

Simulacro Segundo Parcial
GURI - La Bisagra, conducción del CEIMAF

1. Sea $m(x)$ la función dada por:

$$m(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}}$$

- (a) Para ver donde está bien definido el dominio de la función dada se debe tener en cuenta las posibles restricciones, en este caso evitar el 0 en el denominador y evitar que el radicando sea negativo pues estamos trabajando en los reales, por lo tanto, primero buscamos las raíces del denominador:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \\ &= \{-5, 2\} \end{aligned}$$

Ahora, viendo que el coeficiente principal es positivo, tenemos una idea del comportamiento de la cuadrática lo que resulta en que sus valores negativos sean alcanzados en medio de sus raíces, por lo tanto es un intervalo que debemos evitar para el dominio. Resulta $\text{Dom}(m(x)) = \{x \in \mathbb{R} : x < -5 \vee x > 2\}$.

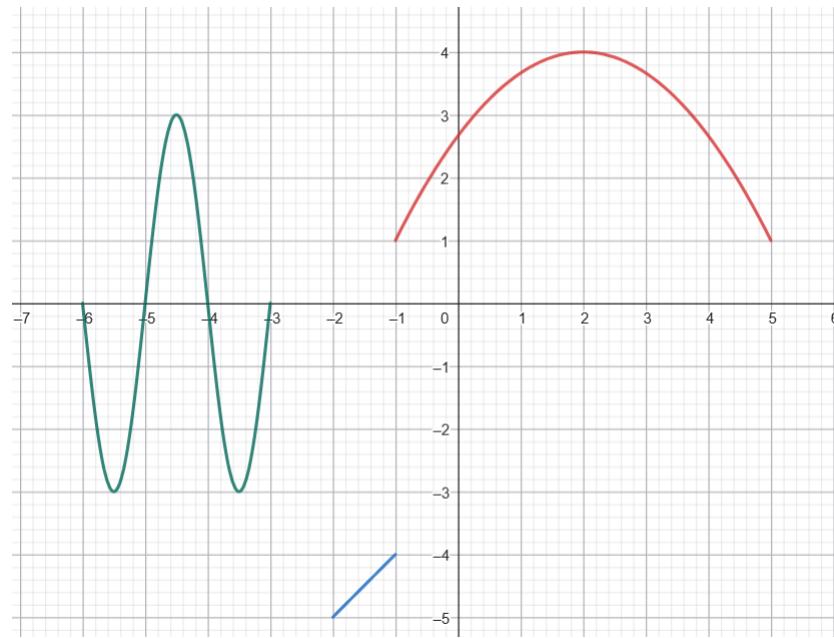
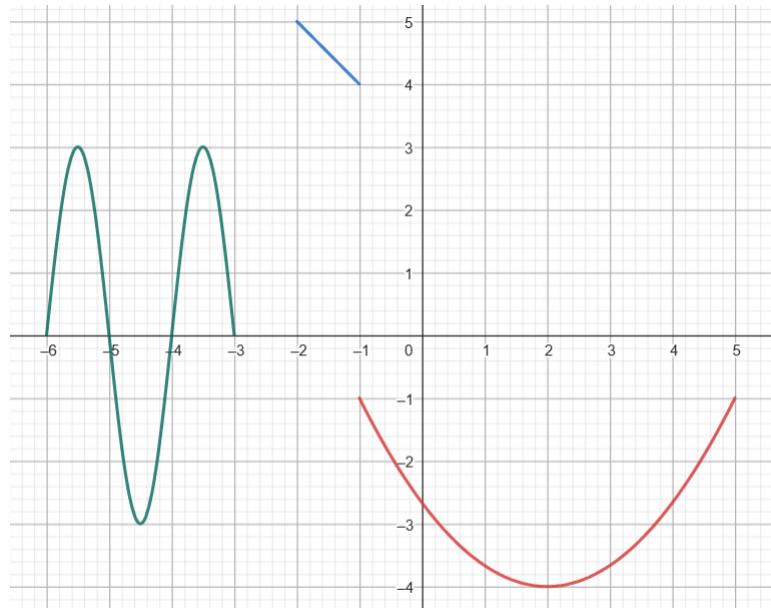
- (b) Para determinar la imagen que pasa por $x = 4$ se debe evaluar la función en esos puntos:

$$m(4) = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{4^2 + 3 \cdot 4 - 10}} = \frac{24}{\sqrt{16 + 12 - 10}} = \frac{24}{\sqrt{18}} = \frac{24}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{24}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto $m(4) = \frac{8}{\sqrt{2}}$.

2. Considerando la función del gráfico y teniendo en cuenta sus puntos cerrados y abiertos podemos resolver los incisos:

- (a)
 - el dominio es de la forma $\text{Dom}(f(x)) = [-4, -1) \cup (0, 7]$
 - La imagen es de la forma $\text{Im}(f(x)) = [-4, 3] \cup [4, 5)$
 - Las raíces son en $x = -4$, $x = -3$ y $x = -2$ en la parte donde la función es senoidal ya que en -1 es un punto que no pertenece al dominio.
- (b) Los valores que cumplen tal condición son los que respectan a la parte senoidal y cuadrática, entonces $x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 3 = [-4, -1) \cup (1, 4]$
- (c) Las transformaciones que se aplican para graficar $g(x) = -f(x + 2)$ son:
 - Traslación horizontal de -2 unidades, es decir, hacia la izquierda.
 - Reflexión respecto al eje x .



3. (a) Para determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-5, \frac{3}{2})$ y $B = (1, \frac{15}{2})$ se debe calcular la pendiente de la recta y luego utilizar la forma punto-pendiente para escribir su ecuación:

$$m = \frac{\frac{15}{2} - \frac{3}{2}}{1 - (-5)} = \frac{\frac{12}{2}}{6} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{2} = 1(x - (-5))$$

$$y = x + \frac{13}{2}$$

- (b) Retomamos lo que conocemos de las rectas perpendiculares, sabemos que la pendiente de la recta L es $m_L = \frac{3}{2}$ (esto es de distribuir y escribir la ecuación de forma polinómica $L : y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$), entonces la pendiente de la recta P es $m_P = -\frac{1}{m_L} = -\frac{2}{3}$, ahora utilizando la forma punto-pendiente con el punto $C = (-7, 7)$ se puede escribir

la ecuación de la recta P :

$$\begin{aligned}
 y - y_1 &= m(x - x_1) \\
 y - 7 &= -\frac{2}{3}(x - (-7)) \\
 y &= -\frac{2}{3}x - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-7) + 7 \\
 y &= -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3} + 7 \\
 &= -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

Entonces $P : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

- (c) Para calcular las coordenadas del punto de intersección entre las rectas L y P se debe igualar sus ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} &= -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\
 \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x &= \frac{7}{3} - \frac{9}{2} \\
 \frac{9+4}{6}x &= \frac{14-27}{6} \\
 x &= \frac{-13}{6} \cdot \frac{6}{13} = -1
 \end{aligned}$$

Ahora para calcular la coordenada y se puede utilizar cualquiera de las dos rectas, por ejemplo utilizando L :

$$y = \frac{3}{2}(-1) + \frac{9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Por lo tanto las coordenadas del punto de intersección entre las rectas L y P son $(-1, 3)$.

4. Ayuda mucho reconocer que es la forma canónica de la parábola y aprovechar los datos que proporciona dicha forma.

- (a) Para calcular el valor del coeficiente k se debe utilizar el punto $Q = (3, 8)$ que pertenece a la parábola, entonces se debe evaluar la función en ese punto y despejar k :

$$\begin{aligned}
 8 &= 2\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + k \\
 &= 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + k \\
 &= \frac{25}{2} + k \\
 k &= 8 - \frac{25}{2} = -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $k = -\frac{9}{2}$ y la parábola en su forma polinómica es:

$$\begin{aligned}
 P : y &= 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \\
 &= 2 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) - \frac{9}{2} \\
 &= 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \\
 &= 2x^2 - 2x - \frac{8}{2} \\
 &= 2x^2 - 2x - 4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P : y = 2x^2 - 2x - 4$

- (b) Como pide calcular las coordenadas, conozco que el eje de las ordenadas es el eje y y lo intersecciona la parábola en su ordenada al origen, en la forma polinómica es $c = -4$, es decir, interseccionan en $(0, -4)$, y en el eje de las abscisas es el eje x y lo intersecciona la parábola en sus raíces, basta usar Baskara:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} \\
 &= \frac{2 \pm 6}{4}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_1 = \frac{8}{4} = 2$ y $x_2 = \frac{-4}{4} = -1$, entonces las coordenadas de los puntos de intersección con el eje de las abscisas son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

- (c) Para calcular las coordenadas del vértice de la parábola, se puede usar la fórmula del vértice en la forma canónica: $x_v = -\frac{b}{2a}$, donde $a = 2$, $b = -2$, y $c = -4$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 x_v &= -\frac{-2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \\
 y_v = P(x_v) &= P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{1}{2} - 1 - 4 = -\frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Si bien eran datos ya conocidos por su forma canónica, está bueno verificarlo para cerciorar que nuestros cálculos tengan sentido.

- (d) El gráfico es:

