

# Apuntes

Matemática 4to

September 12, 2025

## 1 Practico 0

### 1.1 Ejercicio 1

#### 1.1.1 $A \subseteq B \leftrightarrow A \subseteq A \cap B$

( $\Rightarrow$ ) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $A \subseteq (A \cap B)$ ,  $\forall x \in A$  como  $A$  está contenida o es igual a  $B$ , Por lo tanto  $x \in B$ , es decir,  $x \in A \cap B$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $A \subseteq (A \cap B)$ , entonces  $A \subseteq B$ , Tomo cualquier  $x \in A$ . Por hipotesis  $x \in (A \cap B)$ , por lo que  $x \in B$  y como el elemento es arbitrario de  $A$  resulta en todo  $A$  contenida en  $B$ .

#### 1.1.2 $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B \subseteq B$

( $\Rightarrow$ ) Si  $A \subseteq B$ , entonces como todo elemento de  $A$  está en  $B$ , y la union contiene a los elementos de ambos, entonces todos los elementos de  $A$  están tambien en su union con otros conjuntos. Pero como todos los elementos de  $A$  están en  $B$  resulta en que los elementos de la unión son los elementos de  $B$ , por lo tanto  $A \cup B = B$

( $\Leftarrow$ ) Si  $A \cup B \subseteq B$ , entonces todos los elementos de  $A \cup B$  están en  $A$  y/o  $B$ . Entonces tenemos 4 casos:

Si  $x \in A$  y  $x \notin B$  entonces como la unión está contenida en  $B$ , entonces todo elemento de  $A$  está contenido en  $B$ .

Si  $x \in A$  y  $x \in B$ , entonces no es posible ya que la unión debería estar contenida en  $B$ . Por lo tanto todos los elementos de  $A$  están en  $B$ .

#### 1.1.3 $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Como estamos hablando de igualdades necesitamos demostrar la doble inclusión entre ambas proposiciones.

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in B$ , tenemos dos posibilidades:

Si  $x \in A$ , entonces  $x \in A \subseteq A \cup (B \setminus A)$

Si  $x \notin A$ , entonces  $x \in B \setminus A \subseteq A \cup (B \setminus A)$

En ambos casos  $x \in A \cup (B \setminus A)$ , por lo cual  $B \subseteq A \cup (B \setminus A)$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in A \cup (B \setminus A)$ , entonces tenemos dos posibilidades, pues  $A$  y  $B \setminus A$  son disjuntas:

Si  $x \in A$ , entonces  $x \in B$  por hipotesis.

Si  $x \in B \setminus A$ , entonces  $x \in B$  por definición de diferencia.

En ambos casos  $x \in B$ . Como hay doble contencion, se concluye la igualdad.

#### 1.1.4 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Nuevamente demostramos la doble inclusión.

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in A \cap (B \cup C)$ , entonces  $x \in A$  y  $x \in (B \cup C)$ . A su vez, por definición de unión  $x \in B$  o  $x \in C$ . Viendo los dos casos:

$x \in A$  y  $x \in B$  lo cual es la definición de intersección  $x \in A \cap B$

$x \in A$  y  $x \in C$  lo cual es la definición de intersección ( $x \in A \cap C$ ). Resulta en  $x$  en alguna de esas intersecciones o ambas, por lo tanto  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , entonces  $x \in (A \cap B)$  o  $x \in (A \cap C)$ . Ambas intersecciones incluyen a  $A$ , por lo que  $x \in A$ . Ahora tenemos dos casos:

Si  $x \in (A \cap B)$ , entonces  $x \in B$  por lo que  $x \in (B \cup C)$  y resulta en  $x \in A \cap (B \cup C)$

Si  $x \in (A \cap C)$ , entonces  $x \in C$  por lo que  $x \in (B \cup C)$  y resulta en  $x \in A \cap (B \cup C)$

Por doble contención se concluye la igualdad.

#### 1.1.5 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in A \cup (B \cap C)$ , entonces  $x \in A$  o  $x \in (B \cap C)$ :

Si  $x \in A$ , entonces  $x \in (A \cup B)$  y  $x \in (A \cup C)$  por lo que  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Si  $x \in (B \cap C)$ , entonces  $x \in B$  y  $x \in C$ , por lo que  $x \in (A \cup B)$  y  $x \in (A \cup C)$ , por lo que  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , entonces  $x \in (A \cup B)$  y  $x \in (A \cup C)$ , es decir:

$x \in A$  lo cual resulta en  $x \in A \cup (B \cap C)$

$x \notin A$ , como  $x$  tiene que estar en ambas uniones, entonces al no estar en  $A$ ,  $x \in B$  y  $x \in C$ , por lo que  $x \in (B \cap C)$  y resulta en  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

Por doble contención se concluye la igualdad.

#### 1.1.6 $A \subseteq (B \cap C) \rightarrow A \subseteq B$ y $A \subseteq C$

Sea  $x \in A$ , por hipótesis  $A \subseteq (B \cap C)$ , por lo que  $x \in (B \cap C)$ , es decir,  $x \in B$  y  $x \in C$ . Como cualquier elemento arbitrario de  $A$  está en  $B$  y  $C$ , entonces todo  $A$  está en  $B$  y en  $C$ .

#### 1.1.7 $A \cup B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ y $B \subseteq C$

Sea  $x \in A \cup B$ , esto quiere decir que hay 3 casos:

Si  $x \in A$ , y  $x \notin B$ , entonces todos los elementos de  $A$  están en  $C$ .

Si  $x \notin A$ , y  $x \in B$ , entonces todos los elementos de  $B$  están en  $C$ .

Si  $x \in A$  y  $x \in B$ , entonces todos los elementos de  $A$  y  $B$  están en  $C$ .

En los 3 casos se ven incluidos los conjuntos  $A$  y  $B$  en  $C$ .

#### 1.1.8 $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

( $\Rightarrow$ ) Sea  $x \in A$ , entonces  $x \notin A^c$ . Por hipótesis  $A \subseteq B$ , por lo que  $x \in B$

## 2 Práctico 1

### 2.1 Ejercicio 1

Los axiomas de incidencia son:

1. El plano es un conjunto infinito y sus elementos se llaman puntos.

2. Existe  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$  tal que cada  $R \in \mathcal{R}$  es un subconjunto propio de  $\pi$  que posee al menos dos elementos.
3. Dados  $a, b \in \pi$  con  $a \neq b$ , existe un único  $R \in \mathcal{R}$  tal que  $a, b \in R$ .

### 2.1.1 A

(1) Sea  $\pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , entendemos por infinito a todo conjunto que no es finito, es decir,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ninguna función  $f : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$  es biyectiva. Más aún conocemos que los naturales son infinitos ya que no puedo crear una función inyectiva entre ese conjunto y  $\{1, \dots, n\}$  (basta considerar a un subconjunto  $\{1, \dots, n+1\} \in \mathbb{N}$ ), entonces consideramos una función inyectiva con ellos para hablar de un conjunto infinito. Consideramos  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con  $f(n) = (n, 0)$ , es claro que  $f$  es inyectiva y a su vez recorre sólo un subconjunto de  $\pi$ , por lo tanto  $\pi$  es infinito.

(2) Las rectas están implícitas en este conjunto como los subconjuntos de  $\pi$  de dos elementos, es decir,  $W \subset \pi$  y  $W$  contiene dos pares ordenados de  $\mathbb{Z}$ . Por definición, son subconjuntos propios de  $\pi$  y poseen al menos dos elementos, mas específicamente, dos.

(3) Dados  $a, b \in \pi$  con  $a \neq b$ , con como está definidas las rectas, se sabe que los subconjuntos tienen sólo dos elementos, por lo tanto no es posible que otra recta aparte de ella misma contenga esos dos elementos. Es decir, si consideramos  $a, b, c \in \pi$  si son distintos no hay recta que contengan a ambos, y si existe una recta que los contenga, implica que uno es igual a los otros.

### 2.1.2 B

"Si se cumplen los axiomas de incidencia, entonces las rectas son subconjuntos infinitos del plano".

Si bien los axiomas nos aseguran los infinitos puntos del plano, no nos aseguran que no exista una biyección entre los elementos de un subconjunto de un conjunto infinito y un conjunto  $\{1, \dots, n\}$ , sirviendo como contraejemplo el inciso anterior donde las rectas sólo presentan dos elementos a los cuales puedo definir una biyección para cada recta que recorra sus elementos de modo que  $f : R \rightarrow \{1, 2\}$ . Por lo tanto esta proposición resulta falsa.

## 2.2 Ejercicio 2

Dado  $V = \mathbb{R}^3$  espacio vectorial tridimensional sobre los reales. Se considera el plano  $\pi$  de subespacios unidimensionales de  $V$ . Estos serán los puntos. Si  $W \subset V$  es un subespacio de  $V$  de dimension 2, entonces el conjunto de puntos contenidos en  $W$  será llamado una recta. Mostrar que este modelo cumple con los axiomas de incidencia.

(1) En el enunciado se denota a los puntos como los subespacios unidimensionales de  $V$ , es decir, las rectas vectoriales que pasan por el origen ya que hay un único vector que las genera. Con  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\langle (n, 1, 0) \rangle$  uno de los vectores generadores de un punto de  $\pi$ , es decir  $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, 0) =$

$t(n, 1, 0), t \in \mathbb{R}$  es punto de  $\pi$  y  $X_1 \in V$ , quiero ver que dados dos puntos  $X_1$  y  $X_2$  con  $X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t(m, 1, 0), t \in \mathbb{R}\}$  si  $n \neq m$ , entonces los puntos también son distintos, es decir, que son li

Partimos de trabajar por el absurdo, consideramos  $X_1 = X_2$ , lo que implica que dado  $(1, n, 0) \in X_1$  entonces existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r(n, 1, 0) = (m, 1, 0)$ , esto es:

$$\begin{cases} rn = m & r = 1 \\ r = 1 & \rightarrow n = m \\ 0 = 0 & 0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Lo cual resulta absurdo ya que  $n \neq m$ . Por lo tanto  $X_1 \neq X_2$  de allí se puede demostrar una inyección con los naturales (pensamos en que todos los vectores generadores se ven dados por  $f : \mathbb{N} \rightarrow V$  tal que  $f(x) = (x, 1, 0)$ ), que a su vez sólo son subconjuntos de vectores que generan a  $\pi$ , por lo que  $\pi$  es infinito.

(2) Las rectas están definidas como los puntos contenidos en  $W \subset V$  (subespacios de dimension 2). Cada una de ellas debe ser un subconjunto propio de  $\pi$  que posea al menos dos elementos de  $V$ , es decir

## 2.3 Guía 1:Ejercicio 9

### 2.3.1 Enunciado

La actividad 5 debe habernos dejado como enseñanza que hay modelos de geometría en los que se satisfacen los axiomas de incidencia y en los que las rectas no son infinitas. De ello inferimos que la infinitud de las rectas no es una consecuencia lógica de estos axiomas. Así pues, asumamos los axiomas de orden:

1. Dar la definición de que un conjunto sea infinito.
2. Que cada uno elabore una demostración de los siguientes enunciados. Las rectas tienen una cantidad infinita de puntos. Las semirrectas tienen infinitos puntos. Los segmentos también poseen una cantidad infinita de puntos.
3. Compare las estrategias seguidas por cada integrante.

### 2.3.2 Solución

(1) Puntualmente un conjunto  $A$  es infinito si **no** es finito, se entiende que no hay biyección posible entre el conjunto y un conjunto  $\{1, \dots, n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , puedo armar una inyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  también para definir la infinitud de  $A$  ya que  $\mathbb{N}$  es infinito, por no haber una biyección entre el conjunto finito  $\{1, \dots, n\}$  y  $\mathbb{N}$ .

- Las rectas tienen una cantidad infinita de puntos.
- Sea  $r$  una recta, por definición de recta tenemos
- ejercicios 3, 5 y 10 con rodrigo.

## 2.4 Guía 1:Ejercicio 10

### 2.4.1 Enunciado

Dado  $p \in \pi$ , denotamos con  $H_p$  el *haz de rectas* que pasan por  $p$ .

1. Demostrar que todo punto del plano pertenece a alguna recta de  $H_p$ .
2. No toda recta del plano, es una recta de  $H_p$ .
3. Demostrar que los axiomas de orden implican que  $H_p$  tiene infinitas rectas.
4. Mostrar con un ejemplo que sin los axiomas de orden se puede construir un plano que satisfaga los axiomas de incidencia, mas no el item anterior.

### 2.4.2 Solución

(1) Definimos al conjunto  $H_p = \{R \in \mathcal{R} : p \in R\}$ , queremos ver que dado cualquier punto  $q \in \pi$  existe una recta  $r \in H_p$  tal que  $q \in r$ . Por lo que consideramos los siguientes casos:

Si  $p = q$ , entonces cualquier recta que pase por  $p$  cumple la condición ya que toda recta de  $H_p$  contiene a  $p$ .

Si  $p \neq q$ , por el axioma 3 de incidencia, existe una única recta  $r$  que contiene a ambos puntos (I.3), tal recta contiene a  $p$  por construcción, así  $r \in H_p$  y a su vez  $q \in r$  por lo que queda demostrado el enunciado para todo  $q \in \pi$ .

(2) Nuevamente, sea  $p \in \pi$ , quiero probar que existe alguna recta en  $\mathcal{R}$  que no contenga a  $p$ . Tratamos por el absurdo, supongamos que toda recta en el plano contiene a  $p$ .

Por I.2 conocemos que existen al menos dos puntos distintos en el plano que son parte de una recta, es decir, existen  $q \in \pi$  tal que  $q \neq p$ , y  $R$  recta que contenga a estos dos puntos y es subconjunto propio de  $\pi$ , lo que implica que existe al menos un punto de  $\pi$  que no está en  $R$ . Sean  $r \notin R$  un punto de  $\pi$  y  $N$  la recta determinada por  $q$  y  $r$ , por el axioma I.3 dicha recta existe y es única.

Por lo que asumimos al principio de que toda recta contiene a  $p$ , entonces  $p \in N$ , que a su vez por unicidad de la recta  $N$  coincide con  $R$  pues es la recta generada por  $p$  y  $q$ , resulta así que  $N = R$  por lo tanto  $r \in R$  lo cual es absurdo por como definí a  $r$ , este absurdo nace de asumir que todas las rectas en el plano contienen a  $p$ .

(3) Por desarrollo en (9) con uso de los axiomas de los dos primeros axiomas de orden pudimos definir que las rectas tienen infinitos puntos y más aún en el inciso anterior probamos la existencia de una recta fuera de  $H_p$ ,

## 3 Práctico 2

### 3.1 Ejercicio 1

Analizar la validez de cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera probarla, y si no, dar un contraejemplo que muestre su falsedad.

### 3.1.1 (a) La intersección de conjuntos convexos es convexa

**Verdadero** Un conjunto  $C$  se dice convexo si  $\forall a, b \in C, a \neq b$  vale que  $\overline{ab} \subseteq C$ , sea  $D$  la intersección de dos conjuntos convexos  $A$  y  $B$ , es decir  $D = A \cap B$ . Sea  $x, y \in D$ , entonces  $x, y \in A$  y  $x, y \in B$ , por lo que esos segmentos están contenidos en ambos conjuntos, es decir,  $\overline{xy} \subseteq A$  y  $\overline{xy} \subseteq B$  esto es por la convexidad de  $A$  y  $B$ . Pero si los puntos de ese segmento pertenecen a ambos conjuntos, entonces pertenecen también a su intersección, es decir,  $\overline{xy} \subseteq A \cap B = D$ . Por lo que  $D$  resulta convexa por ser mis  $x, y$  arbitrarios de la intersección de  $A$  y  $B$ .

### 3.1.2 (b) La unión de conjuntos convexos es convexa

**Falso** Faltaría ver demostrar o refutar el porqué los discos son convexos, podría usar los semiplanos divididos con una recta pero sin la recta que los define, entonces pasar de un semiplano a otro corta la recta

Sea  $R$  una recta tal que defina los dos semiplanos abiertos  $A$  y  $B$ , es decir,  $A \cup B \cup R = \mathbb{R}^2$ . Considero los conjuntos  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  y  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ , ambos conjuntos son semiplanos abiertos y convexos en el plano cartesiano y  $R$  es el eje  $x$ . Considero los puntos  $a = (0, 1) \in A$  y  $b = (0, -1) \in B$ , el segmento  $\overline{ab}$  es la porción del eje  $y$  que va desde el punto  $(0, -1)$  hasta el punto  $(0, 1)$ , es claro que este segmento no está contenido ni en  $A$  ni en  $B$  ya que  $(0, 0)$  es parte del segmento pues pertenece a la intersección de las semirrectas dadas por  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ , pero no pertenece a ninguno de los conjuntos, y por lo tanto tampoco en su unión.

### 3.1.3 (c) Si $A$ es convexo entonces $A^c$ es convexo

**Falso** Sea  $A$  un conjunto convexo, considero  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

### 3.1.4 (d) Si $A$ y $B$ son convexos, entonces $A - B$ es convexo

**Falso** Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$  y  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , ambos conjuntos son discos en el plano cartesiano, por lo que son convexos. Considero los puntos  $a = (0, 2) \in A - B$  y  $b = (0, -2) \in A - B$ , el segmento  $\overline{ab}$  es la porción del eje  $y$  que va desde el punto  $(0, -2)$  hasta el punto  $(0, 2)$ , es claro que este segmento no está contenido en  $A - B$  ya que pasa por el conjunto  $B$ , por lo tanto la resta de conjuntos no es siempre convexa.

### 3.1.5 (e) Todo ángulo es convexo

**Falso** Sea  $\angle AB$  un ángulo con origen  $\{o\}$ , por definición de ángulo,  $A$  y  $B$  son semirrectas con origen en  $o$ . Sea  $x, y \in \angle AB$ , entonces  $x$

## 4 Práctico 2: Ejercicios 10 y 13

### 4.1 Ejercicio 10

#### 4.1.1 Enunciado

Dado un polígono convexo  $P$ , probar que su interior es la intersección de los interiores de todos los ángulos interiores del polígono.

#### 4.1.2 Solución

- **P es polígono convexo:** Sean  $a_1, \dots, a_n \in \Pi$  (con  $n \geq 3$ ) numerados de tal modo que las rectas  $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \dots, \overline{a_na_1}$  dejen en un mismo semiplano abierto los  $(n-2)$  puntos restantes. Se llama polígono convexo de vértices  $a_1, \dots, a_n$  a la unión de los segmentos  $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \dots, \overline{a_na_1}$ .
- **Interior de un polígono convexo:** Sea la intersección de los semiplanos abiertos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_ia_{i+1}}$  que contienen a los demás puntos.
- **Ángulo interior:** del polígono son los ángulos de la forma  $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i+1}}$ , y se los denota por  $\hat{a}_i$ .
- **Interior de un ángulo:** Considerar el sector angular sin los bordes es  $\sec(\angle AB) = A_B \cap B_A$

Quiero ver que los ángulos interiores terminan formando el interior del polígono, es decir, que la intersección de los sectores angulares de los ángulos interiores del polígono es igual al interior del polígono.

Sea  $P$  un polígono convexo de vértices  $a_1, \dots, a_n$  e  $I_P$  su interior y  $\sec(\hat{a}_i)$  el interior del ángulo  $\hat{a}_i$ , quiero ver que:

$$I_P = \bigcap_{i=1}^n \sec(\hat{a}_i) \quad (2)$$

( $\subseteq$ ) Sea  $x \in I_P$ , por definición de interior de un polígono convexo,  $x$  pertenece a todos los semiplanos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_ia_{i+1}}$  que contengan a los otros  $(n-2)$  puntos. Por lo tanto,  $x$  pertenece a los semiplanos determinados por las rectas  $A = \overleftrightarrow{a_{i-1}a_i}$  y  $B = \overleftrightarrow{a_ia_{i+1}}$ , es decir,  $x \in B_A$  y  $x \in A_B$  que forman el ángulo  $\hat{a}_i$ , por lo que  $x \in \sec(\hat{a}_i)$ . Como  $x$  pertenece a todos los sectores angulares de los ángulos interiores del polígono, entonces  $x \in \bigcap_{i=1}^n \sec(\hat{a}_i)$ .

**pensar en definir un ángulo y de ahí los demás y considerar el tema de que estoy tomando semirrectas y no un punto para definir los semiplanos abiertos, entonces considero cosas de la recta que no están**

( $\supseteq$ ) Sea  $x \in \bigcap_{i=1}^n \sec(\hat{a}_i)$ , entonces  $x \in \sec(\hat{a}_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por definición de sector angular,  $x \in A_{a_ia_{i-1}}$  y  $x \in B_{a_ia_{i+1}}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por lo que  $x$  pertenece a todos los semiplanos determinados por las rectas  $\overleftrightarrow{a_ia_{i+1}}$  que contengan a los otros  $(n-2)$  puntos, es decir,  $x \in I_P$ .

**fijarme bien la definición de las semirrectas que estoy citando**

Por doble contención se concluye la igualdad.

## **4.2 Ejercicio 13**

### **4.2.1 Enunciado**

Probar que las dos diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un único punto y que éste es interior al cuadrilátero.