

# Practico

## Geometría I

September 21, 2025

### 1 Práctico 2: Ejercicios 10 y 13

#### 1.1 Ejercicio 10

##### 1.1.1 Enunciado

Dado un polígono convexo  $P$ , probar que su interior es la intersección de los interiores de todos los ángulos interiores del polígono.

##### 1.1.2 Solución

- **P es polígono convexo:** Sean  $a_1, \dots, a_n \in \Pi$  (con  $n \geq 3$ ) numerados de tal modo que las rectas  $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \dots, \overline{a_n a_1}$  dejen en un mismo semiplano abierto los  $(n-2)$  puntos restantes. Se llama polígono convexo de vértices  $a_1, \dots, a_n$  a la union de los segmentos  $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \dots, \overline{a_n a_1}$ .
- **Interior de un polígono convexo:** Sea la intersección de los semiplanos abiertos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$  que contienen a los demás puntos, en estos se ignora los lados del polígono.
- **Ángulo interior:** del polígono son los ángulos de la forma  $\widehat{a_{i-1} a_i a_{i+1}}$ , y se los denota por  $\hat{a}_i$ .
- **Interior de un ángulo:** Considerar el sector angular sin los bordes es  $\text{sec}(\angle AB) - \angle AB = (A_B \cap B_A) - \angle AB$ , en el caso de mis lados determinados,  $A = \overleftrightarrow{a_i a_{i-1}}$  y  $B = \overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$

Quiero ver que los ángulos interiores terminan formando el interior del polígono, es decir, que la intersección de los sectores angulares de los ángulos interiores del polígono es igual al interior del polígono.

Sea  $P$  un polígono convexo de vértices  $a_1, \dots, a_n$  e  $I_P$  su interior y  $\text{sec}(\hat{a}_i) - \hat{a}_i$  el interior del ángulo  $\hat{a}_i$ , quiero ver que:

$$I_P = \bigcap_{i=1}^n (\text{sec}(\hat{a}_i) - \hat{a}_i) = \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\hat{a}_i) \quad (1)$$

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in I_P$ , por definición de interior de un polígono convexo,  $x$  pertenece a todos los semiplanos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$  que contengan a los otros  $(n-2)$  puntos, por lo tanto, esos semiplanos abiertos, contienen a las semirrectas formadas por  $\overleftrightarrow{a_{i+1} a_{i+2}}$  ya que por definición contiene a  $a_{i+2}$  (acá

hay una excepción con  $a_{i+1}$  pues es parte de la recta). Por lo tanto,  $x$  pertenece a los semiplanos determinados por  $A = \overrightarrow{a_{i-1}a_i}$  y  $B = \overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ , es decir,  $x \in \overleftrightarrow{A}_B$  y  $x \in \overleftrightarrow{B}_A$  que forman el interior del ángulo  $\hat{a}_i$ , ya que no pertenece a ninguna de las rectas que definen al polígono, más aún a sus semirrectas, por lo que  $x \in \text{sec}(\hat{a}_i) - \hat{a}_i$ . Como  $x$  pertenece a todos los interiores de los ángulos interiores del polígono, entonces  $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\hat{a}_i)$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\hat{a}_i)$ , entonces  $x \in \text{int}(\hat{a}_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por definición de interior de un ángulo y  $A = \overrightarrow{a_i a_{i-1}}$  y  $B = \overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ ,  $x \in \overleftrightarrow{A}_B$  y  $x \in \overleftrightarrow{B}_A$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por lo que  $x$  pertenece a todos los semiplanos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$  que contengan a los otros  $(n-2)$  puntos, es decir,  $x \in I_P$ .

Por doble contención se concluye la igualdad.

## 1.2 Ejercicio 13

### 1.2.1 Enunciado

Probar que las dos diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un único punto y que éste es interior al cuadrilátero.

### 1.2.2 Demostración

- **P es polígono convexo:** Sean  $a_1, \dots, a_n \in \Pi$  (con  $n \geq 3$ ) numerados de tal modo que las rectas  $\overrightarrow{a_1 a_2}, \overrightarrow{a_2 a_3}, \dots, \overrightarrow{a_n a_1}$  dejen en un mismo semiplano abierto los  $(n-2)$  puntos restantes. Se llama polígono convexo de vértices  $a_1, \dots, a_n$  a la union de los segmentos  $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_2 a_3}, \dots, \overline{a_n a_1}$ .
- **Diagonales del polígono:** Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos
- **Interior de un polígono convexo:** Sea la intersección de los semiplanos abiertos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$  que contienen a los demás puntos, en estos se ignora los lados del polígono.
- Notar que en el caso del cuadrilátero  $i = 1, \dots, 4$ .
- Por definición de sector de un polígono convexo, ambas diagonales quedan en él ya que son segmentos que están contenidos en todos los semiplanos convexos que conforman dicho sector, y como es intersección de convexos, el sector poligonal también lo es. Podemos considerar que si no tomamos en cuenta sus extremos, los segmentos que conforman dichas diagonales están contenidas en el interior del polígono.

Sea un cuadrilátero convexo un polígono de vértices  $a_1, a_2, a_3, a_4$  (Todos puntos distintos). Conociendo que ambas diagonales están en el interior del sector poligonal, es decir,  $\overline{a_1 a_3}$  y  $\overline{a_2 a_4}$  están totalmente contenidas en el sector poligonal, quiero ver que estos segmentos se cortan en único punto.

Considero la recta  $\overleftrightarrow{a_1 a_3}$  que define dos semiplanos y deja a  $a_2$  y  $a_4$  en dos

semitplanos distintos, porque si no fuese así entonces al querer unir los segmentos para nuevamente formar el polígono, todos ellos quedarían dentro del mismo semiplano abierto, pero no así el segmento  $\overline{a_1a_3}$  que termina determinado fuera por ser parte de la recta que lo define, lo cual es absurdo ya que las diagonales están en el interior del polígono. Absurdo que nace de asumir que  $a_2$  y  $a_4$  están en el mismo semiplano abierto.

Ahora como sé que están en semiplanos distintos por **II.3** el segmento  $\overline{a_2a_4}$  corta a la recta  $\overleftrightarrow{a_1a_3}$  en un único punto, llamémosle  $o_1$ , ¿Qué asegura que tal intersección sea dentro del interior del polígono?, es decir, quiero ver que  $\overline{a_2a_4}$  corta a  $\overline{a_1a_3}$ , para eso tomo en cuenta el procedimiento análogo al que obtuve al decir que  $\overline{a_2a_4}$  corta a la recta que contiene a la otra diagonal y concluyo que  $\overline{a_1a_3}$  corta a la recta  $\overleftrightarrow{a_2a_4}$  en un único punto al que voy a llamar  $o_2$ . Si supongo  $o_1 \neq o_2$  esto quiere decir que las rectas son iguales ya que son dos puntos que pertenecen a ambas y por **I.3** tal recta es única, lo cual es absurdo porque los puntos que la determinan, es decir, los extremos de los segmentos, pertenecen a semiplanos abiertos distintos para cada una de las rectas, esto implica que  $o_1 = o_2$  (el punto es único).

Por lo tanto, las diagonales del cuadrilátero se cortan en un único punto en el interior del polígono.

### 1.2.3 Otra demostración

El sector poligonal es convexo. La intersección de cualquier par de segmentos distintos contenidos en el sector poligonal está dentro del sector poligonal (propiedad de conjuntos). La intersección de cualesquiera dos segmentos distintos es única —pues la intersección de dos rectas distintas es única (ver contrarrecíproca del Teorema 2)— en particular de sus diagonales. Por lo tanto esta intersección pertenece al sector poligonal.

Ahora queremos ver que la intersección  $p$  no pertenece al cuadrilátero:

- Caso la intersección  $p$  de las diagonales pertenece a algún lado del cuadrilátero:

$p$  pertenece al interior del segmento  $a_i a_{i+1}$  es decir además pertenece al interior de la diagonal  $a_i a_{i+2}$ , de igual forma  $a_i$  pertenece a ambos segmentos, luego por el tercer axioma de incidencia la recta que pasa por estos puntos es única, por lo tanto esta recta contiene a ambos segmentos, por lo tanto los puntos  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$  pertenecen a la misma recta lo que es absurdo por definición de polígono convexo.

- Caso la intersección  $p$  de las diagonales pertenece a un vértice:

$p = a_i$  entonces  $p$  pertenece al segmento  $a_{i-1} a_i$  además pertenece al segmento  $a_{i-1} a_{i+1}$  de igual manera  $a_{i-1}$  pertenece a ambos segmentos. La recta que contiene a estos dos puntos es única, por lo tanto los segmentos deben estar contenidos en esta recta, luego los puntos  $a_{i-1}, a_i, a_{i+1}$  pertenecen a la misma recta absurdo.

Luego  $p$  no pertenece al cuadrilátero, es decir pertenece al interior del cuadrilátero.