 e 2
6. $\neg D$ Modus Tollens (MT) em 3 e 4

Exemplo 1.29. Mostre que o argumento $(P \to Q) \wedge (\neg R \to P) \wedge \neg Q \to R$ é válido.

1ª Forma

1. $(P \to Q) \wedge (\neg R \to P) \wedge \neg Q$ (todas as premissas)
2. $(P \to Q) \wedge \neg Q \wedge (\neg R \to P)$ (COM) linha 1
3. $\neg P \wedge (\neg R \to P)$ (MT) linha 2
4. $\neg P \wedge (\neg P \to \neg(\neg R))$ (TRANS) linha 3
5. $\neg P \wedge (\neg P \to R)$ (DN) linha 4
6. $\therefore R$ (MP) linha 5

2ª Forma

1. $(P \to Q)$ (Primeira premissa)
2. $(\neg R \to P)$ (Segunda premissa)
3. $\neg Q$ (Terceira premissa)
4. $\therefore R$ (Conclusão)
5. $\neg P$ (MT) em 1 e 3
6. $\neg P \to \neg(\neg R)$ (TRANS) em 2
7. $\neg P \to R$ (DN) em 6
8. $\therefore R$ (MP) em 5 e 7

Para mostrar que é possível provar a validade de alguns argumentos de mais de uma forma, no exemplo a seguir prova do argumento foi feita de quatro formas distintas.

Exemplo 1.30. Prove a validade das formas de argumento a seguir.

$$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A) \wedge (A \to \neg C) \to (\neg A \wedge \neg C)$$

1. $A \to B$ P_1
2. $B \to C$ P_2
3. $C \to A$ P_3
4. $A \to \neg C$ P_4
5. $\therefore \neg A \wedge \neg C$ Conclusão
6. $C \to \neg C$ (SH) em 3 e 4
7. $\neg C \vee \neg C$ (IM) em 6
8. $\neg C$ (IDEM) em 7
9. $\neg B$ (MT) em 2 e 8
10. $\neg A$ (MT) em 1 e 9
11. $\neg A \wedge \neg C$ (CONJ) em 10 e 8

Essa é a forma mais fácil e mais rápida de efetuar a prova da validade desse argumento. Vamos às outras formas.

6. $A \to C$ (SH) em 1 e 2
7. $\neg A \to \neg C$ (TRANS) em 6
8. $A \to \neg A$ (SH) em 4 e 7
9. $\neg A \vee \neg A$ (IM) em 8
10. $\neg A$ (IDEM) em 9
11. $C \to \neg C$ (SH) em 3 e 4
12. $\neg C \vee \neg C$ (IM) em 11
13. $\neg C$ (IDEM) em 12
14. $\neg A \wedge \neg C$ (CONJ) em 10 e 13

6. $A \to C$ (SH) em 1 e 2
7. $(C \to A) \wedge (A \to C)$ (CONJ) em 3 e 6
8. $A \leftrightarrow C$ (EM) em 7
9. $(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$ (EM) em 8
10. $\neg A \vee \neg C$ (IM) em 4
11. $\neg(A \wedge C)$ (DM) em 10
12. $\neg A \wedge \neg C$ (SD) em 9 e 11

6. $A \to C$ (SH) em 1 e 2
7. $(C \to A) \land (A \to C)$ (CONJ) em 3 e 6
8. $A \leftrightarrow C$ (EM) em 7
9. $(A \land C) \lor (\neg A \land \neg C)$ (EM) em 8
10. $A \to (A \land \neg C)$ (ABS) em 4
11. $\neg A \lor (A \land \neg C)$ (IM) em 10
12. $(\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg C)$ (DIST) em 11
13. $\neg A \lor \neg C$ (SIMP) em 12
14. $\neg(A \land C)$ (DM) em 13
15. $\neg A \land \neg C$ (SD) em 9 e 14

A seguir será apresentado um teorema que auxilia na demonstração de que argumentos que possuem a forma

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \to (R \to S)$$

são válidos. Veja que a conclusão desse argumento é $(R \to S)$.

Teorema 1.1 (Teorema da Dedução (T.D.))**.** *Dado um argumento do tipo*

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \to (R \to S),$$

se a proposição S pode ser inferida pela aplicação das regras de dedução direta nas premissas P_1, P_2, P_3, …, P_n e em R, então

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \to (R \to S)$$

é válido.

Em outras palavras, esse teorema diz que se transformarmos R em premissa e provarmos que

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \land R \to S$$

é um argumento válido, então

$$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \to (R \to S)$$

também será válido.

Esse teorema segue da regra de equivalência *Exportação*. Veja a regra na tabela das equivalências e implicações tautológicas. Vejamos sua aplicação.

Exemplo 1.31. Mostre a validade do argumento a seguir usando o Teorema da Dedução

$$(A \to B) \wedge (C \to \neg B) \to (A \to \ \neg C)$$

De acordo com o teorema da dedução podemos transformar a proposição A da conclusão em premissa e tirá-la da conclusão obtendo o seguinte argumento equivalente

$$(A \to B) \wedge (C \to \neg B) \wedge A \to \ \neg C$$

e se o argumento acima for válido, então o argumento original também é.

1. $A \to B$ (premissa)
2. $C \to \neg B$ (premissa)
3. A (transformada em premissa)
4. $\therefore \neg C$ (Conclusão)
5. B (MP) em 1 e 3
6. $\neg C$ (MT) em 2 e 5

Provamos acima que o argumento $(A \to B) \wedge (C \to \neg B) \wedge A \to \ \neg C$, pois pelas regras de dedução obtivemos a conclusão $\neg C$.

Logo, pelo T.D o argumento original $(A \to B) \wedge (C \to \neg B) \to (A \to \ \neg C)$ também é válido.

1.5.3 Prova indireta

A **prova indireta da validade** de um argumento consiste da introdução de uma nova premissa que seja a negação da conclusão e, com base nisso, a derivação de uma contradição. Dessa contradição obtida, conclui-se a validade do argumento. A prova indireta da invalidade é mais conhecida como **redução ao absurdo** (*Reductio ad absurdum*), sendo utilizada em algumas demonstrações matemáticas.

Redução ao Absurdo (RA)

Se a partir de uma hipótese $\neg\phi$ derivarmos uma contradição, então podemos admitir ϕ.

Exemplo 1.32. Prove a validade dos argumentos a seguir.

a) $(A \to B), (\neg B) \vdash (\neg A)$

1. $A \rightarrow B$ (premissa)
2. $\neg B$ (premissa)
3. $\therefore \neg A$ (Conclusão)
4. $\neg\neg A$ (RA) negação da conclusão em 3
5. A (DN) em 4
6. B (MP) em 1 e 5
7. $\neg B \wedge B$ (CONJ) em 2 e 6
8. **F** (COMPL) em 7
9. $\neg A$ (CONTR) em 8

b) $(A \leftrightarrow \neg B) \vdash (\neg(A \wedge B))$

1. $A \leftrightarrow \neg B$ (premissa)
2. $\therefore \neg(A \wedge B)$ (Conclusão)
3. $\neg(\neg(A \wedge B))$ (RA) em 2
4. $A \wedge B$ (DN) em 3
5. A (SIMP) em 4
6. B (SIMP) em 4
7. $(A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow A)$ (IM) em 1
8. $A \rightarrow \neg B$ (SIM) em 7
9. $\neg B$ (MP) em 5 e 8
10. $B \wedge \neg B$ (CONJ) em 6 e 9
11. **F** (COMPL) em 10
12. $\neg(A \wedge B)$ (CONTR) em 11

Exemplo 1.33. Um exemplo de prova por redução ao absurdo é dada o seguinte argumento:

Se o quadrado de um número inteiro for ímpar,
então esse número também é ímpar

O que podemos abreviar como:

$$\boxed{(n \in \mathbb{Z}) \wedge \big(n^2 \text{ é ímpar}\big) \rightarrow (n \text{ é ímpar})}$$

Se n não for ímpar, ele terá de ser par e então da forma $n = 2k$, para algum inteiro k. Logo, teríamos $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 =$ par. Ou seja, teríamos ao mesmo tempo que n^2 é ímpar (esta é a hipótese da afirmação) e par. Um absurdo!!

1.5.4 Prova de invalidade

Da mesma forma que a prova de validade de um argumento, a de invalidade pode ser realizada por meio da tabela-verdade, porém, dependendo do tamanho, essa forma de realizar tal prova torna-se inviável.

A única condição em que um argumento é inválido acontece quando todas as suas premissas são verdadeiras e sua conclusão é falsa (antecedente (**V**) e consequente (**F**)). Se conseguirmos obter tal situação, estará provada a invalidade do argumento.

Método de atribuição de valores

Tal método consiste em atribuir valores-verdade às proposições da conclusão, de forma que esta se torne falsa (F); a partir daí, passamos a atribuir valores-verdade para as demais proposições, de modo a tornar verdadeira cada uma das premissas.

Exemplo 1.34. Prove que a forma simbólica do argumento a seguir é inválida:

1. $A \rightarrow B$ (premissa)
2. $C \rightarrow D$ (premissa)
3. $A \vee D$ (premissa)
4. $\therefore B \vee C$ (conclusão)

Para que a conclusão do argumento seja falsa, devemos atribuir valor (**F**) para B e C, obtendo-se:

1. $A \rightarrow B(\mathbf{F})$ (premissa)
2. $C(\mathbf{F}) \rightarrow D$ (premissa)
3. $A \vee D$ (premissa)
4. $\therefore B(\mathbf{F}) \vee C(\mathbf{F})$ (conclusão)

A seguir, devemos obter o valor-verdade (**V**) para cada uma das premissas. Comecemos com aquela que determina de forma única o valor-verdade para uma proposição:

- para que a premissa 1 seja (**V**), a proposição A deve ser (**F**):

1. $A(\mathbf{F}) \to B(\mathbf{F})$ (premissa)
2. $C(\mathbf{F}) \to D$ (premissa)
3. $A(\mathbf{F}) \vee D$ (premissa)
4. $\therefore B(\mathbf{F}) \vee C(\mathbf{F})$ (conclusão)

- para que a premissa 3 seja (**V**), a proposição D deve ser (**V**):

1. $A(\mathbf{F}) \to B(\mathbf{F})$ (premissa)
2. $C(\mathbf{F}) \to D(\mathbf{V})$ (premissa)
3. $A(\mathbf{F}) \vee D(\mathbf{V})$ (premissa)
4. $\therefore B(\mathbf{F}) \vee C(\mathbf{F})$ (conclusão)

Desse modo, obtemos todas as premissas (**V**) com a conclusão (**F**), o que termina a prova de invalidade desse argumento.

A	B	C	D	1.	2.	3.	4.	$1. \wedge 2. \wedge 3.$	$1. \wedge 2. \wedge 3. \to 4.$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	V	F	V	F	V	V	F	**V**
V	V	F	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	F	V	V	V	V	V	**V**
V	F	V	V	F	V	V	V	F	**V**
V	F	V	F	F	F	V	V	F	**V**
V	F	F	V	F	V	V	F	F	**V**
V	F	F	F	F	V	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	F	F	V	F	**V**
F	V	F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	V	F	V	F	**V**
F	F	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	V	F	V	F	F	V	F	**V**
F	F	F	V	V	V	V	F	V	**F**
F	F	F	F	V	V	F	F	F	**V**

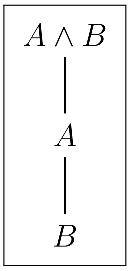
Somente a penúltima linha apresenta valor-verdade (**F**). Como prova de invalidade basta uma linha com final (**F**), no entanto, outros argumentos podem apresentar mais linhas com valor final (**F**), ou seja, a atribuição de valores pode não ser única.

1.5.5 Árvore de Refutação

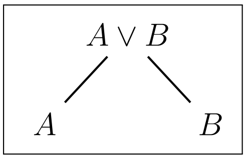
É um método indireto usado para verificar a validade ou a invalidade de um argumento. Para poder usá-lo, devem ser definidas algumas regras, provenientes das implicações tautológicas usadas no método direto.

Dadas A e B duas proposições quaisquer, as regras do tableau semântico são:

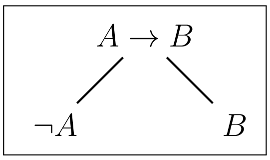
1. Regra da Conjunção - RCJ



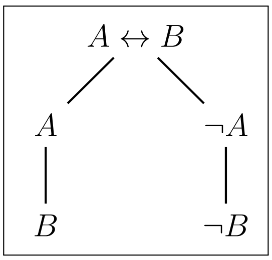
2. Regra da Disjunção - RDJ



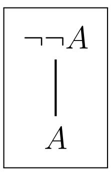
3. Regra da Condicional - RCD



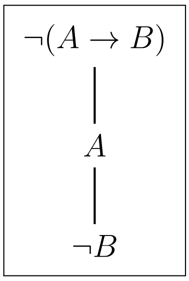
4. Regra da Bicondicional - RBD



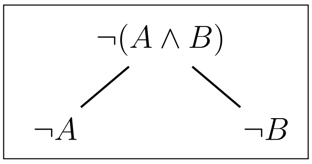
5. Regra da Dupla Negação - RDN



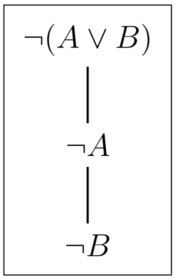
6. Regra da Negação do Condicional - RNCD



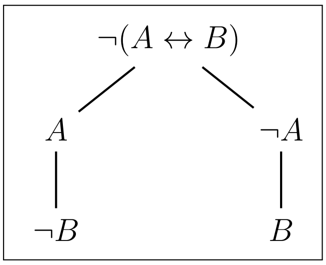
7. Regra da Negação da Conjunção - RNCJ



8. Regra da Negação da Disjunção - RNDJ



9. Regra da Negação da Bicondicional - RNBC



Método da Árvore de Refutação

Dada uma forma de argumento

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash C$$

acrescenta-se como nova premissa a negação da conclusão, obtendo-se:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash \neg C$$

que é a raiz da árvore de refutação.
A partir daí, desenvolvem-se os ramos da árvore, utilizando-se as nove regras apresentadas, até que, em cada um deles, só reste uma proposição simples ou a negação de uma proposição simples.

No desenvolvimento dos ramos é mais eficiente aplicar inicialmente as regras que não resultem em ramificações: RCJ, RDN, RNCD e RNDJ, para, em seguida, aplicar as que ramificam: RDJ, RCD, RBD, RNCJ e RNBC. Observando-se que todas as premissas devem ser utilizadas.

Cada linha gerada, como na dedução direta, deve ser justificada, indicando-se a linha da premissa e a regra utilizada. Cada premissa pode ser usada uma única vez e a regra deve ser aplicada no seu conectivo principal.

Definição 1.1 (Ramo fechado/aberto)**.** Um ramo de uma árvore de refutação é fechado quando contém uma proposição e sua negação. Caso contrário, será um ramo aberto.

Para justificar o fechamento de um ramo coloca-se $F(i, j)$ logo abaixo da premissa obtida, sendo i e j as linhas onde ocorrem as premissas contraditórias.

Ao terminar a ramificação da árvore de refutação, se todos os ramos forem fechados, o argumento será válido. Caso contrário, o argumento será inválido.

Exemplo 1.35. Usando a árvore de refutação nas formas de argumentos apresentadas a seguir, conclua, para cada uma delas, sua validade ou invalidade.

a) 1. $A \wedge B$

   2. $A \wedge C \to \neg D$

   3. $E \to C$

   4. $B \to E$

   5. $\therefore \neg D$

   Árvore feita na aula ao vivo

   Como todos os ramos são fechados, a forma de argumento é válida.

b) (a) $A \to B \vee C$

   (b) $B \wedge C \to D$

   (c) $\therefore A \to D$

   Árvore feita na aula ao vivo

   Como existem ramos abertos, podemos concluir que a forma de argumento é inválida.

c) (a) $A \vee B$

(b) A

(c) $\therefore \neg B$

Árvore feita na aula ao vivo

Como existem ramos abertos, a forma de argumento é inválida.

d) (a) $\neg A \vee B \to C$

(b) $A \to \neg B$

(c) $\therefore A \to B$

Árvore feita na aula ao vivo

Como há ramos abertos, a forma de argumento é inválida.

e) (a) $A \to (B \to C)$

(b) A

(c) B

(d) $\therefore C$

Árvore feita na aula ao vivo

Como todos os ramos são fechados, a forma de argumento é válida.

f) (a) $D \wedge E \to F$

(b) $(D \to F) \to G$

(c) $\therefore D \to G$

Árvore feita na aula ao vivo

Como existem ramos abertos, a forma de argumento é inválida.

1.5.6 Exercícios

1. Traduza para a linguagem simbólica os argumentos seguintes, usando a primeira letra da palavra sublinhada.

   (a) Se o avião não tivesse **caído**, teria feito contato por **rádio**. O avião não fez contato pelo rádio. Portanto, o avião caiu.

   (b) Alberto será **despedido** ou **transferido** para outro departamento. Alberto não será transferido. Portanto, será despedido.

   (c) Se a regra **existe**, deve ser **usada**. A regra existe. Portanto, deve ser usada.

   (d) Se os **impostos** aumentarem, haverá menos circulação de **dinheiro**. Se houver menos circulação de dinheiro, as **vendas** no comércio cairão. Se as vendas do comércio caírem, a **arrecadação** de impostos diminuirá. Os impostos aumentaram. Portanto, a sua arrecadação diminuirá.

(e) A empresa será **privatizada** se, e somente se, for **deficitária** ou não atingir os seus **objetivos** sociais. A empresa não é deficitária e atinge seus objetivos sociais. Portanto, não será privatizada.

(f) Se **vendem** mais, então estão sempre **fresquinhos**. Se estão sempre fresquinhos, então vendem mais. Portanto, vendem mais se, e somente se, estiverem sempre fresquinhos.

(g) Alfredo é **adolescente** ou está na **terceira** idade. Alfredo não é adolescente. Portanto, ele está na terceira idade.

(h) Bárbara está fora de **casa** ou atendendo ao **telefone**. Mas se ela não está em casa, foi ao **supermercado**. Se ela não se encontra em casa, está comprando **doces**. Portanto, ou ela foi ao supermercado ou está comprando doces.

(i) Se todos os **impostos** devidos fossem pagos, haveria *superávit* nas **contas** governamentais. Havendo *superávit* nas contas, não seria necessário **aumentar** os impostos dos trabalhadores. Os impostos foram aumentados. Portanto, nem todos os impostos devidos foram pagos.

(j) Se Paulo **aceitar** que está errado e não **mudar** sua opinião, então devemos **condená-lo**. Se ele mudar sua opinião, certamente será acusado de **traição**. Paulo mudará ou não sua opinião. Logo, devemos condená-lo ou ele será acusado de traição.

(k) Se as **Leis** são boas e o seu cumprimento é **rigoroso**, então o índice de **criminalidade** diminuirá. Se o cumprimento rigoroso da Lei faz diminuir o índice de criminalidade, então o **problema** é a corrupção. As Leis são boas. Portanto, o problema é a corrupção.

(l) Se Alice **casar**, então Bete será dama de **honra** e Carolina, **madrinha**. Se Bete for dama de honra e Carolina madrinha, então haverá uma **discussão** na cerimônia de casamento. Portanto, se Alice casar, haverá uma discussão na cerimônia.

(m) Se Deus **existe**, a **morte** não é o fim. Se a morte não é o fim, há outra **vida**. Portanto, se Deus existe, há outra vida.

(n) Se Pedro **ganhou** dinheiro, comprará um par de **tênis** ou um **relógio**. Sei que Pedro não comprará um relógio. Portanto, se Pedro não comprar um par de tênis, não ganhou dinheiro.

2. Determine, por tabelas-verdade, se as seguintes formas simbólicas de argumento são válidas:

(a)
1. $A \vee B$
2. $\neg B$
3. $\therefore A$

(b)
1. $A \to B$
2. $B \to C$
3. $\therefore \neg C \to \neg A$

3. Justifique cada uma das premissas introduzidas pela demonstração direta de validade:

(a)
1. $A \to B$
2. $B \to C$
3. $D \to E$
4. $A \vee D$
5. $\therefore C \vee E$
6. $A \to C$
7. $C \vee E$

(b)
1. $A \wedge B$
2. $(A \vee C) \to D$
3. $\therefore A \wedge D$
4. A
5. $A \vee C$
6. D
7. $A \wedge D$

(c)
1. $A \to B$
2. $B \to C$
3. $C \to D$
4. $\neg D$
5. $A \vee E$
6. $\therefore E$
7. $A \to C$
8. $A \to D$
9. $\neg A$
10. E

(d)
1. $(A \vee B) \to C \wedge (E \wedge D)$
2. B
3. $\therefore C \wedge E$
4. $B \vee A$
5. $A \vee B$
6. $C \wedge (E \wedge D)$
7. $(C \wedge E) \wedge D$
8. $C \wedge E$

(e)
1. $A \wedge B$
2. $(A \vee C) \to D$
3. $\therefore A \wedge D$
4. A
5. $A \vee C$
6. D
7. $A \wedge D$

(f)
1. $W \to X$
2. $(W \to Y) \to (Z \vee X)$
3. $(W \wedge X) \to Y$
4. $\neg Z$
5. $\therefore X$
6. $W \to (W \wedge X)$
7. $W \to Y$
8. $Z \vee X$
9. X

(g)
1. $(A \to B) \wedge (C \to D)$
2. $E \to F$
3. $F \to G$
4. $\neg B \vee \neg G$
5. $\therefore \neg A \vee \neg E$
6. $E \to G$
7. $A \to B$
8. $\neg A \vee \neg E$

(h)
1. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
2. $\neg C$
3. $\therefore D$
4. $C \vee D$
5. D

4. Construa uma prova direta de validade para os seguintes argumentos:

   (a) Ou o chefe não notou a mudança, ou aprovou-a. Ele notou a mudança. Portanto, deve tê-la aprovado.

(b) Se o papel de tornassol ficar vermelho, então a solução é ácida. O papel de tornassol ficou vermelho. Portanto, a solução é ácida.

(c) Se Botafogo ou Santos ganha, então Palmeiras e Guarani perdem. Santos Ganha. Portanto, Guarani perde.

(d) Se Pedro ganhou dinheiro, comprará um tênis ou um relógio. Sei que Pedro não comprará um relógio. Portanto, se Pedro não comprar um tênis, não ganhou dinheiro.

(e) Se Luís comprar um carro, então Carlos também comprará. Se Carlos comprar um carro, então ou Maria ou Glória tirarão a Carteira de Habilitação. Se ou Maria ou Glória tirarem a Carteira de Habilitação, então João sofrerá um acidente automobilístico. Se a compra de um carro por Luís implicar um acidente com João,então Donizete será contratado como motorista. Portanto, Donizete será contratado como motorista.

(f) Se não existem subsídios do governo para as escolas, então há controle do governo sobre as escolas. Se há controle, não há decadência nas escolas. Ou há decadência ou florescimento. Constata-se que não existe florescimento das escolas. Logo, há subsídios para as escolas.

(g) Se Napoleão usurpou o poder que legitimamente não lhe cabia, então deve ser condenado. Ou Napoleão foi um monarca legítimo ou usurpou um poder que legitimamente não lhe cabia. Napoleão não foi um monarca legítimo. Portanto, deve ser condenado.

(h) O oxigênio do tubo ou combinou-se com o filamento, formando um ácido, ou evaporou completamente. O oxigênio do tubo não pode ter evaporado totalmente. Portanto, o oxigênio do tubo combinou-se com o filamento, formando um ácido.

(i) Se estudo, sou aprovado em Lógica Matemática. Se não jogo vôlei, então estudo. Não fui aprovado em Lógica Matemática. Portanto, joguei vôlei.

(j) Se Sônia ou Alfredo ganha, Maria e Bete perdem. Sônia ganha. Logo, Bete perde.

(k) Se continuar chovendo, a cidade ficará alagada. Se continuar chovendo e a cidade alagar, haverá congestionamento. Se houver congestionamento, então o culpado é o prefeito. Logo, se continuar chovendo, o culpado é o prefeito.

(l) Se o gerente do banco tivesse acionado o alarme, o cofre se trancaria e a polícia chegaria a tempo de prender os assaltantes. Os assaltantes não foram presos. Portanto, o gerente não acionou o alarme.

5. Construa uma prova direta de validade para as seguintes formas de argumentos:

(a)

1. $(D \wedge E) \to F$
2. $(E \to F) \to G$
3. $\therefore D \to G$

(b)

1. $P \to Q$
2. $(P \to Q) \to (Q \to P)$
3. $\therefore P \leftrightarrow Q$

(c)

1. C
2. $B \to A$
3. $C \to B$
4. $\therefore A$

(d)

1. $A \to (B \to C)$
2. A
3. B
4. $\therefore C$

(e)

1. $A \to B \wedge C$
2. A
3. $\therefore A \wedge B$

(f)

1. A
2. $\therefore (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(g)

1. $A \wedge B \to C \wedge D$
2. $\neg\neg A$
3. B
4. $\therefore D$

(h)

1. $A \vee B$
2. $A \to C$
3. $B \to C$
4. $\therefore C$

(i)

1. $A \vee A$
2. $A \to B \wedge C$
3. $\therefore C$

(j)

1. $A \leftrightarrow B$
2. $B \leftrightarrow C$
3. $\therefore A \leftrightarrow C$

(k)

1. $A \to B$
2. $C \to \neg B$
3. $\therefore A \to \neg C$

(l)

1. $H \vee I \to J \wedge (K \wedge L)$
2. I
3. $\therefore J \wedge K$

(m)

1. $M \vee N \to O \wedge P$
2. $\neg O$
3. $\therefore \neg M$

(n)

1. $F \leftrightarrow S \vee D$
2. S
3. $\therefore F$

(o)

1. $W \to X$
2. $(W \to X) \to (Z \vee X)$
3. $\neg Z$
4. $\therefore X$

(p)

1. $\neg A \wedge B$
2. $C \vee A$
3. $C \wedge B \to M \wedge N$
4. $\therefore M$

(q)

1. $A \wedge B$
2. $A \vee C \to D$
3. $\therefore A \wedge D$

(r)

1. $\neg Q \to P \wedge Q$
2. $\therefore \neg P \to Q$

6. Prove a validade das seguintes formas simbólicas de argumentos usando a Redução ao Absurdo:

(a)
1. $\neg P \vee \neg Q$
2. $\therefore \neg(P \wedge Q)$

(b)
1. $P \to Q$
2. $\therefore \neg P \vee Q$

(c)
1. $P \wedge \neg Q$
2. $\therefore \neg(P \to Q)$

(d)
1. $P \to Q$
2. $\therefore \neg Q \to \neg P$

(e)
1. $P \vee Q$
2. $\neg P$
3. $\therefore Q$

(f)
1. $P \to Q$
2. $Q \to R$
3. $\therefore P \to R$

(g)
1. $P \to Q$
2. $\neg Q$
3. $\therefore \neg P$

7. Utilize a árvore de refutação para verificar a validade das seguintes formas de argumento.

(a)
1. $M \to (V \leftrightarrow P)$
2. $P \wedge V$
3. $\therefore M$

(b)
1. $F \wedge S \to I$
2. $Z \vee G$
3. I
4. G
5. $F \wedge Z$
6. $\therefore S$

(c)
1. $C \to M$
2. C
3. $\therefore M$

(d)
1. $P \to (B \wedge \neg C \to A)$
2. $P \to B$
3. $\therefore P \to A \vee C$

(e)
1. $A \to B$
2. $\neg B \to C$
3. $\therefore A \vee \neg C \to B$

(f)
1. $B \to L$
2. $\neg B$
3. $\therefore \neg L$

(g)
1. $B \to L$
2. $\neg L$
3. $\therefore \neg B$

(h)
1. $E \wedge I \to \neg A$
2. $\neg E$
3. $\therefore A \to \neg I$

1.6 Funções Proposicionais e Quantificadores

No **Cálculo Proposicional**, vimos como podíamos compor as várias proposições simples, P, Q, $\ldots$ mediante as regras de formação e os cinco conectivos. Não nos interessava analisar a proposição simples.

No **Cálculo de Predicados**, ou cálculo funcional, a nossa atenção se volta para a estrutura de uma proposição simples. Nesse caso, a mais simples proposição é a que envolve um sujeito e um predicado: o primeiro designa ou nomeia um objeto ou indivíduo e o segundo indica a sua propriedade.

1.6.1 Termo e predicado

Dada uma proposição simples qualquer, pode-se destacar dela dois entes: o **termo** e o **predicado**. O termo pode ser entendido como o sujeito da sentença declarativa e o predicado, o que se declara a respeito do termo.

Exemplo 1.36. Indique o termo e o predicado de cada uma das proposições a seguir.

a) João é bom em programação.

> **Termo:** João
> **Predicado:** é bom em programação

b) Alessandro não saiu de casa no sábado.

> **Termo:** Alessandro
> **Predicado:** saiu de casa no sábado

c) Eles concluíram o trabalho.

> **Termo:** Eles
> **Predicado:** concluíram o trabalho

Dada uma proposição, o predicado será indicado com uma letra maiúscula do alfabeto latino e o termo, com letra minúscula, esta última colocada à direita da primeira entre parênteses.

No exemplo anterior (Ex. 1.36), uma tradução para a linguagem simbólica das proposições seria:

a) $B(j)$ (B: é bom programador, j: João)

b) $S(a)$ (S: saiu de casa no sábado, a: Alessandro)

c) $C(e)$ (C: concluíram o trabalho, e: eles)

1.6.2 Função Proposicional

Seja Ω um conjunto ou uma coleção de termos. Uma **função proposicional** em Ω é um predicado P associado a um termo x, em Ω, que não pode ser qualificada como verdadeira ou falsa.

Tal qualificação só será possível quando, em $P(x)$, o x representar pelo menos **um** ou **todos** os elementos de Ω. Nas funções proposicionais, os termos são variáveis, enquanto nas proposições como as do exemplo 1.36, são constantes.

Exemplo 1.37. Vamos tomar Ω como sendo o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

São funções proposicionais em $\mathbb{Z}$ as seguintes sentenças:

a) $x - 7 > 3$

b) $x + 3 = 5$

Observe que a função proposicional em (a) é verdadeira para valores de x em $\mathbb{Z}$ maiores que 10, ou seja, ela é verdadeira (**V**) para alguns valores de x em $\mathbb{Z}$. Porém é Falso (**F**) dizer que para todo x em $\mathbb{Z}$ a função proposicional em (a) é válida.

Já a função proposicional em (b) é (**F**) para valores diferentes de 2 e (**V**) para $x = 2$.

Observação:

O conjunto Ω, sobre o qual a função proposicional está definida, é chamado de **Conjunto Universo** ou **Domínio de Interpretação**. Nos itens do exemplo 1.37 o conjunto universo é o conjunto $\mathbb{Z}$.

No item (a), $x - 7 > 3$ é o predicado associado aos termos $x \in \mathbb{Z}$. O predicado também pode ser chamado de **propriedade**.

Exemplo 1.38. A sentença

Prestaram concurso e foram contratados.

é uma função proposicional, visto ser impossível qualificar as duas afirmações: *prestaram concurso* e *foram contratados*; com um dos valores (**V**) ou (**F**).

Mas, se acrescentarmos à função: **todos** ou **alguns**, teremos:

a) **Todos** que prestaram concurso foram contratados;

b) **Alguns** dos que prestaram concurso foram contratados.

que são passíveis de atribuir os valores (**V**) ou (**F**).

No exemplo 1.38, vimos que quando acrescentamos a expressão "todos" e "alguns" à função proposicional, obtemos uma proposição que pode ser qualificada como (**V**) ou (**F**).

Todos ou alguns são chamados de **quantificadores.** Falaremos deles na próxima seção.

1.6.3 Quantificadores

Quantificadores são operadores lógicos que restringem as funções proposicionais, de forma que elas se refiram a todo o conjunto Ω ou a uma parte dele. Sendo Ω um conjunto de termos que é o conjunto universo de uma função proposicional, se acrescentarmos a ela os quantificadores, obtém-se uma proposição, ou seja, uma sentença declarativa que pode ser considerada (**V**) ou (**F**).

Existem dois quantificadores:

- **Quantificador universal:** expresso por meio das expressões "para todo", "para toda", "qualquer que seja", etc.

  O quantificador universal é representado pelo símbolo $\forall$.

- **Quantificador existencial:** expresso por meio das palavras "existe", "há", "alguns" etc.

  O quantificador existencial é representado pelo símbolo $\exists$.

Exemplo 1.39. Quantificando-se os exemplos anteriores, temos:

a)
- $\forall x\ (x \in \mathbb{Z}, x - 7 > 3)$, tem valor lógico (**F**)

  Lemos essa proposição da seguinte maneira: Para todo x, se x pertence a $\mathbb{Z}$, então $x - 7 > 3$.

  Obviamente, essa proposição é falsa, pois existem números inteiros que não satisfazem a propriedade $x - 7 > 3$.

- $\exists x\ (x \in \mathbb{Z}, x - 7 > 3)$, tem valor lógico (**V**).

  Podemos ler essa proposição da seguinte maneira: Existe um x, tal que x pertence a $\mathbb{Z}$ e $x - 7 > 3$.

  Essa proposição é verdadeira, pois de fato, existem números inteiros que satisfazem a propriedade $x - 7 > 3$.

b)
- $\forall x\, (x \in \mathbb{Z}, x + 2 = 5)$, tem valor lógico (**F**)
- $\exists x\, (x \in \mathbb{Z}, x + 2 = 5)$, tem o valor lógico (**V**).

c)
- $\forall x$ (Se x prestou concurso, então foi contratado)

  Lemos essa proposição da seguinte maneira: Para qualquer x, se x prestou concurso, então foi contratado.

Aqui o conjunto Ω é o conjunto de todas as pessoas que prestaram o concurso. É possível atribuir valor lógico (**V**) ou (**F**) a essa proposição.

- $\exists x$ (x prestou concurso e foi contratado).

  Essa proposição pode ser lida da seguinte maneira: Existe um x que prestou o concurso e que foi contratado.

1.6.4 Formalização do cálculo de predicados

Já vimos que em uma proposição o predicado será indicado com uma letra maiúscula do alfabeto latino e o termo, com uma letra minúscula, e esta última colocada à direita da primeira. Nas funções proposicionais, usaremos as últimas letras minúsculas do alfabeto latino: x, y e z para representar os termos de um conjunto Ω e os predicados desses termos poderão ser indicados por qualquer letra maiúscula.

O símbolo do quantificador ($\forall$ ou $\exists$) é colocado à esquerda do termo, e ambos, à esquerda da função proposicional, que deve estar entre parênteses, como foi feito no exemplo 1.39.

Vejamos como escrever uma função proposicional quantificada na forma simbólica.

Em funções proposicionais quantificadas **universalmente**, por exemplo:

Todo A tem a propriedade B.

usa-se a letra x como representante de qualquer termo de Ω, e reescrevemos a função quantificada da seguinte maneira:

Qualquer que seja x, se x tem a propriedade A,
então x tem a propriedade B.

Tal expressão apresenta uma condicional, de forma que, simbolicamente, temos:

$$\forall x\ (A(x) \to B(x))$$

Toda função proposicional quantificada universalmente pode ser escrita como uma condicional.

Exemplo 1.40. Escreva a proposição "Todos os homens são mortais", na forma simbólica.

Podemos reescrever essa proposição da seguinte maneira:

Qualquer que seja x, se x é homem(H), então x é mortal(M).

Simbolicamente temos

$$\forall x\ (H(x) \to M(x))$$

Toda função proposicional quantificada **existencialmente** pode ser reescrita como:

Existe pelo menos um x, tal que x tem a propriedade A e x tem a propriedade B.

que simbolicamente são traduzidas usando-se a conjunção:

$$\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$$

Exemplo 1.41. Escreva a proposição "Alguns empresários só pensam em lucro", na linguagem simbólica.

Podemos reescrever essa proposição da seguinte maneira:

Existe pelo menos um x, tal que x é empresário(E) e x só pensa em lucro(L).

Simbolicamente temos

$$\exists x\ (E(x) \wedge L(x))$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 1.42. Simbolize as seguintes funções proposicionais quantificadas:

a) Os alunos dessa turma gostam de Matemática Discreta.

Veja que embora não apareça um quantificador universal de forma explícita, está é uma função proposicional quantificada universalmente. Poderíamos rescrevê-la como "Todos os alunos dessa turma gostam de Matemática Discreta", sem mudar seu significado.

Para colocá-la na forma simbólica vamos reescrevê-la da seguinte forma:

"Qualquer que seja x, se x é aluno(A) dessa turma, então x gosta de Matemática Discreta(M)."

Simbolicamente temos:

$$\forall x\ (A(x) \rightarrow M(x))$$

b) Alguns funcionários são incompetentes ou têm má vontade.

"Alguns" é um quantificador existencial e podemos reescrever essa frase da forma:

"Existe algum x, tal que x é engenheiro(E) e x é incompetente(I) ou x tem má vontade(V)."

Simbolicamente temos

$$\exists x\ [E(x) \wedge (I(x) \vee V(x))]$$

1.6.5 Regras de formação do cálculo de predicados

Uma fórmula bem formulada (*wff*) para o cálculo de predicados deve obedecer às seguintes regras de formação:

1. Um predicado P seguido de um termo x é uma *wff* simbolizada por $P(x)$;
2. Se $P(x)$ é uma *wff*, então a negação $\neg P(x)$ é uma *wff*;
3. Se $P(x)$ e $Q(x)$ são *wff*'s, então serão também *wff*'s as fórmulas:
   - $P(x) \wedge Q(x)$
   - $P(x) \vee Q(x)$
   - $P(x) \to Q(x)$
   - $P(x) \leftrightarrow Q(x)$
4. Se $P(x)$ é uma *wff*, então também serão *wff*'s:
   - $\forall x\ (P(x))$
   - $\exists x\ (P(x))$

Exemplo 1.43. São *wff*'s do cálculo de predicados:

a) $P(x) \wedge \neg V(x)$

b) $\exists x\ (P(x) \vee V(x))$

c) $\forall x\ (P(x) \to V(x))$

d) $\exists x\ (P(x) \wedge V(x))$

e) $\neg\forall x\ (P(x) \leftrightarrow V(x))$

f) $\neg\exists x\ (P(x) \wedge V(x))$

g) $C \wedge \forall x\ (A(x) \to B(x))$

h) $\exists x\ (A(x) \wedge B(x)) \to C$

Exemplo 1.44. Não são *wff*'s do cálculo de predicados:

a) $P((X))$ (*o temo está com letra maiúscula*)

b) $\forall x$ (*não possui função proposicional*)

c) $\exists\forall x\ (P(x))$ (*há dois quantificadores para o único termo*)

d) $\forall x A(x) \to B(x)$ (*faltaram os parenteses na função proposicional*)

e) $(A(x) \wedge B(x))\exists x$ (*o quantificador está à direita da função*)

f) $\forall x \wedge (P(x))$ (*há um conectivo entre o quantificador e a função*)

1.6.6 Equivalências entre Quantificadores

Um quantificador também pode ser negado, porém algumas vezes é mais fácil trabalhar com uma forma equivalente que não apresente negação no quantificador.

Exemplo 1.45. "Não é toda cidade do Paraná que está enfrentando racionamento de água."

Na proposição acima, a negação acompanha o quantificador universal **toda**.

Uma forma equivalente de escrever essa função proposicional quantificada é:

"Existem cidades do Paraná que não estão enfrentando racionamento de água. "

Veja que no exemplo 1.45, reescrevemos a proposição, trocando a negação do quantificador universal, pelo quantificador existencial (sem negá-lo), sem alterar o sentido da função proposicional quantificada.

Apresentamos a seguir as equivalências entre funções proposicionais quantificadas.

Seja A um predicado associado aos termos de um conjunto Ω, as seguintes equivalências se verificam:

EQV1. $\neg\exists x\ (A(x))$ é equivalente a $\forall x\ \neg(A(x))$

EQV2. $\neg\forall x\ (A(x))$ é equivalente a $\exists x\ \neg(A(x))$

De fato,

a) $\neg\exists x\ (A(x))$ significa **"não existe um termo x associado ao predicado A"**

e é equivalente a:

"todo termo x não está associado ao predicado A", que é representado por $\forall x\ \neg(A(x))$.

b) $\neg\forall x\ (A(x))$ significa **"não é todo x que está associado ao predicado A"**.

é equivalente a:

"existe pelo menos um x que não está associado a A", que pode ser representado por $\exists x\ \neg(A(x))$

Além dessas equivalências entre quantificadores, as equivalências já estudadas no cálculo proposicional podem ser usadas nas funções proposicionais.

A seguir serão apresentados alguns exemplos. Para melhor compreendê-los, tenham em mãos a tabela de equivalências do cálculo proposicional.

Exemplo 1.46. Encontre uma proposição equivalente para "Não existe réptil que voa".

Podemos reescrever essa frase como

Não existe x, tal que x é réptil(R) e x voa(V).

Traduzindo, temos:

$$\neg\exists x\ (R(x) \wedge V(x))$$

Usando EQV1, temos:

$$\forall x\ \neg(R(x) \wedge V(x))$$

Usando uma das leis de Morgan, temos:

$$\forall x\ (\neg B(x) \vee \neg R(x))$$

Usando Implicação Material, temos:

$$\forall x\ (\neg\neg B(x) \rightarrow \neg R(x))$$

Usando Dupla Negação, temos:

$$\forall x\ (B(x) \rightarrow \neg R(x))$$

Assim, a função proposicional equivalente é:

Para todo x, se x é réptil, então x não voa

ou simplesmente na linguagem comum:

Todos os répteis não voam.

Exemplo 1.47. Encontre a função proposicional equivalente a: "Nem tudo que reluz é ouro."

Podemos reescrever essa frase como:

É falso que, para todo x, se x reluz(R), então x é ouro(O).

Traduzindo temos:

$$\neg\forall x\ (R(x) \rightarrow O(x))$$

Usando EQV2 temos:

$$\exists x\ \neg(R(x) \rightarrow O(x))$$

Usando Implicação Material temos:

$$\exists x\ \neg(\neg R(x) \vee O(x))$$

Usando uma das Leis de Morgan temos:

$$\exists x\ (\neg\neg R(x) \wedge \neg O(x))$$

Usando Dupla Negação temos:

$$\exists x\ (R(x) \wedge \neg O(x))$$

Assim, a função proposicional equivalente é:

Existe um x, tal que x reluz, mas x não é ouro.

ou em linguagem comum:

Existem coisas que reluzem, mas não são ouro.

1.7 Exercícios

1. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes funções proposicionais quantificadas, utilizando como predicado a letra maiúscula da palavra que representa o predicado.

   (a) Todos os gatos são mamíferos.

   (b) Existem gatos que são albinos.

   (c) Todos que estudaram foram bem na avaliação.

   (d) Existem aves que não voam.

   (e) Existem políticos não corruptos.

   (f) As crianças são felizes.

   (g) Quando os metais são aquecidos, se dilatam.

   (h) Alguns homens inteligentes são trabalhadores.

   (i) Todo homem honesto é trabalhador.

   (j) Os professores são bacharéis ou licenciados.

   (k) Alguns políticos são corrupto.

   (l) Não há sobreviventes do naufrágio.

   (m) Há sobreviventes do naufrágio.

   (n) Os médicos se opõem às aglomerações

(o) Todo número primo não é múltiplo de 2.

2. Dado x pertencente ao conjunto dos números reais, determine o valor lógico de cada uma das funções proposicionais quantificadas a seguir.

(a) $\forall x \left(x^2 > 0\right)$

(b) $\exists x \left(x^2 + 1 = 0\right)$

(c) $\exists x \left(x^2 = -4\right)$

3. Sendo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e dado $x \in \Omega$, determine o valor lógico de cada uma das proposições a seguir.

(a) $\exists x(x + 3 = 10)$

(b) $\forall x(x + 3 < 10)$

(c) $\exists x(x + 3 > 5)$

(d) $\forall x(x + 3 \leq 7)$

(e) $\exists x \left(x^2 + 2x = 15\right)$

4. Substitua a quantificação negativa pela correspondente quantificação sem a negação.

(a) $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$

(b) $\neg\forall x(C(x) \to \neg D(x))$

(c) $\neg\forall x(\neg A(x) \to (B(x) \wedge C(x)))$

(d) $\neg\exists x\neg(O(x) \vee \neg P(x))$

(e) $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg A(x))$

(f) $\neg\exists x(A(x) \wedge (B(x) \to \neg C(x)))$

5. Encontre a sentença equivalente, substituindo as respectivas quantificações negativas por quantificações sem a negação.

(a) Não existem aves sem penas.

(b) Não existem políticos não corruptos.

(c) Nem todos os cães são treinados.

(d) Nem tudo que se deseja deve ser comprado.

(e) Não há sobreviventes do naufrágio.

Um pouco de história

Entre os matemáticos que contribuíram para a criação da lógica matemática no século XIX, aquele cuja obra teve peso e repercussão maiores foi G. Boole (1815-1864), graças sobretudo a The laws of thought ("As Leis do Pensamento"), de 1854. Uma ligeira ideia da obra de Boole pode ser dada por este fato: ele usava letras minúsculas, $x, y, z, \ldots$, para indicar partes de um conjunto tomado como universo e representado pelo símbolo 1. Se x, y representam duas dessas partes, ele denotava o que hoje chamamos de interseção e união dessas partes respectivamente por xy e $x + y$. O complementar de uma parte x era indicado por $1 - x$. Na verdade, as uniões consideradas por Boole pressupunham partes disjuntas; a generalização, para o conceito atual, é devida a W. S. Jevons (1835-1882). Assim, sendo evidente que $xy = yx, x + y = y + x, (xy)z = x(yz)$, essas leis foram tomadas como axiomas em sua álgebra. Mas a nova álgebra apresenta diferenças fundamentais em relação à clássica: haja vista as leis $x^2 = x$ e $x + x = x$, para qualquer parte x do universo.

George Boole

Como exemplo do uso da álgebra de Boole, vejamos como se poderia colocar em símbolos a lei do terceiro excluído. Suponhamos que 1 indique o conjunto de todos os seres humanos vivos e x o conjunto dos brasileiros vivos. Então, $1 - x$ indica o conjunto dos seres humanos vivos que não são brasileiros, e a equação $x + (1 - x) = 1$ expressa a ideia de que todo ser humano vivo ou é brasileiro ou não é brasileiro.

Não passou despercebida a Boole a correspondência entre a álgebra dos conjuntos e a das proposições. Se p indica uma proposição, a equação $p = 0$ indica que p é falsa, e a equação $p = 1$, que p é verdadeira. Nesse contexto, dadas duas proposições, p e q, ele indicava por pq e $p + q$, respectivamente, a conjunção e a disjunção das duas. Mas Boole não se alongou muito nessa questão.

Fonte: Domingues e Iezzi (2003)

Veremos mais sobre Álgebra de Boole mais adiante.

Começaremos a seguir um novo conteúdo da disciplina. Apresentaremos o que chamamos de *Indução*. A Indução é uma técnica de demonstração de teoremas ou propriedades, particularmente útil em ciências da computação.

Gabarito

Capítulo 1

Seção 1.1

1. (a) é uma wff
   (b) é uma wff
   (c) não é uma wff
   (d) não é uma wff
   (e) é uma wff
   (f) não é uma wff
   (g) não é uma wff

2. (a) A: Alfredo escreve para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $A \to \neg M$

   (b) A: Alfredo escreve para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $A \vee M$

   (c) A: Alfredo escreveu para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $\neg A \wedge M$

   (d) A: Alfredo escreverá para Maria.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $A \leftrightarrow M$

   (e) A: Alfredo escrever para Maria.
   J:João for ao encontro dela (Maria).
   M: Maria irá para outra cidade.
   $A \wedge J \to \neg M$

   (f) A: Alfredo for ao encontro de Maria.
   J:João for ao encontro de Maria.
   M: Ela (Maria) ficará na cidade.
   $A \vee J \to \neg M$

   (g) A: Alfredo estiver na cidade.
   J: João irá ao encontro de Maria.
   $J \leftrightarrow \neg A$

   (h) J: Maria se encontrar com João.
   A: (Maria) for ao encontro com Alfredo.
   M: Maria irá para outra cidade.
   $J \vee \neg A \to M$

   (i) M: O gerente despedirá Maria.
   J: O gerente despedirá João.
   $M \vee J$

   (j) M: João é vizinho de Maria.
   J: João conhece Maria.
   $J \to C$

   (k) J: João ama Maria.
   P: Maria ama Paulo.
   M: João terá chance com Maria.
   $J \wedge P \to \neg M$

   (l) D: João for despedido.
   E: (João) for procurar um emprego.
   S: (João) com certeza ganhará um salário melhor.
   $D \wedge E \to S$

   (m) A: O número de acidentes diminuirá nas estradas.
   P: Houver mais policiamento.
   C: Os motoristas forem mais conscientes.
   $A \leftrightarrow P \wedge C$

   (n) A: Todos acertaram todas as questões.
   E: Isso significa que não devam estudar

mais.
$A \wedge \neg E$

(o) E: Eduardo apresentar uma queixa.
F: Fernando investigará.
G: Geraldo será classificado.
$\neg E \to \neg F \wedge \neg G$

(p) E: Eduardo apresentará uma queixa.
F: Fernando investigar.
G: Geraldo será classificado.
$E \vee (F \to G)$

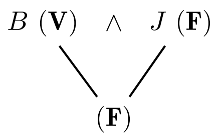
3. (a) Carlos é argentino ou João é brasileiro.
(b) Carlos não é argentino e João é brasileiro.
(c) Se Carlos é argentino, então João é brasileiro.
(d) Se Carlos é argentino, João não é brasileiro.
(e) Carlos não é argentino se, e somente se, João é brasileiro.
(f) Carlos não é argentino e João não é brasileiro.

4. (a) $((x < 3) \wedge (x > 0)) \vee \neg(x = 7)$
(b) $(x < 4) \wedge (x > 2) \to (x = 3)$
(c) $(x > 0) \vee ((x < 3) \wedge (y > 0))$
(d) $(x = 3) \leftrightarrow (y > 0)$
(e) $(x \neq 2) \to (y = 9) \wedge (z > 3)$

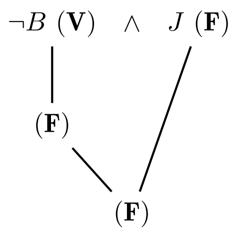
5. (a) $(A \vee B) \wedge \neg C$
(b) $\neg A \wedge C$
(c) $B \wedge C \to A$
(d) $\neg(A \wedge (B \vee C))$
(e) $A \leftrightarrow \neg B \wedge \neg C$

Seção 1.2

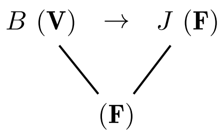
1. (a) B = O Brasil é um país emergente. (V)
J = O Japão está em crise. (F)
Resposta: F



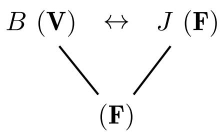
(b) B = O Brasil é um país emergente. (V)
J = O Japão está em crise. (F)
Resposta: F



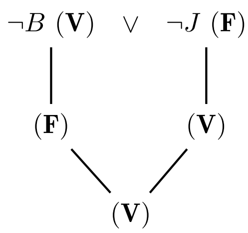
(c) B = O Brasil é um país emergente. (V)
J = O Japão está em crise. (F)
Resposta: F



(d) B = O Brasil é um país emergente. (V)
J = O Japão está em crise. (F)
Resposta: F



(e) B = O Brasil é um país emergente. (V)
J = O Japão está em crise. (F)
Resposta: V



(f) $B =$ A seleção brasileira de futebol foi pentacampeã. (V)
$T =$ O técnico fosse outro. (V)
$S =$ Talvez ela tivesse sido. (F)
Resposta: V

$$B\ (\mathbf{V}) \quad \wedge \quad (T\ (\mathbf{V}) \quad \rightarrow \quad \neg S\ (\mathbf{F}))$$

(**V**)

(**V**)

(**V**)

(g) $I =$ A inflação é praticamente nula. (F)
$D =$ O desemprego para de crescer. (V)
Resposta: F

$$I\ (\mathbf{F}) \quad \wedge \quad \neg D\ (\mathbf{V})$$

(**F**)

(**F**)

(h) $S =$ Os salários aumentam. (V)
$V =$ As vendas diminuem. (V)
Resposta: V

$$S\ (\mathbf{V}) \quad \vee \quad V\ (\mathbf{V})$$

(**V**)

(i) $S =$ São Paulo é a maior cidade da América Latina. (V)
$A =$ Sua arrecadação de impostos é alta. (V)
$D =$ Parte do dinheiro arrecadado é desviado. (V)
Resposta: V

$$S\ (\mathbf{V}) \quad \rightarrow \quad A\ (\mathbf{V}) \quad \vee \quad D\ (\mathbf{V})$$

(**V**)

(**C**)

(j) $A =$ O azul é uma das cores da bandeira brasileira. (V)
$V =$ A bandeira de Portugal tem as cores verde e vermelho. (V)
Resposta: V

$$A\ (\mathbf{V}) \quad \wedge \quad V\ (\mathbf{V})$$

(**V**)

(k) $A =$ Alemanha perdeu a Segunda Guerra Mundial. (V)
$J =$ O Japão era seu aliado (Alemanha). (V)
$P =$ O Japão também perdeu a Segunda Guerra Mundial. (V)
Resposta: V

$$A\ (\mathbf{V}) \quad \wedge \quad J\ (\mathbf{V}) \quad \rightarrow \quad P\ (\mathbf{V})$$

(**V**)

(**V**)

(l) $C =$ Cuba é único país comunista do continente americano. (V)
$E =$ Os Estados Unidos são um país capitalista. (V)
$A =$ Cuba será arrasada pelos Estados Unidos. (F)
Resposta: F

$$C\ (\mathbf{V}) \quad \wedge \quad E\ (\mathbf{V}) \quad \rightarrow \quad A\ (\mathbf{F})$$

(**V**)

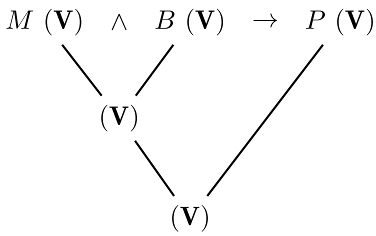
(**F**)

(m) $B =$ O Brasil já teve várias moedas. (V)
$R =$ É provável que o real seja a última (moeda). (F)
Resposta: F

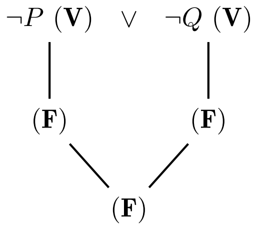
$$B\ (\mathbf{V}) \quad \rightarrow \quad R\ (\mathbf{F})$$

(**F**)

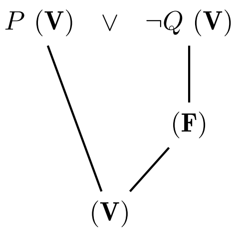
(n) M = O Mercosul incomoda os países desenvolvidos. (V)
B = Brasil é país integrante desse mercado. (V)
P = Os países desenvolvidos tentarão conter o desenvolvimento brasileiro. (V)
Resposta: V



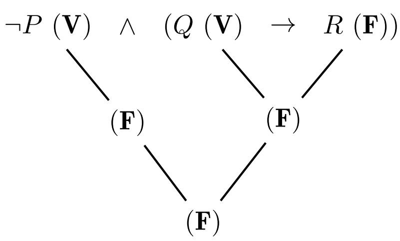
2. (a) F, pois



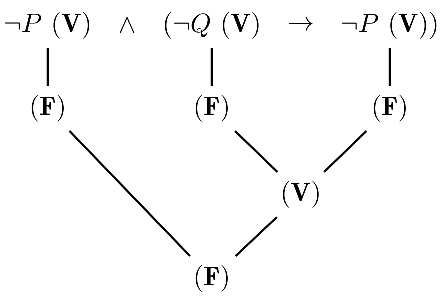
(b) V, pois



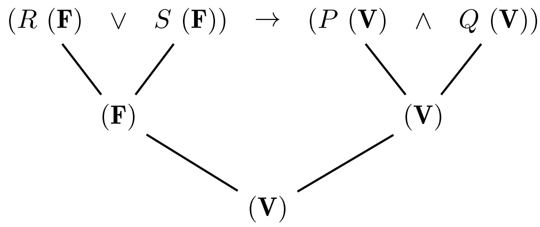
(c) F, pois



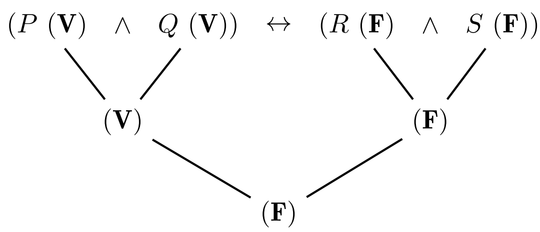
(d) F, pois



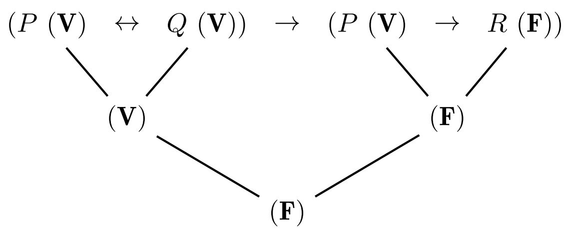
(e) V, pois



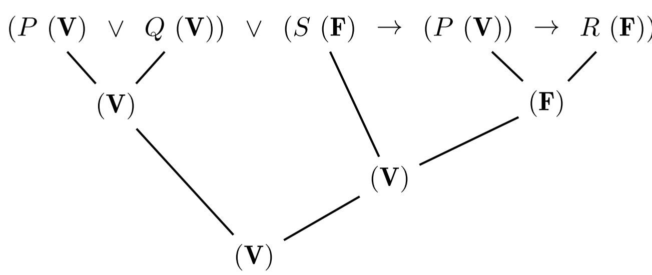
(f) F, pois



(g) F, pois



(h) V, pois



(i) V

(j) V

3. (a)

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee Q \to R$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	**F**
V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	V	**V**
F	V	F	V	**F**
F	F	V	F	**V**
F	F	F	F	**V**

(b)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg(P \vee Q) \wedge P$
V	V	V	F	**F**
V	F	V	F	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	F	V	**F**

(c)

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$(\neg P \to Q) \vee R$
V	V	V	F	V	**V**
V	V	F	F	V	**V**
V	F	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	F	**V**
F	F	F	V	F	**F**

(d)

P	Q	R	$P \wedge Q$	$R \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q \to (R \leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	**F**
V	F	V	F	F	**V**
V	F	F	F	V	**V**
F	V	V	F	V	**V**
F	V	F	F	F	**V**
F	F	V	F	F	**V**
F	F	F	F	V	**V**

(e)

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge P$	$R \leftrightarrow Q$	$\neg P \wedge P \rightarrow (R \leftrightarrow Q)$
V	V	V	F	F	V	**V**
V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	F	F	F	V	**V**
F	V	V	V	F	V	**V**
F	V	F	V	F	F	**V**
F	F	V	V	F	F	**V**
F	F	F	V	F	V	**V**

(f)

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$R \rightarrow \neg P$	$(\neg P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow \neg P)$
V	V	V	F	V	F	**V**
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	V	V	**V**
F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	F	V	**V**
F	F	F	V	F	V	**V**

(g)

P	Q	R	$\neg Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$	$R \wedge \neg Q$	$(P \leftrightarrow \neg Q) \rightarrow (R \wedge \neg Q)$	$\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \rightarrow (R \wedge \neg Q))$
V	V	V	F	F	F	V	**F**
V	V	F	F	F	F	V	**F**
V	F	V	V	V	V	V	**F**
V	F	F	V	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	F	F	**V**
F	V	F	F	V	F	F	**F**
F	F	V	V	F	V	V	**F**
F	F	F	V	F	F	V	**F**

Seção 1.3

1.

(a)

P	R	$P \vee R$	$P \rightarrow (P \vee R)$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	V	**V**
F	F	F	**V**

É uma tautologia.

(b)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \to (P \wedge Q)$
V	V	V	**V**
V	F	F	**F**
F	V	F	**V**
F	F	F	**V**

É uma contingência.

(c)

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee Q \to P$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

É uma contingência.

(d)

P	Q	$Q \to P$	$(Q \to P) \vee Q$	$P \to (Q \to P) \vee Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	V	V	**V**

É uma tautologia.

(e)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$	$P \leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	V	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	F	F	**V**

É uma tautologia.

(f)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$	$P \wedge (P \wedge (P \vee Q))$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	V	**V**
F	V	V	F	**F**
F	F	F	F	**F**

É uma contingência.

(g)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	V	F	F	**V**
V	F	F	V	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	F	F	**V**
F	F	V	V	F	V	V	**V**

É uma tautologia.

(h)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$
V	V	F	F	V	F	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	F	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

É uma tautologia.

(i)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
V	V	F	F	V	F	F	**V**
V	F	F	V	F	V	F	**F**
F	V	V	F	F	V	F	**F**
F	F	V	V	F	V	V	**V**

É uma contingência.

(j)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q \to P \wedge Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	V	F	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	F	F	**V**

É uma contingência.

(k)

P	Q	$Q \vee Q$	$P \to Q \vee Q$	$P \to (P \to Q \vee Q)$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**
F	F	F	V	**V**

É uma contingência.

(l)

P	Q	$P \to Q$	$P \to (P \to Q)$	$(P \to (P \to Q)) \to Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	**F**

É uma contingência.

(m)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	$\neg P \to Q \vee \neg Q$	$P \to (\neg P \to Q \vee \neg Q)$
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	F	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

É uma tautologia.

(n)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg P$
V	V	F	F	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	V	**V**
F	F	V	F	**V**

É uma tautologia.

(o)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	$\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q)$	$P \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q))$	$\neg(P \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q)))$
V	V	F	F	V	V	V	**F**
V	F	F	V	V	V	V	**F**
F	V	V	F	V	V	V	**F**
F	F	V	V	V	V	V	**F**

É uma contradição.

(p)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \rightarrow Q \vee R$	$(P \rightarrow Q \vee R) \wedge Q$	$P \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q \vee R) \wedge Q \rightarrow (P \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	F	**F**
V	F	V	V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	F	V	**V**
F	F	F	F	V	F	V	**V**

É uma contingência.

(q)

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow \neg Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$	$P \wedge Q \leftrightarrow (P \vee Q \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q))$
V	V	F	V	F	V	F	**F**
V	F	V	F	V	V	V	**F**
F	V	F	F	V	V	V	**F**
F	F	V	F	V	F	F	**V**

É uma contingência.

(r)

P	Q	$\neg Q$	$Q \wedge \neg Q$	$P \rightarrow Q \wedge \neg Q$	$P \rightarrow (P \rightarrow Q \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	F	**F**
V	F	V	F	F	**F**
F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	F	V	**V**

É uma contingência.

(s)

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \leftrightarrow P \wedge (Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	V	F	**F**
V	F	V	F	V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	F	F	F	F	**V**
F	V	V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	F	F	F	F	F	F	**V**
F	F	V	F	F	F	F	F	**V**
F	F	F	F	F	F	F	F	**V**

É uma contingência.

(t)

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$	$P \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

É uma tautologia.

Seção 1.4

1. (a)

P	Q	R	$(P \to Q)$	$(P \vee R)$	$((P \vee R) \to Q)$	$(P \to Q) \leftrightarrow ((P \vee R) \to Q)$
V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	V	F	**V**
F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	V	**V**
F	F	V	V	V	F	**F**
F	F	F	V	F	V	**V**

Não é equivalência tautológica.

(b)

P	Q	$P \to Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \leftrightarrow Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow ((P \vee Q) \leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	F	V	**V**

É uma equivalência tautológica.

(c)

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \to R$	$Q \to P$	$(Q \to P) \to R$	$((P \to Q) \to R) \leftrightarrow ((Q \to P) \to R)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	V	F	**V**
V	F	V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	V	V	F	**F**
F	V	V	V	V	F	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	F	V	F	**V**

Não é uma equivalência tautológica.

(d)

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge Q$	$P \to (P \wedge Q)$	$(P \to Q) \leftrightarrow (P \to (P \wedge Q))$
V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	F	**V**
F	V	V	F	V	**V**
F	F	V	F	V	**V**

É uma equivalência tautológica.

2. (a)

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \to (Q \vee R)$	$(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee$
V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	F	F	V	V	V	**V**
V	F	V	V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	V	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	F	F	V	**V**

Não é uma implicação tautológica.

(b)

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \to \neg Q$	$(P \wedge Q) \to (P \to \neg Q)$
V	V	F	V	F	**F**
V	F	V	F	V	**V**
F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	F	V	**V**

Não é uma implicação tautológica.

(c)

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$P \wedge R$	$Q \rightarrow R$	$P \wedge R \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \rightarrow R))$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	V	**V**
V	F	V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	F	V	V	**V**
F	V	V	V	F	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	F	V	V	**V**
F	F	F	V	F	V	V	**V**

É uma implicação tautológica.

(d)

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \vee R$	$P \rightarrow Q \vee R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$
V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	V	F	V	V	**V**
V	F	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	F	V	**V**

É uma implicação tautológica.

(e)

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$P \rightarrow \neg Q$	$\neg R \vee Q$	$(\neg R \vee Q) \wedge R$	$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg R \vee Q) \wedge R$	$((P \rightarrow$
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	
V	V	F	F	F	V	F	V	F	F	
V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	
V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	
F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	
F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	
F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	

É uma implicação tautológica.

(f)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	F	**V**

É uma implicação tautológica.

(g)

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \wedge R$	$\neg(P \wedge R)$	$(P \vee Q) \to (\neg(P \wedge R))$
V	V	V	V	V	F	**F**
V	V	F	V	F	V	**V**
V	F	V	V	V	F	**F**
V	F	F	V	F	V	**V**
F	V	V	V	F	V	**V**
F	V	F	V	F	V	**V**
F	F	V	F	F	V	**V**
F	F	F	F	F	V	**V**

Não é uma implicação tautológica.

(h)

P	Q	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$	$Q \to P$	$(\neg Q \vee P) \to (Q \to P)$
V	V	F	V	V	**V**
V	F	V	V	V	**V**
F	V	F	F	F	**V**
F	F	V	V	V	**V**

É uma implicação tautológica.

(i)

P	Q	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$	$(\neg Q \vee P) \to Q$	$((\neg Q \vee P) \to Q) \to P$
V	V	F	V	V	**V**
V	F	V	V	F	**V**
F	V	F	F	V	**F**
F	F	V	V	F	**V**

Não é uma implicação tautológica.

3. (a)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \to (P \wedge Q)$
V	V	V	**V**
V	F	F	**F**
F	V	F	**V**
F	F	F	**V**

Não é uma implicação tautológica.

(b)

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to P$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

Não é uma implicação tautológica.

(c)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge \neg P$	$((P \to Q) \wedge \neg P) \to \neg Q$
V	V	F	F	V	F	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	V	**F**
F	F	V	V	V	V	**V**

Não é uma implicação tautológica.

(d)

P	Q	$P \to Q$	$Q \to (P \to Q)$
V	V	V	**V**
V	F	F	**V**
F	V	V	**V**
F	F	V	**V**

É uma implicação tautológica.

4.

P	Q	$P \to Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \leftrightarrow Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (P \vee Q \leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	F	V	**V**

É uma equivalência tautológica.

5. (a)

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
V	V	V	F	F	V	**V**
V	F	F	F	V	F	**V**
F	V	V	V	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

É uma equivalência tautológica.

(b)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee (P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	F	**V**
F	F	F	F	**V**

É uma equivalência tautológica.

(c)

P	Q	R	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$	$P \to Q$	$R \to R$	$(P \to Q) \to (R \to R)$	$(P \to (Q \to P)) \leftrightarrow (($
V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	V	V	**V**
V	F	V	V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	V	F	V	V	**V**
F	V	V	F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	V	**V**

É uma equivalência tautológica.

(d)

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	**V**

É uma equivalência tautológica.

Seção 1.5

1.

(a) $C =$ O avião tivesse **caído**.
$R =$ (O avião) teria feito contato por **rádio**.

1. $\neg C \to R$
2. $\neg R$
3. $\therefore C$

(b) $D =$ Alberto será **despedido**.
$T =$ Alberto será **transferido** para outro departamento.

1. $D \vee T$
2. $\neg T$
3. $\therefore D$

(c) $E =$ A regra **existe**.
$U =$ (A regra) deve ser **usada**.

1. $E \to U$
2. E
3. $\therefore U$

(d) $I =$ Os **impostos** aumentarem.
$D =$ Haverá menos circulação de **dinheiro**.
$V =$ As **vendas** no comércio cairão.
$A =$ A **arrecadação** de impostos diminuirá.

1. $I \to D$
2. $D \to V$
3. $V \to A$
4. I
5. $\therefore A$

(e) $P =$ A empresa será **privatizada**.
$D =$ A empresa for **deficitária**.
$O =$ A empresa atinge os seus **objetivos** sociais.

1. $P \leftrightarrow D \vee \neg O$
2. $\neg D \wedge O$
3. $\therefore \neg P$

(f) $V =$ **Vendem** mais.
$F =$ Estão sempre **fresquinhos**.

1. $V \to F$
2. $F \to V$
3. $\therefore V \leftrightarrow F$

(g) $A =$ **Alfredo** é adolescente.
$T =$ (Alfredo) está na **terceira** idade.

1. $A \vee T$
2. $\neg A$
3. $\therefore T$

(h) C = Bárbara está fora de **casa**.
T = (Bárbara está) atendendo ao **telefone**.
S = (Bárbara) foi ao **supermercado**.
D = (Bárbara) está comprando **doces**.

1. $C \vee T$
2. $C \to S$
3. $C \to D$
4. $\therefore S \vee D$

(i) I = Todos os **impostos** devidos fossem pagos.
C = Haveria *superávit* nas **contas** governamentais.
A = Seria necessário **aumentar** os impostos dos trabalhadores.

1. $I \to C$
2. $C \to \neg A$
3. A
4. $\therefore \neg I$

(j) A = Paulo **aceitar** que está errado.
M = (Paulo) **mudar** sua opinião.
C = Devemos **condená-lo** (Paulo).
T = (Paulo) será acusado de **traição**.

1. $A \wedge \neg M \to C$
2. $M \to T$
3. $M \vee \neg M$
4. $\therefore C \vee T$

(k) L = As **Leis** são boas.
R = O seu cumprimento é **rigoroso**.
C = O índice de **criminalidade** diminuirá.
P = O **problema** é a corrupção.

1. $L \wedge R \to C$
2. $(R \to C) \to P$

(l) C = Alice **casar**.
H = Bete será dama de **honra**.
M = Carolina será **madrinha**.
D = Haverá uma **discussão** na cerimônia de casamento.

1. $C \to H \wedge M$
2. $H \wedge M \to D$
3. $\therefore C \to D$

(m) E = Deus **existe**.
M = A **morte** é o fim.
V = Há outra **vida**.

1. $E \to \neg M$
2. $\neg M \to V$
3. $\therefore E \to V$

(n) G = Pedro **ganhou** dinheiro.
T = (Pedro) comprará um **tênis**.
R = (Pedro) comprará um **relógio**.

1. $G \to T \vee R$
2. $\neg R$
3. $\therefore \neg T \to \neg G$

2.

(a)

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$(A \vee B) \wedge \neg B$	$(A \vee B) \wedge \neg B \to A$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

O argumento é válido.

(b)

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$\neg C$	$\neg A$	$\neg C \to \neg A$	$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (\neg C$
V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

O argumento é válido.

3.

(a)

6. $A \to C$ (SH em 1 e 2)
7. $C \vee E$ (DC em 3, 4 e 6)

(b)

4. A 1. SIMP
5. $A \vee C$ 4. AD
6. D 2.5. MP
7. $A \wedge D$ 4.6. CONJ

(c)

7. $A \to C$ 1.2. SH
8. $A \to D$ 3.7. SH
9. $\neg A$ 4.8. MT
10. E 5.9. SD

(d)

4. $B \vee A$ 2. AD
5. $A \vee B$ 4. COM
6. $C \wedge (E \wedge D)$ 1. 5. MP
7. $(C \wedge E) \wedge D$ 6. ASSOC
8. $C \wedge E$ 7. SIMP

(e)

4. A 1. SIMP
5. $A \vee C$ 4. AD
6. D 2.5. MP
7. A $\wedge D$ 4.6. CONJ

(f)

6. $W \to (W \wedge X)$ 1. ABS
7. $W \to Y$ 3.6. SH
8. $Z \vee X$ 2.7. MP
9. X 4.8. SD

(g)

6. $E \to G$ 2.3. SH
7. $A \to B$ 1. SIMP
8. $\neg A \vee \neg E$ 4.6.7. DD

(h)

4. $C \vee D$ 1. SIMP
5. D 2.4. SD

4.

(a) $N =$ O chefe notou a mudança.
$A =$ (O chefe) aprovou-a (a mudança)

1. $\neg N \vee A$
2. N
3. $\therefore A$
4. $\neg\neg N$ 2. DN
5. A 1.4. SD

(b) $V =$ O papel de tornassol ficar vermelho.
$A =$ A solução é ácida.

1. $V \to A$
2. V
3. $\therefore A$
4. A 1.2. MP

(c) $B =$ O Botafogo ganha.
$S =$ O Santos ganha.
$P =$ O Palmeiras perde.

$G =$ O Guarani perde.

1.	$B \vee S \to P \wedge G$	
2.	S	
3.	$\therefore G$	
4.	$S \vee B$	2. AD
5.	$B \vee S$	4. COM
6.	$P \wedge G$	1.5. MP
7.	G	6. SIMP

(d) $G =$ Pedro ganhou dinheiro.
$T =$ (Pedro) comprará um tênis.
$R =$ (Pedro) comprará um relógio.

1.	$G \to T \vee R$	
2.	$\neg R$	
3.	$\therefore \neg T \to \neg G$	
4.	$\neg G \vee (T \vee R$	1. IM
5.	$(\neg G \vee T) \vee R$	4. ASSOC
6.	$\neg G \vee T$	2.5. SD
7.	$G \to T$	6. IM
8.	$\neg T \to \neg G$	7.TRANS

(e) $L =$ Luís comprar um carro.
$C =$ Carlos também comprará (um carro).
$M =$ Maria tirará a Carteira de Habilitação.
$G =$ Glória tirará a Carteira de Habilitação.
$J =$ João sofrerá um acidente automobilístico.
$D =$ Donizete será contratado como motorista.

1.	$L \to C$	
2.	$C \to M \vee G$	
3.	$M \vee G \to J$	
4.	$(L \to J) \to D$	
5.	$\therefore D$	
6.	$L \to M \vee G$	1.2. SH
7.	$L \to J$	3.6. SH
8.	D	4.7. MP

(f) $S =$ Existem subsídios do governo para as escolas.
$C =$ Há controle do governo sobre as escolas.
$D =$ Há decadência nas escolas.
$F =$ Há florescimento (nas escolas).

1.	$\neg S \to C$	
2.	$C \to \neg D$	
3.	$D \vee F$	
4.	$\neg F$	
5.	$\therefore S$	
6.	$\neg S \to \neg D$	1.2. SH
7.	D	3.4. SD
8.	$\neg\neg D$	7. DN
9.	$\neg\neg S$	6.8. MT
10.	S	9. DN

(g) $U =$ Napoleão usurpou o poder que legitimamente não lhe cabia.
$C =$ (Napoleão) deve ser condenado.
$L =$ Napoleão foi um monarca legítimo.

1.	$U \to C$	
2.	$L \vee U$	
3.	$\neg L$	
4.	$\therefore C$	
5.	U	2.3. SD
6.	C	1.5. MP

(h) $C =$ O oxigênio combinou-se com o filamento.
$F =$ Formou-se um ácido.
$E =$ (O oxigênio) evaporou completamente.

1.	$(C \wedge F) \vee E$	
2.	$\neg E$	
3.	$\therefore C \wedge F$	
4.	$C \wedge F$	1.2. SD

(i) $E =$ Eu estudo.
$A =$ Sou aprovado em Lógica Matemática.
$V =$ Jogo vôlei.

1.	$E \to A$	
2.	$\neg V \to E$	
3.	$\neg A$	
4.	$\therefore V$	
5.	$\neg E$	1.3. MT
6.	$\neg\neg V$	2.5. MT
7.	V	6. DN

(j) $S =$ Sônia ganha.
$A =$ Alfredo ganha.
$M =$ Maria perde.

B = Bete perde.

1.	$S \vee A \to M \wedge B$	
2.	S	
3.	$\therefore B$	
4.	$S \vee A$	2. AD
5.	$M \wedge B$	1.4. MP
6.	B	5. SIMP

(k) C = Continuar chovendo.
A = A cidade ficará alagada.
H = Haverá congestionamento.
P = O culpado é o prefeito.

1.	$C \to A$	
2.	$C \wedge A \to H$	
3.	$H \to P$	
4.	$\therefore C \to P$	
5.	$C \to C \wedge A$	1. ABS
6.	$C \to H$	2.5. SH
7.	$C \to P$	3.6. SH

(l) A = O gerente do banco tivesse acionado o alarme.
T = O cofre se trancaria.
P = A polícia chegaria a tempo de prender os assaltantes.

1.	$A \to T \wedge P$	
2.	$\neg P$	
3.	$\therefore \neg A$	
4.	$\neg A \vee (T \wedge P)$	1. IM
5.	$(\neg A \vee T) \wedge (\neg A \vee P)$	4. DIST
6.	$\neg A \vee P$	5. SIMP
7.	$\neg A$	2.6. S.D

5.

(a)

4. $D \to (E \to F)$	1. EXP
5. $D \to G$	2.4. SH

(b)

4. $Q \to P$	1.2. MP
5. $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	1.4. CONJ
6. $P \leftrightarrow Q$	5. EM

(c)

5. $C \to A$	2.3. SH
6. A	1.5. MP

(d)

5. $B \to C$	1.2. MP
6. C	3.5. MP

(e)

4. $B \wedge C$	1.2. MP
5. B	4. SIMP
6. $A \wedge B$	2.5. CONJ

(f)

3. $A \vee B$	1. AD
4. $A \vee C$	1. AD
5. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	3.4. CONJ

(g)

5. A	2. DN
6. $A \wedge B$	3.5. CONJ
7. $C \wedge D$	1.6. MP
8. D	7. SIMP

(h)

5. $C \vee C$	1.2.3. D.C
6. C	5. IDEM

(i)

4. A	1. IDEM
5. $B \wedge C$	2.4. MP
6. C	5. SIMP

(j)

4. $(A \to B) \wedge (B \to A)$	1. EM
5. $(B \to C) \wedge (C \to B)$	2. EM
6. $A \to B$	4. SIMP
7. $B \to C$	5. SIMP
8. $A \to C$	6.7.SH
9. $C \to B$	5. SIMP
10.B $\to A$	4. SIMP
11.C $\to A$	9.10. SH
12. $(A \to C) \wedge (C \to A)$	8.11. CONJ
13.A $\to C$	12. EM

(k)

4. $\neg\neg B \to \neg C$	2. TRANS
5. $B \to \neg C$	4. DN
6. $A \to \neg C$	1.5. SH

(l)

4. $I \vee H$	2. AD
5. $H \vee I$	4. COM
6. $J \wedge (K \wedge L)$	1.5. MP
7. $(J \wedge K) \wedge L$	6. ASSOC
8. $J \wedge K$	7. SIMP

(m)

4. $\neg O \vee \neg P$	2. AD
5. $\neg(O \wedge P)$	4. DM
6. $\neg(M \vee N)$	1.5. MT
7. $\neg M \wedge \neg N$	6. DM
8. $\neg M$	7. SIMP

(n)

4. $(F \to S \vee D) \wedge (S \vee D \to F)$	1. EM
5. $S \vee D \to F$	4. SIMP
6. $S \vee D$	2. AD
7. F	5.6. MP

(o)

5. $Z \vee X$	1.2. MP
6. X	3.5. SD

(p)

5. $\neg A$	1. SIMP
6. C	2.5. SD
7. B	1. SIMP
8. $C \wedge B$	6.7. CONJ
9. $M \wedge N$	3.8. MP
10. M	9. SIMP

(q)

4. A	1. SIMP
5. $A \vee C$	4. AD
6. D	2.5. MP
7. $A \wedge D$	4.6. CONJ

(r)

3. $\neg\neg Q \vee (P \wedge Q)$	1. IM
4. $Q \vee (P \wedge Q)$	3. DN
5. $(Q \vee P) \wedge (Q \vee Q)$	4. DIST
6. $Q \vee P$	5. SIMP
7. $P \vee Q$	6. COM
8. $\neg(\neg P) \vee Q$	7. DN
9. $\neg P \to Q$	8. IM

6.

(a)

3. $\neg(\neg(P \wedge Q))$	2. R.A.
4. $P \wedge Q$	3. DN
5. $\neg(P \wedge Q)$	1. DM
$6\neg(P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q)$	4.5. COM
7. $\neg(P \wedge Q)$	6. R.A.

(b)

3. $\neg(\neg P \vee Q)$	2. R.A.
4. $\neg\neg P \wedge \neg Q$	3. DM
5. $P \wedge \neg Q$	4. DN
6. P	5. SIMP
7. $\neg Q$	5. SIMP
8. Q	1.6. MP
9. $Q \wedge \neg Q$	7.8. CONJ
10. $\neg P \vee Q$	9. R.A.

(c)

3. $\neg\neg(P \to Q)$	2. R.A.
4. $P \to Q$	3. DN
5. P	1. SIMP
6. $\neg Q$	1. SIMP
7. Q	4.5. MP
8. $\neg Q \wedge Q$	6.7. CONJ
9. $\neg(P \to Q)$	8. R.A.

(d)

3. $\neg(\neg Q \to \neg P)$	2. R.A.
4. $\neg Q \to \neg P$	1. TRANS
5 $\neg(\neg Q \to \neg P) \wedge (\neg Q \to \neg P)$	3.4. CONJ
6. $\neg P \to Q$	5. R.A.

(e)

4. $\neg Q$	3. R.A.
5. Q	1.2. SD
6. $\neg Q \wedge Q$	4.5. CONJ
7. Q	6. R.A.

(f)

4. $\neg(P \to R)$	3. R.A.
5. $P \to R$	1.2. SH
6. $\neg(P \to R) \wedge (P \to R)$	4.5. CONJ
7. $P \to R$	6. R.A.

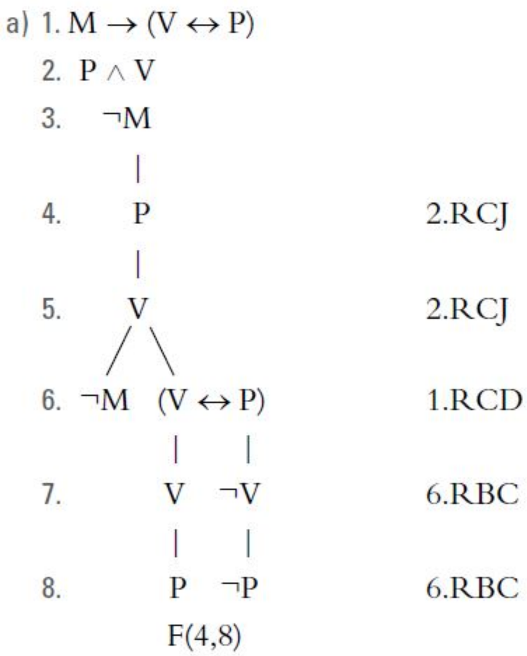
(g)

4. $\neg\neg P$	3. DN
5. $\neg P$	1.2. MT
6. $\neg\neg P \wedge \neg P$	4.5. CONJ
7. $\neg P$	6. R.A.

(h)

4. $\neg Q$	3. R.A.
5. Q	1.2. MP
6. $\neg Q \wedge Q$	4.5. CONJ
7. Q	6. R.A.

7.



A forma de argumento é inválida.

b) 1. $F \wedge S \to I$

2. $Z \vee G$

3. $\neg I$

4. G

5. $F \wedge Z$

6. $\neg S$

7. F 5.RCJ

8. Z 5.RCJ

9. Z G 2.RDJ

10. $\neg(F \wedge S)$ I 1.RCD

11. $\neg F$ $\neg S$

F(7,11)

A forma de argumento é inválida.

c) 1. $C \to M$

2. C

3. $\neg M$

4. $\neg C$ M

F(2,4) F(3,4)

A forma de argumento é válida.

d) 1. $P \to (B \wedge \neg C \to A)$

2. $P \to B$

3. $\neg(P \to A \vee C)$

4.	P		3.NRCD
5.	$\neg(A \vee C)$		3.NRCD
6.	$\neg A$		5.NRDJ
7.	$\neg C$		5.NRDJ
8.	$\neg P$ F(4,8)	B	2.RCD
9.	$\neg P$ F(4,8)	$(B \wedge \neg C \to A)$	1.RCD
10.	$\neg(B \wedge \neg C)$	A F(6,10)	9.RCD
11.	$\neg B$ F(2,11)	$\neg\neg C$	10.NRCJ
12.		C F(7,12)	11.RDN

A forma de argumento é válida.

e) 1. $A \to B$

2. $\neg B \to C$

3. $\neg(A \vee \neg C \to B)$

4.	$(A \vee \neg C)$		3.NRCD
5.	$\neg B$		3.NRCD
6.	A	B F(5,6)	1.RCD
7.	$\neg A$ F(6,7)	$\neg C$	4.RDJ
8.	$\neg\neg B$	C F(7,8)	2.RDC
9.	B F(5,9)		8.RDN

A forma de argumento é válida.

f) 1. $B \rightarrow L$
2. $\neg B$
3. $\neg\neg L$
4. L — 3.RDN
5. $\neg B$ L — 1.RCD

A forma de argumento é inválida.

g) 1. $B \rightarrow L$
2. $\neg L$
3. $\neg\neg B$
4. B — 3.RDN
5. $\neg B$ L — 1.RDC
F(4,5) F(2,5)

A forma de argumento é válida.

h) 1. $E \wedge I \rightarrow \neg A$
2. $\neg E$
3. $\neg(A \rightarrow \neg I)$
4. A
5. $\neg\neg I$ — 3.NRDC
6. I — 5.RDN
7. $\neg (E \wedge I)$ $\neg A$ — 1.RCD
F(4,7)
8. $\neg E$ $\neg I$ — 7.NRCJ
F(6,8)

A forma de argumento é inválida.

Seção 1.6

1.

(a) $\forall x\ (C(x) \rightarrow M(x))$

(b) $\exists x\ (C(x) \wedge A(x))$

(c) $\neg \forall x\ (C(x) \rightarrow T(x))$

(d) $\forall x\ (E(x) \rightarrow A(x))$

(e) $\neg \exists x\ (A(x) \wedge \neg P(x))$

(f) $\neg \exists x\ (P(x) \wedge \neg C(x))$

(g) $\forall x\ (J(x) \to T(x))$

(h) $\forall x\ (M(x) \land A(x) \to D(x))$

(i) $\forall x\ ((A(x) \lor T(x) \to F(x)) \leftrightarrow \neg E(x))$

(j) $\exists x\ ((H(x) \land I(x)) \land Tx)$

(k) $\forall x\ ((H(x) \land I(x)) \to T(x))$

(l) $\neg \forall x\ (R(x) \to O(x))$

(m) $\forall x\ (S(x) \to I(x) \lor C(x))$

(n) $\exists x\ (E(x) \land (I(x) \lor M(x))$

(o) $\forall x\ (P(x) \to C(x))$

(p) $\neg \exists x\ (S(x))$

(q) $\exists x\ (S(x))$

(r) $\exists x\ (J(x) \land H(x))$

(s) $\forall x\ (M(x) \to O(x))$

(t) $\forall x\ (P(x) \to D(x))$

(u) $S \land \forall x\ (E(x) \to P(x))$

(v) $\forall x\ (C(x) \to A(x)) \land \exists x\ (C(x) \land \neg S(x))$

(w) $\exists x\ (F(x) \land E(x)) \to Le$

2.

(a)

$\neg \forall x\ (A(x) \to B(x))$	
$\exists x\ (\neg (A(x) \to B(x)))$	EQV2
$\exists x\ (\neg (\neg A(x) \lor B(x)))$	IM
$\exists x\ (\neg\neg A(x) \land \neg B(x))$	DM
$\exists x\ (A(x) \land \neg B(x))$	DN

(b)

$\neg \forall x\ (C(x) \to \neg D(x))$	
$\exists x\ (\neg (C(x) \to \neg D(x)))$	EQV2
$\exists x\ (\neg (\neg C(x) \lor \neg D(x)))$	IM
$\exists x\ (\neg\neg C(x) \land \neg\neg D(x))$	DM
$\exists x\ (C(x) \land Dx)$	DN

(c)

$\neg \exists x\ \neg (O(x) \lor \neg P(x))$	
$\forall x\ (\neg\neg (O(x) \lor \neg P(x)))$	EQV1
$\forall x\ (O(x) \lor \neg P(x))$	DN
$\forall x\ (\neg P(x) \lor O(x))$	IM
$\forall x\ (P(x) \to O(x))$	IM

(d)

$\neg \exists x\ (P(x) \land \neg A(x))$	
$\forall x\ (\neg (P(x) \land \neg A(x)))$	EQV1
$\forall x\ (\neg P(x) \lor \neg\neg A(x))$	DM
$\forall x\ (\neg P(x) \lor A(x))$	DN
$\forall x\ (P(x) \to A(x))$	IM

(e)

$\neg \exists x\ (A(x) \land (B(x) \to \neg C(x)))$	
$\forall x\ (\neg (A(x) \land (B(x) \to \neg C(x))))$	EQV1
$\forall x\ (\neg A(x) \lor \neg (B(x) \to \neg C(x)))$	DM
$\forall x\ (\neg A(x) \lor \neg (\neg B(x) \lor \neg C(x)))$	IM
$\forall x\ (\neg A(x) \lor (\neg\neg B(x) \land \neg\neg C(x)))$	DM
$\forall x\ (\neg A(x) \lor (B(x) \land C(x)))$	DN
$\forall x\ (A(x) \to (B(x) \land C(x)))$	IM

(f)

$\neg \forall x\ (\neg A(x) \to (B(x) \land C(x)))$	
$\exists x\ (\neg (\neg A(x) \to (B(x) \land C(x))))$	EQV2
$\exists x\ (\neg (\neg\neg A(x) \lor (B(x) \land C(x))))$	IM
$\exists x\ (\neg (A(x) \lor (B(x) \land C(x))))$	DN
$\exists x\ (\neg A(x) \land \neg (B(x) \land C(x)))$	DM
$\exists x\ (\neg A(x) \land (\neg B(x) \lor \neg C(x)))$	DM
$\exists x\ (\neg A(x) \land (B(x) \to \neg C(x)))$	IM

3.

(a) (V) (b) (F) (c) (V) (d) (V)

4.

(a) (F) (b) (V) (c) (V) (d) (F) (e) (V)

5.

(a)

$$
\begin{array}{ll}
\neg\,\forall x\ (C(x) \to T(x)) & \\
\exists x\ (\neg\,(C(x) \to T(x))) & \text{EQV2} \\
\exists x\ (\neg\,(\neg\,C(x) \lor T(x))) & \text{IM} \\
\exists x\ (\neg\,\neg\,C(x) \land \neg\,T(x)) & \text{DM} \\
\exists x\ (C(x) \land \neg\,T(x)) & \text{DN}
\end{array}
$$

Existem cães que não são treinados (Linguagem natural).

(b)

$$
\begin{array}{ll}
\neg\,\forall x\ (R(x) \to B(x)) & \\
\exists x\ (\neg\,(R(x) \to B(x))) & \text{EQV2} \\
\exists x\ (\neg\,(\neg\,R(x) \lor B(x))) & \text{IM} \\
\exists x\ (\neg\,\neg\,R(x) \land \neg\,B(x)) & \text{DM} \\
\exists x\ (R(x) \land \neg\,B(x)) & \text{DN}
\end{array}
$$

Existem recém-nascidos que não são bonitos (Linguagem natural).

(c)

$$
\begin{array}{ll}
\neg\,\exists x\ (A(x) \land \neg\,P(x)) & \\
\forall x\ (\neg\,(A(x) \land \neg\,P(x))) & \text{EQV1} \\
\forall x\ (\neg\,A(x) \lor \neg\,\neg\,P(x)) & \text{DM} \\
\forall x\ (\neg\,A(x) \lor P(x)) & \text{DN} \\
\forall x\ (A(x) \to P(x)) & \text{IM}
\end{array}
$$

Todas as aves têm penas (Linguagem natural).

(d)

$$
\begin{array}{ll}
\neg\,\exists x\ (P(x) \land \neg\,C(x)) & \\
\forall x\ (\neg\,(P(x) \land \neg\,C(x))) & \text{EQV1} \\
\forall x\ (\neg\,P(x) \lor \neg\,\neg\,C(x)) & \text{DM} \\
\forall x\ (\neg\,P(x) \lor C(x)) & \text{DN} \\
\forall x\ (P(x) \to C(x)) & \text{IM}
\end{array}
$$

Todos os políticos são corruptos (Linguagem natural).

(e)

$$
\begin{array}{ll}
\neg\,\forall x\ (R(x) \to O(x)) & \\
\exists x\ (\neg\,(R(x) \to O(x))) & \text{EQV2} \\
\exists x\ (\neg\,(\neg\,R(x) \lor O(x))) & \text{IM} \\
\exists x\ (\neg\,\neg\,R(x) \land \neg\,O(x)) & \text{DM} \\
\exists x\ (R(x) \land \neg\,O(x)) & \text{DN}
\end{array}
$$

Existe algo que reluz e não é de ouro (Linguagem natural).

(f)

$$
\begin{array}{ll}
\neg\,\exists x\ (S(x)) & \\
\forall x\ (\neg\,S(x)) & \text{EQV1}
\end{array}
$$

Todos não sobreviveram ao desastre (Linguagem natural).

Referências Bibliográficas

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo - SP: Cengage Learning, 2012.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. [S.l.]: Atual reform. São Paulo, 2003.

GERSTING, J. L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta*. 5. ed. Rio de Janeiro - RJ: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2004.