

INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ

Campus Paranavaí

Rua José Felipe Tequinha, 1400 Jardim das Nações - Paranavaí - PR



Curso: Engenharia de Software Turno: Noturno

Disciplina: Matemática Discreta e Lógica Professor: Azuaite A. Schneider

Lista 4 – Indução e Recorrência

1. Use o primeiro princípio da indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

(a)
$$2+6+10+\cdots+(4n-2)=2n^2$$

(b)
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(c)
$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$

(d)
$$2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$$

(e)
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(f)
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(g)
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\lceil \frac{n(n+1)}{2} \right\rceil^2$$

(h)
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

2. Prove, usando indução, que $n^2 > n+1$ para $n \ge 2$.

(Veja que aqui a propriedade é válida a partir de n=2, assim a prova por indução começa com $n_0=2$ e não com $n_0=1$. Uma dica para provar o que se pede é somar na desigualdade da hipótese de indução 2k+1 de ambos os lados.)

- 3. Prove, usando indução, que $n^2 > 2n + 3$ para $n \ge 3$.
- 4. Prove, usando indução, que $n^3 n$ é divisível por 3. (Para provar tal propriedade é útil saber que $(k-1)^3 = k^3 3k^2 + 3k 1$. De maneira geral, temos que $(a-b)^3 = a^3 3a^2b + 3ab^2 b^3$.)
- 5. Prove, usando indução, que $7^n 2^n$ é divisível por 5.
- 6. Encontre um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ que torna as seguintes afirmações verdadeiras, e prove-as por indução em n:

(a)
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \ge n_0 \to 2^n > n^2$$
.

(b)
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \ge n_0 \to n^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^n$$
.

(c)
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \ge n_0 \to n! > 2^n$$
.

(d)
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \ge n_0 \to n! > 4^n$$
.

7. Escreva os cinco primeiros valores das sequências dadas.

(a)
$$S(1) = 10$$

$$S(n) = S(n-1) + 10 \quad \text{para } n \ge 2$$

(b)
$$B(1) = 1$$

$$B(n) = B(n-1) + n^2 \text{ para } n \ge 2$$

(c)
$$S(1) = 1$$

$$S(n) = S(n-1) + \frac{1}{n} \quad \text{para } n \ge 2$$

(d)
$$T(1) = 1$$

$$T(n) = n \cdot T(n-1) \text{ para } n \ge 2$$

(e)
$$P(1) = 1$$

$$P(n) = n^2 \cdot P(n-1) + (n-1) \text{ para } n \ge 2$$

(f)
$$M(1) = 2$$

$$\overline{M(2)} = 2$$

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + M(n-2) \quad \text{para } n > 2$$

(g)
$$D(1) = 3$$

$$D(2) = 5$$

$$D(n) = (n-1) \cdot D(n-1) + (n-2) \cdot D(n-2) \text{ para } n \ge 2$$

(h)
$$W(1)=2$$

$$W(2)=3$$

$$W(n)=W(n-1)\cdot W(n-2) \quad \text{para } n>2$$

(i)
$$T(1) = 1$$

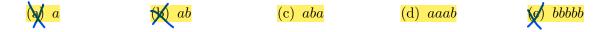
$$T(2) = 2$$

$$T(3) = 3$$

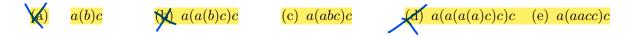
$$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 3T(n-3) \text{ para } n > 3$$

8. Em um experimento, certa colônia de bactérias tem inicialmente uma população de 50.000. Uma leitura é feita a cada período de duas horas, e no final de cada duas horas de intervalo há três vezes mais bactérias que antes.

- (a) Escreva a definição recursiva para A(n), onde A(n) é o número de bactérias presentes no início do n-ésimo período de tempo.
- (b) No início de qual intervalo existem 1.350.000 bactérias presentes?
- 9. Uma quantia de 500 unidades monetárias foi investida em uma conta remunerada a uma taxa de juro composto anual de 10% (ou 0, 10).
 - (a) Escreva a definição recursiva para P(n), a quantia na conta no início do n-ésimo ano.
 - (b) Depois de quantos anos a quantia excederá o valor de 700 unidades monetárias?
- 10. Uma coleção S de cadeias de caracteres é definida recursivamente por:
 - 1. a e b pertencem a S.
 - 2. Se X pertence a S, então Xb também pertence a S. Quais das seguintes cadeias pertencem a S? Justifique sua resposta.



- 11. Uma coleção W de cadeias de símbolos é definida recursivamente por
 - 1. $a, b \in C$ pertencem a W.
 - 2. Se X pertence a W, então a a(X)c também pertence a W. Quais das seguintes cadeias pertencem a W?



- 12. Forneça uma definição para o conjunto de todas as fórmulas bem definidas da aritmética de inteiros que envolvam inteiros e os operadores aritméticos +, -, * e /. Use parênteses se necessário.
- 13. Forneça uma definição recursiva para o fatorial n!, para $n \ge 1$.

(Observação: O fatorial n! é definido como o produto de todos os números menores ou igual a n. Exemplo: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.)

- 14. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar n!, definido no exemplo anterior
- 15. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar uma sequência S(n) dada por

 $5, 12, 19, 26, 33, \dots$

16. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar uma sequência S(n) dada por

Assinale o pseudocódigo da função recursiva que computa a sequência S(n) dada por

17. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar uma sequência S(n) dada por

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$$

18. Que valor é retornado pela função recorrente *Mistério* dada no pseudocódigo abaixo para o valor de entrada n=4?

```
function Mist\'erio(inteiro\ n)

se n=1 então

retorne 1

senão

retorne Mist\'erio(n-1)+1

fim do se

fim da função Mist\'erio
```