Teorico Final 2025

Mai Valdez

July 31, 2025

1 Introducción

Los teoremas y demostraciones solicitados para el final de Analisis Numerico I - 2025

2 Teórico

2.1 Teorema: Metodo de Bisección

2.1.1 Enunciado:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funcion continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Si $[a_0, b_0]$, $\dots$, $[a_n, b_n]$, $\dots$ denotan los sucesivos intervalos en el método de bisección, entonces existen los límites: $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$, son iguales y representan una raiz de f. Si $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ y $r = \lim_{n\to\infty} c_n$ entonces $|r - c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0)$

2.1.2 Demostración:

Si son los intervalos generados por el metodo de bisección, entonces:

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq b_0$$
$$b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq a_0$$

Luego $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ es convergente y análogamente $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente, por lo tantp también es convergente. Además,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), \quad n \geq 1$$

Aplicando repetidamente se obtiene:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

Ahora trabajo con límites y resulta

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = 0$$

Sea $r = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, por lo tanto, tomando límite en la desigualdad $f(a_n)f(b_n) < 0$, se obtiene $f(r^2) \leq 0$. De allí que $f(r^2) = 0$ y en consecuencia $f(r) = 0$, es decir, r es la raíz de f. Finalmente, sea $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, luego

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0)$$

2.2 Teorema: Método de Newton

2.2.1 Enunciado:

Si f'' es continua en un entorno de una raíz r de f y $f'(r) \neq 0$ entonces $\exists \delta > 0$ tal que si el punto incicial x_0 satisface $|r - x_0| \leq \delta$, luego, todos los puntos generados por el algoritmno de Newton($x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$) en la sucesion $\{x_n\}$ satisfacen que $|r - x_n| \leq \delta \quad \forall n$, la sucesion $\{x_n\}$ converge a r y la convergencia es cuadrática, es decir que existen una constante c y un natural N tal que $c = c(\delta)$ y $|r - x_{n+1}| \leq c|r - x_n|^2$ para $n \geq N$

2.3 Teorema: Método de iteración de punto fijo

2.3.1 Enunciado:

Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$. Supongamos existen $g'(x), \forall x \in (a, b)$ y una constante positiva k, $(0 < k < 1)$ tal que $|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a, b)$, entonces para cualquier $p_0 \in [a, b]$ la sucesion definida por $p_n = g(p_{n-1})$ para $n \geq 1$ converge al único punto fijo en (a, b)

2.3.2 Demostración:

Sabemos existe un unico punto fijo $p \in [a, b]$. Cómo $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$ la sucesión de aproximaciones $\{p_n\}$ está bien definida $\forall n$, es decir, $p_n \in [a, b] \forall n$. Para probar la convergencia se usa el teorema del valor medio en lo siguiente:

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$$

Luego por recurrencia, se tiene que:

$$|p_n - p| \le k|p_{n-1} - p| \le k^2|p_{n-2} - p| \le \cdots \le k^n|p_0 - p|$$

Como $0 < k < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \le \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = |p_0 - p| \lim_{n\to\infty} k^n = 0$$

Por lo tanto, la sucesión $\{p_n\}$ converge al punto fijo p.

2.4 Corolario: Cotas del error en el método de pto. fijo

2.4.1 Enunciado:

Si g es una función que satisface las condiciones del teorema anterior se tienen las siguientes cotas del error:

$$|p_n - p| \le k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$
$$|p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$$

2.4.2 Demostración:

Para la primera desigualdad: Se demostró en el teorema anterior que $|p_n - p| \le k^n|p_0 - p|$ y además como $p \in [a,b]$ y $p_0 \in [a,b]$ entonces $|p_0 - p| \le \max\{p_0 - a, b - p_0\}$, por lo tanto:

$$|p_n - p| \le k^n|p_0 - p| \le k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

Para la segunda desigualdad: Para $n \ge 1$, el procedimiento de iteración muestra que:

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \le k|p_n - p_{n-1}| \le \cdots \le k^n|p_1 - p_0|$$

$m > n \ge 1$

$$\begin{aligned}
|p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \cdots + p_{n+1} - p_n| \\
&\le |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\
&\le k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^n|p_1 - p_0| \\
&= k^n|p_1 - p_0|(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1})
\end{aligned}$$

Ahora cuando $\lim_{m\to\infty} p_m = p$, por lo que

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \leq \lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

Pero $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ es una serie geometrica con radio k y $0 < k < 1$. Esta sucesión converge a $\frac{1}{1-k}$, lo que nos da la segunda cota:

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

2.5 Teorema: Unicidad del polinomio interpolante

2.5.1 Enunciado:

Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos con valores asociados $y_0, y_1, \ldots, y_n$ entonces existe un único polinomio p_n de grado menor o igual a n tal que $p_n(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

2.5.2 Demostración:

Supongamos que existen dos polinomios interpolantes p_n y q_n de grado menor o igual a n , esto es, $p_n(x_i) = y_i$ y $q_n(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.
Sea $h = p_n - q_n$. Claramente h es un polinomio de grado $\leq n$. Además $h(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Por lo tanto, h es un polinomio de grado $\leq n$ y tiene $n + 1$ raíces distintas reales. Luego, por el teorema fundamental del álgebra, $h(x) = 0$ para todo x y por lo tanto, $p_n(x) = q_n(x)$

2.6 Formas de Newton del polinomio interpolante

2.6.1 Enunciado:

La forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta en:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Aquí se adopra la convención de que $\prod_{j=0}^{m} (x - x_j) = 1$ si $m < 0$

2.7 Formas de Lagrange del polinomio interpolante

2.7.1 Enunciado:

La forma de Lagrange del polinomio interpolante resulta en:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

Con $l_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, es decir, $l_i(x)$ es 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario.

2.8 Teorema: Fórmula del error del polinomio interpolante

2.8.1 Enunciado:

Sea f una funcion en $C^{n+1}[a,b]$ y p un polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en $[a,b]$. Entonces para cada $x \in [a,b]$ existe un $\xi = \xi_x \in (a,b)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

2.9 Observación: Fórmula del error de Spline lineal para puntos equidistribuidos

2.9.1 Enunciado:

Supongamos que f es 2 veces derivable en $[a,b]$ y que $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ con $h = \frac{b-a}{n}$.
Si S es el spline lineal, en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ se tiene un polinomio de grado ≤ 1. Entonces el error de interpolación para cada $x \in [a,b]$ es:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8} h^2$$

donde $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b] = [x_0, x_n]$.

2.9.2 Demostración:

Sea S el spline lineal que interpola a f en los puntos x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Entonces, en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, el spline lineal es un polinomio de grado ≤ 1. Por lo tanto, el error de interpolación en cada intervalo se puede expresar como:

$$|f(x) - S(x)| = |\frac{(x - x_i)(x_{i+1} - 1)}{2} f''(\xi)| \leq \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Como $(x - x_i)(x_{i+1} - x)$ es un producto de dos números positivos en (x_i, x_{i+1}), y alcanza su máximo en el punto medio del intervalo, en $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ se tiene:

$$(x - x_i)(x_{i+1} - x) \leq (\frac{h}{2})^2 = \frac{h^2}{4}$$

Por lo tanto, el error de interpolación en cada intervalo es:

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{h^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

2.10 Teorema: Valor medio de integración

2.10.1 Enunciado:

Supongamos que f es continua en $[a, b]$. que g es una función integrable en $[a, b]$ y que g no cambia de signo en $[a, b]$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

En particular, si $g(x) \equiv 1$, entonces $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$, esto es, $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Como $g(x) = (x - x_0)(x - x_1) = (x - a)(x - b)$ no cambia de signo en $[a, b]$ y aplicando teorema se sabe que existe ξ independiente de x tal que:

2.10.2 Demostración:

Dado que $f \in C[a, b]$ por el teorema del valor extremo, existen mínimo ymáximo de f en el intervalo. Sea $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$, Cómo g no cambia de signo en $[a, b]$, podemos multiplicar por g y obtenemos:

$$m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Integrando en $[a, b]$ resulta: $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$. Y llamamos $G = \int_a^b g(x)dx$ e $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Si $G > 0$, entonces como $g \geq 0$ debe ser $g \equiv 0$, por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = f(c) \int_a^b g(x)dx = f(c) \cdot 0 \quad .$$

Se cumple trivialmente para todo $c \in [a,b]$. Supongamos ahora $G \neq 0$. Entonces, $m \leq \frac{I}{G} \leq M$. Como $\frac{I}{G} \in [m, M]$ y f es continua, por el teorema del calor intermedio, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{I}{G} = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Además como f es continua y $g \neq 0$ el valor de c se puede elegir del intervalo (a,b). Por lo tanto se cumple:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad \text{para algun } c \in (a,b)$$

2.11 Fórmula del error para la regla del trapecio simple

2.11.1 Enunciado:

La regla del trapecio simple para integración numérica en el intervalo $[a,b]$ está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{h}{2}(f(a)+f(b))$$

Y su correspondiente error de aproximación es:

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

2.11.2 Demostración:

Como $g(x) = (x-x_0)(x-x_1) = (x-a)(x-b)$ no cambia de signo en $[a,b]$ y aplicando el teorema anterior se sabe que existe ξ independiente de x tal que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)dx &= f''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
&= f''(\xi)\int_a^b (x^2-(a+b)x+ab)dx \\
&= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + abx\right]_a^b
\end{aligned}$$

Luego, evaluando en a y b:

$$\begin{aligned}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + abx\right]_a^b &= \frac{b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} - \frac{b^3}{2} + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} + \frac{a^2b}{2} - a^2b \\ &= \frac{1}{6}(2b^3 - 3ab^2 - 3b^3 + 6ab^2 - 2a^3 + 3a^3 + 3a^2b - 6a^2b) \\ &= \frac{1}{6}(-b^3 + 3ab^2 + a^3 - 3a^2b) \\ &= \frac{(a-b)^3}{6} = -\frac{(b-a)^3}{6} = -\frac{h^3}{6}\end{aligned}$$

Por lo tanto si el correspondiente error es $e_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$, y los cálculos anteriores:

$$\begin{aligned}E_T = E_1(x) &= \int_a^b e_1(x)dx = \frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)dx \\ &= \frac{1}{2!}f''(\xi)\left(-\frac{h^3}{6}\right) \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)\end{aligned}$$

Para algun $\xi \in (a,b)$.

2.12 Fórmula del error para la regla del trapecio compuesta para nodos equidistribuidos

2.12.1 Enunciado:

Sean $f \in C^2[a,b]$, n un entero positivo, $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_j = a + jh$ para $j = 0, 1, \ldots, n$. Entonces existe $\mu \in (a,b)$ tal que la regla compuesta del trapecio para n subintervalos está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right) - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

2.12.2 Demostración:

Se comienza particionando el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos y luego se aplica la regla simple del trapecio en cada subintervalo:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{h}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j)) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_j) \right)\end{aligned}$$

Para algun $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, con $j = 1, 2, \ldots, n$ y $f \in C^2[a,b]$. Si observamos los valores $f(x_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$, aparecen dos veces en la última expresion, por lo tanto puedo reescribirlo:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right) - \frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$$

Para algun $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, con $j = 1, 2, \ldots, n$. Ahora, consideramos el término del error:

$$E(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$$

Para algun $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$, con $j = 1, 2, \ldots, n$. Como f'' es continua en $[a,b]$, entonces por el Teorema de valores extremos para funciones continuas, se tiene que para $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\min_{x\in[a,b]} f''(x) \leq f''(\xi_j) &\leq \max_{x\in[a,b]} f''(x) \\ n \min_{x\in[a,b]} f''(x) \leq \sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) &\leq n \max_{x\in[a,b]} f''(x) \\ \min_{x\in[a,b]} f''(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) &\leq \max_{x\in[a,b]} f''(x)\end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $\mu \in (a,b)$ tal que:

$$f''(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j),$$

Y por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) = nf''(\mu)$$

Usando que $h = \frac{b-a}{n}$, podemos reescribir el error independientemente de ξ_j como:

$$E(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) = -\frac{h^3}{12}nf''(\mu) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

2.13 Teorema: de cuadratura gaussiana

2.13.1 Enunciado:

Sea w una funcion de peso positiva definida en $[a,b]$ y q un polinomio no nulo de grado exactamente $n+1$ que es ortogonal a todo polinomio p de grado $\leq n$, es decir $\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0$. Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son las raices de q, entonces la formula
$\int_a^b f(x)w(x)dx$
$thickapprox \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \quad$ con $a_i = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} dx$
es exacta para todo polinomio f de grado $\leq 2n+1$.

2.14 Teorema: convergencia de métodos iterativos en sistemas lineales

2.14.1 Enunciado:

Sea $b \in \mathbb{R}^n$, $A = M - N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde M y A son matrices no singulares. Si $\| (M^{-1}N) \| < 1$ para alguna norma matricial inducida entonces la sucesión generada por $x^{(k+1)} = (M^{-1}N)x^{(k)} + M^{-1}b$ para $k \geq 0$ converge a la solucion de $Ax = b$ para cualquier vector inicial $x^{(0)}$

2.14.2 Demostración:

Restando la ecuacion anterior de $x = (M^{-1}N)x + M^{-1}b$ donde uso la solución x^*, se obtiene:

$$x^{(k+1)} - x^* = (M^{-1}N)(x^{(k)} - x^*)$$

para $k \geq 0$.Ahora, utilizando alguna norma matricial inducida:

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leq \| M^{-1}N \| \| x^{(k)} - x^* \|$$

Luego, repitiendo este último paso se tiene:

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leq \| M^{-1}N \|^{k+1} \| x^{(0)} - x^* \|$$

Usando que $\| M^{-1}N \| < 1$, se concluye que:

$$\lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x^* \| = 0$$

Para cualquier vector inicial $x^{(0)}$

2.15 Teorema: de convergencia para matrices diagonalmente dominantes para el m´etodo de Jacobi

2.15.1 Enunciado:

Si A es diagonalmente dominante, es decir, $|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ para $i = 1, \ldots, n$ y $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ para al menos un i, entonces la sucesión generada por el método de Jacobi converge a la solución $Ax = b$ para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

2.15.2 Demostración:

En el método de Jacobi, la matriz M es la diagonal de A y debe ser inversible para que el método esté bien definido , por lo que $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. La matriz de iteracion está dada por:

$$M^{-1}N = -\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\| M^{-1}N \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Pues A es diagonalmente dominante. Finalmente, la convergencia es una consecuencia directa del teorema anterior.

2.16 Teorema: Convergencia de Gauss-Seidel

2.16.1 Enunciado:

Si A es diagonalmente dominante, es decir, entonces la sucesion generada por el método de Gauss-Seidel converge a la solución de $Ax = b$ para cualquier vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

2.17 Teorema: Ínfimo de las normas matriciales inducidas

2.17.1 Enunciado:

Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple que $\rho(A) = \inf\{\parallel A \parallel\}$ sobre todas lar normas matriciales inducidas.

2.18 Teorema: la sucesión converge a una única solución

2.18.1 Enunciado:

Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión generada por el método iterativo $x^{(k+1)} = (M^{-1}N)x^{(k)} + M^{-1}b$ para $k \geq 0$ converja a la única solución de $Ax = b$ para todo vector inicial $x^{(0)}$ es que $\rho(M^{-1}N) < 1$

2.19 Teorema: fundamental de programación lineal

2.19.1 Enunciado:

Dado un problema de PL en la forma estándar, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tiene rango m. Luego:

1. si existe una solución factible, entonces existe una solución básica factible.
2. Si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución básica factible óptima.