Métodos Estadísticos
satellogic

Ana Bianco (anambianco@gmail.com)
Mariela Sued (marielasued@gmail.com)

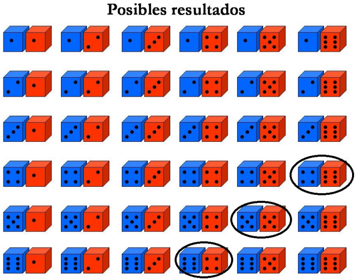
LGN – TCL – Estadística

Suma de Variables Aleatorias

Un dado: X

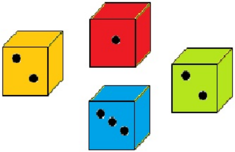
t	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Suma de dos dados: $S_2 = X_1 + X_2$, $X_i \sim X$



t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S_2 = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

¿Suma de 4 dados: $S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$?



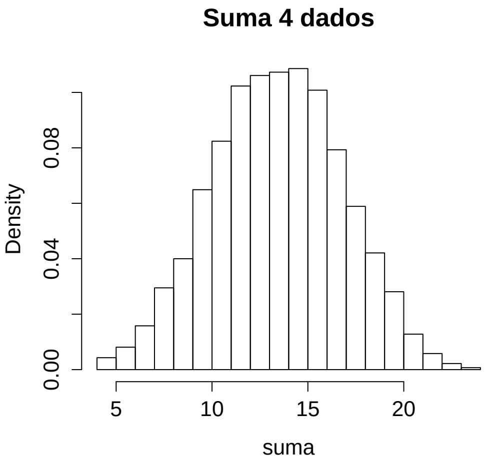
Aunque conozcamos exactamente la distribución de cada una de las v.a. involucradas, puede ser muy complejo hallar la distribución de la suma en forma exacta: en este caso hay 1296 combinaciones!!

Propuesta: simulemos la distribución de $S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

1. Simulemos el lanzamiento de 4 dados equilibrados.
2. Consideremos $S_4 =$ la suma de las caras obtenidas.
3. Repitamos $Nrep = 10000$ y grafiquemos el histograma para los valores de S_4 obtenidos.

Simulación

```
caras=c(1,2,3,4,5,6)
proba=c(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6)

sum(sample(caras,4,replace=T,prob=proba))

nrep=10000

set.seed(999)
suma=rep(0,nrep)


for(i in 1:nrep){
    suma[i]=sum(sample(caras,4,replace=T,prob=proba))
}

hist(suma,freq=F,main="Suma 4 dados")
```



Suma 4 dados
Density
0.00
0.04
0.08
5
10
15
20
suma

Suma de v.a.: algunos casos conocidos

Sean X e Y v. a. independientes y $S = X + Y$, entonces:

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ e $Y \sim \mathcal{B}(m, p) \Rightarrow S \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \Rightarrow S \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
3. $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \Rightarrow S \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.
4. $X \sim \chi_m^2$ e $Y \sim \chi_n^2 \Rightarrow S \sim \chi_{n+m}^2$.

Más aún...

- $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ indep, entonces

$$X_1 + \ldots + X_k \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2)$$

- $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$ indep, entonces

$$X_1 + \ldots + X_k \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2 + \ldots + n_k, p)$$

- $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ indep, entonces

$$X_1 + \ldots + X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)$$

Propiedades:

- $X_1, \ldots, X_n$, variables aleatorias, entonces

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right)$$

- $X_1, \ldots, X_n$ INDEPENDIENTES, entonces

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right)$$

Un caso especial: muestra aleatoria (m. a.)

"Data points that are drawn independently from the same distribution are said to be independent and identically distributed, which is often abbreviated to i.i.d.

$X_1, \ldots, X_n$ son una muestra aleatoria si son v. a. independientes, idénticamente distribuídas.

$$X_1, \ldots, X_n \text{ , i.i.d.}, X_i \sim F.$$

¿Qué relación guarda todo esto con nuestras simulaciones?

```
runif(10,0,1)

rbin(8,5,0.5)
```

Muestra - Datos (Observaciones)

- Muestra $X_1, \ldots, X_n$: Variables aleatorias.
- Datos - Observaciones $x_1, \ldots, x_n$: Números.

Datos-Observaciones: son realizaciones de las variables aleatorias

Datos-Observaciones: son los resultados obtenidos al realizar el "experimento"

Un caso especial: muestra aleatoria (m. a.)

"Data points that are drawn independently from the same distribution are said to be independent and identically distributed, which is often abbreviated to i.i.d.

$X_1, \ldots, X_n$ son una muestra aleatoria si son v. a. independientes, idénticamente distribuídas.

$$X_1, \ldots, X_n \text{ ,i.i.d.}$$

En tal caso, $X_i \sim F$ para todo i, y por consiguiente,

- $\mathbb{P}(X_i \leq t) = \mathbb{P}(X_j \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)$
- $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_1)$
- $V(X_i) = V(X_j) = V(X_1)$.
- mongo(F_{X_i})=mongo(F_{X_j})=mongo(F_{X_1}).

Suma y promedios de normales

Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$
- $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

Promedio de normales

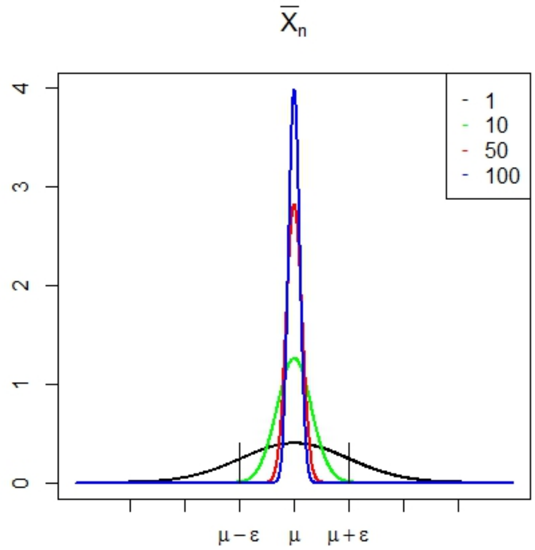
Comparemos las densidades

En un mismo plot graficar la densidad de

1. una v.a. $N(0,1)$
2. del promedio de 10 v.a. independientes cada una de ellas $N(0,1)$
3. del promedio de 50 v.a. independientes cada una de ellas $N(0,1)$
4. del promedio de 100 v.a. independientes cada una de ellas $N(0,1)$

Grafiquemos

```
x=seq(-4,4,length=1000)
f1=dnorm(x,0,1)
f10=dnorm(x,0,1/sqrt(10))
f50=dnorm(x,0,1/sqrt(50))
f100=dnorm(x,0,1/sqrt(100))

maximo=max(f100)
plot(x,f1)
lines(x,f1,lwd=2)
lines(x,f10,col="green",lwd=2)
lines(x,f50,col="red",lwd=2)
lines(x,f100,col="blue",lwd=2)
```



$\bar{X}_n$
0
1
2
3
4
1
10
50
100
μ − ε
μ
μ + ε

En particular, suma y promedios de normales

Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

- $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))$$

En particular, suma y promedios de normales

Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$
- $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 0 \ , \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Promedios- caso general

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$, para todo i.

$$\bar{X} = \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \\[2em] \mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \end{array}$$

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right)???$$

Desigualdades

- Markov: $X \geq 0$, entonces para todo $\delta > 0$ vale que

$$\mathbb{P}(X \geq \delta) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\delta}$$

- En particular

$$\mathbb{P}\left(|T| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}(T^2)}{\varepsilon^2}$$

- Tchebycheff : Sea W una v.a. y $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|W - \mathbb{E}(W)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(W)}{\varepsilon^2}$$

Teorema: Ley de los Grandes Números (LGN)

- $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

- Definición: $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge a Y en probabilidad si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - Y| > \varepsilon\right) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$.

Teorema: Ley de los Grandes Números (LGN)

- $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

- Definición: $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge a Y en probabilidad si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - Y| > \varepsilon\right) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$.

- Teorema (LGN): Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$. Entonces, $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ converge a μ en probabilidad.

Frecuencias relativas y probabilidad- revisitado

LGN en general $\quad \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{mongo}_i \to \mathbb{E}(\text{mongo})$

Frecuencias relativas y probabilidad- revisitado

LGN en general $\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{mongo}_i \to \mathbb{E}(\text{mongo})$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{X_i \in A} \to \mathbb{E}(\mathbb{I}_{X \in A}) = \mathbb{P}(X \in A)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{X_i \leq t} \to \mathbb{E}(\mathbb{I}_{X \leq t}) = \mathbb{P}(X \leq t) = F(t)\ , \quad X_i \sim F.$$

La EMPIRICA $\quad \hat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{X_i \leq t}$

Variables Discretas:

- Sea X con función de probabilidad puntual

t	-1	1	4	5	7	10
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

- **pejemplo** : $F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$.
- Grafique F_X, para $t \in (-2, 11)$, by= 0.01
- Calcule la esperanza de X: $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_X(x_i)$
- Calcule la varianza de X:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2 = \sum x_i^2 p_X(x_i) - \left\{\sum x_i p_X(x_i)\right\}^2$$

- ¿Cómo samplea con esta distribución?

Una discretas muy particulares

- Considere una distribución equiprobable en los siguientes valores
$$2.25\ ,\ 4.30\ ,\ 5.37$$
- Calcule la puntual.
- Calcule la esperanza y la varianza.
- Grafique la función de distribución acumulada.
- ¿Cómo samplea con esta distribución?

Otra discretas muy particulares

- Considere una distribución equiprobable en los siguientes valores

$$2.25\ ,\ 4.30\ ,\ 5.37\ ,\ 5.33\ ,\ 6.53\ ,\ 3.37\ ,\ 2.04\ ,\ 4.06\ ,\ 7.27\ ,\ 3.87$$

- Calcule la puntual.
- Calcule la esperanza y la varianza.
- Grafique la función de distribución acumulada.
- ¿Cómo samplea con esta distribución?

La empírica

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim F$. Definimos

$$\widehat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}}$$

- $\widehat{F}_n(t)$ es una función aleatoria.
- $\widehat{F}_n(t)$ representa a una acumulada que da peso $1/n$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Ley de los grandes números:

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{F}_n(t) = F(t) \ , \quad \text{en probabilidad}$$

La empírica

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim F$. Definimos

$$\widehat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}}$$

- $\widehat{F}_n(t)$ es una función aleatoria.
- $\widehat{F}_n(t)$ representa a una acumulada que da peso $1/n$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Ley de los grandes números:

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{F}_n(t) = F(t) \ , \quad \text{en probabilidad}$$

- Glivenko Cantelli:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| = 0 \ , \quad \text{en probabilidad}$$

Un poco de código

$$\widehat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}}$$

- Implemente una `La.empirica(t,datos)`, que tenga por input un valor t y un conjunto de observaciones (datos) y devuelva el valor de la función empírica asociada a los datos evaluada en el punto t.
- Genere un conjunto de $n = 20$ datos normales, calcule la función empírica asociada a los datos obtenidos a lo largo de una grilla en $(-3, 3)$ y superponga la función que considere pertinente.

Suma y promedios de normales - revisitado

Sean $X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- Sumas: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0,1) \ , \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

- Promedios: $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \ , \quad \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$.

- Aproximación para la suma: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq t\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \Phi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

- Aproximación para promedios: $\bar{X}_n \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \approx \mathcal{N}(0,1)\ , \quad \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq t\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \Phi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Notación sintética

Sean $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=\sigma^2$, entonces para n suficientemente grande

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n-\mu)\approx\mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\approx\mathcal{N}(0,1)$$

sin estandarizar $\quad \sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)\approx\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

en cualquier dimensión $\quad \sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)\approx\mathcal{N}(0,\Sigma)$ normal multivariada

Método Delta

Supongamos que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(Y_n - \theta) \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Si $g'(\theta) \neq 0$, vale que

$$\frac{\sqrt{n}}{|g'(\theta)|\,\sigma}\left\{g(Y_n) - g(\theta)\right\} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Método Delta

Supongamos que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(Y_n - \theta) \approx \mathcal{N}(0,1).$$

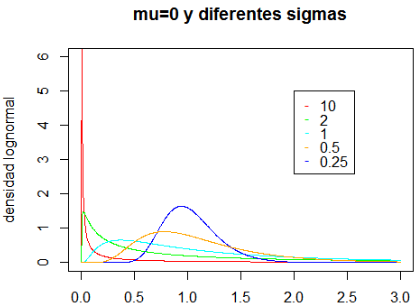
Si $g'(\theta) \neq 0$, vale que

$$\frac{\sqrt{n}}{|g'(\theta)|\,\sigma}\left\{g(Y_n) - g(\theta)\right\} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Versión Multivariada: si $\sqrt{n}(Y_n - \theta) \approx \mathcal{N}(0,\Sigma), \nabla g_\theta \neq 0$

entonces $\sqrt{n}\left\{g(Y_n) - g(\theta)\right\} \approx \mathcal{N}(0, \nabla g_\theta^T\, \Sigma\, \nabla g_\theta).$

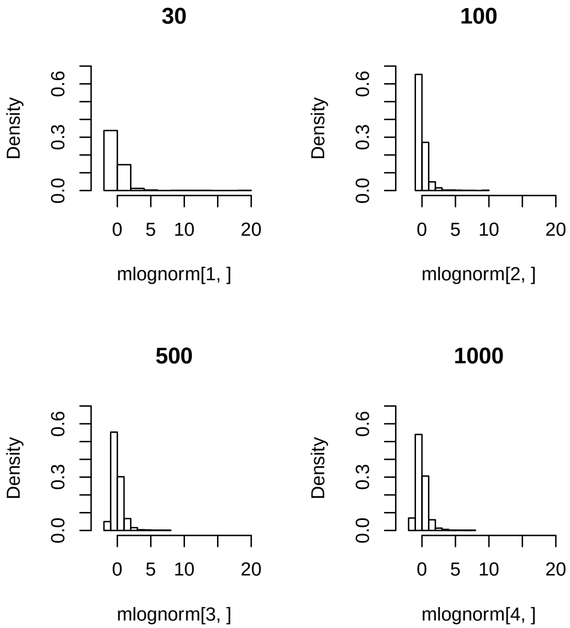
¿n mayor a cuanto?



X tiene distribución LogNormal con densidad

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right), \qquad x > 0$$

¿n mayor a cuanto?



LGN - Pilar de las ciencias experimentales.

- Objetivo: Determinar una magnitud desconocida.
- μ: valor de la magnitud que queremos determinar.
- Mediciones

$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

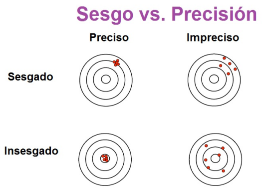
- $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ i.i.d.
- Exactitud: $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, luego $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ (insesgado).
- Precisión: tamaño de $\mathbb{V}(\varepsilon_i)$.

LGN - Pilar de las ciencias experimentales.

- Objetivo: Determinar una magnitud desconocida.
- μ: valor de la magnitud que queremos determinar.
- Mediciones

$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

- $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ i.i.d.
- Exactitud: $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, luego $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ (insesgado).
- Precisión: tamaño de $\mathbb{V}(\varepsilon_i)$.



LGN - Pilar de las ciencias experimentales.

- Objetivo: Determinar una magnitud (macroscópica) desconocida: peso, concentración de , bla bla bla..
- μ: valor de la magnitud que queremos determinar.
- Mediciones

$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

- $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ i.i.d.
- Exactitud: $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, luego $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ (insesgado)
- Precisión: tamaño de $\mathbb{V}(\varepsilon_i)$.
- Piense en algún laboratorio que haya cursado...

¿Cómo estima μ, la magnitud desconocida?

LGN - Pilar de las ciencias experimentales.

- Objetivo: Determinar una magnitud (macroscópica) desconocida: peso, concentración de , bla bla bla..
- μ: valor de la magnitud que queremos determinar.
- Mediciones
$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$
- $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ i.i.d.
- Exactitud: $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, luego $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ (insesgado)
- Precisión: tamaño de $\mathbb{V}(\varepsilon_i)$.
- Piense en algún laboratorio que haya cursado...

¿Cómo estima μ, la magnitud desconocida?

Nuestro primer estimador: $\widehat{\mu}_n := \bar{X}_n$

Estimando $\mu = \mathbb{E}(X)$

- Estimador: $\widehat{\mu}_n = \bar{X}_n$ cuenta hecha con la muestra

- Consistencia: el estimador converge a lo que queremos estimar:

$$\text{de LGN} \quad \widehat{\mu}_n \to \mu$$

Estadística - Learning

Wasserman dixit

$X_1, \ldots, X_n \, , X_i \sim F$ how do we infer F?

In some cases, we may want to infer only some feature of F such as its mean.

Modelos paramétricos

$$X_1, \ldots, X_n \;, X_i \sim f, f \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \{f(\cdot, \theta); \theta \in \Theta\}.$$

Diferentes cosas a estimar

$$X_1, \ldots, X_n \ , X_i \sim F$$

- Estimar F.
- Estimar *algo* asociado a F (esperanza, varianza, una probabilidad...). Enfoque funcional.
- Estimar *la densidad* sin modelo paramétrico.

Estimación Puntual

Point estimation refers to providing a single "best guess" of some quantity of interest.
All of statistics. Wasserman

Estimación Puntual

Point estimation refers to providing a single "best guess" of some quantity of interest.
All of statistics. Wasserman

$$X_1, \ldots, X_n \; X_i \sim F \;, \quad F \in \mathcal{F}$$

- Objeto de interés: $\theta = \theta(F)$
- best guess: Estimador - Función de la muestra

$$\widehat{\theta}_n \equiv \widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$$

Estimación Puntual

Point estimation refers to providing a single "best guess" of some quantity of interest.
All of statistics. Wasserman

$$X_1, \ldots, X_n \; X_i \sim F \;, \quad F \in \mathcal{F}$$

- Objeto de interés: $\theta = \theta(F)$
- best guess: Estimador - Función de la muestra

$$\widehat{\theta}_n \equiv \widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$$

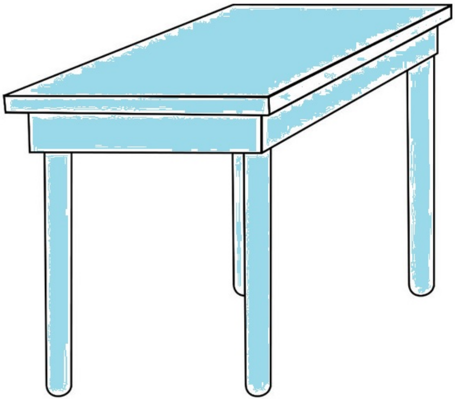
- Estimación: Valor del estimador en un conjunto de datos:

$$\widehat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Estadística

POBLACION $\leftrightarrow F$	MUESTRA $X_1, \ldots X_n$ i.i.d. $X_i \sim F$
Parámetro: Valor asociado de F	Estimador:estadístico para estimar θ
$\theta = \theta(F)$	$\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$
θ: valor poblacional	$\widehat{\theta}_n$ NUEVA VARIABLE ALEATORIA

¿Cuánto mide la mesa?

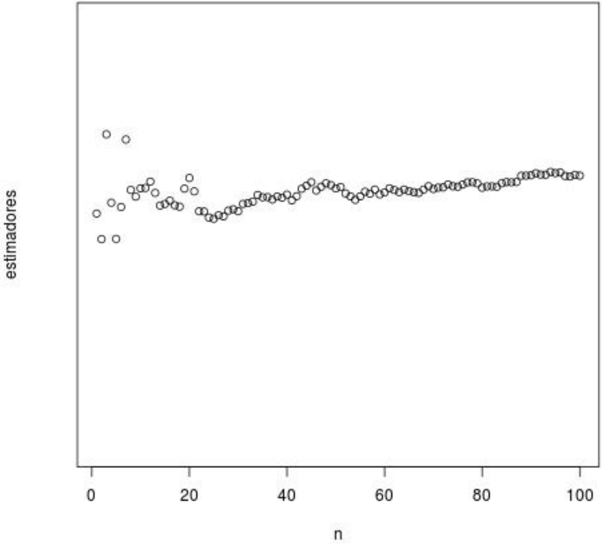


¿Cuánto mide la mesa?

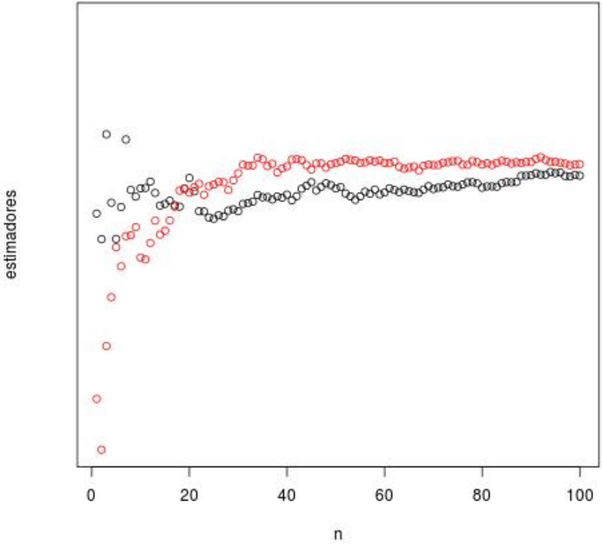
Estas son las $n = 7$ primeras observaciones realizadas por Juan:

$$1.17, \quad 1.36, \quad 0.15, \quad 2.52, \quad 0.21, \quad 1.78, \quad 2.67$$

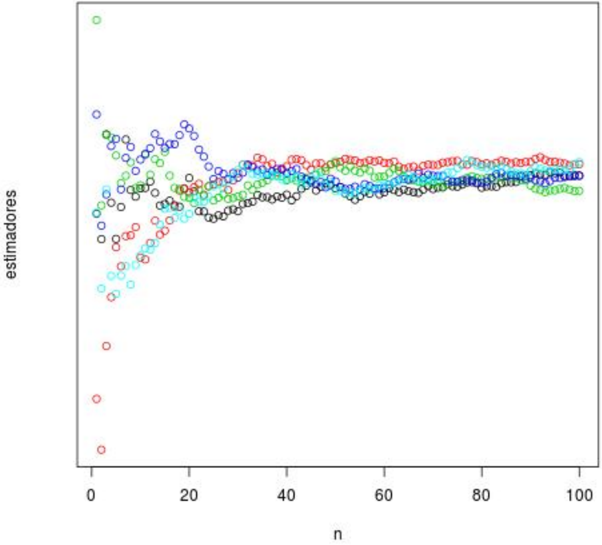
Juan cada vez con más datos. $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$



Juan y Andrea, cada vez con más datos. $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$



Varios, cada vez con más datos. $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$

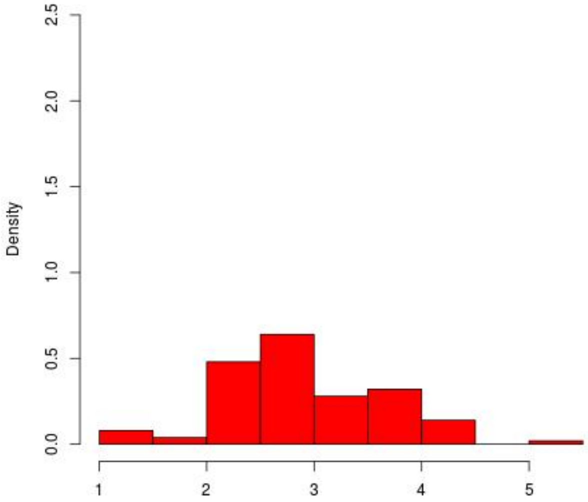


Cada uno con lo suyo. $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$

	Nombre	n=5	n=30	n=50
1	Juan	1.08	3.2	2.96
2	Andrea	2.87	2.95	2.88
3	Flor	3.47	3.2	3.18
4	Gonzalo	3.88	3.23	3.18
5	Paula	3.79	2.93	2.81
6	Agustin	3.01	2.9	2.59
7	Julieta	3.55	3.03	3.01
8	Marina	2.09	2.79	3.1
9	Pablo	4.14	3.41	3.01
10	Enrique	2.65	3.29	3.11
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

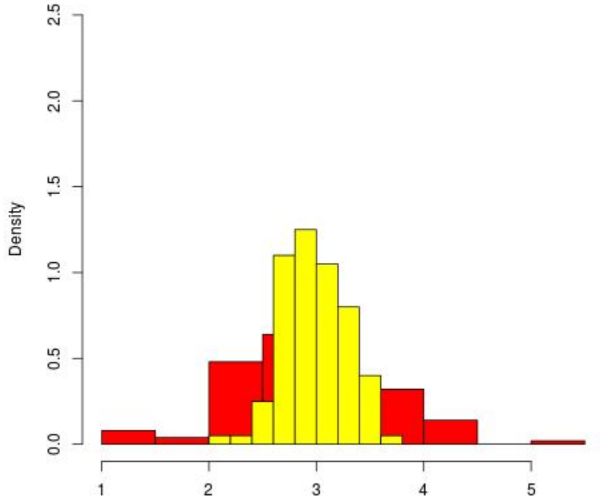
Histogramas de $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$

(empirical) Sampling Distribution of $\widehat{\theta}_n$



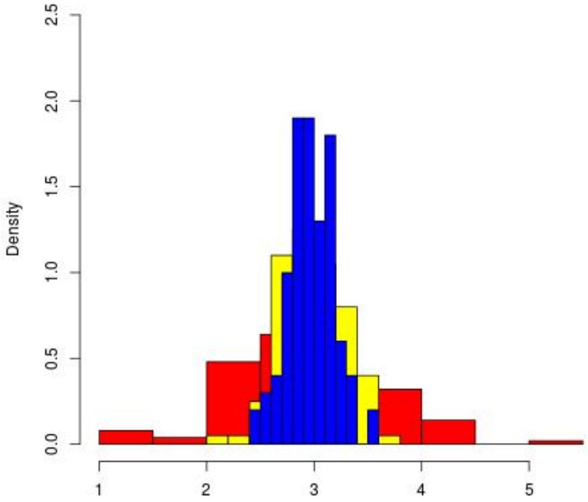
Histogramas de $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$

(empirical) Sampling Distribution of $\widehat{\theta}_n$



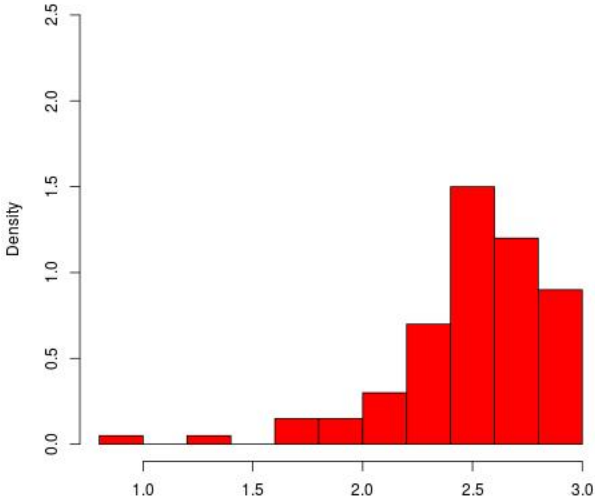
Histogramas de $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$

(empirical) Sampling Distribution of $\widehat{\theta}_n$



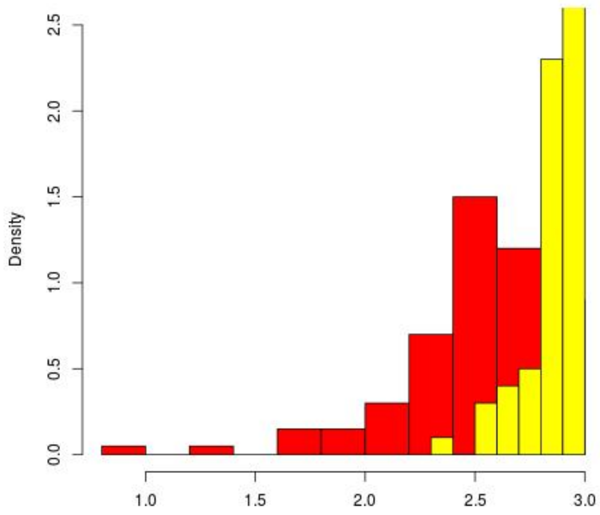
Histogramas de $\widetilde{\theta}_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

(empirical) Sampling Distribution of $\widetilde{\theta}_n$



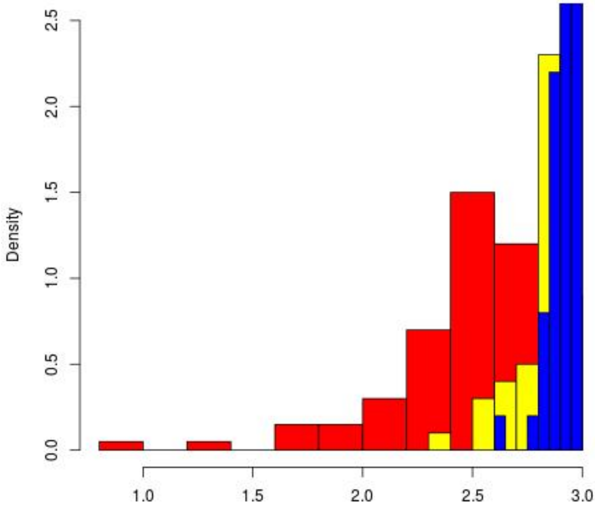
Histogramas de $\widetilde{\theta}_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

(empirical) Sampling Distribution of $\widetilde{\theta}_n$

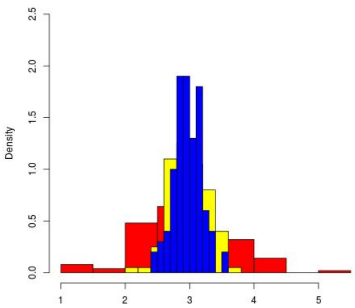


Histogramas de $\widetilde{\theta}_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

(empirical) Sampling Distribution of $\widetilde{\theta}_n$



Histogramas de $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$ y de $\widetilde{\theta}_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$



Notemos que el estimador ...

$$\widehat{\theta}_n \equiv \widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$$

- $\widehat{\theta}_n$ es una variable aleatoria.
- $\widehat{\theta}_n$ tiene distribución (siempre).

  Sampling distribution of $\widehat{\theta}_n$*:* $f_{\widehat{\theta}_n}$

- $\widehat{\theta}_n$ tiene (en general) esperanza: $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n)$

Notemos que el estimador ...

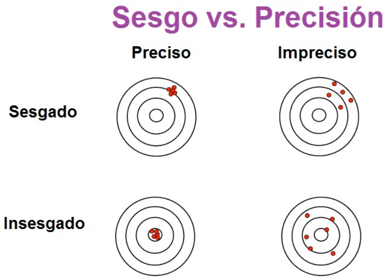
$$\widehat{\theta}_n \equiv \widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$$

- $\widehat{\theta}_n$ es una variable aleatoria.
- $\widehat{\theta}_n$ tiene distribución (siempre).

  Sampling distribution of $\widehat{\theta}_n$*:* $f_{\widehat{\theta}_n}$
- $\widehat{\theta}_n$ tiene (en general) esperanza: $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) = \int u f_{\widehat{\theta}_n}(u) du$
- $\widehat{\theta}_n$ tiene (en general) varianza: $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$
- $\widehat{\theta}_n$ tiene (en general) desvío estandar.

$$\mathsf{se} = \mathsf{se}(\widehat{\theta}_n) = \sqrt{\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)} \quad \textit{Standard error of } \widehat{\theta}_n.$$

Sesgo - Varianza



Consistencia

A medida que aumenta el tamaño n de la muestra, el estimador se aproxima al objeto de interés.

$$\widehat{\theta}_n \longrightarrow \theta \ , \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Consistencia

- $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., $X_i \sim F$, $F \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$: modelo estadístico.
- $\theta(F)$ objeto de interés definido para cada posible $F \in \mathcal{F}$
- estimador $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$.
- Consistencia:

$$\widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \theta(F)$$

cuando $n \to \infty$, $X_i \sim F$, cualquiera sea $F \in \mathcal{F}$

A medida que aumenta el tamaño n de la muestra, el estimador se aproxima al objeto de interés.

$$\widehat{\theta}_n \longrightarrow \theta \ , \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Propiedades - si, de nuevo!, pero todas juntas.

- Consistencia (abreviado): $\widehat{\theta} \to \theta$
- Error cuadratico medio: ECM$=\mathbb{E}\{(\widehat{\theta}_n - \theta)^2\}$
- Lema: Si $\mathbb{E}\{(\widehat{\theta}_n - \theta)^2\} \to 0$, entonces $\widehat{\theta}_n \to \theta$
- Sesgo: $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) - \theta$.
- Estimador insesgado: Sesgo=0. $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) = \theta$
- Lema (trade off bias- variance):

$$\mathbb{E}\left\{(\widehat{\theta}_n - \theta)^2\right\} = \mathbb{V}(\widehat{\theta}_n) + \left\{\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) - \theta\right\}^2$$

- Si $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n) \to 0$ y $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) \to \theta$, entonces

$$\mathbb{E}\{(\widehat{\theta}_n - \theta)^2\} \to 0$$

Estimando $\mu = \mathbb{E}(X)$

- Estimador: $\widehat{\mu}_n = \bar{X}_n$ cuenta hecha con la muestra
- Consistencia: el estimador converge a lo que queremos estimar:

$$\text{de LGN} \quad \widehat{\mu}_n \to \mu$$

- *Standard Error (del estimador):*

$$\text{se} = \text{se}(\widehat{\mu}_n) = \sqrt{\mathbb{V}(\widehat{\mu}_n)} = \sqrt{\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}}$$

- *Sampling Distribution (del estimador):* Distribución del estimador. $\widehat{\mu}_n$ es asintóticamente normal:

$$\text{del TCL} \quad \frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\text{se}(\widehat{\mu}_n)} \approx Z \text{ , con } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Estimando $\mu = \mathbb{E}(X)$

- Estimador: $\widehat{\mu}_n = \bar{X}_n$ cuenta hecha con la muestra
- Consistencia: el estimador converge a lo que queremos estimar:

$$\text{de LGN} \quad \widehat{\mu}_n \to \mu$$

- *Standard Error (del estimador):*

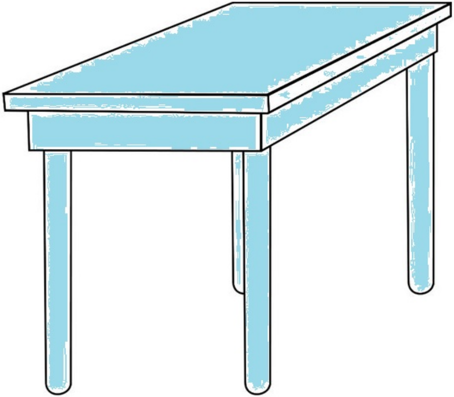
$$\text{se} = \text{se}(\widehat{\mu}_n) = \sqrt{\mathbb{V}(\widehat{\mu}_n)} = \sqrt{\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}}$$

- *Sampling Distribution (del estimador):* Distribución del estimador. $\widehat{\mu}_n$ es asintóticamente normal:

$$\text{del TCL} \quad \frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\text{se}(\widehat{\mu}_n)} \approx Z \text{, con } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Para que servirá esto...

Comprar o no comprar la mesa



Intervalos de Confianza - Pesentación

- Usted necesita comprar una mesa que mida TRES metros.
- Más grande, no le entra en la casa.
- Más chica, queda gente sentada en el piso.
- Considere el siguiente conjunto de datos.

$$\begin{array}{l} 1.40 \ , \ 0.62 \ , \ 2.40 \ , \ 1.96 \ , \ 0.96 \ , \ 2.16 \ , \ 0.87 \ , \ 2.80 \ , \ 2.31 \ , \ 1.93 \ , \\ 1.37 \ , \ 0.27 \ , \ 1.30 \ , \ 1.63 \ , \ 0.41 \ , \ 2.78 \ , \ 0.00 \ , \ 0.79 \ , \ 0.83 \ , \ 1.56 \ , \\ 0.67 \ , \ 1.22 \ , \ 1.84 \ , \ 0.64 \ , \ 1.99 \ , \ 2.93 \ , \ 0.29 \ , \ 1.84 \ , \ 1.58 \ , \ 2.45 \ , \\ 0.62 \ , \ 1.87 \ , \ 2.80 \ , \ 0.55 \ , \ 1.18 \ , \ 1.03 \ , \ 2.82 \ , \ 2.85 \ , \ 1.22 \ , \ 2.23 \end{array}$$

- ¿Considera usted que la mesa sirve?

Intervalos de confianza: All of Statistics, Wasserman

- Interval that contains an unknown quantity with a given frequency-
All of Statistics, Wasserman

-Intervalo que contiene una cantidad desconocida (parámetro de interés) con cierta frecuencia (nivel) -

Intervalos de confianza: definición

- Diremos que $C_n = (a(X_1, \ldots, X_n), b(X_1, \ldots, X_n))$ es un intervalo de confinanza de nivel exacto $1 - \alpha$ para el parámetro θ sii
$$\mathbb{P}\left(\theta \in C_n\right) = 1 - \alpha \; .$$
- Diremos que $C_n = (a(X_1, \ldots, X_n), b(X_1, \ldots, X_n))$ es un intervalo de confinanza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para el parámetro θ sii
$$\mathbb{P}\left(\theta \in C_n\right) \longrightarrow 1 - \alpha \; , \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \; .$$

Cambio de Notación: percentiles

En adelante, utilizaremos z_α para

$$\mathbb{P}(Z \geq z_\alpha) = \alpha \ , \quad \text{cuando} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Volvamos a las uniformes...

- $X_i \sim \mathcal{U}[0, \theta]$
- Queremos intervalos de confianza para θ.
- ¿podemos exacto?
- ¿podemos asintótico?

Volvamos a las uniformes...

- $X_i \sim \mathcal{U}[0, \theta]$
- Queremos intervalos de confianza para θ.
- ¿podemos exacto?
- ¿podemos asintótico? si!
- Miremos el pizarrón

Volvamos a las uniformes...

- $X_i \sim \mathcal{U}[0, \theta]$
- Queremos intervalos de confianza para θ.
- ¿podemos exacto?
- ¿podemos asintótico? si!
- Miremos el pizarrón
- Implemente **IC.mesa.asintot** que dado el nivel $1 - \alpha$ y un conjunto de datos devuelva un intervalo de confinaza asintótico de nivel $1 - \alpha$ para θ bajo el modelo $X_i \sim \mathcal{U}[0, \theta]$

Estimadores Asintóticamente Normales

- $\widehat{\theta}_n$ se dice asintóticamente normal (a.n) sii

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\mathsf{se}} \approx \mathcal{N}(0,1),$$

  donde $\mathsf{se} = \mathsf{se}(\widehat{\theta}_n)$ denota el desvío estandar del estimador $\widehat{\theta}_n$.
- Ejemplo: $\widehat{\mu}_n = \bar{X}_n$ es a.n., por TCL.

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\mathsf{se}} \approx \mathcal{N}(0,1),$$

  siendo

$$\mathsf{se} = \mathsf{se}(\bar{X}_n) = \sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Intervalos de Confianza Asintóticamente Normal

- Sea $\widehat{\theta}_n$ asintóticamente normal

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\mathsf{se}} = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\mathsf{se}(\widehat{\theta}_n)} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

- Sea $\widehat{\mathsf{se}}$ tal que $\frac{\mathsf{se}(\widehat{\theta}_n)}{\widehat{\mathsf{se}}} \to 1$,
- Tenemos entonces que
$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} \ \leq \ \frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\widehat{\mathsf{se}}} \ \leq \ z_{\alpha/2}\right) \to 1 - \alpha$ y por consiguiente

$$\mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{se}} \ \leq \ \theta \ \leq \ \widehat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{se}}\right) \to 1 - \alpha,$$

Llegamos así a que

$$\left(\widehat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{se}} \quad , \quad \widehat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{se}}\right)$$

es un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para θ.

Diferentes culturas

- Intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para θ

$$\left(\widehat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{se}} \quad , \quad \widehat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\,\widehat{\mathsf{se}}\right)$$

- Otra manera de informar

$$\widehat{\theta}_n = pirulo\,, \quad (\widehat{\mathsf{se}} = aurelio)$$

En general

Si

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\widehat{\text{mongo}}} \approx \mathcal{N}(0,1) \ ,$$

entonces,

$$\left(\widehat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\ \widehat{\text{mongo}} \quad , \quad \widehat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\ \widehat{\text{mongo}}\right)$$

es un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para θ.

Intervalo de confianza para la mediana

- Asuma que la mediana es asintóticamente normal.
- Haga Bootstrap para estimar su desvío.
- Proponga un intervalo asintótico con el desvío estimado.

Intervalo de confianza para la mediana

- Distribución de la mediana muestral: asintóticamente normal

$$\frac{\mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n) - \mathsf{med}(X)}{\mathsf{se}} \approx \mathcal{N}(0,1) \quad n \text{ grande}$$

- Desvio del Estimador:

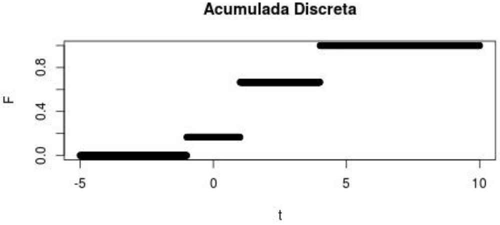
$$\mathsf{se} = \mathsf{se}(\mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n)) = \sqrt{\mathbb{V}_F\{\mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n)\}} = ???$$

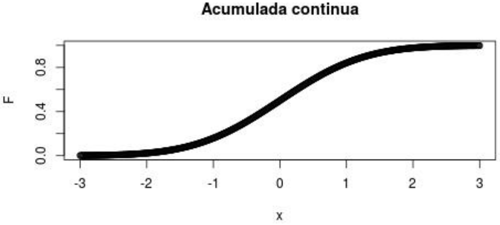
- $\widehat{\mathsf{se}} = ??$
- Bootstrap! $\widehat{\mathsf{se}}_{boot}$

$$\text{Intervalo de confianza} \quad \mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n) \pm z_{\alpha/2}\widehat{\mathsf{se}}_{boot}$$

Bootstrap - Marco Teórico

Población $\equiv$ Función de Distribución Acumulada





$\mathbb{P}(X = a)$ es el salto en a de F_X

Variables Discretas:

- Sea X con función de probabilidad puntual

t	-1	1	4	5	7	10
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

- **pejemplo** : $F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$.
- Grafique F_X, para $t \in (-2, 11)$, by$= 0.01$
- Calcule la esperanza de X: $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_X(x_i)$
- Calcule la varianza de X:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2 = \sum x_i^2 p_X(x_i) - \left\{\sum x_i p_X(x_i)\right\}^2$$

- Como samplea con esta distribución?

Una discretas muy particulares

- Considere una distribución equiprobable en los siguientes valores
$$2.25\ ,\ 4.30\ ,\ 5.37$$
- Calcule la puntual.
- Calcule la esperanza y la varianza.
- Grafique la función de distribución acumulada.
- ¿Cómo samplea con esta distribución?

Otra discretas muy particulares

- Considere una distribución equiprobable en los siguientes valores

$$2.25\ ,\ 4.30\ ,\ 5.37\ ,\ 5.33\ ,\ 6.53\ ,\ 3.37\ ,\ 2.04\ ,\ 4.06\ ,\ 7.27\ ,\ 3.87$$

- Calcule la puntual.
- Calcule la esperanza y la varianza.
- Grafique la función de distribución acumulada.
- ¿Cómo samplea con esta distribución?

La empírica

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim F$. Definimos

$$\widehat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}}$$

- $\widehat{F}_n(t)$ es una función aleatoria.
- $\widehat{F}_n(t)$ representa a una acumulada que da peso $1/n$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Ley de los grandes números:

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{F}_n(t) = F(t) \ , \quad \text{en probabilidad}$$

La empírica

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim F$. Definimos

$$\widehat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}}$$

- $\widehat{F}_n(t)$ es una función aleatoria.
- $\widehat{F}_n(t)$ representa a una acumulada que da peso $1/n$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
- Ley de los grandes números:

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{F}_n(t) = F(t) \ , \quad \text{en probabilidad}$$

- Glivenko Cantelli:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| = 0 \ , \quad \text{en probabilidad}$$

Un poco de código

$$\widehat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq t\}}$$

- Implemente una `La.empirica(t,datos)`, que tenga por input un valor t y un conjunto de observaciones (datos) y devuelva el valor de la función empírica asociada a los datos evaluada en el punto t.
- Genere un conjunto de $n = 20$ datos normales, calcule la función empírica asociada a los datos obtenidos a lo largo de una grilla en $(-3, 3)$ y superponga la función que considere pertinente.

Notación

$$\mathbb{P}_F(X \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A) \text{ cuando } X \sim F.$$

$$\mathbb{E}_F(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(X) \text{ cuando } X \sim F.$$

$$\mathbb{E}_F\left\{g(X_1, \ldots, X_n)\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\left\{g(X_1, \ldots, X_n)\right\} \ , \\ \text{cuando } X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d, } X_i \sim F.$$

$$? \quad \mathbb{P}_{\widehat{F}_n}(A) = \ldots\ldots$$

$$? \quad \mathbb{E}_{\widehat{F}_n}(X) = \ldots\ldots$$

$$? \quad \mathbb{V}_{\widehat{F}_n}(X) = \ldots\ldots$$

Notación

$$\mathbb{P}_F(X \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A) \text{ cuando } X \sim F.$$

$$\mathbb{E}_F(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(X) \text{ cuando } X \sim F.$$

$$\mathbb{E}_F\left\{g(X_1,\ldots,X_n)\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\left\{g(X_1,\ldots,X_n)\right\} \ ,$$

$$\text{cuando } X_1,\ldots,X_n \text{ i.i.d, } X_i \sim F.$$

$$? \quad \mathbb{P}_{\widehat{F}_n}(A) = \ldots\ldots$$

$$? \quad \mathbb{E}_{\widehat{F}_n}(X) = \ldots\ldots$$

$$? \quad \mathbb{V}_{\widehat{F}_n}(X) = \ldots\ldots$$

$$? \quad \mathbb{V}_{\widehat{F}_n}(\bar{X}_n) = \ldots\ldots$$

Estimación Plug-in

Si le interesa estimar **mongo**(F), haga **mongo**$(\widehat{F}_n)$,

Estimación Plug-in

Si le interesa estimar **mongo**(F), haga **mongo**$(\widehat{F}_n)$,

Posibles mongos:

- **mongo**$_1(F) = \mathbb{E}_F(X)$
- **mongo**$_2(F) = \mathrm{med}_F(X)$
- **mongo**$_3(F) = \mathbb{V}_F(X)$

En matemática: **mongo**(F) se denota con $\theta = T(F)$. T se dice funcional.

El procedimiento **plug-in** propone estimar $\theta = T(F)$ con $\widehat{\theta}_n = T(\widehat{F}_n)$

Intervalo de confianza para la media

- $\mu := T_1(F) = \mathbb{E}_F(X)$. Estimador plug-in:

$$\widehat{\mu}_n = T_1(\widehat{F}_n) = \mathbb{E}_{\widehat{F}_n}(X) = \bar{X}_n$$

- Distribución de $\widehat{\mu}_n$: asintóticamente normal

$$\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\mathsf{se}(\widehat{\mu}_n)} \approx \mathcal{N}(0,1) \quad n \text{ grande}$$

- Desvío del Estimador:

$$\mathsf{se}(\widehat{\mu}) = \sqrt{\mathbb{V}_F(\widehat{\mu})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \mathsf{se}$$

se estima con $\widehat{\mathsf{se}} = \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}$ o con $\widehat{\mathsf{se}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$

$$\text{Intervalo de confianza} \quad \widehat{\mu} \pm z_{\alpha/2}\widehat{\mathsf{se}}$$

Intervalo de confianza para la mediana?

- Distribución de la mediana muestral: asintóticamente normal

$$\frac{\mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n) - \mathsf{med}(X)}{\mathsf{se}} \approx \mathcal{N}(0,1) \quad n \text{ grande}$$

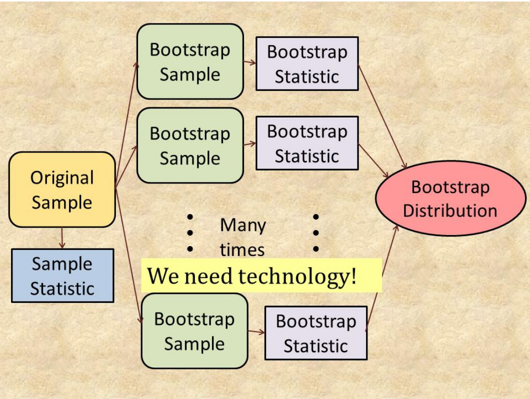
- Desvío del Estimador:

$$\mathsf{se} = \mathsf{se}(\mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n)) = \sqrt{\mathbb{V}_F\{\mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n)\}} = ???$$

- $\widehat{\mathsf{se}} = ??$
- Bootstrap! $\widehat{\mathsf{se}}_{boot}$

$$\text{Intervalo de confianza} \quad \mathsf{med}(X_1, \ldots, X_n) \pm z_{\alpha/2}\widehat{\mathsf{se}}_{boot}$$

Esquema Bootstrap



Intevalos Bootstrap Normal

- $\widehat{\theta}_n$ asintóticamente normal si

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\mathsf{se}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

  con $\mathsf{se} = \mathsf{se}(\widehat{\theta}_n)$
- Sea $\widehat{\mathsf{se}}_{\mathsf{boot}}$ el estimador bootstrap de $\mathsf{se}(\widehat{\theta}_n)$

  intervalo boot normal nivel $1-\alpha$: $\quad \widehat{\theta}_n \pm z_{\alpha/2}\, \widehat{\mathsf{se}}_{\mathsf{boot}}$

Intevalos Bootstrap Percentil.

- Sean $\widehat{\theta}^*_1, \ldots, \widehat{\theta}^*_{Nboot}$ estadísticos bootstrap de su estimador.

$$\text{intervalo boot percentil } 1-\alpha\text{:} \quad \left(\widehat{\theta}^*_{\alpha/2}\ ,\ \widehat{\theta}^*_{1-\alpha/2}\right)$$