

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Teórico Final de Geometría I

Febrero 2026

1 Listado teórico:

1.1 Teorema 4

1.1.1 Enunciado

Sean A una recta, $a \in A$ y $p \notin A$. Entonces $\overrightarrow{ap} \subset A_p$.

1.1.2 Demostración

Consideramos en \overleftrightarrow{ap} el orden $<$ tal que $a < p$, quiero ir por el absurdo, supongo $\overrightarrow{ap} \not\subseteq A$, es decir, **existe** $q \in \overrightarrow{ap}$ **tal que** $q \notin A_p$.

Pero como $A \subset A_p$ entonces $q \in \check{A}_p$, más precisamente $q \in \check{A}_p - A$.

Por II.3 sabemos que $\overline{pq} \cap A \neq \emptyset$, pero a, p, q están alineados, entonces $\overline{pq} \subseteq \overleftrightarrow{ap}$.

- $\emptyset \neq \overline{pq} \cap A \subseteq \overleftrightarrow{ap} \cap A = \{a\}$ entonces $\overline{pq} \cap A = \{a\}$
- $\implies q < a < p$ por definición de segmento,
- pero $q \in \overrightarrow{ap} \implies a < q$ lo cual resulta **absurdo**

$\therefore \overrightarrow{ap} \subseteq A_p$

1.2 Corolario 5

1.2.1 Enunciado

Los semiplanos cerrados son convexos.

1.2.2 Demostración

Dado un semiplano A_p y sean $r, s \in A_p$ entonces hay 3 casos posibles:

1. Si $r, s \in A_p - A$. Entonces por II.3 tenemos $\overline{rs} \subseteq A_p - A \subseteq A_p$
2. Si $r, s \in A$. Entonces por ser A una recta, $\overline{rs} \subseteq A \subseteq A_p$
3. Si $r \in A_p - A$ y $s \in A$. Entonces $\overline{sr} \subseteq \overrightarrow{sr} \subseteq A_p$ por teorema 4

En todos los casos llegamos a $\overline{rs} \subseteq A_p$

$\therefore A_p$ es convexo.

1.3 Teorema 7

1.3.1 Enunciado

Sea $\angle AB$ un ángulo con $a \in A$ y $b \in B$. Si R es una semirrecta interior al ángulo, entonces R interseca a \overline{ab} en un único punto.

1.3.2 Demostración

Sea o el vértice de $\angle AB$. Si $a = o$ ó $b = o$, el resultado es claro.

Consideremos ahora el caso $a, b \neq o$. Quiero ver que a y b están en semiplanos opuestos respecto a \overleftrightarrow{R} . Entonces sea $a' \in \check{A}$ con $a \neq o$, sabemos que $b \in A_B$ entonces por teorema 4 $\overrightarrow{a'b} \subseteq A_B$ y como $R \subseteq A_B$ y $R \subseteq B_A$, vale que:

1. $\overrightarrow{a'b} \cap \check{R} = \emptyset$, análogamente $a' \in B_{\check{A}}$ entonces por teorema 4, $\overrightarrow{a'b} \subseteq B_{\check{A}}$
2. $\overrightarrow{ba'} \cap R = \emptyset$

Entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a'b} \cap \overleftrightarrow{R} &= \overrightarrow{a'b} \cap (R \cup \check{R}) \\ &= (\overrightarrow{a'b} \cap R) \cup (\overrightarrow{a'b} \cap \check{R}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset\end{aligned}$$

Deducimos del II.3 que a' y b están en el mismo semiplano respecto a \overleftrightarrow{R} . Como $a \in A$ y $a' \in \check{A}$ resulta que a y a' están en semiplanos opuestos respecto de \overleftrightarrow{R}
 $\therefore a$ y b están en semiplanos opuestos respecto a \overleftrightarrow{R}

Por el II.3 se deduce que $\overline{ab} \cap R \neq \emptyset$ y además $a, b \in sec(\angle AB)$ que es convexo, entonces $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$, luego la intersección $\overline{ab} \cap \overleftrightarrow{R}$ debe estar en R pues los puntos de \check{R} son exteriores a $\angle AB$, por lo tanto $\overline{ab} \cap R \neq \emptyset$.

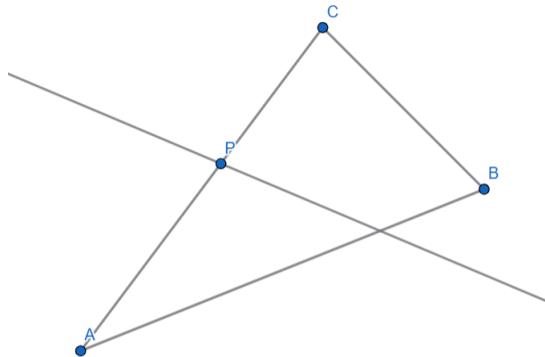
Y si hubieran dos puntos de corte de R y \overline{ab} , llamémoslos p y q , entonces $\overline{ab} \subseteq \overleftrightarrow{pq} = \overleftrightarrow{R}$. Pero $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$.
 $\therefore \overline{ab} \subseteq R \implies a, b$ son puntos interiores al $\angle AB$, **absurdo** por lo cual el punto es único.

1.4 Teorema 10: Postulado de Pasch

1.4.1 Enunciado

Si R es una recta que interseca al $\triangle abc$ y no pasa por sus vértices, entonces R interseca a $\triangle abc$ en exactamente dos puntos.

1.4.2 Demostración



Supongamos que R corta a \overline{ac} en p con $p \neq a$ y $p \neq c$. R corta a \overline{ac} únicamente en p pues si la intersección tuviera más de un elemento resultaría en $\overleftrightarrow{R} = \overleftrightarrow{ac}$ lo cual es **absurdo**. Entonces a y c están en semiplanos opuestos respecto a R , es decir, $c \in \check{R}_a$. Ahora tenemos que $b \in R_a$ ó $b \in \check{R}_a$ (y $b \notin R$), entonces:

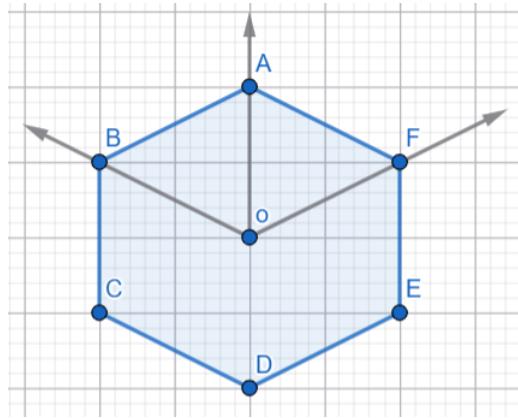
- Si $b \in R_a$, entonces $a, b \in R_a - R$ y por $R_a - R$ convexo resulta $\overline{ab} \cap R = \emptyset$. Además, $c \in \check{R}_a$ y $b \in R_a$ y resulta por II.3 $\overline{bc} \cap R = \{q\}$ con $q \neq p$ y luego R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q .
- Si $b \in \check{R}_a$, entonces análogamente se ve que R corta al $\triangle abc$ en \overline{ac} y \overline{ab} en dos puntos y no corta al \overline{bc} .
 $\therefore R$ corta al $\triangle abc$ sólo en p y q con $q \in \overline{ab}$.

1.5 Teorema 11

1.5.1 Enunciado

Toda semirrecta con origen en un punto interior de una región poligonal convexa, interseca al polígono en un único punto.

1.5.2 Demostración



Sea o un punto interior al polígono a_1, \dots, a_n . Entonces o es interior a todos los ángulos $\angle a_i$ del polígono. En particular, $\overrightarrow{a_2a_3}$ es semirrecta interiores al $\angle a_1a_2a_3$, y entonces $\overline{a_1a_2}$ y $\overline{a_2a_3}$ se encuentran en semiplanos distintos respecto de $\overrightarrow{a_2a_3}$, por el teorema 7. Luego, $\angle a_1oa_2$ y $\angle a_2oa_3$ son consecutivos. Análogamente, se tiene que $\angle a_{i-1}oa_i$ y $\angle a_ioa_{i+1}$ son ángulos consecutivos para $i = 1, \dots, n$ (con $a_0 = a_n$ y $a_{n+1} = a_1$). Por lo tanto, si $A_i = \overrightarrow{oa_i}$ para $i = 1, \dots, n$, entonces las semirrectas A_i satisfacen las hipótesis del teorema 9.
 $\therefore \Pi = \bigcup_{i=1}^n \sec(\angle A_i A_{i+1})$

Sea ahora $p \in \Pi$, $p \neq o$, si $\overrightarrow{op} = A_i$ para algún i , entonces \overrightarrow{op} interseca al polígono únicamente en a_i . Si $\overrightarrow{op} \neq A_i, \forall i$, sabemos que $p \in \bigcup_{i=1}^n \sec(\angle A_i A_{i+1})$ por el teorema 9, por lo tanto existe i_o tal que $p \in \sec(\angle A_{i_o} A_{i_o+1})$. Más aún, p es interior al $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$ pues no está en sus lados. Luego \overrightarrow{op} es una semirrecta interior al $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$. Por el teorema 7, el segmento $\overline{a_i a_{i+1}}$ interseca a \overrightarrow{op} , por lo que \overrightarrow{op} corta al polígono.

Unicidad: Si \overrightarrow{op} cortara al polígono en q y $q'(q \neq q')$, consideramos las posiciones de o, q y q' en la semirrecta \overrightarrow{op} . Puede ser $o < q < q'$ o bien $o < q' < q$.

- En el primer caso, supongamos $q \in \overline{a_i a_{i+1}}$. Entonces o y q' estarían en semiplanos distintos respecto de $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$, lo cual es absurdo pues o y q' están en la región poligonal.
- Es análogo

Luego, \overrightarrow{op} corta al polígono en un único punto.

1.6 Teorema 16

1.6.1 Enunciado

Sean R una recta, $p \notin R$ y T una transformación rígida. Entonces $T(R_p) = T(R)_{T(p)}$

1.6.2 Demostración

Definimos $R' = T(R)$ y $p' = T(p)$. Claramente $R' \subset R'_{p'}$ y $p' \in R'p'$. Sea ahora $q \in R_p - R$, con $q \neq p$. Luego $\overline{pq} \cap R = \emptyset$ y aplicando T tenemos: $\overline{p'q'} \cap R' = \emptyset$ donde $q' = T(q)$ por corolario 15. De esto se deduce que $q' \in R'_{p'}$, por lo que vale $T(R_p) \subseteq R'_{p'}$.

Por axioma III.2, sabemos que T^{-1} es una transformación rígida y podemos considerar lo probado recién pero para esta transformación y obtenemos: $T^{-1}(R'_{p'}) \subseteq R_p$. Aplicando T : $R'_{p'} \subseteq T(R_p)$. Resulta entonces $T(R_p) = R'_{p'}$.

1.7 Teorema 20

1.7.1 Enunciado

Sea (A, α) un par semirrecta-semiplano, A de origen o y T la transformación rígida tal que $T(A, \alpha) = (\check{A}, \check{\alpha})$. Entonces:

1. T es involutiva.
2. Si (B, β) es otro par de semirrecta-semiplano tal que B tiene origen en o , entonces $T(B, \beta) = (\check{B}, \check{\beta})$.

1.7.2 Demostración

1. **T involutiva:** $T^2(A, \alpha) = T(T(A, \alpha)) = T(\check{A}, \check{\alpha}) = (T(\check{A}), T(\check{\alpha})) = (\check{\check{A}}, \check{\check{\alpha}}) = (A, \alpha)$ y por unicidad del axioma III.4 resulta $T^2 = Id$
2. Tiene dos casos posibles:
 - (a) Si $B = A$ ó $B = \check{A}$ entonces:

$$\begin{cases} T(A, \alpha) = (\check{A}, \check{\alpha}) \\ T(\check{A}, \check{\alpha}) = (A, \alpha) \\ T(A, \alpha) = (\check{A}, \alpha) \\ T(\check{A}, \alpha) = (A, \check{\alpha}) \end{cases} \text{ por lo que la afirmación vale}$$

(b) Si $B \neq A$ ó $B \neq \check{A}$ entonces $B \subseteq \alpha$ ó $B \subseteq \check{\alpha}$, consideramos ambos casos análogos entonces trabajamos con $B \subseteq \alpha$

Sea $p \in B$ y $p \neq o$ entonces $B = \overrightarrow{op}$ y sea $p' := T(p) \in \check{\alpha}$, por el axioma II.3 $\overrightarrow{pp'}$ corta a la recta \overleftrightarrow{A} en un único punto a , lo cual puede estar en A ó \check{A} , como son casos análogos, consideramos el primero:

Si $a \in A$ entonces $\overrightarrow{pp'} \cap A = \{a\}$. Aplicamos T a ambos lados y desarrollamos:

$$T(a) = T(\overrightarrow{pp'}) \cap T(A) = \overrightarrow{p'p} \cap \check{A}$$

Como sabemos que $\overrightarrow{pp'}$ corta a A en un único punto entonces $T(a) = a$ lo cual implica que $a = o$ pues es el único punto fijo y $o \in \overrightarrow{pp'}$ lo que implica que $p' \in \check{B}$, entonces $T(B) = T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'} = \check{B}$.

Sea ahora $q \in \beta$ tal que $q \notin \overleftrightarrow{B}$ por lo probado anteriormente se tiene que $T(\overrightarrow{oq}) = \overrightarrow{oq} \therefore T(q) \in \check{\beta}$ y así $T(\beta) = T(B_q) = \check{\beta}$

1.8 Teorema 25

1.8.1 Enunciado

Sea (A, α) un par semirrecta-semiplano, A de origen o y sea T la única transformación rígida tal que $T(A, \alpha) = (A, \check{\alpha})$. Entonces:

1. T es involutiva.
2. $T(p) = p$ para todo p en la recta \overleftrightarrow{A}
3. Si B es una semirrecta de la recta \overleftrightarrow{A} entonces $T(B, \alpha) = (B, \check{\alpha})$.

1.8.2 Demostración

1. $T^2(A, \alpha) = T(T(A, \alpha)) = T(A, \check{\alpha}) = (T(A), T(\check{\alpha})) = (A, \check{\check{\alpha}}) = (A, \alpha)$. Por unicidad de III.4 tenemos $T^2 = Id$.
2. Como $T(A) = A$ y A tiene origen en o entonces $T(o) = o$ y sea $p' := T(p) \in A$ por $T(A) = A$ y $T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'}$ entonces por congruencia $\overrightarrow{op} \equiv \overrightarrow{op'}$ por lo tanto un segmento contiene a otro pero por III.3 resulta $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{op'}$ por lo que $p = p'$, es decir, $p = T(p)$.
3. Por ser p un punto arbitrario de A entonces la semirrecta B cumple por (b) que $T(B) = B$ además por la propia definición de T resulta $T(\alpha) = \check{\alpha} \therefore T(B, \alpha) = (B, \check{\alpha})$.

1.9 Teorema 28

1.9.1 Enunciado

Por cada punto del plano pasa una y solo una perpendicular a una recta dada. Es decir, dados $p \in \Pi$ y una recta A , existe una única recta B tal que $B \perp A$ y $p \in B$.

1.9.2 Demostración

Consideramos dos casos:

$$1. p \in A$$

- **Existencia:** Sea $p' := S_A(p)$ que es distinto de p y sea $B = \overleftrightarrow{pp'}$ entonces $p \in B$ y $B \perp A$ por el Teorema 26.
- **Unicidad:** Supongamos que C es una recta tal que $p \in C$ y $C \perp A$. Por el teorema 27 C es invariante por S_A y como $p \in C$ luego $p' := S_A(p) \in C$ entonces $C = pp'$ pero esa es $B \therefore B = C$

$$2. p \notin A$$

- **Existencia:** Sea $q \notin A$ y $q' = S_A(q)$ entonces por el teorema 26 $\overleftrightarrow{qq'} \perp A$. Si $\overleftrightarrow{qq'} \cap A = \{p\}$ tomamos $B = \overleftrightarrow{qq'}$, en cambio si $\overleftrightarrow{qq'} \cap A = \{o\}$, con $o \neq p$, sea m el punto medio de \overline{op} y consideramos $B = S_m(\overleftrightarrow{qq'})$. Sea $q'' = S_m(q) \implies S_m(\angle qop) = \angle q''po \therefore \angle qop \equiv \angle q''po$. Como $\angle qop$ es recto, resulta que $\angle q''po$ es recto y esto dice que $B \perp A$ y $p \in B$.
- **Unicidad:** Supongamos que B y C son rectos tales que $B \perp A$ y $C \perp A$ y $p \in B \cap C$.

Sea $b \in A$ con $b \neq p$ entonces \overrightarrow{pb} es una semirrecta de A y $S_B(\overrightarrow{pb}) = \overrightarrow{pb} = S_C(\overrightarrow{pb})$ pues A es invariante por S_B y S_C ya que es perpendicular a ambos.

Sea α un semiplano determinado por A y consideremos $q \in \alpha \cap B$, $r \in \alpha \cap C$, con $q, r \notin A$. Luego, $S_B(q) = q$ y $S_C(r) = r$ entonces $S_B(\alpha) = S_C(\alpha) = \alpha$ y así $S_B(\overrightarrow{pb}, \alpha) = (\overrightarrow{pb}, \alpha) = S_C(\overrightarrow{pb}, \alpha) \implies S_B = S_C$ Por axioma III.4. Esto dice que $B = C$, pues B y C son los conjuntos de puntos dijos de S_B y S_C .

1.10 Teorema 32

1.10.1 Enunciado

Todo ángulo tiene una y solo una bisectriz

1.10.2 Demostración

Sea o el vértice del ángulo $\angle AB$

- **Existencia:** Sea T la transformación rígida tal que $T(A, A_B) = (B, B_A)$, si $B' := T(B)$ entonces $T(\angle AB) = \angle BB'$ por lo tanto $\angle AB = \angle BB'$. Como $B' \subseteq B_A$ y $A \subseteq B_A$ por el teorema 18 resulta $B' = A$. Sean $a \in A$, $a \neq o$, $a' := T(a) \in B$ y $a'' := T(a') \in B$.

$T(\overline{oa}) = \overline{oa'}$ y $T(\overline{oa'}) = T(\overline{oa''})$, luego $\overline{oa} \equiv \overline{oa'} \equiv \overline{oa''}$ por teorema 18 $\overline{oa} = \overline{oa''}$. Por lo tanto, $a = T(a') = a''$. Entonces $T(\overline{aa'}) = \overline{a'a}$, esto nos dice $T(m) = m$ donde m es el punto medio de $\overline{a'a}$. Dado que m es punto interior al $\angle AB$ resulta $R = \overrightarrow{om}$ semirrecta interior al $\angle AB$ y $T(\angle AR) = \angle BR$ por lo cual son congruentes. Además como $T(R, R_A) = (R, R_B) = (R, R_A)$ resulta $T = S_R$

- **Unicidad:** Sea R' una semirrecta interior al $\angle AB$ tal que $\angle AR' \equiv \angle BR'$. Por teorema 31 se tiene $S_{R'}(A) = B$ y $S_{R'}(A_B) = (S_{R'}(A))_{S_{R'}(B)} = B_A$. Entonces $S_{R'} = T = S_R$ lo que implica $\overleftrightarrow{R} = \overleftrightarrow{R'}$.

Por ser los conjuntos de puntos fijos de S_R y $S_{R'}$, como o es el origen de R y R' , tenemos $R' = R$ ó $R' = \check{R}$, pero como ambos son semirrectas interiores debe ser $R' = R$

1.11 Teorema 34

1.11.1 Enunciado

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes los lados opuestos a tales ángulos también lo son. Recíprocamente, si dos lados de un triángulo son congruentes los ángulos opuestos a tales lados son congruentes.

1.11.2 Demostración

1. Consideremos primero el $\triangle abc$ tal que $\angle bac \equiv \angle abc$. Sea $M = M_{\overline{ab}}$ la mediatrix del \overline{ab} entonces $S_M(a) = b$, $S_M(b) = a$ y así $S_M(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ba}$. Sea

$$\begin{aligned} c' &= S_M(c) \therefore S_M(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{bc'} \\ S_M(\angle bac) &= \angle abc' \therefore \angle bac \equiv abc' \end{aligned}$$

Luego $\angle abc \equiv abc'$. Además \overrightarrow{bc} y $\overrightarrow{bc'}$ se encuentran en el mismo semiplano respecto de \overleftrightarrow{ab} pues $M \perp \overleftrightarrow{ab}$ y $S_M(\overleftrightarrow{ab}_c) = \overleftrightarrow{ab}_c$. Por teorema 18, resulta $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bc'}$, o sea, $S_M(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{bc}$. Como S_M es involutiva, $S_M(\overrightarrow{bc}) = \overrightarrow{ac}$, ahora:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ac} \cap \overrightarrow{bc} &= c \\ S_M(\overrightarrow{ac}) \cap S_M(\overrightarrow{bc}) &= S_M(c) \\ \overrightarrow{bc} \cap \overrightarrow{ac} &= S_M(c) \quad \therefore S_M(c) = c\end{aligned}$$

$\therefore S_M(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{bc}$ con lo cual $\overrightarrow{ac} \equiv \overrightarrow{bc}$

2. Consideramos $\triangle abc$ tal que $\overrightarrow{ac} \equiv \overrightarrow{bc}$. Sea B la bisectriz del $\angle acb$ entonces $S_B(\overrightarrow{ca}) = \overrightarrow{cb}$. Sea $a' := S_B(a) \in \overrightarrow{cb}$ y $S_B(\overrightarrow{ca}) = \overrightarrow{ca'}$ entonces $\overrightarrow{ca} \equiv \overrightarrow{ca'}$. Por hipótesis $\overrightarrow{bc} \equiv \overrightarrow{ca} \implies \overrightarrow{bc} \equiv \overrightarrow{ca'}$ y por teorema 18 vale que $b = a' = S_B(a)$ y $S_B(b) = a$. Finalmente $S_B(\angle cab) = \angle cba \implies \angle cab \equiv \angle cba$

1.12 Teorema 36

1.12.1 Enunciado

Una recta interseca a una circunferencia en a lo sumo dos puntos.

1.12.2 Demostración

Supongamos que p , q y r son tres puntos alineados pertenecientes a una circunferencia de centro o , con $q \in \overline{pr}$. Como $\overline{op} \equiv \overline{oq}$, pues p y q están en la circunferencia entonces $o \in M_{\overline{pq}}$ por corolario 35. Como $\overline{oq} \equiv \overline{or}$ entonces $o \in M_{\overline{qr}}$.

Sean m_1, m_2 puntos medios de \overline{pq} y \overline{qr} respectivamente, entonces los puntos medios de \overline{pq} y \overline{qr} están en las semirrectas opuestas de \overleftrightarrow{pr} con respecto a q . Luego $m_1 \neq m_2$, como $m_1 \in M_{\overline{pq}}$ y $m_2 \in M_{\overline{qr}}$, resulta $M_{\overline{pq}} \neq M_{\overline{qr}}$ y ambas son perpendiculares a \overleftrightarrow{pr} por o lo que contradice la unicidad de las rectas perpendiculares que pasan por un punto.