Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Teórico Final de Geomtría I

Febrero 2026

1 Listado teórico:

1.1 Teorema 4

1.1.1 Enunciado

Sean A una recta, $a \in A$ y $p \notin A$. Entonces $\overrightarrow{ap} \subset A_p$.

1.1.2 Demostración

Consideramos en $\overleftrightarrow{ap}$ el orden $<$ tal que $a < p$, quiero ir por el absurdo, supongo $\overrightarrow{ap} \nsubseteq A$, es decir, **existe** $q \in \overrightarrow{ap}$ **tal que** $q \notin A_p$.
Pero como $A \subset A_p$ entonces $q \in \check{A}_p$, más precisamente $q \in \check{A}_p - A$.
Por *II.3* sabemos que $\overline{pq} \cap A \neq \varnothing$, pero a, p, q están alineados, entonces $\overline{pq} \subseteq \overleftrightarrow{ap}$.

- $\varnothing \neq \overline{pq} \cap A \subseteq \overleftrightarrow{ap} \cap A = \{a\}$ entonces $\overline{pq} \cap A = \{a\}$
- $\implies q < a < p$ por definición de segmento,
- pero $q \in \overrightarrow{ap} \implies a < q$ lo cual resulta **absurdo**

$\therefore \overrightarrow{ap} \subseteq A_p$

1.2 Corolario 5

1.2.1 Enunciado

Los semiplanos cerrados son convexos.

1.2.2 Demostración

Dado un semiplano A_p y sean $r, s \in A_p$ entonces hay 3 casos posibles:

1. Si $r, s \in A_p - A$. Entonces por *II.3* tenemos $\overline{rs} \subseteq A_p - A \subseteq A_p$
2. Si $r, s \in A$. Entonces por ser A una recta, $\overline{rs} \subseteq A \subseteq A_p$
3. Si $r \in A_p - A$ y $s \in A$. Entonces $\overline{sr} \subseteq \overrightarrow{sr} \subseteq A_p$ por teorema 4

En todos los casos llegamos a $\overline{rs} \subseteq A_p$
$\therefore A_p$ es convexo.

1.3 Teorema 7

1.3.1 Enunciado

Sea $\angle AB$ un ángulo con $a \in A$ y $b \in B$. Si R es una semirrecta interior al ángulo, entonces R interseca a $\overline{ab}$ en un único punto.

1.3.2 Demostración

Sea o el vértice de $\angle AB$. Si $a = o$ ó $b = o$, el resultado es claro.
Consideremos ahora el caso $a, b \neq o$. Quiero ver que a y b están en semiplanos opuestos respecto a $\overleftrightarrow{R}$. Entonces sea $a' \in \check{A}$ con $a \neq o$, sabemos que $b \in A_B$ entonces por teorema 4 $\overrightarrow{a'b} \subseteq A_B$ y como $R \subseteq A_B$ y $R \subseteq B_A$, vale que:

1. $\overrightarrow{a'b} \cap \check{R} = \varnothing$, análogamente $a' \in B_{\check{A}}$ entonces por teorema 4, $\overrightarrow{a'b} \subseteq B_{\check{A}}$

2. $\overrightarrow{ba'} \cap R = \varnothing$

Entonces

$$\begin{aligned} \overline{a'b} \cap \overleftrightarrow{R} &= \overline{a'b} \cap (R \cup \check{R}) \\ &= (\overline{a'b} \cap R) \cup (\overline{a'b} \cap \check{R}) \\ &= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \end{aligned}$$

Deducimos del *II.3* que a' y b están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{R}$. Como $a \in A$ y $a' \in \check{A}$ resulta que a y a' están en semiplanos opuestos respecto de $\overleftrightarrow{R}$
$\therefore$ a y b están en semiplanos opuestos respecto a $\overleftrightarrow{R}$

Por el *II.3* se deduce que $\overline{ab} \cap R \neq \varnothing$ y además $a, b \in sec(\angle AB)$ que es convexo, entonces $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$, luego la intersección $\overline{ab} \cap \overleftrightarrow{R}$ debe estar en R pues los puntos de $\check{R}$ son exteriores a $\angle AB$, por lo tanto $\overline{ab} \cap R \neq \varnothing$.

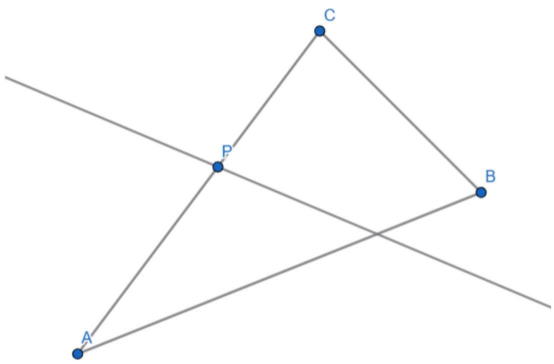
Y si hubieran dos puntos de corte de R y $\overline{ab}$, llamémoslos p y q, entonces $\overline{ab} \subseteq \overleftrightarrow{pq} = \overleftrightarrow{R}$. Pero $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$.
$\therefore \overline{ab} \subseteq R \implies a, b$ son puntos interiores al $\angle AB$, **absurdo** por lo cual el punto es único.

1.4 Teorema 10: Postulado de Pasch

1.4.1 Enunciado

Si R es una recta que interseca al $\triangle abc$ y no pasa por sus vértices, entonces R interseca a $\triangle abc$ en exactamente dos puntos.

1.4.2 Demostración



Supongamos que R corta a $\overline{ac}$ en p con $p \neq a$ y $p \neq c$. R corta a $\overline{ac}$ únicamente en p pues si la intersección tuviera más de un elemento resultaría en $\overleftrightarrow{R} = \overleftrightarrow{ac}$ lo cual es **absurdo**. Entonces a y c están en semiplanos opuestos respecto a R, es decir, $c \in \check{R}_a$. Ahora tenemos que $b \in R_a$ ó $b \in \check{R}_a$ (y $b \notin R$), entonces:

- Si $b \in R_a$, entonces $a, b \in R_a - R$ y por $R_a - R$ convexo resulta $\overline{ab} \cap R = \varnothing$. Además, $c \in \check{R}_a$ y $b \in R_a$ y resulta por *II.3* $\overline{bc} \cap R = \{q\}$ con $q \neq p$ y luego R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q.

- Si $b \in \check{R}_a$, entonces análogamente se ve que R corta al $\triangle abc$ en $\overline{ac}$ y $\overline{ab}$ en dos puntos y no corta al $\overline{bc}$.

$\therefore$ R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q con $q \in \overline{ab}$.