Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Teórico Final de Geomtría I

Febrero 2026

1 Listado teórico:

1.1 Teorema 4

1.1.1 Enunciado

Sean A una recta, $a \in A$ y $p \notin A$. Entonces $\overrightarrow{ap} \subset A_p$.

1.1.2 Demostración

Consideramos en $\overleftrightarrow{ap}$ el orden $<$ tal que $a < p$, quiero ir por el absurdo, supongo $\overrightarrow{ap} \nsubseteq A$, es decir, **existe** $q \in \overrightarrow{ap}$ **tal que** $q \notin A_p$.
Pero como $A \subset A_p$ entonces $q \in \check{A}_p$, más precisamente $q \in \check{A}_p - A$.
Por *II.3* sabemos que $\overline{pq} \cap A \neq \varnothing$, pero a, p, q están alineados, entonces $\overline{pq} \subseteq \overleftrightarrow{ap}$.

- $\varnothing \neq \overline{pq} \cap A \subseteq \overleftrightarrow{ap} \cap A = \{a\}$ entonces $\overline{pq} \cap A = \{a\}$
- $\implies q < a < p$ por definición de segmento,
- pero $q \in \overrightarrow{ap} \implies a < q$ lo cual resulta **absurdo**

$\therefore \overrightarrow{ap} \subseteq A_p$

1.2 Corolario 5

1.2.1 Enunciado

Los semiplanos cerrados son convexos.

1.2.2 Demostración

Dado un semiplano A_p y sean $r, s \in A_p$ entonces hay 3 casos posibles:

1. Si $r, s \in A_p - A$. Entonces por *II.3* tenemos $\overline{rs} \subseteq A_p - A \subseteq A_p$
2. Si $r, s \in A$. Entonces por ser A una recta, $\overline{rs} \subseteq A \subseteq A_p$
3. Si $r \in A_p - A$ y $s \in A$. Entonces $\overline{sr} \subseteq \overrightarrow{sr} \subseteq A_p$ por teorema 4

En todos los casos llegamos a $\overline{rs} \subseteq A_p$
$\therefore A_p$ es convexo.

1.3 Teorema 7

1.3.1 Enunciado

Sea $\angle AB$ un ángulo con $a \in A$ y $b \in B$. Si R es una semirrecta interior al ángulo, entonces R interseca a $\overline{ab}$ en un único punto.

1.3.2 Demostración

Sea o el vértice de $\angle AB$. Si $a = o$ ó $b = o$, el resultado es claro.
Consideremos ahora el caso $a, b \neq o$. Quiero ver que a y b están en semiplanos opuestos respecto a $\overleftrightarrow{R}$. Entonces sea $a' \in \check{A}$ con $a \neq o$, sabemos que $b \in A_B$ entonces por teorema 4 $\overrightarrow{a'b} \subseteq A_B$ y como $R \subseteq A_B$ y $R \subseteq B_A$, vale que:

1. $\overrightarrow{a'b} \cap \check{R} = \varnothing$, análogamente $a' \in B_{\check{A}}$ entonces por teorema 4, $\overrightarrow{a'b} \subseteq B_{\check{A}}$
2. $\overrightarrow{ba'} \cap R = \varnothing$

Entonces

$$\begin{aligned} \overline{a'b} \cap \overleftrightarrow{R} &= \overline{a'b} \cap (R \cup \check{R}) \\ &= (\overline{a'b} \cap R) \cup (\overline{a'b} \cap \check{R}) \\ &= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \end{aligned}$$

Deducimos del *II.3* que a' y b están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{R}$. Como $a \in A$ y $a' \in \check{A}$ resulta que a y a' están en semiplanos opuestos respecto de $\overleftrightarrow{R}$
$\therefore$ a y b están en semiplanos opuestos respecto a $\overleftrightarrow{R}$

Por el *II.3* se deduce que $\overline{ab} \cap R \neq \varnothing$ y además $a, b \in sec(\angle AB)$ que es convexo, entonces $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$, luego la intersección $\overline{ab} \cap \overleftrightarrow{R}$ debe estar en R pues los puntos de $\check{R}$ son exteriores a $\angle AB$, por lo tanto $\overline{ab} \cap R \neq \varnothing$.

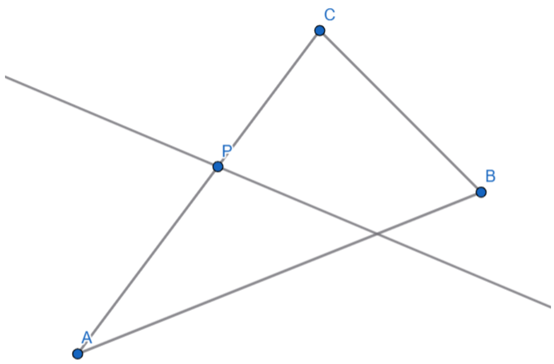
Y si hubieran dos puntos de corte de R y $\overline{ab}$, llamémoslos p y q, entonces $\overline{ab} \subseteq \overleftrightarrow{pq} = \overleftrightarrow{R}$. Pero $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$.
$\therefore \overline{ab} \subseteq R \implies a, b$ son puntos interiores al $\angle AB$, **absurdo** por lo cual el punto es único.

1.4 Teorema 10: Postulado de Pasch

1.4.1 Enunciado

Si R es una recta que interseca al $\triangle abc$ y no pasa por sus vértices, entonces R interseca a $\triangle abc$ en exactamente dos puntos.

1.4.2 Demostración



Supongamos que R corta a $\overline{ac}$ en p con $p \neq a$ y $p \neq c$. R corta a $\overline{ac}$ únicamente en p pues si la intersección tuviera más de un elemento resultaría en $\overleftrightarrow{R} = \overleftarrow{ac}$ lo cual es **absurdo**. Entonces a y c están en semiplanos opuestos respecto a R, es decir, $c \in \check{R}_a$. Ahora tenemos que $b \in R_a$ ó $b \in \check{R}_a$ (y $b \notin R$), entonces:

- Si $b \in R_a$, entonces $a, b \in R_a - R$ y por $R_a - R$ convexo resulta $\overline{ab} \cap R = \varnothing$. Además, $c \in \check{R}_a$ y $b \in R_a$ y resulta por *II.3* $\overline{bc} \cap R = \{q\}$ con $q \neq p$ y luego R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q.
- Si $b \in \check{R}_a$, entonces análogamente se ve que R corta al $\triangle abc$ en $\overline{ac}$ y $\overline{ab}$ en dos puntos y no corta al $\overline{bc}$.

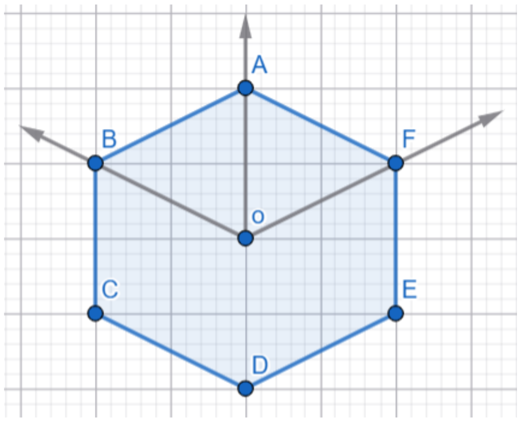
$\therefore$ R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q con $q \in \overline{ab}$.

1.5 Teorema 11

1.5.1 Enunciado

Toda semirrecta con origen en un punto interior de una región poligonal convexa, interseca al polígomo en un único punto.

1.5.2 Demostración



Sea o un punto interior al polígono $a_1, \ldots, a_n$. Entonces o es interior a todos los ángulos $\angle a_i$ del polígono. En particular, $\overrightarrow{a_2 o}$ es semirrecta interios al $\angle a_1 a_2 a_3$, y entonces $\overline{a_1 a_2}$ y $\overline{a_2 a_3}$ se encuentran en semiplanos distintos repecto de $\overleftrightarrow{oa_2}$, por el teorema 7. Luego, $\angle a_1 o a_2$ y $\angle a_2 o a_3$ son consecutivos. Análogamente, se tiene que $\angle a_{i-1} o a_i$ y $a_i o a_{i+1}$ son ángulos consecutivos para $i = 1, \ldots, n$ (con $a_0 = a_n$ y $a_{n+1} = a_1$). Por lo tanto, si $A_i = \overrightarrow{oa_i}$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces las semirrectas A_i satisfacen las hipótesis del teorema 9.
$\therefore \Pi = \bigcup_{i=1}^{n} sec\,(\angle A_i A_{i+1})$

Sea ahora $p \in \Pi$, $p \neq o$, si $\overrightarrow{op} = A_i$ para algún i, entonces $\overrightarrow{op}$ interseca al polígono únicamente en a_i. Si $\overrightarrow{op} \neq A_i, \forall i$, sabemos que $p \in \bigcup_{i=1}^{n} sec(\angle A_i A_{i+1})$ por el teorema 9, por lo tanto existe i_o tal que $p \in sec(\angle A_{i_o} A_{i_o+1})$. Más aún, p es interior al $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$ pues no está en sus lados. Luego $\overrightarrow{op}$ es una semirrecta interior al $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$. Por el teorema 7, el segmento $\overline{a_i a_{i+1}}$ interseca a $\overrightarrow{op}$, por lo que $\overrightarrow{op}$ corta al polígono.

Unicidad: Si $\overrightarrow{op}$ cortara al polígono en q y $q'(q \neq q')$, consideramos las posiciones de o, q y q' en la semirrecta $\overrightarrow{op}$. Puede ser $o < q < q'$ o bien $o < q' < q$.

- En el primer caso, supongamos $q \in \overline{a_i a_{i+1}}$. Entonces o y q' estarían en semiplanos distintos respecto de $\overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$, lo cual es absurdo pues o y q' están en la región poligonal.
- Es análogo

Luego, $\overrightarrow{op}$ corta al polígono en un único punto.

1.6 Teorema 16

1.6.1 Enunciado

Sean R una recta, $p \notin R$ y T una transformación rígida. Entonces $T(R_p) = T(R)_{T(p)}$

1.6.2 Demostración

Definimos $R' = T(R)$ y $p' = T(p)$. Claramente $R' \subset R'_{p'}$ y $p' \in R'p'$. Sea ahora $q \in R_p - R$, con $q \neq p$. Luego $\overline{pq} \cap R = \varnothing$ y aplicando T tenemos: $\overline{p'q'} \cap R' = \varnothing$ donde $q' = T(q)$ por corolario 15. De esto se deduce que $q' \in R'_{p'}$, por lo que vale $T\,(R_p) \subseteq R'_{p'}$.
Por axioma *III.2*, sabemos que T^{-1} es una transformación rígida y podemos considerar lo probado recién pero para esta transformación y obtenemos: $T^{-1}\left(R'_{p'}\right) \subseteq R_p$. Aplicando T: $R'_{p'} \subseteq T\,(R_p)$. Resulta entonces $T\,(R_p) = R'_{p'}$.

1.7 Teorema 20

1.7.1 Enunciado

Sea (A, α) un par semirrecta-semiplano, A de origen o y T la transformación rígida tal que $T(A, \alpha) = \left(\breve{A}, \breve{\alpha}\right)$. Entonces:

1. T es involutiva.
2. Si (B, β) es otro par de semirrecta-semiplano tal que B tiene origen en o, entonces $T\,(B, \beta) = \left(\breve{B}, \breve{\beta}\right)$.

1.7.2 Demostración

1. **T involutiva:** $T^2(A,\alpha) = T(T(A,\alpha)) = T(\breve{A},\breve{\alpha}) = (T(\breve{A}),T(\breve{\alpha})) = (\breve{\breve{A}},\breve{\breve{\alpha}}) = (A,\alpha)$ y por unicidad del axioma *III.4* resulta $T^2 = Id$

2. Tiene dos casos posibles:

   (a) Si $B = A$ ó $B = \breve{A}$ entonces:

   $$\begin{cases} T(A,\alpha) = (\breve{A},\breve{\alpha}) \\ T(\breve{A},\breve{\alpha}) = (A,\alpha) \\ T(A,\breve{\alpha}) = (\breve{A},\alpha) \\ T(\breve{A},\alpha) = (A,\breve{\alpha}) \end{cases} \text{por lo que la afirmación vale}$$

   (b) Si $B \neq A$ ó $B \neq \breve{A}$ entonces $B \subseteq \alpha$ ó $B \subseteq \breve{\alpha}$, consideramos ambos casos análogos entonces trabajamos con $B \subseteq \alpha$

   Sea $p \in B$ y $p \neq o$ entonces $B = \overrightarrow{op}$ y sea $p' := T(p) \in \breve{\alpha}$, por el axioma *II.3* $\overline{pp'}$ corta a la recta $\overleftrightarrow{A}$ en un único punto a, lo cual puede estar en A ó $\breve{A}$, como son casos análogos, consideramos el primero:

   Si $a \in A$ entonces $\overline{pp'} \cap A = \{a\}$. Aplicamos T a ambos lados y desarrollamos:

   $$T(a) = T(\overline{pp'}) \cap T(A) = \overline{p'p} \cap \breve{A}$$

   Como sabemos que $\overline{pp}$'corta a A en un único punto entonces $T(a) = a$ lo cual implica que $a = o$ pues es el único punto fijo y $o \in \overline{pp'}$ lo que implica que $p' \in \breve{B}$, entonces $T(B) = T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'} = \breve{B}$.

   Sea ahora $q \in \beta$ tal que $q \notin \overleftrightarrow{B}$ por lo probado anteriormente se tiene que $T(\overrightarrow{oq}) = \overrightarrow{o\breve{q}} \therefore T(q) \in \breve{\beta}$ y así $T(\beta) = T(B_q) = \breve{\beta}$

1.8 Teorema 25

1.8.1 Enunciado

Sea (A,α) un par semirrecta-semiplano, A de origen o y sea T la única transformación rígida tal que $T(A,\alpha) = (A,\breve{\alpha})$. Entonces:

1. T es involutiva.

2. $T(p) = p$ para todo p en la recta $\overleftrightarrow{A}$

3. Si B es una semirrecta de la recta $\overleftrightarrow{A}$ entonces $T(B,\alpha) = (B,\breve{\alpha})$.

1.8.2 Demostración

1. $T^2(A,\alpha) = T(T(A,\alpha)) = T(A,\breve{\alpha}) = (T(A),T(\breve{\alpha})) = (A,\breve{\breve{\alpha}}) = (A,\alpha)$. Por unicidad de *III.4* tenemos $T^2 = Id$.

2. Como $T(A) = A$ y A tiene origen en o entonces $T(o) = o$ y sea $p' := T(p) \in A$ por $T(A) = A$ y $T(\overline{op}) = \overline{op'}$ entonces por congruencia $\overline{op} \equiv \overline{op'}$ por lo tanto un segmento contiene a otro pero por *III.3* resulta $\overline{op} = \overline{op'}$ por lo que $p = p'$, es decir, $p = T(p)$

3. Por ser p un punto arbitrario de A entonces la semirrecta B cumple por **(b)** que $T(B) = B$ además por la propia definición de T resulta $T(\alpha) = \breve{\alpha} \therefore T(B,\alpha) = (B,\breve{\alpha})$.

1.9 Teorema 28

1.9.1 Enunciado

Por cada punto del plano pasa una y solo una perperndicular a una recta dada. Es decir, dados $p \in \Pi$ y una recta A, existe una única recta B tal que $B \perp A$ y $p \in B$.

1.9.2 Demostración

Consideramos dos casos:

1. $p \notin A$

   - **Existencia:** Sea $p' := S_A(p)$ que es distinto de p y sea $B = \overleftrightarrow{pp'}$ entonces $p \in B$ y $B \perp A$ por el Teorema 26.
   - **Unicidad:** Supongamos que C es una recta tal que $p \in C$ y $C \perp A$. Por el teorema 27 C es invariante por S_A y como $p \in C$ luego $p' := S_A(p) \in C$ entonces $C = \overleftrightarrow{pp'}$ pero esa es $B \therefore B = C$

2. $p \in A$

   - **Existencia:** Sea $q \notin A$ y $q' = S_A(q)$ entonces por el teorema 26 $\overleftrightarrow{qq'} \perp A$. Si $\overleftrightarrow{qq'} \cap A = \{p\}$ tomamos $B = \overleftrightarrow{qq'}$, en cambio si $\overleftrightarrow{qq'} \cap A = \{o\}$, con $o \neq p$, sea m el punto medio de $\overline{op}$ y consideramos $B = S_m(\overleftrightarrow{qq'})$. Sea $q'' = S_m(q) \implies S_m(\angle qop) = \angle q''po \therefore \angle qop \equiv \angle q''po$. Como $\angle qop$ es recto, resulta que $\angle q''po$ es recto y esto dice que $B \perp A$ y $p \in B$
   - **Unicidad:** Supongamos que B y C son rectos tales que $B \perp A$ y $C \perp A$ y $p \in B \cap C$.

     Sea $b \in A$ con $b \neq p$ entonces $\overrightarrow{pb}$ es una semirrecta de A y $S_B(\overrightarrow{pb}) = \check{\overrightarrow{pb}} = S_C(\overrightarrow{pb})$ pues A es invariante por S_B y S_C ya que es perpendicular a ambos.

     Sea α un semiplano determinado por A y consideremos $q \in \alpha \cap B$, $r \in \alpha \cap C$, con $q, r \notin A$. Luego, $S_B(q) = q$ y $S_C(r) = r$ entonces $S_B(\alpha) = S_C(\alpha) = \alpha$ y así $S_B(\overrightarrow{pb}, \alpha) = (\check{\overrightarrow{pb}}, \alpha) = S_C(\overrightarrow{pb}, \alpha) \implies S_B = S_C$ Por axioma *III.4*. Esto dice que $B = C$, pues B y C son los conjuntos de puntos fijos de S_B y S_C.

1.10 Teorema 32

1.10.1 Enunciado

Todo ángulo tiene una y solo una bisectriz

1.10.2 Demostración

Sea o el vértice del ángulo $\angle AB$

- **Existencia:** Sea T la transformación rígida tal que $T(A, A_B) = (B, B_A)$, si $B' := T(B)$ entonces $T(\angle AB) = \angle BB'$ por lo tanto $\angle AB = \angle BB'$. Como $B' \subseteq B_A$ y $A \subseteq B_A$ por el teorema 18 resulta $B' = A$. Sean $a \in A$, $a \neq o$, $a' := T(a) \in B$ y $a'' := T(a') \in A$.

  $T(\overline{oa}) = \overline{oa'}$ y $T(\overline{oa'}) = T(\overline{oa''})$, luego $\overline{oa} \equiv \overline{oa'} \equiv \overline{oa''}$ por teorema 18 $\overline{oa} = \overline{oa''}$. Por lo tanto, $a = T(a') = a''$. Entonces $T(\overline{aa'}) = \overline{a'a}$, esto nos dice $T(m) = m$ donde m es el punto medio de $\overline{a'a}$. Dado que m es punto interior al $\angle AB$ resulta $R = \overrightarrow{om}$ semirrecta interior al $\angle AB$ y $T(\angle AR) = \angle BR$ por lo cual son congruentes. Además como $T(R, R_A) = (R, R_B) = (R, \check{R}_A)$ resulta $T = S_R$

- **Unicidad:** Sea R' una semirrecta interior al $\angle AB$ tal que $\angle AR' \equiv \angle BR'$. Por teorema 31 se tiene $S_{R'}(A) = B$ y $S_{R'}(A_B) = (S_{R'}(A))_{S_R(B)} = B_A$. Entonces $S_{R'} = T = S_R$ lo que implica $\overleftrightarrow{R} = \overleftrightarrow{R'}$.

  Por ser los conjuntos de puntos fijos de S_R y $S_{R'}$, como o es el origen de R y R', tenemos $R' = R$ ó $R' = \check{R}$, pero como ambos son semirrectas interiores debe ser $R' = R$

1.11 Teorema 34

1.11.1 Enunciado

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes los lados opuestos a tales ángulos tambíen lo son. Recíprocamente, si dos lados de un triángulo son congruentes los ángulos opuestos a tales lados son congruentes.

1.11.2 Demostración

1. Consideremos primero el $\triangle abc$ tal que $\angle bac \equiv \angle abc$. Sea $M = M_{\overline{ab}}$ la mediatriz del $\overline{ab}$ entonces $S_M(a) = b$, $S_M(b) = a$ y así $S_M(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ba}$. Sea

$$c' = S_M(c) \therefore S_M(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{bc'}$$
$$S_M(\angle bac) = \angle abc' \therefore \angle bac \equiv abc'$$

Luego $\angle abc \equiv abc'$. Además $\overrightarrow{bc}$ y $\overrightarrow{bc'}$ se encuentran en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{ab}$ pues $M \perp \overleftrightarrow{ab}$ y $S_M(\overleftrightarrow{ab}_c) = \overleftrightarrow{ab}_c$. Por teorema 18, resulta $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bc'}$, o sea, $S_M(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{bc}$. Como S_M es involutiva, $S_M(\overrightarrow{bc}) = \overrightarrow{ac}$, ahora:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ac} \cap \overrightarrow{bc} &= c \\ S_M(\overrightarrow{ac}) \cap S_M(\overrightarrow{bc}) &= S_M(c) \\ \overrightarrow{bc} \cap \overrightarrow{ac} &= S_M(c) \quad \therefore S_M(c) = c \end{aligned}$$

$\therefore S_M(\overline{ac}) = \overline{bc}$ con lo cual $\overline{ac} \equiv \overline{bc}$

2. Consideramos $\triangle abc$ tal que $\overline{ac} \equiv \overline{bc}$. Sea B la bisectriz del $\angle acb$ entonces $S_B(\overrightarrow{ca}) = \overrightarrow{cb}$. Sea $a' := S_B(a) \in \overrightarrow{cb}$ y $S_B(\overline{ca}) = \overline{ca'}$ entonces $\overline{ca} \equiv \overline{ca'}$. Por hipótesis $\overline{bc} \equiv \overline{ca} \implies \overline{bc} \equiv \overline{ca'}$ y por teorema 18 vale que $b = a' = S_B(a)$ y $S_B(b) = a$. Finalmente $S_B(\angle cab) = \angle cba \implies \angle cab \equiv \angle cba$

1.12 Teorema 36

1.12.1 Enunciado

Una recta interseca a una circunferencia en a lo sumo dos puntos.

1.12.2 Demostración

Supongamos que p, q y r son tres puntos alineados pertenecientes a una circunferencia de centro o, con $q \in \overline{pr}$.Como $\overline{op} \equiv \overline{oq}$, pues p y q están en la circunferencia entonces $o \in M_{\overline{pq}}$ por corolario 35. Como $\overline{oq} \equiv \overline{or}$ entonces $o \in M_{\overline{qr}}$.

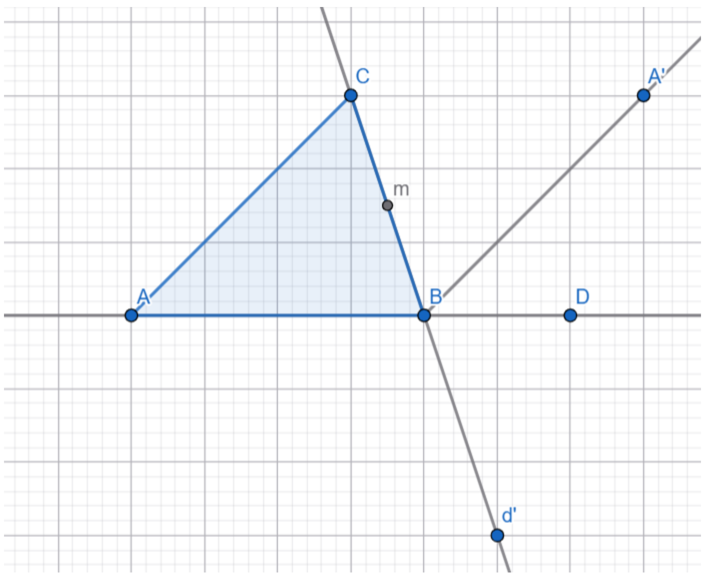
Sean m_1, m_2 puntos medios de $\overline{pq}$ y $\overline{qr}$ respectivamente, entonces los puntos medios de $\overline{pq}$ y $\overline{qr}$ están en las semirrectas opeustas de $\overleftrightarrow{pr}$ con respecto a q. Luego $m_1 \neq m_2$, como $m_1 \in M_{\overline{pq}}$ y $m_2 \in M_{\overline{qr}}$, resulta $M_{\overline{pq}} \neq M_{\overline{qr}}$ y ambas son perpendiculares a $\overleftrightarrow{pr}$ por o lo que contradice la unicidad de las rectas perpendiculares que pasan por un punto.

1.13 Teorema 39

1.13.1 Enunciado

En todo triángulo un ángulo exterior es mayor que cada ángulo interior no adyacente.

1.13.2 Demostración



Sea $d \in \overrightarrow{ba}$. Probemos que $\angle cbd > \angle acb$. Sean m el punto medio de $\overline{bc}$ y $a' = S_m(a)$. $S_m(\angle acb) = \angle a'bc$ $\therefore$ $\angle acb \equiv \angle a'bc$. Veamos que a' es interior al $\angle cbd$:

- $m \in \overline{aa'} \implies m$ y a' están en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{ab}$

- $m \in \overline{bc'} \implies m$ y c están en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{ab}$

Entonces a' y c están en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{ab} \therefore a' \in \overleftrightarrow{ab}_c$. Ahora, a y a' están en distintos semiplanos respecto de $\overleftrightarrow{bc} \therefore a' \in \left(\overleftrightarrow{bc}_a\right)$. Luego $a' \in \overleftrightarrow{ab}_c \cap \left(\overleftarrow{bc}_a\right) = sec(\angle cbd)$. Claramente, $a' \notin \angle cbd \therefore a'$ es interior al $\angle cbd$.

$$S_m(\angle acb) = \angle a'bc \therefore \angle acb \equiv \angle a'bc$$

Como $\overrightarrow{ba'}$ es interior al $\angle cbd$ tenemos que $\angle cbd > \angle acb$. Falta ver $\angle cbd > \angle cab$

Sea $d' \in \overrightarrow{bc}$. Por ser opuestos por el vértice, tenemos $\angle cbd \equiv \angle abd'$. Por lo recién probado, vale: $\angle abd' > \angle cab \therefore \angle cbd > \angle cab$

1.14 Teorema 41

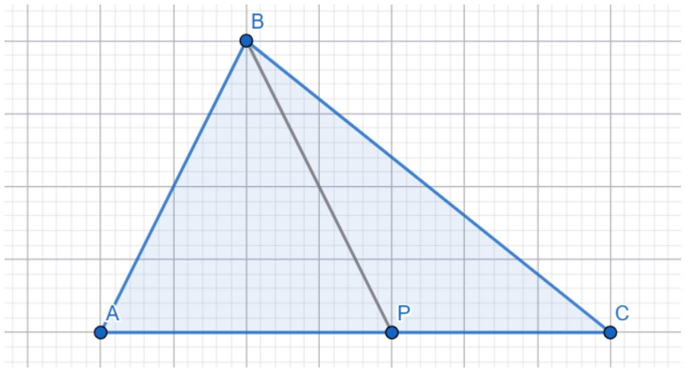
1.14.1 Enunciado

En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente a mayor ángulo se opone mayor lado.

1.14.2 Demostración

1. Supongamos $\overline{ac} > \overline{ab}$, queremos probar que $\angle abc > \angle acb$.

$$\overline{ac} > \overline{ab} \implies \exists p \in \overline{ac} \text{ tal que } \overline{ap} \equiv \overline{ab} \therefore \triangle abp \text{ es isósceles. Luego,}$$
$$\angle abc > \angle abp \text{ (por definición), } \angle abp \equiv \angle apb \text{ (teorema 34) y } \angle apb > \angle acb \text{ (Teorema 39). De allí resulta}$$
$$\angle abc > \angle acb.$$



2. Supongamos ahora $\angle abc > \angle acb$, queremos ver $\overline{ac} > \overline{ab}$. Comparando $\overline{ac}$ con $\overline{ab}$, hay 3 posibilidades:
   - $\overline{ab} < \overline{ac}$
   - $\overline{ab} \equiv \overline{ac} \implies \angle acb \equiv \angle abc$ (Teorema 34). Absurdo.
   - $\overline{ab} > \overline{ac} \implies \angle acb > \angle abc$, absurdo.

   Luego debe ser $\overline{ab} < \overline{ac}$

1.15 Teorema 44

1.15.1 Enunciado

En todo triángulo cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos.

1.15.2 Demostración