Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 7 / 5 / 1

Выполнил:
студент 119 группы
Дроздов Н. А.

Преподаватель:
Сковорода Н. А.

Москва
2021

Содержание

Постановка задачи

Задача – вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = ln(x)$, $y_2 = 14 - 2x$, $y_3 = \frac{1}{2-x} + 6$. При решении задачи необходимо следующее:

- для каждой кривой аналитически определить отрезок, на котором применимы метод касательных и метод хорд;
- вычислить абсциссы точек пересечения кривых методом касательных или методом хорд с точностью ε_1 (конкретный метод задается через -D на этапе сборки программы);
- методом прямоугольников вычислить нужные интегралы с точностью ε_2.

Значения ε_1 и ε_2 должны быть подобраны так, чтобы для них достигалась итоговая точность $\varepsilon = 0.001$.

Математическое обоснование

Обоснуем следующий выбор ε_1 и ε_2: $\varepsilon_1 = 0.0001$, $\varepsilon_2 = 0.00001$. Пусть M – максимум по модулю всех функций, интегрируемых в программе, на некотором отрезке, в который строго вложены все отрезки интегрирования. Пусть при нахождении корня есть погрешность ε_1, а интеграл считается с погрешностью ε_2. Путем использования первой теоремы о среднем и аддитивности интеграла находим для некоторых точек c_1, c_2 из $[a-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1]$:
$|\int\limits_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} f(x)dx - I| = |\varepsilon_2 + \varepsilon_1(f(c_1)+f(c_2))| \leq |\varepsilon_2| + 2M|\varepsilon_1|$.

Пусть общая погрешность равна ε; учитывая, что в программе считается 3 интеграла, получаем: $|\varepsilon| \leq 3|\varepsilon_2| + 6M|\varepsilon_1|$. Заметим, что в отрезок $[2.1, 7]$ строго вложены все отрезки интегрирования и на нем все функции по модулю не превосходят 10. Таким образом, $|\varepsilon| \leq 3|\varepsilon_2| + 60|\varepsilon_1|$; предложенные значения констант удовлетворяют этому неравенству для нужной в программе итоговой точности $\varepsilon = 0.001$.

В таблице ниже – выбор отрезков нахождения корня для каждой пары кривых. На каждом из выбранных отрезков первые и вторые производные нужных функций знакопостоянны, значения функции на концах разных знаков, а значит, методы касательных и хорд применимы [1].

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Отрезок
$y_1 - y_2 = ln(x) + 2x - 14$	$\frac{1}{x} + 2$	$-\frac{1}{x^2}$	$[5, 7]$
$y_3 - y_1 = \frac{1}{2-x} + 6 - ln(x)$	$-\frac{(1-x)(x-4)}{x(x-2)^2}$	$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(2-x)^3}$	$[2.1, 2.5]$
$y_3 - y_2 = \frac{1}{2-x} + 2x - 8$	$\frac{1}{(2-x)^2} + 2$	$\frac{2}{(2-x)^3}$	$[4, 4.5]$

Остановка метода при достижении требуемой точности происходит следующими способами:

- В методах касательных и хорд используется формула (11.12) из [1]: $|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, где m – минимум модулей производных всех функций на отрезках, где ищется корень. Эту константу легко посчитать, т.к на отрезках, где применимы эти методы, первая и вторая производные знакопостоянны; для функций выше эта константа равна 2.

- В методе прямоугольников используется правило Рунге [2]: $|I - I_n| \approx p|I_n - I_{2n}|$ с $p = 0.3333$ и $n_0 = 100$.

Результаты экспериментов

Точки пересечения кривых:

Кривые	x	y
y_1 и y_2	6.0962	1.8076
y_2 и y_3	4.2248	5.5504
y_1 и y_3	2.1918	0.7847

Таблица 1: Координаты точек пересечения

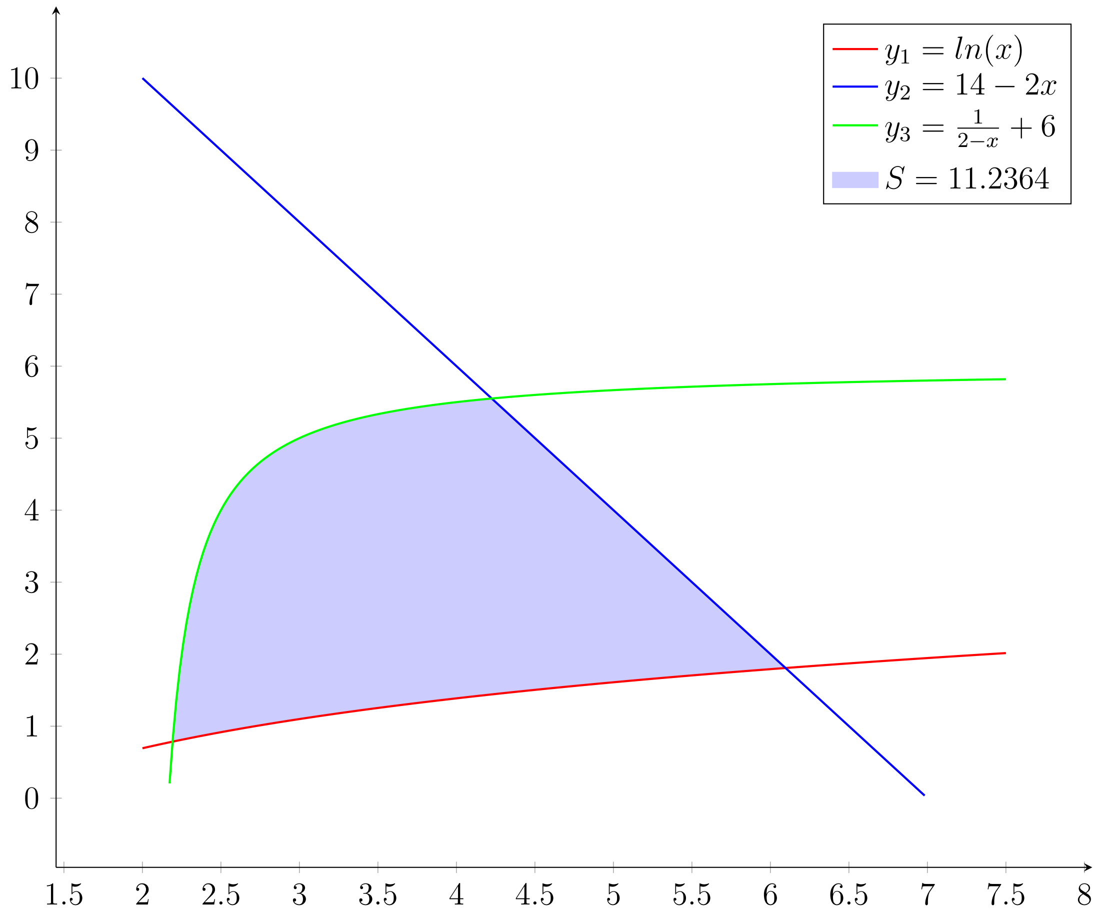


Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Список модулей и функций в них:

- func.asm:
  - f1, f2, f3, f1p, f2p, f3p – функции, реализующие вычисление математических функций 1-3 и их производных.
- task6.c:
  - root, root-newton – реализуют методы хорд/касательных;
  - integral – реализует численное вычисление интеграла методом прямоугольников.

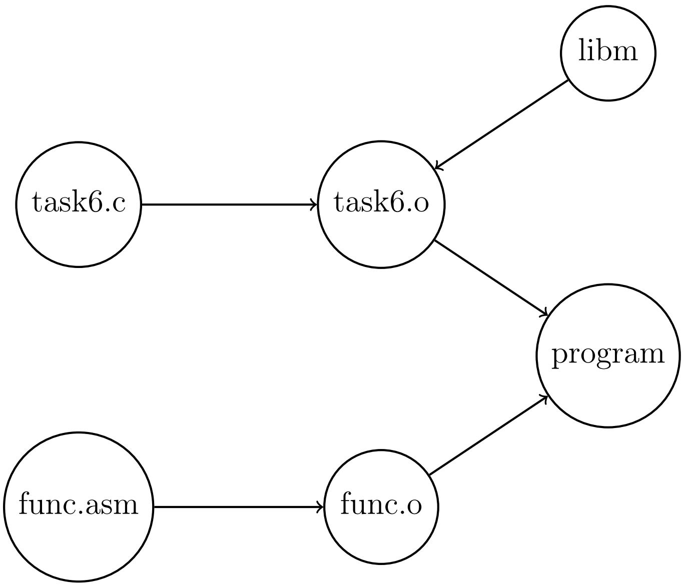
Сборка программы (Make-файл)

Текст make-файла:

```
METHOD = newton

all: program
clean:
  rm func.o task6.o
program: func.o task6.o
  gcc -m32 -o program func.o task6.o
func.o: func.asm
  nasm -f elf32 -o func.o func.asm
task6.o: task6.c
  gcc -c -m32 -D $(METHOD) -o task6.o task6.c -lm
```

Зависимости между модулями:



Отладка программы, тестирование функций

Тесты для отладки методов хорд и касательных:

Метод	Кривая и отрезок	Корень на отрезке	Вывод метода
Хорд	$y = x^2 - 1,\ [0.5, 1.5]$	1	0.999787
Хорд	$y = x - 4,\ [3.5, 4.5]$	4	4.000000
Хорд	$y = ln(x) - 2,\ [6.25, 9]$	7.389056	7.388117
Хорд	$y = arctg(x) - e^{-x},\ [0, 1]$	0.606555	0.606823
Касательных	$y = x^2 - 1,\ [0.5, 1.5]$	1	1.000005
Касательных	$y = x - 4,\ [3.5, 4.5]$	4	4.000000
Касательных	$y = ln(x) - 2,\ [6.25, 9]$	7.389056	7.388472
Касательных	$y = arctg(x) - e^{-x},\ [0, 1]$	0.606555	0.606544

Тесты для отладки метода прямоугольников:

Кривая и отрезок	Площадь под графиком	Вывод метода
$y = 2,\ [0.3, 1]$	1.4	1.4
$y = 20x^3 - 5,\ [2, 3]$	320	320.0000
$y = arctg(x),\ [0, 1]$	0.438824	0.438825

Все значения считались с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты функций на языке ассемблера и программы на языке C имеются в архиве, приложенном к данному отчету.

Анализ допущенных ошибок

В ходе разработки программы допускались ошибки, связанные с реализацией тех или иных численных методов или с нарушением логических связей в программе. Все ошибки были исправлены в процессе отладки, причиной послужила невнимательность.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.

[2] Трифонов Н.П., Пильщиков В.Н. Задания практикума на ЭВМ (1 курс). Учебное пособие, 2-е исправленное издание. — М.: МГУ, 2001.