

# Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

## Teórico Final de Geometría I

Febrero 2026

### 1 Listado teórico:

#### 1.1 Teorema 4

##### 1.1.1 Enunciado

Sean  $A$  una recta,  $a \in A$  y  $p \notin A$ . Entonces  $\overrightarrow{ap} \subset A_p$ .

##### 1.1.2 Demostración

Consideramos en  $\overleftrightarrow{ap}$  el orden  $<$  tal que  $a < p$ , quiero ir por el absurdo, supongo  $\overrightarrow{ap} \not\subseteq A$ , es decir, **existe**  $q \in \overrightarrow{ap}$  tal que  $q \notin A_p$ .

Pero como  $A \subset A_p$  entonces  $q \in \check{A}_p$ , más precisamente  $q \in \check{A}_p - A$ .

Por II.3 sabemos que  $\overline{pq} \cap A \neq \emptyset$ , pero  $a, p, q$  están alineados, entonces  $\overline{pq} \subseteq \overleftrightarrow{ap}$ .

- $\emptyset \neq \overline{pq} \cap A \subseteq \overleftrightarrow{ap} \cap A = \{a\}$  entonces  $\overline{pq} \cap A = \{a\}$
- $\implies q < a < p$  por definición de segmento,
- pero  $q \in \overrightarrow{ap} \implies a < q$  lo cual resulta **absurdo**

$\therefore \overrightarrow{ap} \subseteq A_p$

#### 1.2 Corolario 5

##### 1.2.1 Enunciado

Los semiplanos cerrados son convexos.

##### 1.2.2 Demostración

Dado un semiplano  $A_p$  y sean  $r, s \in A_p$  entonces hay 3 casos posibles:

1. Si  $r, s \in A_p - A$ . Entonces por II.3 tenemos  $\overline{rs} \subseteq A_p - A \subseteq A_p$
2. Si  $r, s \in A$ . Entonces por ser  $A$  una recta,  $\overline{rs} \subseteq A \subseteq A_p$
3. Si  $r \in A_p - A$  y  $s \in A$ . Entonces  $\overline{sr} \subseteq \overleftrightarrow{sr} \subseteq A_p$  por teorema 4

En todos los casos llegamos a  $\overline{rs} \subseteq A_p$

$\therefore A_p$  es convexo.

#### 1.3 Teorema 7

##### 1.3.1 Enunciado

Sea  $\angle AB$  un ángulo con  $a \in A$  y  $b \in B$ . Si  $R$  es una semirrecta interior al ángulo, entonces  $R$  interseca a  $\overline{ab}$  en un único punto.

### 1.3.2 Demostración

Sea  $o$  el vértice de  $\angle AB$ . Si  $a = o$  ó  $b = o$ , el resultado es claro.

Consideremos ahora el caso  $a, b \neq o$ . Quiero ver que  $a$  y  $b$  están en semiplanos opuestos respecto a  $\overleftrightarrow{R}$ . Entonces sea  $a' \in \check{A}$  con  $a \neq o$ , sabemos que  $b \in A_B$  entonces por teorema 4  $\overrightarrow{a'b} \subseteq A_B$  y como  $R \subseteq A_B$  y  $R \subseteq B_A$ , vale que:

1.  $\overrightarrow{a'b} \cap \check{R} = \emptyset$ , análogamente  $a' \in B_{\check{A}}$  entonces por teorema 4,  $\overrightarrow{a'b} \subseteq B_{\check{A}}$
2.  $\overrightarrow{ba'} \cap R = \emptyset$

Entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{R} &= \overrightarrow{ab} \cap (R \cup \check{R}) \\ &= (\overrightarrow{ab} \cap R) \cup (\overrightarrow{ab} \cap \check{R}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

Deducimos del II.3 que  $a'$  y  $b$  están en el mismo semiplano respecto a  $\overleftrightarrow{R}$ . Como  $a \in A$  y  $a' \in \check{A}$  resulta que  $a$  y  $a'$  están en semiplanos opuestos respecto de  $\overleftrightarrow{R}$ .  
 $\therefore a$  y  $b$  están en semiplanos opuestos respecto a  $\overleftrightarrow{R}$

Por el II.3 se deduce que  $\overrightarrow{ab} \cap R \neq \emptyset$  y además  $a, b \in \text{sec}(\angle AB)$  que es convexo, entonces  $\overrightarrow{ab} \subseteq \text{sec}(\angle AB)$ , luego la intersección  $\overrightarrow{ab} \cap \overleftrightarrow{R}$  debe estar en  $R$  pues los puntos de  $\check{R}$  son exteriores a  $\angle AB$ , por lo tanto  $\overrightarrow{ab} \cap R \neq \emptyset$ .

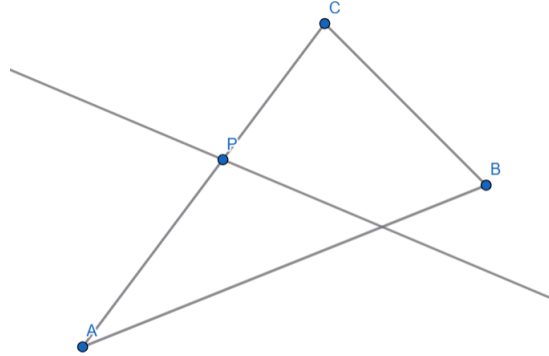
Y si hubieran dos puntos de corte de  $R$  y  $\overrightarrow{ab}$ , llamémoslos  $p$  y  $q$ , entonces  $\overrightarrow{ab} \subseteq \overleftrightarrow{pq} = \overleftrightarrow{R}$ . Pero  $\overrightarrow{ab} \subseteq \text{sec}(\angle AB)$ .  
 $\therefore \overrightarrow{ab} \subseteq R \implies a, b$  son puntos interiores al  $\angle AB$ , **absurdo** por lo cual el punto es único.

## 1.4 Teorema 10: Postulado de Pasch

### 1.4.1 Enunciado

Si  $R$  es una recta que interseca al  $\triangle abc$  y no pasa por sus vértices, entonces  $R$  interseca a  $\triangle abc$  en exactamente dos puntos.

### 1.4.2 Demostración



Supongamos que  $R$  corta a  $\overrightarrow{ac}$  en  $p$  con  $p \neq a$  y  $p \neq c$ .  $R$  corta a  $\overrightarrow{ac}$  únicamente en  $p$  pues si la intersección tuviera más de un elemento resultaría en  $\overleftrightarrow{R} = \overleftrightarrow{ac}$  lo cual es **absurdo**. Entonces  $a$  y  $c$  están en semiplanos opuestos respecto a  $R$ , es decir,  $c \in \check{R}_a$ . Ahora tenemos que  $b \in R_a$  ó  $b \in \check{R}_a$  (y  $b \notin R$ ), entonces:

- Si  $b \in R_a$ , entonces  $a, b \in R_a - R$  y por  $R_a - R$  convexo resulta  $\overrightarrow{ab} \cap R = \emptyset$ . Además,  $c \in \check{R}_a$  y  $b \in R_a$  y resulta por II.3  $\overrightarrow{bc} \cap R = \{q\}$  con  $q \neq p$  y luego  $R$  corta al  $\triangle abc$  sólo en  $p$  y  $q$ .
- Si  $b \in \check{R}_a$ , entonces análogamente se ve que  $R$  corta al  $\triangle abc$  en  $\overrightarrow{ac}$  y  $\overrightarrow{ab}$  en dos puntos y no corta al  $\overrightarrow{bc}$ .

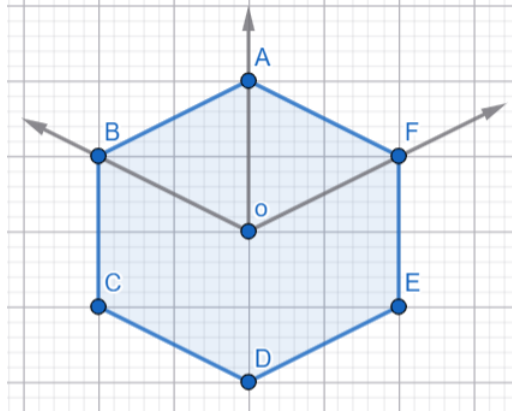
$\therefore R$  corta al  $\triangle abc$  sólo en  $p$  y  $q$  con  $q \in \overrightarrow{ab}$ .

## 1.5 Teorema 11

### 1.5.1 Enunciado

Toda semirrecta con origen en un punto interior de una región poligonal convexa, interseca al polígono en un único punto.

### 1.5.2 Demostración



Sea  $o$  un punto interior al polígono  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces  $o$  es interior a todos los ángulos  $\angle a_i$  del polígono. En particular,  $\overrightarrow{a_2 o}$  es semirrecta interior al  $\angle a_1 a_2 a_3$ , y entonces  $\overline{a_1 a_2}$  y  $\overline{a_2 a_3}$  se encuentran en semiplanos distintos respecto de  $\overrightarrow{a_2 o}$ , por el teorema 7. Luego,  $\angle a_1 o a_2$  y  $\angle a_2 o a_3$  son consecutivos. Análogamente, se tiene que  $\angle a_{i-1} o a_i$  y  $\angle a_i o a_{i+1}$  son ángulos consecutivos para  $i = 1, \dots, n$  (con  $a_0 = a_n$  y  $a_{n+1} = a_1$ ). Por lo tanto, si  $A_i = \overrightarrow{o a_i}$  para  $i = 1, \dots, n$ , entonces las semirrectas  $A_i$  satisfacen las hipótesis del teorema 9.  
 $\therefore \Pi = \bigcup_{i=1}^n \sec(\angle A_i A_{i+1})$

Sea ahora  $p \in \Pi$ ,  $p \neq o$ , si  $\overrightarrow{op} = A_i$  para algún  $i$ , entonces  $\overrightarrow{op}$  interseca al polígono únicamente en  $a_i$ . Si  $\overrightarrow{op} \neq A_i, \forall i$ , sabemos que  $p \in \bigcup_{i=1}^n \sec(\angle A_i A_{i+1})$  por el teorema 9, por lo tanto existe  $i_o$  tal que  $p \in \sec(\angle A_{i_o} A_{i_o+1})$ . Más aún,  $p$  es interior al  $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$  pues no está en sus lados. Luego  $\overrightarrow{op}$  es una semirrecta interior al  $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$ . Por el teorema 7, el segmento  $\overline{a_i a_{i+1}}$  interseca a  $\overrightarrow{op}$ , por lo que  $\overrightarrow{op}$  corta al polígono.

**Unicidad:** Si  $\overrightarrow{op}$  cortara al polígono en  $q$  y  $q' (q \neq q')$ , consideramos las posiciones de  $o, q$  y  $q'$  en la semirrecta  $\overrightarrow{op}$ . Puede ser  $o < q < q'$  o bien  $o < q' < q$ .

- En el primer caso, supongamos  $q \in \overline{a_i a_{i+1}}$ . Entonces  $o$  y  $q'$  estarían en semiplanos distintos respecto de  $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ , lo cual es absurdo pues  $o$  y  $q'$  están en la región poligonal.
- Es análogo

Luego,  $\overrightarrow{op}$  corta al polígono en un único punto.

## 1.6 Teorema 16

### 1.6.1 Enunciado

Sean  $R$  una recta,  $p \notin R$  y  $T$  una transformación rígida. Entonces  $T(R_p) = T(R)_{T(p)}$

### 1.6.2 Demostración

Definimos  $R' = T(R)$  y  $p' = T(p)$ . Claramente  $R' \subset R'_{p'}$  y  $p' \in R'_{p'}$ . Sea ahora  $q \in R_p - R$ , con  $q \neq p$ . Luego  $\overline{pq} \cap R = \emptyset$  y aplicando  $T$  tenemos:  $\overline{p'q'} \cap R' = \emptyset$  donde  $q' = T(q)$  por corolario 15. De esto se deduce que  $q' \in R'_{p'}$ , por lo que vale  $T(R_p) \subseteq R'_{p'}$ .

Por axioma III.2, sabemos que  $T^{-1}$  es una transformación rígida y podemos considerar lo probado recién pero para esta transformación y obtenemos:  $T^{-1}(R'_{p'}) \subseteq R_p$ . Aplicando  $T$ :  $R'_{p'} \subseteq T(R_p)$ . Resulta entonces  $T(R_p) = R'_{p'}$ .

## 1.7 Teorema 20

### 1.7.1 Enunciado

Sea  $(A, \alpha)$  un par semirrecta-semiplano,  $A$  de origen  $o$  y  $T$  la transformación rígida tal que  $T(A, \alpha) = (\check{A}, \check{\alpha})$ . Entonces:

1.  $T$  es involutiva.
2. Si  $(B, \beta)$  es otro par de semirrecta-semiplano tal que  $B$  tiene origen en  $o$ , entonces  $T(B, \beta) = (\check{B}, \check{\beta})$ .

### 1.7.2 Demostración

1. **T involutiva:**  $T^2(A, \alpha) = T(T(A, \alpha)) = T(\check{A}, \check{\alpha}) = (T(\check{A}), T(\check{\alpha})) = (\check{\check{A}}, \check{\check{\alpha}}) = (A, \alpha)$  y por unicidad del axioma III.4 resulta  $T^2 = Id$
2. Tiene dos casos posibles:
  - (a) Si  $B = A$  ó  $B = \check{A}$  entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(A, \alpha) = (\check{A}, \check{\alpha}) \\ T(\check{A}, \check{\alpha}) = (A, \alpha) \\ T(A, \check{\alpha}) = (\check{A}, \alpha) \\ T(\check{A}, \alpha) = (A, \check{\alpha}) \end{array} \right. \text{ por lo que la afirmación vale}$$

- (b) Si  $B \neq A$  ó  $B \neq \check{A}$  entonces  $B \subseteq \alpha$  ó  $B \subseteq \check{\alpha}$ , consideramos ambos casos análogos entonces trabajamos con  $B \subseteq \alpha$

Sea  $p \in B$  y  $p \neq o$  entonces  $B = \overrightarrow{op}$  y sea  $p' := T(p) \in \check{\alpha}$ , por el axioma II.3  $\overrightarrow{pp'}$  corta a la recta  $\overleftrightarrow{A}$  en un único punto  $a$ , lo cual puede estar en  $A$  ó  $\check{A}$ , como son casos análogos, consideramos el primero:

Si  $a \in A$  entonces  $\overrightarrow{pp'} \cap A = \{a\}$ . Aplicamos  $T$  a ambos lados y desarrollamos:

$$T(a) = T(\overrightarrow{pp'}) \cap T(A) = \overrightarrow{p'p} \cap \check{A}$$

Como sabemos que  $\overrightarrow{pp'}$  corta a  $A$  en un único punto entonces  $T(a) = a$  lo cual implica que  $a = o$  pues es el único punto fijo y  $o \in \overrightarrow{pp'}$  lo que implica que  $p' \in \check{B}$ , entonces  $T(B) = T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'} = \check{B}$ .

Sea ahora  $q \in \beta$  tal que  $q \notin \overleftrightarrow{B}$  por lo probado anteriormente se tiene que  $T(\overrightarrow{oq}) = \overrightarrow{oq} \therefore T(q) \in \check{\beta}$  y así  $T(\beta) = T(B_q) = \check{\beta}$

## 1.8 Teorema 25

### 1.8.1 Enunciado

Sea  $(A, \alpha)$  un par semirrecta-semiplano,  $A$  de origen  $o$  y sea  $T$  la única transformación rígida tal que  $T(A, \alpha) = (A, \check{\alpha})$ . Entonces:

1.  $T$  es involutiva.
2.  $T(p) = p$  para todo  $p$  en la recta  $\overleftrightarrow{A}$
3. Si  $B$  es una semirrecta de la recta  $\overleftrightarrow{A}$  entonces  $T(B, \alpha) = (B, \check{\alpha})$ .

### 1.8.2 Demostración

1.  $T^2(A, \alpha) = T(T(A, \alpha)) = T(A, \check{\alpha}) = (T(A), T(\check{\alpha})) = (A, \check{\check{\alpha}}) = (A, \alpha)$ . Por unicidad de III.4 tenemos  $T^2 = Id$ .
2. Como  $T(A) = A$  y  $A$  tiene origen en  $o$  entonces  $T(o) = o$  y sea  $p' := T(p) \in A$  por  $T(A) = A$  y  $T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'}$  entonces por congruencia  $\overrightarrow{op} \equiv \overrightarrow{op'}$  por lo tanto un segmento contiene a otro pero por III.3 resulta  $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{op'}$  por lo que  $p = p'$ , es decir,  $p = T(p)$
3. Por ser  $p$  un punto arbitrario de  $A$  entonces la semirrecta  $B$  cumple por (b) que  $T(B) = B$  además por la propia definición de  $T$  resulta  $T(\alpha) = \check{\alpha} \therefore T(B, \alpha) = (B, \check{\alpha})$ .