INSTITUTO FEDERAL
Paraná

INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ
Campus Paranavaí
Rua José Felipe Tequinha, 1400
Jardim das Nações - Paranavaí - PR

Ministério da Educação

Curso: Engenharia de Software **Turno:** Noturno

Disciplina: Matemática Discreta e Lógica **Professor:** Azuaite A. Schneider

Lista 4 – Indução e Recorrência

1. Use o primeiro princípio da indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

   (a) $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$

   (b) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (c) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

   (d) $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

   (e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (f) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

   (g) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   (h) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2. Prove, usando indução, que $n^2 > n + 1$ para $n \geq 2$.

   (Veja que aqui a propriedade é válida a partir de $n = 2$, assim a prova por indução começa com $n_0 = 2$ e não com $n_0 = 1$. Uma dica para provar o que se pede é somar na desigualdade da hipótese de indução $2k + 1$ de ambos os lados.)

3. Prove, usando indução, que $n^2 > 2n + 3$ para $n \geq 3$.

4. Prove, usando indução, que $n^3 - n$ é divisível por 3. (Para provar tal propriedade é útil saber que $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$. De maneira geral,temos que $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.)

5. Prove, usando indução, que $7^n - 2^n$ é divisível por 5.

6. Encontre um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ que torna as seguintes afirmações verdadeiras, e prove-as por indução em n:

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \to 2^n > n^2$.

   (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \to n^2 < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

   (c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \to n! > 2^n$.

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \rightarrow n! > 4^n$.

7. Escreva os cinco primeiros valores das sequências dadas.

   (a) $S(1) = 10$

   $S(n) = S(n-1) + 10 \quad$ para $n \geq 2$

   (b) $B(1) = 1$

   $B(n) = B(n-1) + n^2 \quad$ para $n \geq 2$

   (c) $S(1) = 1$

   $S(n) = S(n-1) + \dfrac{1}{n} \quad$ para $n \geq 2$

   (d) $T(1) = 1$

   $T(n) = n \cdot T(n-1)$ para $n \geq 2$

   (e) $P(1) = 1$

   $P(n) = n^2 \cdot P(n-1) + (n-1)$ para $n \geq 2$

   (f) $M(1) = 2$

   $M(2) = 2$

   $M(n) = 2 \cdot M(n-1) + M(n-2) \quad$ para $n > 2$

   (g) $D(1) = 3$

   $D(2) = 5$

   $D(n) = (n-1) \cdot D(n-1) + (n-2) \cdot D(n-2)$ para $n \geq 2$

   (h) $W(1) = 2$

   $W(2) = 3$

   $W(n) = W(n-1) \cdot W(n-2) \quad$ para $n > 2$

   (i) $T(1) = 1$

   $T(2) = 2$

   $T(3) = 3$

   $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 3T(n-3)$ para $n > 3$

8. Em um experimento, certa colônia de bactérias tem inicialmente uma população de 50.000. Uma leitura é feita a cada período de duas horas, e no final de cada duas horas de intervalo há três vezes mais bactérias que antes.

(a) Escreva a definição recursiva para $A(n)$, onde $A(n)$ é o número de bactérias presentes no início do n-ésimo período de tempo.

(b) No início de qual intervalo existem 1.350.000 bactérias presentes?

9. Uma quantia de 500 unidades monetárias foi investida em uma conta remunerada a uma taxa de juro composto anual de 10% (ou $0,10$).

   (a) Escreva a definição recursiva para $P(n)$, a quantia na conta no início do n-ésimo ano.

   (b) Depois de quantos anos a quantia excederá o valor de 700 unidades monetárias?

10. Uma coleção S de cadeias de caracteres é definida recursivamente por:

    1. a e b pertencem a S.

    2. Se X pertence a S, então Xb também pertence a S. Quais das seguintes cadeias pertencem a S? Justifique sua resposta.

    (a) a (b) ab (c) aba (d) $aaab$ (e) $bbbbb$

11. Uma coleção W de cadeias de símbolos é definida recursivamente por

    1. a, b e c pertencem a W.

    2. Se X pertence a W, então a $a(X)c$ também pertence a W. Quais das seguintes cadeias pertencem a W?

    (a) $a(b)c$ (b) $a(a(b)c)c$ (c) $a(abc)c$ (d) $a(a(a(a)c)c)c$ (e) $a(aacc)c$

12. Forneça uma definição para o conjunto de todas as fórmulas bem definidas da aritmética de inteiros que envolvam inteiros e os operadores aritméticos $+, -, *$ e $/$. Use parênteses se necessário.

13. Forneça uma definição recursiva para o fatorial $n!$, para $n \geq 1$.

    (**Observação:** O fatorial $n!$ é definido como o produto de todos os números menores ou igual a n. **Exemplo:** $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.)

14. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar $n!$, definido no exemplo anterior

15. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar uma sequência $S(n)$ dada por

$$5, \quad 12, \quad 19, \quad 26, \quad 33, \ldots$$

16. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar uma sequência $S(n)$ dada por

    Assinale o pseudocódigo da função recursiva que computa a sequência $S(n)$ dada por

$$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27, \quad 81 \ldots$$

17. Escreva o pseudocódigo de uma função iterativa e uma função recursiva para computar uma sequência $S(n)$ dada por

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 7, \quad 11, \quad 16, \ldots$$

18. Que valor é retornado pela função recorrente *Mistério* dada no pseudocódigo abaixo para o valor de entrada $n = 4$?

function *Mistério(inteiro n)*

  se $n = 1$ **então**

    retorne 1

  senão

    retorne *Mistério(n-1) + 1*

  fim do se

fim da função *Mistério*