Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Simulacro Segundo Parcial
GURI - La Bisagra, conduccion del CEIMAF

1. Sea $m(x)$ la funcion dada por:

$$m(x) = \frac{6x}{x^2 + 3x - 10}$$

   (a) Para ver donde está bien definido el dominio de la función dada se debe tener en cuenta las posibles restricciones, en este caso evitar el 0 en el denominador, por lo tanto buscamos las raíces del denominador:

$$\begin{aligned} x_{1,2} =& \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ =& \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \\ =& \{-5, 2\} \end{aligned}$$

   Por lo tanto $Dom(m(x)) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -5 \wedge x \neq 2\}$.

   (b) Para determinar la imágen que pasa por $x = \frac{2}{5}$ y $x = 4$ se debe evaluar la función en esos puntos:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{2}{5}\right) =& \frac{6 \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3 \cdot \frac{2}{5} - 10} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{25} + \frac{6}{5} - 10} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{25} + \frac{30}{25} - \frac{250}{25}} \\ =& \frac{\frac{12}{5}}{-\frac{216}{25}} = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{25}{216}\right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$m(4) = \frac{6 \cdot 4}{4^2 + 3 \cdot 4 - 10} = \frac{24}{16 + 12 - 10} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

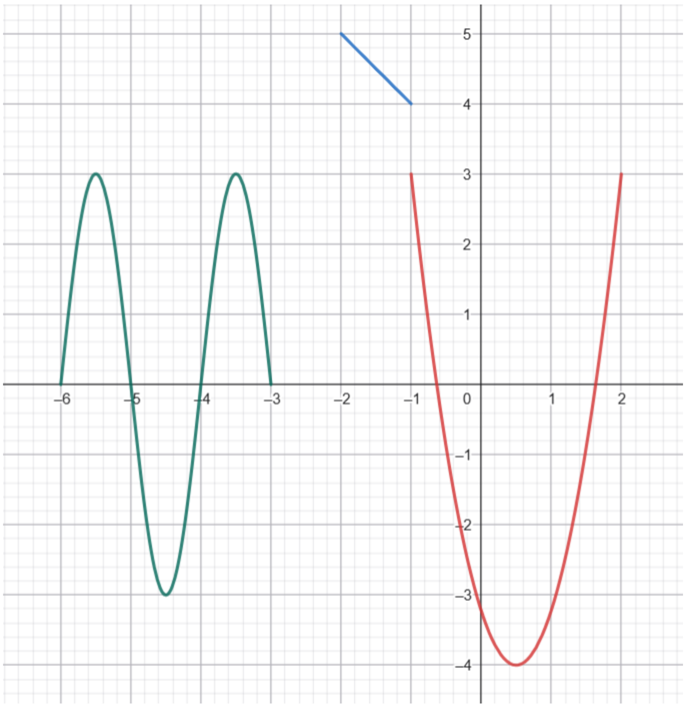
   Por lo tanto $m\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{3}$ y $m(4) = \frac{4}{3}$.

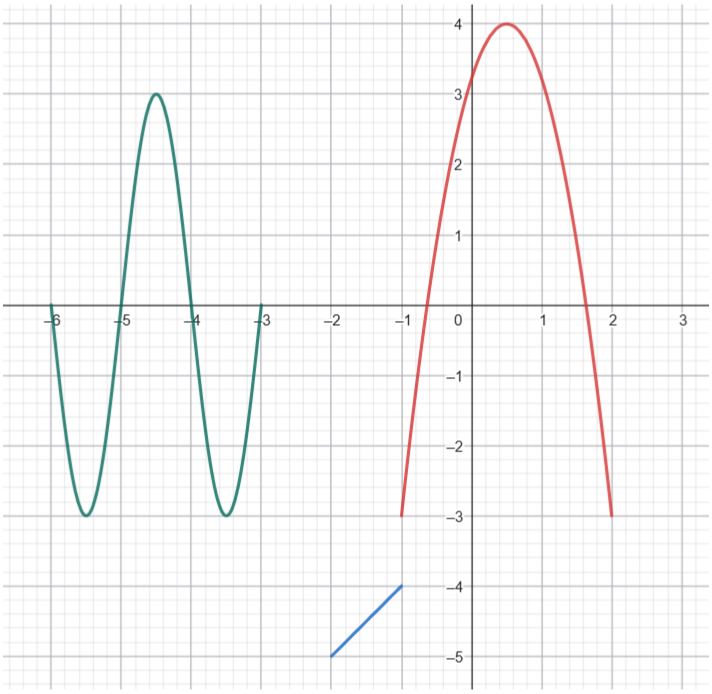
2. Considerando la función del gráfico y teniendo en cuenta sus puntos cerrados y abiertos podemos resolver los incisos:

   (a)
   - el dominio es de la forma $Dom(f(x)) = [-4, -1) \cup (0, 4]$
   - La imagen es de la forma $Im(f(x)) = [-4, 3] \cup [4, 5)$
   - Las raices son en $x = -4$, $x = -3$ y $x = -2$ en la parte donde la funcion es senoidal ya que en -1 es un punto que no pertenece al dominio, en la parte donde la función es cuadrática se pueden observar las raíces en $x = 1,2$ y $x = 3,6$.

   (b) Los valores que cumplen tal condición son los que respectan a la parte senoidal y cuadrática, entonces $x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 3 = [-4, -1) \cup (1, 4]$

   (c) Las transformaciones que se aplican para graficar $g(x) = -f(x + 2)$ son:
   - Traslación horizontal de -2 unidades, es decir, hacia la izquierda.
   - Reflexión respecto al eje x.





3. (a) Para determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-5, \frac{3}{2})$ y $B = (1, \frac{15}{2})$ se debe calcular la pendiente de la recta y luego utilizar la forma punto-pendiente para escribir su ecuación:

$$\begin{aligned} m =& \frac{\frac{15}{2} - \frac{3}{2}}{1-(-5)} = \frac{\frac{12}{2}}{6} = 1 \\ y - y_1 =& m(x - x_1) \\ y - \frac{3}{2} =& 1(x - (-5)) \\ y =& x + \frac{13}{2} \end{aligned}$$

(b) Retomamos lo que conocemos de las rectas perpendiculares, sabemos que la pendiente de la recta L es $m_L = \frac{3}{2}$ (esto es de distribuir y escribir la ecuación de forma polinómica $L : y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$), entonces la pendiente de la recta P es $m_P = -\frac{1}{m_L} = -\frac{2}{3}$, ahora utilizando la forma punto-pendiente con el punto $C = (-7, 7)$ se puede escribir la ecuación de la recta P:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 =& m(x - x_1) \\
y - 7 =& -\frac{2}{3}(x - (-7)) \\
y =& -\frac{2}{3}x - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-7) + 7 \\
y =& -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3} + 7 \\
=& -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Entonces $P : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

(c) Para calcular las coordenadas del punto de intersección entre las rectas L y P se debe igualar sus ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} =& -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\
\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x =& \frac{7}{3} - \frac{9}{2} \\
\frac{9+4}{6}x =& \frac{14-27}{6} \\
x =& \frac{-13}{6} \cdot \frac{6}{13} = -1
\end{aligned}
$$

Ahora para calcular la coordenada y se puede utilizar cualquiera de las dos rectas, por ejemplo utilizando L:

$$
y = \frac{3}{2}(-1) + \frac{9}{2} = \frac{6}{2} = 3
$$

Por lo tanto las coordenadas del punto de intersección entre las rectas L y P son $(-1, 3)$.

4. Ayuda mucho reconocer que es la forma canónica de la parábola y aprovechar los datos que proporciona dicha forma.

(a) Para calcular el valor del coeficiente k se debe utilizar el punto $Q = (3, 8)$ que pertenece a la parábola, entonces se debe evaluar la función en ese punto y despejar k:

$$
\begin{aligned}
8 =& 2\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + k \\
=& 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + k \\
=& \frac{25}{2} + k \\
k =& 8 - \frac{25}{2} = -\frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $k = -\frac{9}{2}$ y la parábola en su forma polinómica es:

$$\begin{aligned} P : y =& 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \\ =& 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{2} \\ =& 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \\ =& 2x^2 - 2x - \frac{8}{2} \\ =& 2x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P : y = 2x^2 - 2x - 4$

(b) Como pide calcular las coordenadas, conozco que el eje de las ordenadas es el eje y y lo intersecciona la parábola en su ordenada al origen, en la forma polinómica es $c = -4$, es decir, interseccionan en $(0, -4)$, y en el eje de las abscisas es el eje x y lo intersecciona la parábola en sus raíces, basta usar Baskara:

$$\begin{aligned} x_{1,2} =& \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} \\ =& \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} \\ =& \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} \\ =& \frac{2 \pm 6}{4} \end{aligned}$$

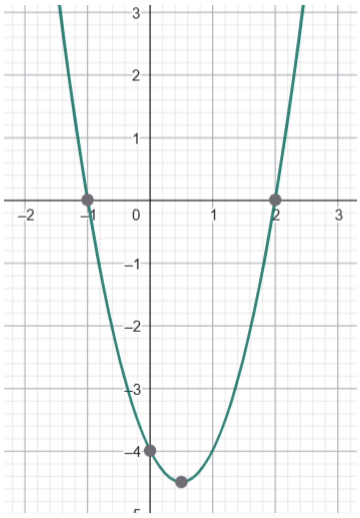
Por lo tanto $x_1 = \frac{8}{4} = 2$ y $x_2 = \frac{-4}{4} = -1$, entonces las coordenadas de los puntos de intersección con el eje de las abscisas son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

(c) Para calcular las coordenadas del vértice de la parábola, se puede usar la fórmula del vértice en la forma canónica: $x_v = -\frac{b}{2a}$, donde $a = 2$, $b = -2$, y $c = -4$. Entonces:

$$\begin{aligned} x_v =& -\frac{-2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \\ y_v =& P(x_v) = P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 4 = \frac{1}{2} - 1 - 4 = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Si bien eran datos ya conocidos por su forma canónica, está bueno verificarlo para cersiorar que nuestros cálculos tengan sentido.

(d) El gráfico es:



3
2
1
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4