Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Curso de Nivelación 2025
Simulacro Segundo Parcial
GURI - La Bisagra, conduccion del CEIMAF

21 de Noviembre de 2025

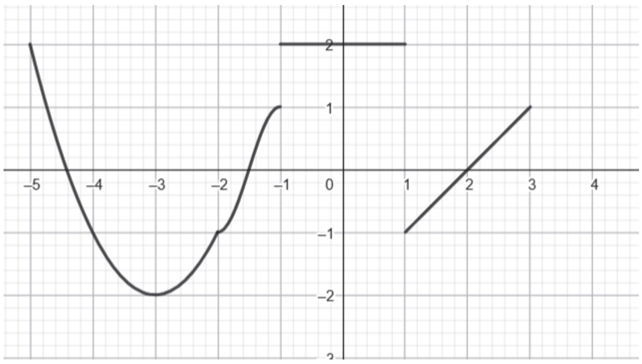
1 Resolución

1. (a) Visualmente se aprecia una función por partes en la cual hay puntos abiertos y cerrados, vemos como el dominio es $[-4, 4)$, abierto al final ya que en 4 hay un punto abierto y la imagen es $[-2, 2]$.

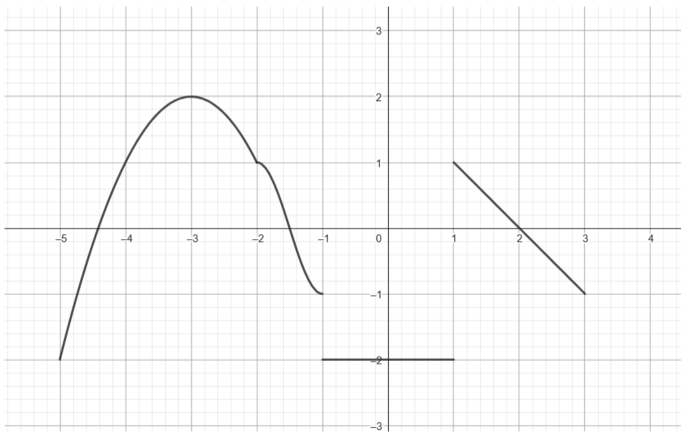
   (b) El conjunto de valores de x para los que se cumple que $f(x) \leq -1$ son $[-4, -3] \cup [-1, 4]$

   (c) Por como está definida la función $g(x) = -f(x + 1)$, podemos ver que en primer lugar tiene un desplazamiento a la izquierda de 1 y luego se refleja respecto al eje x dado por el -1 que multiplica a f.

      i. Desplazamiento a la izquierda de 1:



      ii. Reflexión respecto al eje x:



2. Podemos ver que en el denominador no puede tener valores que provoquen el 0, por lo cual $x^2-1 \neq 0$:

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$x^2 \neq 1$$
$$x \neq \pm 1$$

o bien tambien puede verse como diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$(x-1)(x+1) \neq 0$$
$$x \neq 1, x \neq -1$$

Otro conflicto yace en el radicando en el numerador, sabemos que debe ser siempre positivo o igual a 0:

$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

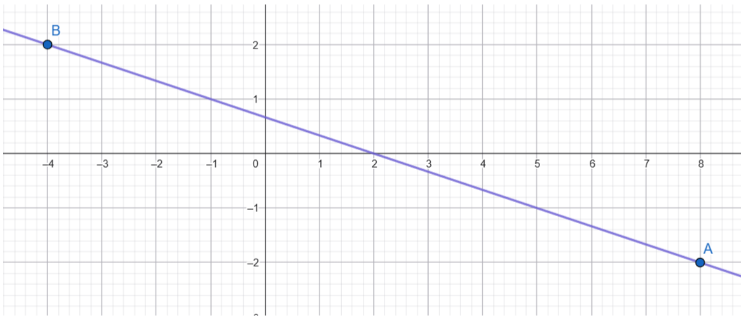
Conociendo estas restricciones podemos definir el dominio como $(-1, 1) \cup (1, \infty)$

3. (a) Para obtener la ecuación de una recta que pasa por dos puntos podemos en primer lugar buscar la pendiente con $A = (x_1, y_1) = (8, -2)$ y $B = (x_2, y_2) = (-4, 2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{2-(-2)}{-4-8}$$
$$m = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación de una recta es de la forma $y = mx+b$, es decir, que una vez obtenida la pendiente podemos evaluar en cualquier punto que conozcamos para poder despejar b, evalúo en A:

$$y_1 = -\frac{1}{3}x_1 + b$$
$$-2 = -\frac{1}{3}8 + b$$
$$-2 + \frac{8}{3} = b$$
$$\frac{-6+8}{3} = b$$
$$b = \frac{2}{3}$$



(b) La rectas perpendiculares tienen pendientes negativas recíprocas entre sí, es decir, $m_p = -\frac{1}{m}$ por lo que la pendiente de la recta perpendicular es $m_p = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$ a lo cual sólo nos falta saber donde ubicar tal recta a lo largo de toda la recta L, para eso consideramos el punto que pertenece a la recta $C = (0, -1)$:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= 3x_3 + b \\
-1 &= 3 \cdot 0 + b \\
-1 &= b
\end{aligned}
$$

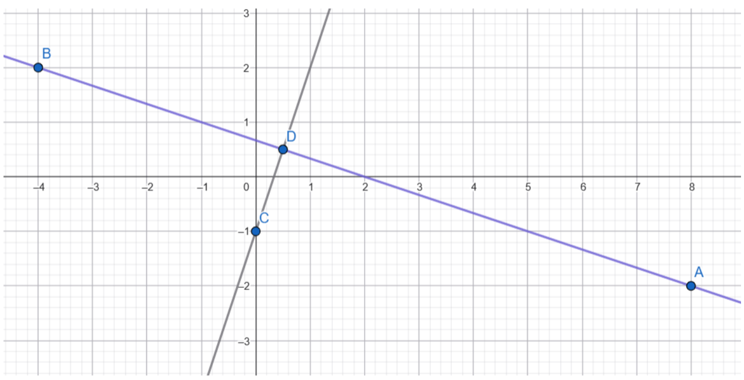
(c) Para el punto de intersección bastaría igualar las ecuaciones con el metodo de igualación con y:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} &= 3x - 1 \\
\frac{2}{3} + 1 &= 3x + \frac{1}{3}x \\
\frac{2+3}{3} &= \frac{9+1}{3}x \\
-\frac{5}{3} &= \frac{10}{3}x \\
-\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10} &= x \\
\frac{5}{10} &= x \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ahora puedo reemplazar ese valor de x en cualquiera de las funciones de la recta y obtener la coordenada y:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\
y &= -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \\
y &= \frac{-1+4}{6} \\
y &= \frac{3}{6} \\
y &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

La coordenada del punto intersección es en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



4. (a) Podemos ver que ambos puntos dados se encuentran a la misma altura, por lo tanto el eje de simetría se encuentra en medio de ellos, por lo tanto:

$$x_v = \frac{x_M + x_N}{2}$$
$$x_v = \frac{-2+14}{2}$$
$$x_v = \frac{12}{2}$$
$$x_v = 6$$

(b) Tanto como para a como para b podemos plantear un sistema de ecuaciones con los puntos dados:

$$f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + \frac{5}{2} = 6$$
$$4a - 2b + \frac{5}{2} = 6$$
$$4a - 2b = 6 - \frac{5}{2}$$
$$4a - 2b = \frac{12-5}{2}$$
$$4a - 2b = \frac{7}{2} \qquad (1)$$

Ahora con el punto N:

$$f(14) = a(14)^2 + b(14) + \frac{5}{2} = 6$$
$$196a + 14b + \frac{5}{2} = 6$$
$$196a + 14b = 6 - \frac{5}{2}$$
$$196a + 14b = \frac{12-5}{2}$$
$$196a + 14b = \frac{7}{2}$$
$$28a + 2b = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Usamos algún metodo para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4a - 2b = \frac{7}{2} \\ 28a + 2b = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} 2b = 4a - \frac{7}{2} \\ 2b = \frac{1}{2} - 28a \end{cases}$$

Finalmente igualo las ecuaciones:

$$4a - \frac{7}{2} = \frac{1}{2} - 28a$$
$$28a + 4a = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$$
$$24a = \frac{8}{2}$$
$$32a = 4$$
$$a = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Reemplazo a en las ecuaciones para así obtener b:

$$2b = 4a - \frac{7}{2}$$
$$2b = 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{7}{2}$$
$$2b = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}$$
$$b = \frac{-6}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

(c) Como obtuve a y b, mi función ahora se ve así: $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}$, es decir que puedo evaluar cualquier punto de la parábola para obtener su coordenada en el eje de las abscisas, conociendo el eje de simetría, evalúo en x_v:

$$y_v = f(6) = \frac{1}{8}(6)^2 - \frac{3}{2}(6) + \frac{5}{2}$$
$$y_v = \frac{36}{8} - 9 + \frac{5}{2}$$
$$y_v = 4.5 - 9 + 2.5$$
$$y_v = -2$$

Las coordenadas del vértice son $(6, -2)$

(d) Para las raices de la función igualamos a 0:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 0$$
$$x^2 - 12x + 20 = 0$$
$$(x - 10)(x - 2) = 0$$
$$x_1 = 10, x_2 = 2$$

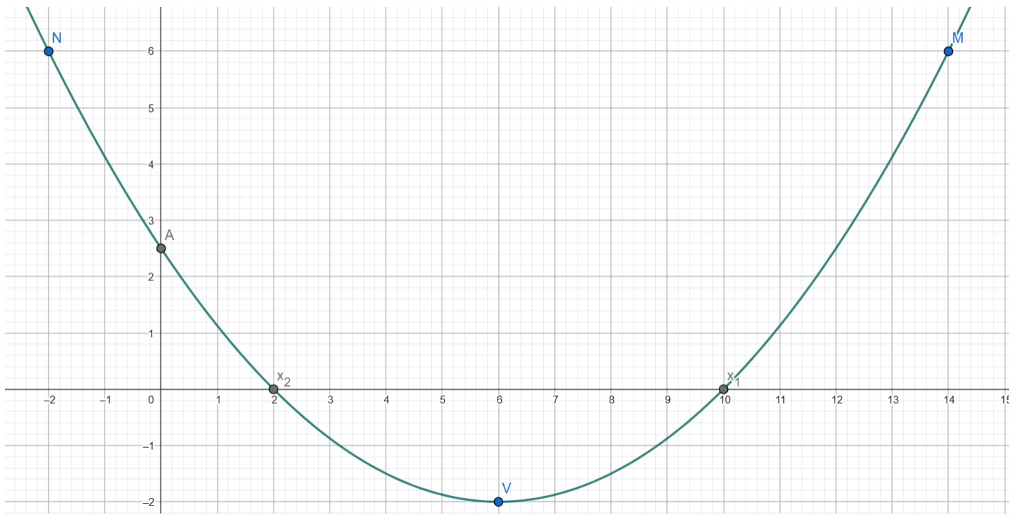
O bien podemos aplicar Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{3/2 \pm \sqrt{(-3/2)^2 - 4 \cdot 1/8 \cdot 5/2}}{2 \cdot 1/8}$$
$$x = \frac{3/2 \pm \sqrt{9/4 - 20/16}}{1/4}$$
$$x = \frac{3/2 \pm \sqrt{36/16 - 20/16}}{1/4}$$
$$x = \frac{3/2 \pm \sqrt{16/16}}{1/4}$$
$$x = \frac{3/2 \pm 1}{1/4}$$
$$x_1 = \frac{5/2}{1/4} = 10, x_2 = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

Y para saber donde corta el eje de las ordenadas, evaluamos la función en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{8}(0)^2 - \frac{3}{2}(0) + \frac{5}{2}$$
$$f(0) = \frac{5}{2}$$

(e) Se ve graficado de la siguiente manera:



5. (a) Evalúo en esos puntos según como está definida la función:
    - $f(1) = \frac{5}{2} + 2(1) = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$
    - $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$
    - $f(3) = \frac{5}{2} + 2(3) = \frac{5}{2} + 6 = \frac{17}{2}$

   (b) Esbozo el gráfico conociendo los puntos evaluados y los datos que aportan la función como las ordenadas al origen en ambos intérvalo y el comportamiento de las funciones segun el coeficiente que acompaña. Además, evalúo en el punto $x = 1$ para ver la continuidad de la función:

$$f(1) = 2(1)^2 - 1 - 1 = 0$$

   Pude encontrar la otra raíz de la parte cuadrática (Podría calcular con Bhaskara como alternativa)

6. Como está en el cuarto cuadrante, conozco que el coseno es positivo, además recordando ángulos notables, quien provoca en $sen(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es $60°$ o $\frac{\pi}{3}$, lo cual hace que el ángulo que le corresponde en el cuarto cuadrante sea $360° - 60° = 300°$ o $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

(a) Ahora conociendo el valor de t, basta evaluarlo en el círculo unitario (a las ordenadas las determina el seno y a las abscisas el coseno) e interpretando el signo de las funciones:

$$P(t) = P\left(\frac{5}{3}\pi\right)\left(cos\left(\frac{5}{3}\pi\right), -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$P\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = P\left(2\pi\right) = (1, 0)$$

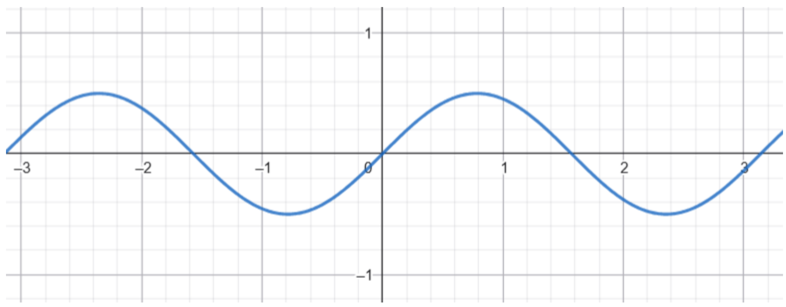
$$P(t+\pi) = P\left(\frac{8\pi}{3}\right) = P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(b)

$$sec(t) = \frac{1}{cos(t)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$cotan(t) = \frac{cos(t)}{sen(t)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(c) Sabemos que la función $g(x) = \frac{1}{2}sen(2x)$ tiene una amplitud de $\frac{1}{2}$ (dado por el coeficiente que multiplica al seno) y un periodo de π (dado por $\frac{2\pi}{k}$, siendo $k = 2$):



(d) En trigonometría se ve que la recta S es paralela a otra recta de la misma pendiente que pasa por el origen, tal recta corta la circunferencia unitaria en dos puntos: $P(t)$ y $P(t + \pi)$, $(P(t) = (cos(t), sen(t)))$, el punto pertenece a la recta mencionada, $(L : y = ax)$, por lo cual:

$$sen(t) = a \cdot cos(t) \implies a = \frac{sen(t)}{cos(t)} = tan(t)$$

Como hace un ángulo de 30° con la dirección negativa del eje de las abscisas, el ángulo que forma con la dirección positiva es de $180° - 30° = 150° = \frac{11}{6}\pi$, por lo cual:

$$a = tan\left(\frac{11}{6}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se llega pensando en seno y coseno en el circulo unitario y los ángulos notables.

7. podemos ver que se forman 2 triangulos rectángulos, uno con el barco A y el faro y el otro con el barco B y el faro, ambos comparten la altura del faro H, y tienen como catetos las distancias que separan a cada barco del faro (d y $d + 40$ respectivamente). Podemos plantear las siguientes ecuaciones:

(a)

$$tan(60°) = \frac{H}{d} \implies H = d \cdot tan(60°) = d \cdot \sqrt{3}$$
$$tan(30°) = \frac{H}{d+40} \implies H = (d+40) \cdot tan(30°) = (d+40) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$d \cdot \sqrt{3} = (d+40) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$3d = d + 40$$
$$2d = 40$$
$$d = 20$$

Reemplazando d en alguna de las ecuaciones para obtener H:

$$H = 20 \cdot \sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ metros}$$

(b) Para calcular la distancia entre el barco A y los focos del faro (L), podemos usar el teorema de Pitágoras:

$$L^2 = d^2 + H^2$$
$$L^2 = 20^2 + (20\sqrt{3})^2$$
$$L^2 = 400 + 1200$$
$$L^2 = 1600$$
$$L = 40 \text{ metros}$$