Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Teórico Final de Geomtría I

Febrero 2026

1 Listado teórico:

1.1 Teorema 4

1.1.1 Enunciado

Sean A una recta, $a \in A$ y $p \notin A$. Entonces $\overrightarrow{ap} \subset A_p$.

1.1.2 Demostración

Consideramos en $\overleftrightarrow{ap}$ el orden $<$ tal que $a < p$, quiero ir por el absurdo, supongo $\overrightarrow{ap} \nsubseteq A$, es decir, **existe** $q \in \overrightarrow{ap}$ **tal que** $q \notin A_p$.
Pero como $A \subset A_p$ entonces $q \in \check{A}_p$, más precisamente $q \in \check{A}_p - A$.
Por *II.3* sabemos que $\overline{pq} \cap A \neq \varnothing$, pero a, p, q están alineados, entonces $\overline{pq} \subseteq \overleftrightarrow{ap}$.

- $\varnothing \neq \overline{pq} \cap A \subseteq \overleftrightarrow{ap} \cap A = \{a\}$ entonces $\overline{pq} \cap A = \{a\}$
- $\implies q < a < p$ por definición de segmento,
- pero $q \in \overrightarrow{ap} \implies a < q$ lo cual resulta **absurdo**

$\therefore \overrightarrow{ap} \subseteq A_p$

1.2 Corolario 5

1.2.1 Enunciado

Los semiplanos cerrados son convexos.

1.2.2 Demostración

Dado un semiplano A_p y sean $r, s \in A_p$ entonces hay 3 casos posibles:

1. Si $r, s \in A_p - A$. Entonces por *II.3* tenemos $\overline{rs} \subseteq A_p - A \subseteq A_p$
2. Si $r, s \in A$. Entonces por ser A una recta, $\overline{rs} \subseteq A \subseteq A_p$
3. Si $r \in A_p - A$ y $s \in A$. Entonces $\overline{sr} \subseteq \overrightarrow{sr} \subseteq A_p$ por teorema 4

En todos los casos llegamos a $\overline{rs} \subseteq A_p$
$\therefore A_p$ es convexo.

1.3 Teorema 7

1.3.1 Enunciado

Sea $\angle AB$ un ángulo con $a \in A$ y $b \in B$. Si R es una semirrecta interior al ángulo, entonces R interseca a $\overline{ab}$ en un único punto.

1.3.2 Demostración

Sea o el vértice de $\angle AB$. Si $a = o$ ó $b = o$, el resultado es claro.
Consideremos ahora el caso $a, b \neq o$. Quiero ver que a y b están en semiplanos opuestos respecto a $\overleftrightarrow{R}$. Entonces sea $a' \in \check{A}$ con $a \neq o$, sabemos que $b \in A_B$ entonces por teorema 4 $\overrightarrow{a'b} \subseteq A_B$ y como $R \subseteq A_B$ y $R \subseteq B_A$, vale que:

1. $\overrightarrow{a'b} \cap \check{R} = \varnothing$, análogamente $a' \in B_{\check{A}}$ entonces por teorema 4, $\overrightarrow{a'b} \subseteq B_{\check{A}}$
2. $\overrightarrow{ba'} \cap R = \varnothing$

Entonces

$$\begin{aligned} \overline{a'b} \cap \overleftrightarrow{R} &= \overline{a'b} \cap (R \cup \check{R}) \\ &= (\overline{a'b} \cap R) \cup (\overline{a'b} \cap \check{R}) \\ &= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \end{aligned}$$

Deducimos del *II.3* que a' y b están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{R}$. Como $a \in A$ y $a' \in \check{A}$ resulta que a y a' están en semiplanos opuestos respecto de $\overleftrightarrow{R}$
$\therefore$ a y b están en semiplanos opuestos respecto a $\overleftrightarrow{R}$

Por el *II.3* se deduce que $\overline{ab} \cap R \neq \varnothing$ y además $a, b \in sec(\angle AB)$ que es convexo, entonces $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$, luego la intersección $\overline{ab} \cap \overleftrightarrow{R}$ debe estar en R pues los puntos de $\check{R}$ son exteriores a $\angle AB$, por lo tanto $\overline{ab} \cap R \neq \varnothing$.

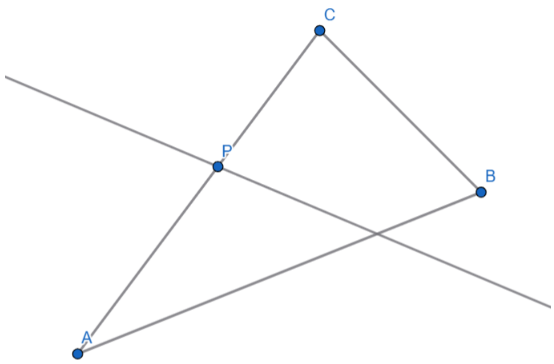
Y si hubieran dos puntos de corte de R y $\overline{ab}$, llamémoslos p y q, entonces $\overline{ab} \subseteq \overleftrightarrow{pq} = \overleftrightarrow{R}$. Pero $\overline{ab} \subseteq sec(\angle AB)$.
$\therefore \overline{ab} \subseteq R \implies a, b$ son puntos interiores al $\angle AB$, **absurdo** por lo cual el punto es único.

1.4 Teorema 10: Postulado de Pasch

1.4.1 Enunciado

Si R es una recta que interseca al $\triangle abc$ y no pasa por sus vértices, entonces R interseca a $\triangle abc$ en exactamente dos puntos.

1.4.2 Demostración



Supongamos que R corta a $\overline{ac}$ en p con $p \neq a$ y $p \neq c$. R corta a $\overline{ac}$ únicamente en p pues si la intersección tuviera más de un elemento resultaría en $\overleftrightarrow{R} = \overleftarrow{ac}$ lo cual es **absurdo**. Entonces a y c están en semiplanos opuestos respecto a R, es decir, $c \in \check{R}_a$. Ahora tenemos que $b \in R_a$ ó $b \in \check{R}_a$ (y $b \notin R$), entonces:

- Si $b \in R_a$, entonces $a, b \in R_a - R$ y por $R_a - R$ convexo resulta $\overline{ab} \cap R = \varnothing$. Además, $c \in \check{R}_a$ y $b \in R_a$ y resulta por *II.3* $\overline{bc} \cap R = \{q\}$ con $q \neq p$ y luego R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q.
- Si $b \in \check{R}_a$, entonces análogamente se ve que R corta al $\triangle abc$ en $\overline{ac}$ y $\overline{ab}$ en dos puntos y no corta al $\overline{bc}$.

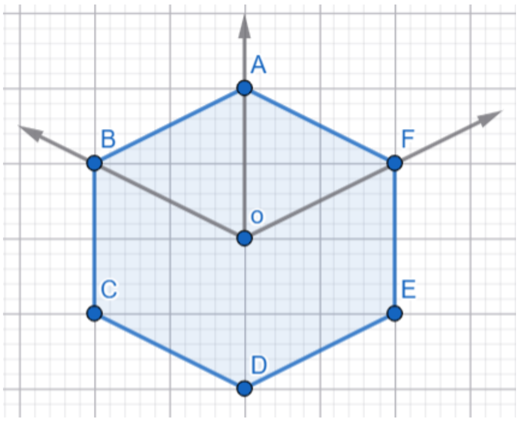
$\therefore$ R corta al $\triangle abc$ sólo en p y q con $q \in \overline{ab}$.

1.5 Teorema 11

1.5.1 Enunciado

Toda semirrecta con origen en un punto interior de una región poligonal convexa, interseca al polígomo en un único punto.

1.5.2 Demostración



Sea o un punto interior al polígono $a_1, \ldots, a_n$. Entonces o es interior a todos los ángulos $\angle a_i$ del polígono. En particular, $\overrightarrow{a_2 o}$ es semirrecta interios al $\angle a_1 a_2 a_3$, y entonces $\overline{a_1 a_2}$ y $\overline{a_2 a_3}$ se encuentran en semiplanos distintos repecto de $\overleftrightarrow{oa_2}$, por el teorema 7. Luego, $\angle a_1 o a_2$ y $\angle a_2 o a_3$ son consecutivos. Análogamente, se tiene que $\angle a_{i-1} o a_i$ y $a_i o a_{i+1}$ son ángulos consecutivos para $i = 1, \ldots, n$ (con $a_0 = a_n$ y $a_{n+1} = a_1$). Por lo tanto, si $A_i = \overrightarrow{oa_i}$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces las semirrectas A_i satisfacen las hipótesis del teorema 9.
$\therefore \Pi = \bigcup_{i=1}^{n} sec\left(\angle A_i A_{i+1}\right)$

Sea ahora $p \in \Pi$, $p \neq o$, si $\overrightarrow{op} = A_i$ para algún i, entonces $\overrightarrow{op}$ interseca al polígono únicamente en a_i. Si $\overrightarrow{op} \neq A_i, \forall i$, sabemos que $p \in \bigcup_{i=1}^{n} sec(\angle A_i A_{i+1})$ por el teorema 9, por lo tanto existe i_o tal que $p \in sec(\angle A_{i_o} A_{i_o+1})$. Más aún, p es interior al $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$ pues no está en sus lados. Luego $\overrightarrow{op}$ es una semirrecta interior al $\angle A_{i_o} A_{i_o+1}$. Por el teorema 7, el segmento $\overline{a_i a_{i+1}}$ interseca a $\overrightarrow{op}$, por lo que $\overrightarrow{op}$ corta al polígono.

Unicidad: Si $\overrightarrow{op}$ cortara al polígono en q y $q'(q \neq q')$, consideramos las posiciones de o, q y q' en la semirrecta $\overrightarrow{op}$. Puede ser $o < q < q'$ o bien $o < q' < q$.

- En el primer caso, supongamos $q \in \overline{a_i a_{i+1}}$. Entonces o y q' estarían en semiplanos distintos respecto de $\overleftrightarrow{a_i a_{i+1}}$, lo cual es absurdo pues o y q' están en la región poligonal.
- Es análogo

Luego, $\overrightarrow{op}$ corta al polígono en un único punto.

1.6 Teorema 16

1.6.1 Enunciado

Sean R una recta, $p \notin R$ y T una transformación rígida. Entonces $T(R_p) = T(R)_{T(p)}$

1.6.2 Demostración

Definimos $R' = T(R)$ y $p' = T(p)$. Claramente $R' \subset R'_{p'}$ y $p' \in R'p'$. Sea ahora $q \in R_p - R$, con $q \neq p$. Luego $\overline{pq} \cap R = \varnothing$ y aplicando T tenemos: $\overline{p'q'} \cap R' = \varnothing$ donde $q' = T(q)$ por corolario 15. De esto se deduce que $q' \in R'_{p'}$, por lo que vale $T\left(R_p\right) \subseteq R'_{p'}$.
Por axioma *III.2*, sabemos que T^{-1} es una transformación rígida y podemos considerar lo probado recién pero para esta transformación y obtenemos: $T^{-1}\left(R'_{p'}\right) \subseteq R_p$. Aplicando T: $R'_{p'} \subseteq T\left(R_p\right)$. Resulta entonces $T\left(R_p\right) = R'_{p'}$.

1.7 Teorema 20

1.7.1 Enunciado

Sea (A, α) un par semirrecta-semiplano, A de origen o y T la transformación rígida tal que $T(A, \alpha) = \left(\breve{A}, \breve{\alpha}\right)$. Entonces:

1. T es involutiva.
2. Si (B, β) es otro par de semirrecta-semiplano tal que B tiene origen en o, entonces $T\left(B, \beta\right) = \left(\breve{B}, \breve{\beta}\right)$.

1.7.2 Demostración

1. **T involutiva:** $T^2(A,\alpha) = T(T(A,\alpha)) = T(\breve{A},\breve{\alpha}) = (\breve{T(A)},\breve{T(\alpha)}) = (\breve{\breve{A}},\breve{\breve{\alpha}}) = (A,\alpha)$ y por unicidad del axioma *III.4* resulta $T^2 = Id$

2. Tiene dos casos posibles:

   (a) Si $B = A$ ó $B = \breve{A}$ entonces:

   $$\begin{cases} T(A,\alpha) = (\breve{A},\breve{\alpha}) \\ T(\breve{A},\breve{\alpha}) = (A,\alpha) \\ T(A,\breve{\alpha}) = (\breve{A},\alpha) \\ T(\breve{A},\alpha) = (A,\breve{\alpha}) \end{cases} \text{por lo que la afirmación vale}$$

   (b) Si $B \neq A$ ó $B \neq \breve{A}$ entonces $B \subseteq \alpha$ ó $B \subseteq \breve{\alpha}$, consideramos ambos casos análogos entonces trabajamos con $B \subseteq \alpha$

   Sea $p \in B$ y $p \neq o$ entonces $B = \overrightarrow{op}$ y sea $p' := T(p) \in \breve{\alpha}$, por el axioma *II.3* $\overline{pp'}$ corta a la recta $\overleftrightarrow{A}$ en un único punto a, lo cual puede estar en A ó $\breve{A}$, como son casos análogos, consideramos el primero:

   Si $a \in A$ entonces $\overline{pp'} \cap A = \{a\}$. Aplicamos T a ambos lados y desarrollamos:

   $$T(a) = T(\overline{pp'}) \cap T(A) = \overline{p'p} \cap \breve{A}$$

   Como sabemos que $\overline{pp}$'corta a A en un único punto entonces $T(a) = a$ lo cual implica que $a = o$ pues es el único punto fijo y $o \in \overline{pp'}$ lo que implica que $p' \in \breve{B}$, entonces $T(B) = T(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{op'} = \breve{B}$.

   Sea ahora $q \in \beta$ tal que $q \notin \overleftrightarrow{B}$ por lo probado anteriormente se tiene que $T(\overrightarrow{oq}) = \overrightarrow{oq} \therefore \check{T}(q) \in \breve{\beta}$ y así $T(\beta) = T(B_q) = \breve{\beta}$

1.8 Teorema 25

1.8.1 Enunciado

Sea (A,α) un par semirrecta-semiplano, A de origen o y sea T la única transformación rígida tal que $T(A,\alpha) = (A,\breve{\alpha})$. Entonces:

1. T es involutiva.

2. $T(p) = p$ para todo p en la recta $\overleftrightarrow{A}$

3. Si B es una semirrecta de la recta $\overleftrightarrow{A}$ entonces $T(B,\alpha) = (B,\breve{\alpha})$.

1.8.2 Demostración

1. $T^2(A,\alpha) = T(T(A,\alpha)) = T(A,\breve{\alpha}) = (T(A),\breve{T(\alpha)}) = (A,\breve{\breve{\alpha}}) = (A,\alpha)$. Por unicidad de *III.4* tenemos $T^2 = Id$.

2. Como $T(A) = A$ y A tiene origen en o entonces $T(o) = o$ y sea $p' := T(p) \in A$ por $T(A) = A$ y $T(\overline{op}) = \overline{op'}$ entonces por congruencia $\overline{op} \equiv \overline{op'}$ por lo tanto un segmento contiene a otro pero por *III.3* resulta $\overline{op} = \overline{op'}$ por lo que $p = p'$, es decir, $p = T(p)$

3. Por ser p un punto arbitrario de A entonces la semirrecta B cumple por **(b)** que $T(B) = B$ además por la propia definición de T resulta $T(\alpha) = \breve{\alpha} \therefore T(B,\alpha) = (B,\breve{\alpha})$.

1.9 Teorema 28

1.9.1 Enunciado

Por cada punto del plano pasa una y solo una perperndicular a una recta dada. Es decir, dados $p \in \Pi$ y una recta A, existe una única recta B tal que $B \perp A$ y $p \in B$.

1.9.2 Demostración

Consideramos dos casos:

1. $p \in A$

   - **Existencia:** Sea $p' := S_A(p)$ que es distinto de p y sea $B = \overleftrightarrow{pp'}$ entonces $p \in B$ y $B \perp A$ por el Teorema 26.
   - **Unicidad:** Supongamos que C es una recta tal que $p \in C$ y $C \perp A$. Por el teorema 27 C es invariante por S_A y como $p \in C$ luego $p' := S_A(p) \in C$ entonces $C = \overleftrightarrow{pp'}$ pero esa es $B \therefore B = C$

2. $p \notin A$

   - **Existencia:** Sea $q \notin A$ y $q' = S_A(q)$ entonces por el teorema 26 $\overleftrightarrow{qq'} \perp A$. Si $\overleftrightarrow{qq'} \cap A = \{p\}$ tomamos $B = \overleftrightarrow{qq'}$, en cambio si $\overleftrightarrow{qq'} \cap A = \{o\}$, con $o \neq p$, sea m el punto medio de $\overline{op}$ y consideramos $B = S_m(\overleftrightarrow{qq'})$. Sea $q'' = S_m(q) \implies S_m(\angle qop) = \angle q''po \therefore \angle qop \equiv \angle q''po$. Como $\angle qop$ es recto, resulta que $\angle q''po$ es recto y esto dice que $B \perp A$ y $p \in B$
   - **Unicidad:** Supongamos que B y C son rectos tales que $B \perp A$ y $C \perp A$ y $p \in B \cap C$.

     Sea $b \in A$ con $b \neq p$ entonces $\overrightarrow{pb}$ es una semirrecta de A y $S_B(\overrightarrow{pb}) = \check{\overrightarrow{pb}} = S_C(\overrightarrow{pb})$ pues A es invariante por S_B y S_C ya que es perpendicular a ambos.

     Sea α un semiplano determinado por A y consideremos $q \in \alpha \cap B$, $r \in \alpha \cap C$, con $q, r \notin A$. Luego, $S_B(q) = q$ y $S_C(r) = r$ entonces $S_B(\alpha) = S_C(\alpha) = \alpha$ y así $S_B(\overrightarrow{pb}, \alpha) = (\check{\overrightarrow{pb}}, \alpha) = S_C(\overrightarrow{pb}, \alpha) \implies S_B = S_C$ Por axioma *III.4*. Esto dice que $B = C$, pues B y C son los conjuntos de puntos dijos de S_B y S_C.

1.10 Teorema 32

1.10.1 Enunciado

Todo ángulo tiene una y solo una bisectriz

1.10.2 Demostración

Sea o el vértice del ángulo $\angle AB$

- **Existencia:** Sea T la transformación rígida tal que $T(A, A_B) = (B, B_A)$, si $B' := T(B)$ entonces $T(\angle AB) = \angle BB'$ por lo tanto $\angle AB = \angle BB'$. Como $B' \subseteq B_A$ y $A \subseteq B_A$ por el teorema 18 resulta $B' = A$. Sean $a \in A$, $a \neq o$, $a' := T(a) \in B$ y $a'' := T(a') \in B$