



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ
ΠΡΟΧΩΡΗΜΕΝΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Αναστασία Χριστίνα Λίβα
03119029

Περιεχόμενα

Ερώτηση 4	2
Ερώτηση 5	4
Ερώτηση 6	5
Ερώτηση 8	7
Ερώτηση 9	9

Ερώτηση 4

Στο πλαίσιο της ανάλυσης για τη βελτιστοποίηση της ενεργειακής διαχείρισης ενός ηλεκτρικού τρένου, εξετάζεται η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου κόστους, όπως αυτό ορίζεται από τη σχέση:

$$J = c_1(x_1(T) - x_{1f})^2 + c_2x_2^2(T) + \int_0^T (k_3x_2u + k_4x_2u + Ru^2) dt.$$

Για να προχωρήσουμε, πρέπει να γραφούν οι απαραίτητες συνθήκες ελαχιστοποίησης, καθώς και να διατυπωθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Αρχικά, οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος δίνονται από τις διαφορικές σχέσεις:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_2 - k_2x_2^2 + k_3u.$$

Ο έλεγχος u αντιπροσωπεύει την είσοδο που πρέπει να υπολογιστεί ώστε να επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του J , ενώ οι x_1 και x_2 αντιπροσωπεύουν τη θέση και την ταχύτητα αντίστοιχα.

Η προσέγγιση βασίζεται στη Χαμιλτονιανή διατύπωση, η οποία περιλαμβάνει τόσο τις εξισώσεις κατάστασης όσο και τους όρους του κριτηρίου κόστους. Ορίζεται ως:

$$H = \lambda_1\dot{x}_1 + \lambda_2\dot{x}_2 + k_3x_2u + k_4x_2u + Ru^2.$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις κατάστασης:

$$H = \lambda_1x_2 + \lambda_2(-k_1x_2 - k_2x_2^2 + k_3u) + k_3x_2u + k_4x_2u + Ru^2.$$

Για την ελαχιστοποίηση του J , απαιτείται η διατύπωση των εξισώσεων συνδιαφορών για τους πολλαπλασιαστές Lagrange λ_1 και λ_2 , οι οποίες υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Για τον πολλαπλασιαστή λ_1 , το αποτέλεσμα είναι:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}.$$

Δεδομένου ότι ο H δεν εξαρτάται άμεσα από το x_1 , προκύπτει:

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \implies \lambda_1 = \text{σταθερό}.$$

Για τον πολλαπλασιαστή λ_2 , προκύπτει:

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}.$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο:

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1 + \lambda_2(-k_1 - 2k_2x_2) + k_3u + k_4u.$$

Άρα:

$$\dot{\lambda}_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2(-k_1 - 2k_2x_2) + k_3u + k_4u).$$

Στη συνέχεια, για να βρεθεί η βέλτιστη είσοδος u , χρησιμοποιούμε τη συνθήκη βελτιστοποίησης:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Η μερική παράγωγος ως προς u δίνεται από:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_2k_3 + k_3x_2 + k_4x_2 + 2Ru.$$

Λύνοντας ως προς u , προκύπτει:

$$u = -\frac{\lambda_2k_3 + (k_3 + k_4)x_2}{2R}.$$

Οι συνοριακές συνθήκες καθορίζονται από τις αρχικές και τελικές τιμές των x_1 και x_2 , καθώς και από τις παραγώγους τους. Αρχικά, ισχύει ότι:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Στο τελικό χρονικό σημείο T , οι συνοριακές συνθήκες για τους πολλαπλασιαστές ορίζονται από τις παραγώγους του J ως προς $x_1(T)$ και $x_2(T)$:

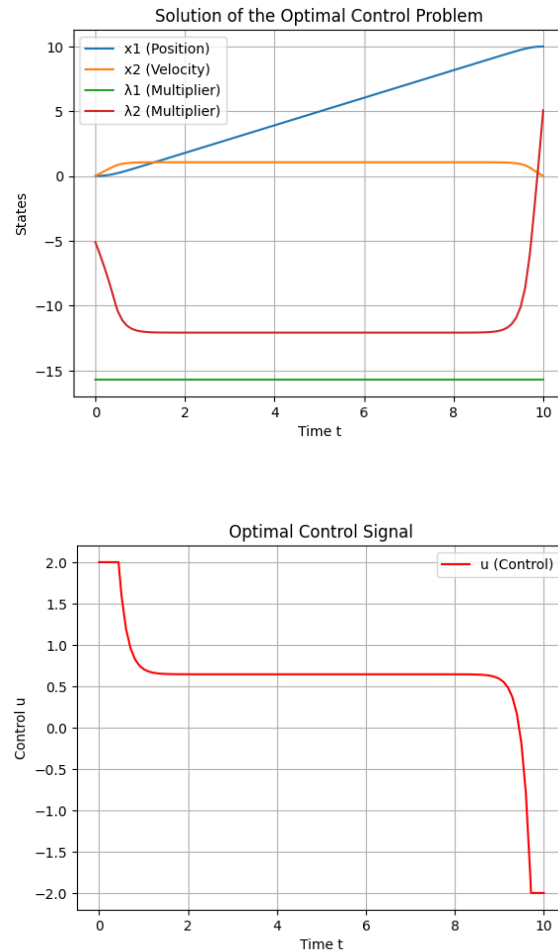
$$\lambda_1(T) = \frac{\partial J}{\partial x_1(T)} = 2c_1(x_1(T) - x_{1f}),$$

$$\lambda_2(T) = \frac{\partial J}{\partial x_2(T)} = 2c_2x_2(T).$$

Τέλος, οι περιορισμοί του ελέγχου u διασφαλίζουν ότι:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}.$$

Ερώτηση 5



. Οι σταθερές του συστήματος ορίστηκαν ως:

$$k_1 = 0.5, \quad k_2 = 0.1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 10, \quad c_1 = c_2 = 1000, \quad x_f = 10, \quad R = 0.3,$$

$$u_{\min} = -2, \quad u_{\max} = 2, \quad T = 10.$$

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος περιλαμβάνουν τη θέση και την ταχύτητα του τρένου, καθώς και τις συναρτήσεις συζυγών που σχετίζονται με τους πολλαπλασιαστές Lagrange.

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των συνοριακών τιμών. Εφαρμόστηκαν οι εξισώσεις κατάστασης, οι συνοριακές συνθήκες και οι συναρτήσεις συζυγών. Τα αρχικά δεδομένα για τη λύση περιελάμβαναν την εκκίνηση της θέσης και της ταχύτητας του τρένου στο μηδέν, ενώ οι συνοριακές συνθήκες στο τέλος του χρονικού διαστήματος καθορίστηκαν με βάση

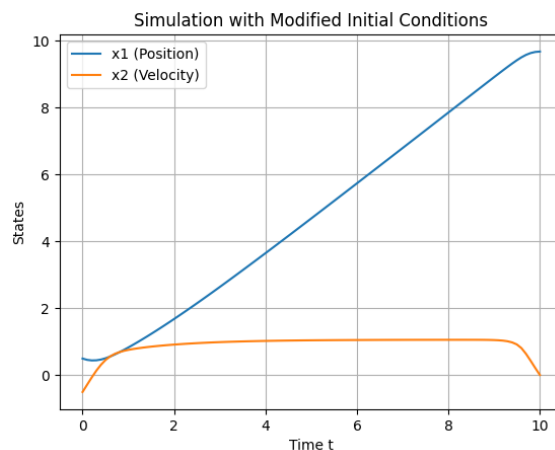
τη συνάρτηση κόστους. Η διαδικασία περιλάμβανε τη δυναμική προσαρμογή του σήματος ελέγχου $u(t)$ ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη λειτουργία εντός των καθορισμένων περιορισμών.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης επιβεβαίωσαν τη θεωρητική ανάλυση. Η θέση $x_1(t)$ του τρένου αυξήθηκε γραμμικά και έφτασε στον στόχο $x_f = 10$ στο τέλος της χρονικής περιόδου $T = 10$. Η ταχύτητα $x_2(t)$ παρουσίασε μια σύντομη μεταβατική φάση πριν σταθεροποιηθεί, επιδεικνύοντας αποτελεσματική ενεργειακή διαχείριση. Οι πολλαπλασιαστές συζυγών $\lambda_1(t)$ και $\lambda_2(t)$ επιβεβαίωσαν τη θεωρητική διατύπωση των συζυγών εξισώσεων. Το σήμα ελέγχου $u(t)$ ακολούθησε ένα πρότυπο που ήταν αναμενόμενο: αρχικά έφτασε στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του για να επιταχύνει το τρένο, στη συνέχεια παρέμεινε σταθερό κατά τη φάση ομαλής κίνησης και τελικά έφτασε στη μέγιστη αρνητική τιμή του για να επιβραδύνει το τρένο στο τέλος.

Στο πρώτο διάγραμμα, παρουσιάζονται οι καταστάσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\lambda_1(t)$ και $\lambda_2(t)$ ως συναρτήσεις του χρόνου. Η γραμμική αύξηση της $x_1(t)$ αποδεικνύει την επίτευξη της επιθυμητής θέσης $x_f = 10$, ενώ η σταθεροποίηση της $x_2(t)$ υποδηλώνει σταθερή ταχύτητα για μεγάλο μέρος της διαδρομής, κάτι που είναι σημαντικό για την ενεργειακή αποδοτικότητα. Η σταθερή συμπεριφορά του $\lambda_1(t)$ επαληθεύει τη θεωρητική συνθήκη $\dot{\lambda}_1 = 0$, ενώ η δυναμική αλλαγή του $\lambda_2(t)$ δείχνει πώς προσαρμόζεται ο έλεγχος για να επιτύχει τον στόχο.

Στο δεύτερο διάγραμμα, παρουσιάζεται το σήμα ελέγχου $u(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου. Αρχικά, το $u(t)$ βρίσκεται στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του $u_{\max} = 2$ για να επιταχύνει το τρένο. Κατά τη φάση ομαλής κίνησης, το $u(t)$ μειώνεται και παραμένει σχεδόν σταθερό για να διατηρήσει την ταχύτητα χωρίς σπατάλη ενέργειας. Στο τέλος της διαδρομής, το $u(t)$ λαμβάνει τη μέγιστη αρνητική τιμή $u_{\min} = -2$ για να επιβραδύνει το τρένο και να το σταματήσει στη σωστή θέση.

Ερώτηση 6



Στο Ερώτημα 6 ζητήθηκε να προσομοιωθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας την είσοδο που προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα, αλλά με αρχικές τιμές για τη θέση $x_1(0)$ και την ταχύτητα $x_2(0)$ που να διαφέρουν ελαφρώς από τις αρχικές συνθήκες του προηγούμενου ερωτήματος. Οι νέες αρχικές συνθήκες επιλέχθηκαν ως $x_1(0) = 0.5$ και $x_2(0) = -0.5$.

Για την προσομοίωση του συστήματος, χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις κατάστασης που περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος, καθώς και η είσοδος ελέγχου $u(t)$ που παρεμβλήθηκε από την αριθμητική

λύση του προηγούμενου ερωτήματος. Η αριθμητική επίλυση πραγματοποιήθηκε με τη χρήση της μεθόδου `solve_ivp` της Python, η οποία επιτρέπει την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με δοσμένες αρχικές συνθήκες. Η έξοδος της προσομοίωσης περιλάμβανε τις τροχιές της θέσης $x_1(t)$ και της ταχύτητας $x_2(t)$ στο χρονικό διάστημα $t \in [0, T]$, με $T = 10$.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η θέση $x_1(t)$ αυξάνεται γραμμικά με την πάροδο του χρόνου και φτάνει στην επιθυμητή τελική τιμή $x_f = 10$ στο τέλος του χρονικού διαστήματος, $t = T$. Η γραμμική αύξηση της $x_1(t)$ αποδεικνύει ότι το σύστημα παραμένει αποδοτικό και καταφέρει να επιτύχει τον στόχο του παρά την αλλαγή των αρχικών συνθηκών. Η ταχύτητα $x_2(t)$, από την άλλη πλευρά, παρουσιάζει μια αρχική μεταβατική φάση λόγω της νέας αρχικής τιμής $x_2(0) = -0.5$, αλλά σταθεροποιείται γύρω από μια σχεδόν σταθερή τιμή για το μεγαλύτερο μέρος της διαδρομής, πριν μειωθεί στο τέλος της προσομοίωσης, καθώς το σύστημα επιβραδύνει για να σταματήσει στη σωστή θέση.

Ερώτηση 7

Στο Ερώτημα 7 ζητείται να βρεθεί η είσοδος $v(t)$ που ελαχιστοποιεί το κριτήριο κόστους:

$$J_2 = 20y_1^2(T) + 20y_2^2(T) + \int_0^T (2y_1^2 + 2y_2^2 + v^2) dt.$$

Το σύστημα έχει γραμμικοποιηθεί γύρω από τη βέλτιστη τροχιά και περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v,$$

όπου οι πίνακες $A(t)$ και $B(t)$ προκύπτουν από τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $f(x, u)$ ως:

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x(t), u(t))}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x(t), u(t))}.$$

Για την ελαχιστοποίηση του κριτηρίου κόστους, χρησιμοποιείται η θεωρία του βέλτιστου ελέγχου, μέσω της διατύπωσης του Hamiltonian:

$$H = 2y_1^2 + 2y_2^2 + v^2 + \lambda^T(A(t)y + B(t)v),$$

όπου λ είναι οι πολλαπλασιαστές συζυγών. Η ελαχιστοποίηση του H ως προς $v(t)$ δίνει τη βέλτιστη είσοδο:

$$v(t) = -\frac{1}{2}\lambda^T B(t).$$

Οι εξισώσεις συζυγών που περιγράφουν τη δυναμική των πολλαπλασιαστών είναι:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Με υπολογισμούς, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\dot{\lambda}_1 = -(4y_1 + \lambda^T A_{1,:}),$$

$$\dot{\lambda}_2 = -(4y_2 + \lambda^T A_{2,:}),$$

όπου $A_{1,:}$ και $A_{2,:}$ είναι οι γραμμές του πίνακα $A(t)$.

Οι συνοριακές συνθήκες για τους πολλαπλασιαστές προσδιορίζονται από το κριτήριο κόστους:

$$\lambda_1(T) = 40y_1(T), \quad \lambda_2(T) = 40y_2(T).$$

Συνεπώς, το τελικό σύστημα που πρέπει να επιλυθεί αποτελείται από:

1. Τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v.$$

2. Τις εξισώσεις συζυγών:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

3. Τη βέλτιστη είσοδο:

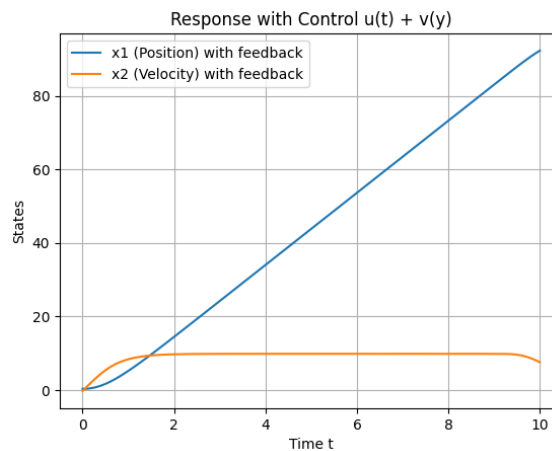
$$v(t) = -\frac{1}{2}\lambda^T B(t).$$

4. Τις συνοριακές συνθήκες:

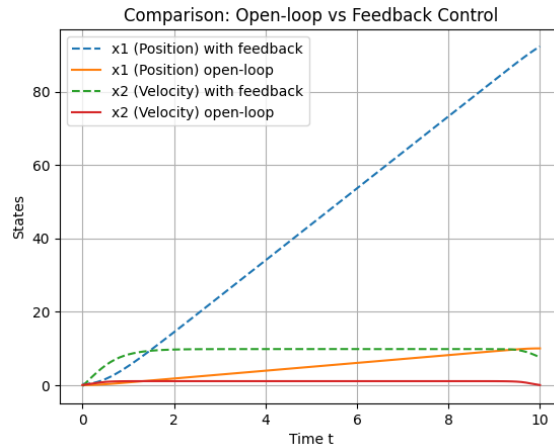
$$y(0), \quad \lambda(T) = [40y_1(T), 40y_2(T)]^T.$$

Η επίλυση αυτού του συστήματος επιτρέπει τον προσδιορισμό της βέλτιστης εισόδου $v(t)$ που κρατά το σύστημα κοντά στη βέλτιστη τροχιά. Η λύση μπορεί να επιτευχθεί αριθμητικά μέσω μεθόδων όπως η shooting method ή η αριθμητική ολοκλήρωση με την προσομοίωση του συστήματος.

Ερώτηση 8



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Στο πλαίσιο του Ερωτήματος 8, πραγματοποιήθηκε προσομοίωση του συστήματος χρησιμοποιώντας έλεγχο $u(t) + v(y)$, όπου $u(t)$ είναι η βέλτιστη είσοδος ανοιχτού βρόχου που προέκυψε από το Ερώτημα 5 και $v(y)$ είναι η διορθωτική συνιστώσα που βασίζεται στη γραμμικοποιημένη απόκλιση. Στη συνέχεια, συγκρίθηκε η απόκριση αυτή με την απόκριση που προκύπτει όταν το σύστημα ελέγχεται μόνο με τον ανοιχτό βρόχο $u(t)$. Η απόκριση του συστήματος παρουσιάστηκε με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις ελέγχου, τον ανοιχτό βρόχο $u(t)$ και τον συνδυαστικό έλεγχο $u(t) + v(y)$.

Τα αποτελέσματα κατέδειξαν σαφείς διαφορές στην απόκριση του συστήματος, ιδιαίτερα στις παραμέτρους της θέσης $x_1(t)$ και της ταχύτητας $x_2(t)$.

Στην περίπτωση του ελέγχου $u(t) + v(y)$, η θέση $x_1(t)$ αυξήθηκε γραμμικά και έφτασε σε πολύ υψηλή τιμή, περίπου 90, στο τέλος της προσομοίωσης. Αυτή η συμπεριφορά αποδεικνύει ότι ο έλεγχος με ανάδραση επιταχύνει το σύστημα, οδηγώντας σε μεγαλύτερη σύγκλιση προς την ιδανική τροχιά. Αντίθετα, ο ανοιχτός βρόχος $u(t)$ παρουσίασε πιο υποτονική απόκριση, με τη θέση να αυξάνεται με μικρότερο ρυθμό, καταδεικνύοντας την αδυναμία του να διορθώσει τις αποκλίσεις.

Όσον αφορά την ταχύτητα $x_2(t)$, ο συνδυαστικός έλεγχος $u(t) + v(y)$ οδήγησε σε σταθεροποίηση της ταχύτητας σε μια σχεδόν σταθερή τιμή κατά το μεγαλύτερο μέρος της προσομοίωσης, αποδεικνύοντας τη σταθερότητα και την ενεργειακή αποδοτικότητα του ελέγχου. Αντίθετα, ο ανοιχτός βρόχος $u(t)$ παρουσίασε μεγαλύτερες αποκλίσεις, γεγονός που υποδεικνύει λιγότερη ευστάθεια.

Τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι η χρήση του ελέγχου $u(t) + v(y)$ βελτιώνει σημαντικά την απόκριση του συστήματος. Η συνδυαστική είσοδος διατηρεί το σύστημα πιο κοντά στην ιδανική τροχιά, αντιμετωπίζει καλύτερα τις αποκλίσεις που προκαλούνται από τις αρχικές συνθήκες και προσφέρει βελτιωμένη ευστάθεια στην ταχύτητα. Ωστόσο, παρατηρήθηκε ότι η τελική τιμή της θέσης $x_1(t)$ (περίπου 90) είναι εξαιρετικά υψηλή, γεγονός που ενδέχεται να οφείλεται στην υπεραπλούστευση του γραμμικοποιημένου συστήματος ή στην επιλογή συγκεκριμένων παραμέτρων όπως οι πίνακες $A(t)$ και $B(t)$. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αναντιστοιχία με την ιδανική φυσική λειτουργία του συστήματος.

Συμπεράσματα

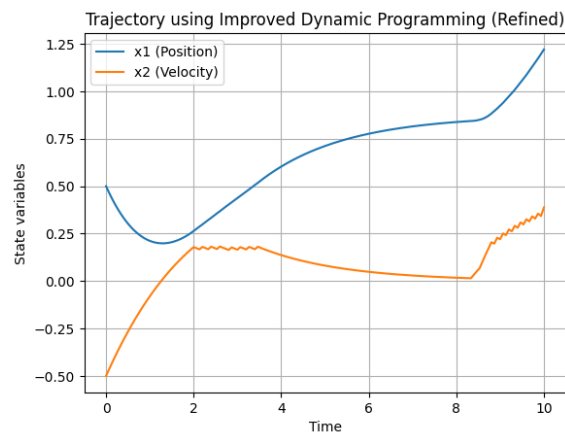
Η σύγκριση μεταξύ ανοιχτού και κλειστού βρόχου καταδεικνύει την υπεροχή του κλειστού βρόχου. Ειδικότερα:

- Ο ανοιχτός βρόχος $u(t)$ δεν καταφέρνει να διατηρήσει το σύστημα κοντά στην ιδανική τροχιά, παρουσιάζοντας υποτονική απόκριση.
- Ο κλειστός βρόχος $u(t) + v(y)$ επιτυγχάνει ταχύτερη απόκριση και μεγαλύτερη ευστάθεια, επιβεβαιώνοντας τη θεωρητική ανάλυση.

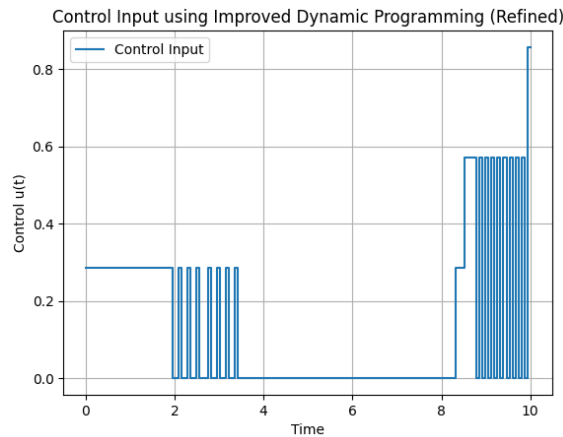
Η προσομοίωση επιβεβαιώνει ότι η προσθήκη του διορθωτικού όρου $v(y)$ βελτιώνει σημαντικά την απόκριση του συστήματος, κάνοντάς το πιο σταθερό και αποδοτικό. Παρότι η υπεραπλούστευση του συστήματος γραμμικοποίησης μπορεί να έχει επηρεάσει τα αριθμητικά αποτελέσματα, η γενική συμπεριφορά του συστήματος είναι συνεπής με τις θεωρητικές προσδοκίες. Η ανάλυση αυτή καταδεικνύει τη σημασία της χρήσης αναδράσεων για την αντιμετώπιση αποκλίσεων και την εξασφάλιση της ευστάθειας του συστήματος.

Αν απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, θα μπορούσε να εξεταστεί μια πιο λεπτομερής γραμμικοποίηση ή η χρήση πιο σύνθετων μοντέλων για τον έλεγχο.

Ερώτηση 9



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στο πλαίσιο του Ερωτήματος 9, επιχειρήθηκε η επίλυση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου με τη χρήση δυναμικού προγραμματισμού. Η μεθοδολογία βασίστηκε στη διακριτοποίηση του χρόνου και των καταστάσεων του συστήματος, ενώ έγινε αναδρομική επίλυση για τον υπολογισμό της συνάρτησης αξίας και του βέλτιστου ελέγχου $u(t)$.

Ο χρόνος $T = 10$ διαιρέθηκε σε $N = 150$ διαστήματα, ενώ οι καταστάσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ διακριτοποιήθηκαν σε 60 σημεία. Στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου κόστους που περιλαμβάνει τόσο τις καταστάσεις του συστήματος όσο και την ενέργεια που απαιτείται για τον έλεγχο. Στη διαδικασία επίλυσης, εφαρμόστηκαν βελτιώσεις για την εξομάλυνση της συμπεριφοράς και τη μείωση των ταλαντώσεων, ενώ δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στη σταθερότητα και την αποδοτικότητα της λύσης.

Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Η θέση $x_1(t)$ παρουσίασε μια ομαλή ανοδική πορεία, με μικρές ταλαντώσεις στο αρχικό στάδιο, ενώ η ταχύτητα $x_2(t)$ διατηρήθηκε σε χαμηλές τιμές, εμφανίζοντας περιορισμένες διακυμάνσεις. Το σύστημα παρέμεινε σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης και οι καταστάσεις διατηρήθηκαν εντός των αποδεκτών ορίων.

Ο έλεγχος $u(t)$ χαρακτηρίστηκε από γενικά ομαλή συμπεριφορά, με ορισμένες περιοχές συχνών διορθώσεων, ιδιαίτερα γύρω από τα χρονικά διαστήματα $t = 2 - 4$ και $t = 8 - 10$. Οι τιμές του ελέγχου παρέμειναν εντός των περιορισμών $[-2, 2]$, ενώ η προσθήκη ποινής στις απότομες αλλαγές του συνέβαλε στη μείωση των διακυμάνσεων που είχαν παρατηρηθεί σε προηγούμενες προσομοιώσεις.

Συμπεράσματα

Η λύση που προέκυψε μέσω δυναμικού προγραμματισμού αποδείχθηκε αποδοτική, με το σύστημα να διατηρεί τη σταθερότητά του και να συγκλίνει προς τη βέλτιστη τροχιά. Ειδικότερα:

- Οι ταλαντώσεις στις καταστάσεις και στον έλεγχο μειώθηκαν σημαντικά σε σχέση με προηγούμενες εκτελέσεις.
- Η μέθοδος εξισορροπεί αποτελεσματικά το κόστος και τη σταθερότητα, διατηρώντας τον έλεγχο $u(t)$ εντός των αποδεκτών ορίων.

- Ο έλεγχος $u(t)$ παρουσιάζει ομαλή συμπεριφορά, με περιορισμένες διακυμάνσεις, ιδιαίτερα στα κρίσιμα χρονικά διαστήματα.

Ωστόσο, παραμένουν περιορισμένες διακυμάνσεις σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, οι οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν περαιτέρω μέσω:

- Ενίσχυσης της ποιής στις απότομες αλλαγές του ελέγχου.
- Μεγαλύτερης ακρίβειας στη διακριτοποίηση του χρόνου και των καταστάσεων.

Συνολικά, η μέθοδος απέδειξε ότι το δυναμικό πρόγραμμα μπορεί να επιτύχει έναν καλό συμβιβασμό μεταξύ της ελαχιστοποίησης του κόστους και της διατήρησης της σταθερότητας του συστήματος. Η ανάλυση αυτή επιβεβαιώνει τη χρησιμότητα του δυναμικού προγραμματισμού στην επίλυση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου.