PRÁCTICA

TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN AVANZADA

Ana de Souza Bossler – Jeffrey Vélez Betancurth
Universidad Miguél Hernández

INDICE

Ejercicio 2.1.

Nuestra propuesta es de un modelo de mochila bilevel para resolver la problemática de una empresa (o país) que busca exportar productos al extranjero, al tiempo que cumple con las restricciones del mercado de destino. En este caso, se establecen dos niveles de decisión: la empresa (o país) exportador (nivel superior-líder) y el mercado de destino (nivel inferior-seguidor).

En el nivel superior, la empresa exportadora (o el país exportador) busca maximizar sus ganancias seleccionando el subconjunto de productos más rentable para exportar, lo cual se representa mediante la función objetivo $f1(x, y) = d1x + d2y$, y variables de decisión binarias xi, donde $xi = 1$ si se exporta el producto i y $xi = 0$ si no.

En el nivel inferior, el mercado de destino impone restricciones en los productos importados relacionadas con la cantidad, calidad, origen, entre otros. Este mercado busca maximizar su propia función objetivo $f2(y) = cy$, utilizando variables de decisión binarias yj, donde $yj = 1$ si se acepta el producto j y $yj = 0$ si no.

La relación entre ambos niveles se establece mediante la restricción $ax \leq b$, donde a es una matriz de coeficientes que representa las restricciones y b es un vector de límites impuestos por el mercado de destino.

Este planteamiento, busca optimizar simultáneamente la ganancia de la empresa exportadora y el beneficio del mercado de destino, es de dualidad fuerte y está inspirado en una aplicación directa de los algoritmos para problemas de mochila bilevel descritos por Mansi et al. (2012).

The bilevel 0-1 knapsack problem (BKP) that is addressed in this paper is defined in this context. It is a hierarchical optimization problem in which the set of feasible solutions depends on the set of optimal solutions of a parametric 0-1 knapsack problem. The BKP can be formulated as follows:

$$\begin{aligned} \text{(BKP)} \quad & \max_{x,y} \quad f^1(x,y) = d^1x + d^2y \\ & \text{s.t.} \quad x \in \{0,1\}^{n^1}, \\ & \qquad y \in \operatorname{Argmax}\left\{ f^2(y') = cy' : a^1x + a^2y' \le b, y' \in \{0,1\}^{n^2} \right\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

The n^1 decision variables related to the leader are denoted by x. The follower has n^2 decision variables which are denoted by y. The objective functions of the leader and the follower are denoted, respectively, by $f^1(x,y)$ and $f^2(y)$. The weights of the variables x and y in the objective function of the leader are denoted by d^1 and d^2, respectively, while the vector c represents the coefficients of the follower variables in his own objective function. The vectors a^1 and a^2 are the set of coefficients related to the decision variables of the leader and the follower in the knapsack constraint of the follower, respectively. The capacity of this knapsack constraint is denoted by b. All the coefficients of the problem are assumed to be positive. The standard 0-1 knapsack problem is a special case of BKP. It is obtained from (1.1) by setting $a^1 = 0$ and $d^2 = c$. As a consequence, the problem BKP is NP-hard.

[1]

Interpretando la página del texto que está arriba, el cual hace el planteamiento teórico general del Problema de la Mochila (BKP), en las últimas tres líneas, establece que el problema estándar, cuando las variables en estudio se reducen sólo a los valores $\{0,1\}$, 1 "si cumple la condición", 0 "si no la cumple", y ese caso se obtiene (que se corresponde a nuestro planteamiento), haciendo los coeficientes $a^1 = 0$ y $d^2 = c$.

Por otro lado, relacionando el problema de la mochila que se plantea, en donde tenemos un País (o empresa) exportador(a), a la cual vamos a asociar el vector "x"; donde sus componentes x_i serán, "0 y 1", donde contiene "k" componentes, las cuales representan el "Store" o "productos" a exportar de la empresa (o país). Así,

$$x_i = \begin{cases} 1; \text{sielproductoiseexporta} \\ 0; \text{sielproductoinoseexporta} \end{cases} \text{ i=1,2,...,k}$$

Los coeficientes de las"x_i", los denotamos por el vector de constantes d_1, donde cada una de sus componentes "d_{1i}" representa el valor de la ganancia del producto i exportado.

[1] Mansi, R., Alves, C., Valério de Carvalho, J. M., & Hanafi, S. (2012). An Exact Algorithm for Bilevel 0-1 Knapsack Problems. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 504713. https://doi.org/10.1155/2012/504713

Ahora, el País (o empresa) importador(a), impone ciertas restricciones a los productos importados, como cantidad, calidad…,. Asociamos a la empresa o país importador el vector de decisión "y" cuyas componentes también son binarias; esto es, {0,1}, de manera que,

$$y_{ij} = \begin{cases} 1; \mathrm{siaceptaelproductoi(cumplelascondiciones)} \\ 0; \mathrm{noaceptaelproductoi(nocumplelascondiciones)} \end{cases} j = 1, \dots, m$$

Los coeficientes de las componentes del vector "y", lo vamos a denotar como el vector de constantes "c", donde cada componente c_{ij} representan los beneficios asociados a cada producto i importado, j=1,2,…,m.

Las restricciones impuestas por los países importadores (o empresas importadoras), han de ser cumplidas por la empresa exportadora, y las mismas pueden expresarse como,

$$A_{mxk}x \leq b$$

Donde A es una matriz de constantes, donde cada fila representa las condiciones de la empresa importadora j sobre los productos exportados i, y b es un vector con m componentes, de límites impuestos por las empresas importadoras.

La empresa exportadora desea seleccionar un subconjunto de sus productos a exportar que le permitan maximizar sus ganancias totales, dependiendo también de los beneficios asociados a las empresas importadoras. Podemos representar esto a través de una función objetivo "F", para el nivel superior (o líder) del problema.

Las empresas importadoras también tienen como objetivo, maximizar su función objetivo "f" en función de sus propios beneficios asociados a los productos importados.

Ante esto, la formulación matemática del Problema de la Mochila, con estas características, será,

$$\mathrm{Max{:}}\ F(x,y) = d_1'x + c'y$$

S.a:

$$x_i \in \{0,1\}; i = 1,2, \dots, k$$

$$\mathbf{y} \in \mathrm{Argmax}\{f(\mathbf{y}) = \mathbf{c}'\mathbf{y}: \mathbf{c}'y \leq M\}$$

$$y_j \in \{0,1\}; j = 1,2, \dots, m$$

$$\mathbf{A}_{mxk}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

donde todos los coeficientes son positivos

M=capacidad de la mochila.

Y para la dualidad fuerte

$$\mathrm{Max}: F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{d}_1'\mathbf{x} + \mathbf{c}'\mathbf{y}$$

$$\left(\mathrm{Max}: F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{k} d_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_{ij}\right)$$

S.a:

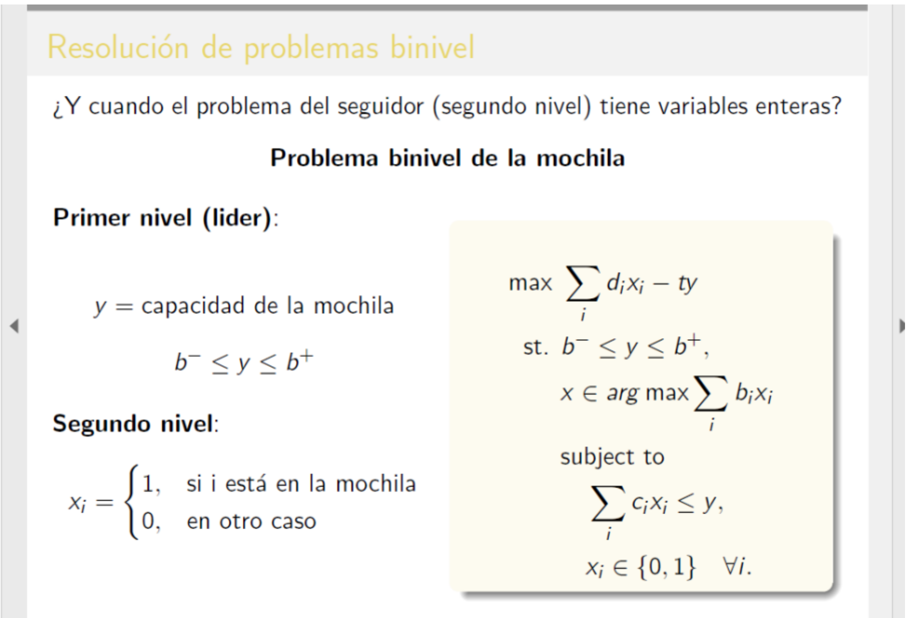
$$x_i \in \{0,1\}; i = 1,2, \dots, k$$

$$\mathbf{d}'_1 x = \mathbf{c}'\mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}_{mxk}\mathbf{x} \leq \mathbf{C}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq 0$$

En relación al problema presentado en clase, sumamos en vez de restar (-ty) porque pensamos en un juego de suma positiva (donde el precio de equilibrio de mercado ya está dado, y, cuando la empresa o país líder vende, la empresa o país seguidor compra considerando el objetivo de maximizar sus propios beneficios. También hemos cambiado los índices por vectores.



2.1. Resolución

https://colab.research.google.com/drive/1NSlYUa34TokrCDR9WL1l-pHIQLbSaxD8?usp=sharing

https://colab.research.google.com/drive/1IlJWbd8iFEKffK_kkF0dNq8-vHqBcrk8#scrollTo=e8ncRAqptGbh (dual resolviendo primero lo de seguidor)

Ejercicio 2.2

Nivel superior (empresa vendedor):

El vendedor desea seleccionar un subconjunto de productos para vender de manera que maximice su beneficio total. Cada producto tiene un beneficio asociado y un peso. La variable de decisión es binaria, donde xi = 1 si el producto i se vende y xi = 0 si no.

Nivel inferior (comprador):
El comprador tiene un límite de peso que puede comprar, pero también tiene preferencias no lineales sobre los productos. Específicamente, el comprador desea maximizar la cantidad de tipos de productos diferentes que compra. Esto se puede representar como una función objetivo cuadrática, donde la suma de las variables de decisión al cuadrado es maximizada.

El problema se puede describir de la siguiente manera:[2]

Maximizar f1(x) = dx para x

sujeto a:

x ∈ {0,1}^n (las variables de decisión x son binarias)

w^Tx ≤ W (el peso total de los productos seleccionados no puede exceder el límite de peso W)

y en el nivel inferior:

Maximizar f2(y) = Σy_i^2 para y

sujeto a:

y ∈ {0,1}^n (las variables de decisión y son binarias)

[2] Pusimos una función cuadrática en la función objetivo del nivel 2 para dejar la posibilidad de aplicar el teorema dual fuerte. Pero, en la forma rn que se expresa, la suma de las yi al cuadrado, sigue siendo lineal, porque los valores posibles de y son 0 o 1, y al final su suma de cuadrados, dará k= número de productos exportados (o importados)- porque solo se puede comprar lo que el líder vende-, más bien deja de ser variable, para transformarse en una constante. Pues no sabemos si está bien el planteamiento.

w^Ty ≤ W (el peso total de los productos seleccionados no puede exceder el límite de peso W)

y ≤ x (sólo se pueden comprar productos que se vendan)

En el nivel superior del problema, queremos optimizar (Maximizar) una función objetivo,

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{d}'\mathbf{x}$$

Donde las componentes del vector $\mathbf{x}$ son valores binarios "0 o 1", en donde $\mathrm{x_i} = 1$; si el producto i de la mochila es exportado para su venta, y $\mathrm{x_i} = 0$; si el producto i de la mochila no es exportado.

El vector de constantes $\mathbf{d}$, sus componentes representan el precio del producto i en función de su peso .

Estos deben estar sujetos a,

$$\mathbf{w}'\mathbf{x} \leq \mathrm{W}$$

Donde el vector de constantes $\mathbf{w}$, sus componentes representan el peso del producto i exportado, y W el peso máximo aceptado para la exportación.

Para el nivel inferior, se desea maximizar la función objetivo,

$$\mathrm{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{y}$$

Sujeto a que el vector $\mathbf{y}$, sus componente también son binarias, con valores "0 o 1", con $\mathrm{y_i} = 1$; si el producto i es comprado, $\mathrm{y_i} = 0$; si no es comprado el producto i. Además, $\mathbf{w}'\mathbf{y} \leq \mathrm{W}$; $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. La primera establece que los pesos de los productos importados no pueden exceder el total del peso solicitado, y la segunda que sólo se compran los productos exportados

$$\text{Maximizar: } \mathrm{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{d}'\mathbf{x}$$

S.a:

$$\mathrm{x_i} \in \{0,1\}; \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{k}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{x} \leq \mathrm{W}$$

$$\mathbf{y} \in \operatorname{argmax}\{\mathrm{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} \colon \mathbf{w}'\mathbf{y} \leq \mathrm{W}\}$$

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$$

$$\mathbf{w}; \mathbf{x}; \mathbf{y} \geq 0$$

:

Resolución 2.2.

https://colab.research.google.com/drive/1NSlYUa34TokrCDR9WL1I-pHIQLbSaxD8#scrollTo=uRa8YXTqSo5G