

Apuntes

Matemática 4to

August 5, 2025

1 Temas

1.1 Primer Trimestre

Factoreo. Conjuntos de números reales. Representación en recta numérica. Intervalos: abiertos, cerrados y semiabiertos. Potencia con exponente fraccionario. Propiedades de potenciación. Operaciones de potencia con exponente fraccionario. Radicales: concepto, semejantes y no semejantes. Extracción de factores de fuera del signo radical por simplificación y por regla práctica.

1.2 Segundo trimestre

Suma algebraica de radicales semejantes y aparentes no semejantes. Multiplicación de radicales de igual y distinto índice. División de radicales de igual y de distinto índice. Binomio conjugado. Racionalización de denominadores.

1.3 Tercer trimestre

Función: dominio e imagen, codominio. Función lineal. Gráfico de la función. Ecuación de la recta. Distintas formas de la ecuación de la recta. Ecuación de la recta que pasa por un punto. Ecuación que pasa por una recta y es paralelo a una recta. Ecuación de una recta que pasa por un punto y es perpendicular a una recta. Ecuación de segundo grado (parábolas): Definición, elementos, clasificación, resolución y verificación.

2 Desarrollo

2.1 Factoreo

Hay 5 casos de factoreo conocidos, su finalidad es poder facilitar las expresiones algebraicas descomponiéndolas en factores primos.

2.1.1 Factor comun

Se puede observar que en el polinomio, al separar en términos se observen factores que se repitan en todos o algunos de ellos. Es muy importante tener en

cuenta el grado de los factores, siempre debe ser el menor posible.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}xm^2 + sm - am^3 + sam &= m(xm + s - am^2 + sa) \\2b^2 - 32m^3 &= 2b^2 - 2 \cdot 16m^3 = 2(b^2 - 16m^3)\end{aligned}$$

Ejercicio: $3mn^2h + 9nm^3 - 27hm^2$

2.1.2 Factor común en grupos

Igual que en el anterior, puedo ver dos o más factores que se repiten en los polinomios y me permiten escribirlos distintos.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}jk + jt + ak + at + bk + bt &= (jk + jt) + (ak + at) + (bk + bt) \\&= j(k + t) + a(k + t) + b(k + t) = (k + t)(j + a + b) \\&= (jk + ak + bk) + (jt + at + bt) \\&= k(j + a + b) + t(j + a + b) = (j + a + b)(k + t)\end{aligned}$$

Ejercicio: $5h^2m + 8mn^2 + 10h + 16n$

$$\begin{aligned}5h^2m + 8mn^2 + 10h + 16n &= (5h^2m + 10h) + (8mn^2 + 16n) \\&= (5h^2m + 2 \cdot 5h) + (8mn^2 + 8 \cdot 2n) \\&= 5h(hm + 2) + 8n(mn + 2)\end{aligned}$$

2.1.3 Trinomio cuadrado perfecto

Es el desarrollo del cuadrado de un binomio. Suele comunmente asociarse a la fórmula $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

¿De donde surge esa fórmula?:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = (a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b) \\&= (a^2 + ab + ba + b^2) = (a^2 + b^2 + 2ab)\end{aligned}$$

En caso de ser a o b negativas, entonces resulta en $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Ejercicio: $(7 + a^2)^2$

Nota: La propiedad de las potencia: potencia de potencia sucede de la siguiente manera:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

2.1.4 Cuatrinomio cubo perfecto

Es el desarrollo del cubo de un binomio, similar al caso anterior

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = (a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b)(a + b) \\&= (a^2 + ab + ba + b^2)(a + b) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a + b) \\&= (a^2a + a^2b + b^2a + b^2b + 2aba + 2abb) \\&= (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2) \\&= (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2)\end{aligned}$$

En caso de ser a o b negativos resulta en $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

Ejercicio: $(3 + a^2x)^3$

$$\begin{aligned}(3 + a^2x)^3 &= 3^3 + (a^2x)^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot a^2x + 3 \cdot 3 \cdot (a^2x)^2 \\ &= 27 + a^6x^3 + 27a^2x + 9a^4x^2\end{aligned}$$

2.1.5 Diferencia de cuadrados

Al identificar dos números que son el cuadrado de otro puedo reescribirlos como el producto de su suma y diferencia. Es decir:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Es importante destacar que si multiplico lo del parentesis vuelvo al primer término. Siempre es útil identificar las propiedades de potencia para identificar cuadrados.

Por ejemplo:

$$64 - m^8 = 8^2 - (m^4)^2 \quad (1)$$

$$= (8 - m^4)(8 + m^4) \quad (2)$$

Ejercicio: $9 - b^4$

2.2 Numeros reales: representación e Intervalos

Los números reales son aquellos que contienen todos los conjuntos de números anteriormente vistos: los naturales, enteros, racionales e irracionales, ($\mathbb{R} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$), son infinitos y en sus intervalos se encuentran infinitos números. Corchetes y parentesis representan si el número está incluido o no en ese intervalo

Por ejemplo:

Intervalo abierto: $(2, 8)$ tanto el 2 como el 8 no están incluidos en ese intervalo

Intervalo semiabierto: $(2, 8]$ el 8 si está incluido en el intervalo

Intervalo cerrado: $[2, 8]$ tanto 2 como 8 están incluidos

En su representación también se guía de parentesis y corchetes sobre los números que están en el intervalo

2.3 Propiedades de la potenciación

Si bien tienen nombres complicados estas propiedades son bastantes conocidas, hay que tener muy en cuenta cuando pueden usarse y cuando no, ya sea por sumas y restas o multiplicación o división.

2.3.1 Potencias fraccionarias

Son aquellas potencias que mediante una fracción representan raíces y potencias al mismo tiempo, el denominador hace de índice de la raíz y el numerador de exponente, es decir:

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

2.3.2 Potencia 0

Cualquier número elevado a la potencia 0, es 1, es decir $a^0 = 1$

$$1000^0 = 1, \quad 4534^0 = 1, \quad 12^0 = 1$$

2.3.3 Potencia 1

Cualquier base con exponente 1 es igual a la misma base, es decir: $a^1 = a$

$$7474^1 = 7474, \quad 331^1 = 331, \quad 0^1 = 0$$

2.3.4 Potencia negativa

al tener una potencia negativa, produce que las fracciones se inviertan para que el exponente sea positivo:

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right), \quad \left(\frac{r}{t}\right)^{-3} = \left(\frac{t}{r}\right)^3 = \frac{t^3}{r^3}$$

2.3.5 Producto y división de potencias de igual base

Al encontrarnos dos potencias de igual base, podemos sumar sus exponentes o restarlos dependiendo si se están multiplicando o dividiendo respectivamente. Es decir:

Multiplicación: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

División: $a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

Ambos: $a^b : a^c \cdot a^d = a^{b-c+d}$

2.3.6 Potencia de potencia

Dado una potencia elevada a otra sobre sí, resulta en la multiplicación de sus exponentes, es decir:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Algunos ejemplos:

$$(c^2)^5 = c^{10}, \quad (12^{25})^0 = 1$$

2.3.7 Distribución de potencia y raíz

Las potencias y raíces son distribuibles solamente si hay multiplicación o división

División: $(a : b)^c = a^c : b^c, \quad \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Multiplicación: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Suma y resta: $(a + b)^c \neq a^c + b^c, \quad (a - b)^{\frac{1}{2}} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

2.4 Fracciones: repaso

2.4.1 Suma y resta de fracciones:

Es importante priorizar que el denominador sea igual para las fracciones a sumar o restarlos, por lo tanto, para igualar denominadores podemos buscar un múltiplo común menor ó si el mayor es múltiplo del menor puedo tomar ese como denominador:

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{3}{7} + \frac{6}{4} &= \frac{12}{28} + \frac{42}{28} = \frac{12+42}{28} = \frac{54}{28} \\(2) \quad \frac{7}{8} - \frac{1}{4} &= \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7-2}{8} = \frac{5}{8} \\(3) \quad \frac{7}{8} - \frac{1}{4} &\neq \frac{7-1}{8-4}\end{aligned}$$

2.4.2 Multiplicación y simplificación de fracciones

Para simplificar fracciones debo trabajar con una única fracción o puedo entre varias siempre y cuando se esté multiplicando, esta simplificación se dá entre numerador y denominador, jamás entre dos numeradores y dos denominadores:

$$(1) \quad \frac{27}{9} = \frac{3 \cdot 9}{9} = \frac{3}{1} = 3 \qquad (2) \quad \frac{45}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5 \cdot 9}{5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{9} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{1} = 10$$

2.4.3 División de fracciones

Al dividir fracciones se "voltea" la segunda fracción y la división pasa a ser multiplicación:

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}$$

2.5 Ejercicios a realizar:

Ejemplo

$$\begin{aligned}(1) \quad \sqrt{24+4\left(\frac{1}{2}\right)^2} : \left[\frac{39}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot (-1)^7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= \sqrt{24+4\frac{1}{4}} : \left[\frac{39}{8} + \frac{1}{8}\right] \cdot (-1) + \frac{1}{9} \\&= \sqrt{24+1} : \left[\frac{39+1}{8}\right] \cdot (-1) + \frac{1}{9} \\&= \sqrt{25} : \left[\frac{40}{8}\right] \cdot (-1) + \frac{1}{9} \\&= 5 : 5 \cdot (-1) + \frac{1}{9} \\&= -1 + \frac{1}{9} \\&= \frac{-9+1}{9} = -\frac{8}{9}\end{aligned}$$

2.5.1 Ejercicios de factorio:

- (1) $(d^3m - 3)^2$
- (2) $m^2n5 + 15n^2h - 10n - 5n^3k$
- (3) $6ac - 4ad - 9bc + 6bd + 15c^2 - 10cd$
- (4) $x^2 - \frac{9}{25}$
- (5) $(1 + m^2p^2)^3$

2.5.2 Ejercicios de Representación e intervalos de números reales

Representar

- (1) $[2, 6)$
- (2) intervalo entre 6 y 9 que incluya ambos números
- (3) $(-3, 1)$

Identificar el intervalo cerrado, abierto y semicerrado. Verdadero y falso:

- (1) el tercer intervalo incluye a -3 (2) dos intervalos contienen a 6 (3) Hay menos números en el primer intervalo que en el segundo.

2.5.3 Propiedades de raíz y potencia

Resolver:

- (1) $(5^{-2} - 4)$
- (2) $(3^2)^{\frac{1}{2}}$
- (3) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
- (4) π^0

2.5.4 Ejercicios combinados

- (1) $\left(\frac{1 - \frac{5}{4}}{\sqrt[3]{-\frac{11}{8}} - 2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}} \right)^{-1}$
- (2) $\left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} + 1}{1 - \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{3}}$

2.6 Radicación

2.6.1 Conceptos:

Comencemos señalando las partes de un radical:

$$\sqrt[b]{a}$$

Donde a es el radicando, b el índice y el símbolo es la raíz.

Cualquier número o expresión que utiliza una raíz se conoce como radical. El término radical se deriva del latín radix, que significa raíz. El radical puede describir diferentes tipos de raíces para un número. El número escrito antes del

radical se conoce como número índice o grado. Este número nos ayuda a decir cuántas veces se multiplicaría el número por sí mismo para obtener el radicando. Este se considera el opuesto de un exponente, al igual que la suma es el opuesto de la resta y la división es el opuesto de la multiplicación

2.6.2 Semejanzas y no semejanzas

Dos radicales son semejantes cuando comparten índice y radicando, lo que pueden no compartir sería el coeficiente que los acompaña. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \sqrt[b]{55} \quad y \quad 25\sqrt[b]{55} & (2) \quad 2\sqrt[4]{16} \quad y \quad 3\sqrt[4]{16} \\ (3) \quad \sqrt[9]{m^3} \quad y \quad 8\sqrt[9]{m^2} & (4) \quad 23\sqrt[2]{25} \quad y \quad 13\sqrt[3]{25} \end{array}$$

Donde 1 y 2 son semejantes y 3 y 4 no cumplen con la semejanza ya sea por índice o radicando, y coeficiente es aquel número que acompaña a las raíces

2.6.3 Extracción de factores fuera de la raíz

¿Qué sucede cuando un radicando tiene un factor de exponente mayor o igual al índice de la raíz?

Primero debemos saber identificar todos los factores con sus exponentes que son parte del radicando y posteriormente analizar si es posible "extraerlos" de la raíz.

Identificación de factores: Necesito saber todos los números primos y exponentes de cada letra involucrados en el radicando. ¿Cómo lo hago? Primero puedo factorizar los factores, es decir, aplicar los casos de factorización y/o descomponer los números en números primos. Ejemplo:

$$\sqrt{25(m^3n + m^2h)} \quad \text{El radicando en este caso es } 25(m^3n + m^2h)$$

Primero el número 25 puedo factorizarlo:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Luego identifico si hay algún caso de factorización en $m^3n + m^2h$, que es en efecto el primer caso de factorización: factor común.

$$m^3n + m^2h = m^2(mn + h)$$

Reviso índices y exponentes: Como la raíz es aquella que es opuesta al exponente, entonces si sabemos la potencia del número puede anularse o reducirse, es decir:

Nuestro radical se ve así ahora: $\sqrt{5^2 \cdot m^2 \cdot (mn + h)}$, además como sabemos por las propiedades de potencia y radicación, la raíz es distributable en cuanto al producto, por lo tanto:

$\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{mn + h}$ cuando el índice es igual al exponente puede "cancelarse" lo cual resulta en $5 \cdot m \cdot \sqrt{mn + h}$ que sería la solución. Ahora ¿Qué sucede cuando el exponente es mayor al índice? recordemos que los exponentes

fraccionarios representan raíces y potencias, lo que se refiere a que pueden simplificarse como fracciones, o dividirse, si hubiese trabajado con

$$\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$$

En caso de tener un exponente que no es simplificable de ese modo podemos optar por separar en términos simplificables, es decir:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{m^4} &= \sqrt[3]{m^3 \cdot m} && \text{Por propiedad de la potencia se puede} \\ &= \sqrt[3]{m^3} \cdot \sqrt[3]{m} \\ &= m \cdot \sqrt[3]{m}\end{aligned}$$