Teórico

Geometría I

September 16, 2025

1 Parcial 1

1.1 Axiomas

1.1.1 De tipo I: Incidencia

1. El plano es un conjunto infinito Π
2. $\exists \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Pi)$ tal que cada $R \in \mathcal{R}$ es un subconjunto propio de Π que posee al menos dos elementos
3. Dados $a, b \in \Pi$ y $a \neq b$, existe una única $R \in \mathcal{R}$ tal que $a, b \in R$

1.1.2 De tipo II: Orden

1. Toda recta en Π posee un orden total estricto, ($\mathcal{R}^{-\infty}$ también lo posee), luego si en una recta A tomamos los puntos p y q con $p \neq q$, existe un orden total estricto en A tal que $p < q$
2. Dados dos puntos distintos en una recta A, existe al menos un punto de A entre ellos y, dado un punto cualquiera, siempre existe un punto que lo precede y otro que le sigue:
   - Si $p, q \in A$ con $p < q$ entonces $\exists r \in A$ tal que $p < r < q$
   - Si $x \in A$ entonces $\exists y, z \in A$ tal que $y < x < z$ para algún orden en A
3. Dada una recta A, su complemento A^c está dividido en dos subconjuntos convexos disjuntos, tales que si a pertenece a uno de ellos y b al otro, entocnes $\overline{ab}$ corta a la recta A

1.1.3 De tipo III: Rígidez

1. La transformaciones rígidas del plano son funciones biyectivas del plano en sí mismo que mandan rectas en rectas y semirrectas en semirrectas.
2. La composición de dos transformaciones rígidas es otra transformación rígida, la inversa de una transformación rígida es también una transformación rígida.
3. Si T es una transformación rígida entonces:

- $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$ y sucede que $\overline{ab} \subseteq \overline{cd}$ o viceversa, entonces $\overline{ab} = \overline{cd}$
- $a\hat{o}b \equiv c\hat{o}d$ y sucede que $sec(a\hat{o}b) \subseteq sec(c\hat{o}d)$ o viceversa, entonces $a\hat{o}b = c\hat{o}d$

4. Dados dos pares SR-SP (A, α) y (B, β), existe una única transformación rígidad tal que $T(A, \alpha) = (B, \beta)$, es decir $T(A) = B$ y $T(\alpha) = \beta$

1.2 Teorema 4

1.2.1 Enunciado

Sea A una recta, $a \in A$ y $p \notin A$ entonces $\overrightarrow{ap} \subseteq A_p$.

1.2.2 Demostración

Consideramos en $\overleftrightarrow{ap}$ el orden $<$ tal que $a < p$, quiero ir por el absurdo, supongo $\overrightarrow{ap} \nsubseteq A$, es decir, **existe** $q \in \overrightarrow{ap}$ **tal que** $q \notin A_p$.
Pero como $A \subset A_p$ entonces $q \in \check{A}_p$, más precisamente $q \in \check{A}_p - A$.
Por II.3 sabemos que $\overline{pq} \cap A \neq \varnothing$, pero a, p, q están alineados, entonces $\overline{pq} \subseteq \overleftrightarrow{ap}$.

- $\varnothing \neq \overline{pq} \cap A \subseteq \overleftrightarrow{ap} \cap A = \{a\}$ entonces $\overline{pq} \cap A = \{a\}$
- $\implies q < a < p$ por definición de segmento,
- pero $q \in \overrightarrow{ap} \implies a < q$ lo cual resulta absurdo

$\therefore \overrightarrow{ap} \subseteq A_p$

1.3 Teorema 10

1.3.1 Enunciado

Si R es una recta que interseca al $\triangle\, abc$ y no pasa por sus vértices, entonces R interseca a $\triangle\, abc$ en exactamente dos puntos.

1.3.2 Demostración

Sea p un punto del tríangulo, supongamos R corta a $\overline{ac}$ con $p \neq a$ y $p \neq c$, R corta a $\overline{ac}$ únicamente en p pues si lo hiciera en otro punto, R tendría dos puntos dentro del segmento y sería la recta $\overleftrightarrow{ac}$, absurdo.

Entonces a y c están en semiplanos opuestos respecto a R, es decir $c \in \check{R}_a$.
Ahora tenemos que $b \in R_a$ o $b \in \check{R}_a$ y puntualmente $b \notin R$.

$\implies$ Si $b \in R_a$ entonces $a, b \in R_a - R \implies \overline{ab} \cap R = \varnothing$ (esto es por ser $R_a - R$ convexo). Además $c \in \check{R}_a$ y $b \in R_a$ por II.3 $\implies \overline{bc} \cap R = \{q\}$ con $q \neq p$.
Luego R corta a $\triangle\, abc$ sólo en p y q.

$\implies$ Si $b \in \check{R}_a$, entonces análogamente se ve que R corta a $\triangle\, abc$ en $\overline{ac}$ y $\overline{ab}$ en sólo dos puntos.

1.4 Teorema 16

1.4.1 Enunicado

Sea R una recta y $p \notin R$. Si T es una transformación rígida y $R' = T(R)$, $p' = T(p)$ entonces $T(R_p) = R'_{p'}$

1.4.2 Demostración

Claramente $R' \subseteq R'_{p'}$ y $p' \in R'_{p'}$. Sea ahora $q \in R_p - R$ con $q \neq p$, entonces $\overline{pq} \cap R = \varnothing$ aplico la transformación rígida a q, ie, $q' = T(q)$

$$\begin{aligned} \implies T(\overline{pq}) \cap T(R) = \varnothing \\ \overline{p'q'} \cap R' = \varnothing \end{aligned}$$

Por un corolario anterior podemos deducir que $q' \in R'_{p'}$, luego se probó que $T(R_p) \subseteq R'_{p'}$ esto quiere decir que $T(R_p) \subseteq T(R)_{T(p)}, \forall T$ transformación rígida, $\forall R$ recta y $\forall p \notin R$.
Considerando **III.2**, $T-1$ es una transformación rígida, vamos a aplicar ahora esa transformación rígida al semiplano $R'_{p'}$:

$$\begin{gathered} T^{-1}(R'_{p'}) \subseteq T^{-1}(R')_{T^{-1}(p')} \text{ con } R' = T(R), p' = T(p) \\ T^{-1}(R'_{p'}) \subseteq R_p \rightarrow \text{ aplico T} \\ R'_{p'} \subseteq T(R_p) \end{gathered}$$

Y por la doble contención obtenida concluimos $R'_{p'} = T(R_p)$

1.5 Teorema 20

1.5.1 Enunciado

Sea (A, α) un par semirrecta-semiplano con A de origen en o y sea T la transformación rígida que cumple $T(A, \alpha) = (\breve{A}, \breve{\alpha})$ entonces:

1. T es involutiva
2. Si (B, β) es un par semirrecta-semiplano tal que B tiene origen en o entonces $T(B, \beta) = (\breve{B}, \breve{\beta})$

1.5.2 Demostración

Para (1):

$$T^2(A, \alpha) = T(T(A, \alpha)) = T(\breve{A}, \breve{\alpha}) = (T(\breve{A}), T(\breve{\alpha})) = (A, \alpha)$$

Por unicidad de **III.4**, debe ser $T^2 = Id$

Para (2):

- Si $B = A$ o $\breve{A}$ entonces

$$(B, \beta) = \begin{cases} (A, \alpha) \\ (A, \breve{\alpha}) \\ (\breve{A}, \alpha) \\ (\breve{A}, \breve{\alpha}) \end{cases} \xrightarrow{T} \begin{cases} (\breve{A}, \breve{\alpha}) \\ (\breve{A}, \alpha) \\ (A, \breve{\alpha}) \\ (A, \alpha) \end{cases}$$

- Si $B \neq A$ y $B \neq \breve{A}$ entonces:

$$B \subseteq \alpha \text{ o } B \subseteq \breve{\alpha}(\text{ Considero } B \subseteq \alpha, \text{y al otro caso análogo})$$

  - Sea $p \in B, p \neq o \implies B = \overrightarrow{op}$ y $p' = T(p) \in \breve{\alpha} \quad (p' \neq p)$. Por **II.3** $\overline{pp'}$ corta a $\overleftrightarrow{A}$ en un punto a, ahora puede ser $a \in A$ o $a \in \breve{A}$:
    - Si $a \in A \implies \{a\} = \overline{pp'} \cap A$, por ser T involutiva $\implies T(p') = T(T(p)) = p$, entonces aplicamos T

$$\{T(a)\} = T(\overline{pp'} \cap T(A)) = \overline{pp'} \cap \breve{A}$$

      Pero $\overline{pp'}$ corta a $\overleftrightarrow{A} = A \cup \breve{A}$ en un único punto. De allí y la igualdad anterior de deduce $T(a) = a$ y pertenecen a $\breve{A}$ y A respectivamente, $\implies T(a) = a = o$, es decir, $o \in \overline{pp'}$ luego $p' \in \breve{B}$, entonces

$$T(B) = T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'} = \breve{B}$$

    - Si $a \in \breve{A}$ es análogo.
  - Sea $q \in \beta, q \notin \overleftrightarrow{B}$, por lo probado anteriormente se tiene que: $T(\overrightarrow{oq}) = \overrightarrow{oq} \implies T(q) \in \breve{\beta} \implies T(\beta) = \breve{\beta}$

El teorema afirma que T no depende del par (A, α)

1.6 Teorema 25

1.6.1 Enunciado

Sea (A, α) un par semirrecta-semiplano de origen o y sea T la única transformación rígida que cumple $T(A, \alpha) = (A, \breve{\alpha})$, entonces:

1. T es involutiva
2. $T(p) = p, \forall p \in A$
3. Si B es una semirrecta de $\overleftrightarrow{A}$ entonces $T(B, \alpha) = (B, \breve{\alpha})$

1.6.2 Demostración

Para (a): $T^2(A, \alpha) = T(T(A, \alpha)) = T(A, \breve{\alpha}) = T(A, \alpha)$. Por unicidad de **III.4** tenemos $T^2 = Id$

Para (b): Como $T(A) = A$ y A tiene origen en $o \implies T(o) = o$. Y sea $p' := T(p) \in A$ por $T(A) = A$ y

$$T(\overline{op}) = \overline{op'} \implies \overline{op} \equiv \overline{op'} \implies \overline{op} \subseteq \overline{op'} \vee \overline{op'} \subseteq \overline{op}$$

Por **III.3** $\implies \overline{op} = \overline{op'} \implies p = p'$, es decir, $T(p) = p$

Para (c): Por (b), $T(B) = B$ y por definición de $T \implies T(\alpha) = \breve{\alpha} \implies T(B, \alpha) = T(B, \breve{\alpha})$.
Este teorema asegura que T no depende de la semirrecta A, sólo de $\overleftrightarrow{A}$