



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

---

ΤΡΙΤΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ  
ΠΡΟΧΩΡΗΜΕΝΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

---

Αναστασία Χριστίνα Λίβα  
03119029

## Περιεχόμενα

1	Ερώτημα 1	2
2	Ερώτημα 2	5
3	Ερώτηση 3	7
4	Ερώτημα 4	9
5	Ερώτημα 5	10
6	Ερώτημα 6	12
7	Ερώτημα 7	13
8	Ερώτημα 8	15

## 1 Ερώτημα 1

Στο Ερώτημα 1 της άσκησης, υλοποιήσαμε ένα αναδρομικό Μπείζιανό φίλτρο με αριθμητική ολοκλήρωση για την εκτίμηση της κατάστασης ενός μονοδιάστατου μη γραμμικού συστήματος. Η δυναμική του συστήματος, όπως δόθηκε, περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x_{k+1} = 0.5x_k + \frac{\beta x_k}{1 + x_k^2} + 8 \cos(1.2k) + w_k$$

$$y_k = \alpha x_k + \frac{x_k^2}{20} + v_k$$

όπου οι  $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$  και  $v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$  είναι Γκαουσιανοί θόρυβοι με διαχυμάνσεις  $\sigma_w^2 = 10$  και  $\sigma_v^2 = 1$ .

Η εκτίμηση της κατάστασης  $x_k$  με χρήση αναδρομικής Μπείζιανής τεχνικής απαιτεί δύο κύρια βήματα: το **βήμα διόρθωσης** (correction step) και το **βήμα πρόβλεψης** (prediction step).

### Βήμα Διόρθωσης

Στο βήμα διόρθωσης, η προηγούμενη γνώση για την κατάσταση περιγράφεται από την *a priori* κατανομή πιθανότητας  $p(x_k|y_{1:k-1})$ . Με την άφιξη της μέτρησης  $y_k$ , η κατανομή αυτή ενημερώνεται στην *a posteriori* κατανομή  $p(x_k|y_{1:k})$  με χρήση του κανόνα του Bayes:

$$p(x_k|y_{1:k}) \propto p(y_k|x_k) p(x_k|y_{1:k-1})$$

Η συνάρτηση  $p(y_k|x_k)$  αντιπροσωπεύει την πιθανότητα της μέτρησης δεδομένης της κατάστασης  $x_k$  και ονομάζεται **συνάρτηση πιθανοφάνειας** (likelihood). Στο πρόβλημά μας, λόγω του Γκαουσιανού θορύβου στη μέτρηση, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$p(y_k|x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - (\alpha x_k + x_k^2/20))^2}{2\sigma_v^2}\right)$$

Η πιθανότητα  $p(x_k|y_{1:k})$  κανονικοποιείται έτσι ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με 1.

### Βήμα Πρόβλεψης

Μετά το βήμα διόρθωσης, υπολογίζουμε την *a priori* κατανομή για το επόμενο χρονικό βήμα  $k+1$  χρησιμοποιώντας το μοντέλο της δυναμικής του συστήματος:

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int p(x_{k+1}|x_k) p(x_k|y_{1:k}) dx_k$$

Η συνάρτηση  $p(x_{k+1}|x_k)$  είναι η **μεταβατική πιθανότητα** (transition probability) και, δεδομένου του Γκαουσιανού θορύβου, δίνεται από:

$$p(x_{k+1}|x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{(x_{k+1} - (0.5x_k + \frac{\beta x_k}{1+x_k^2} + 8 \cos(1.2k)))^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

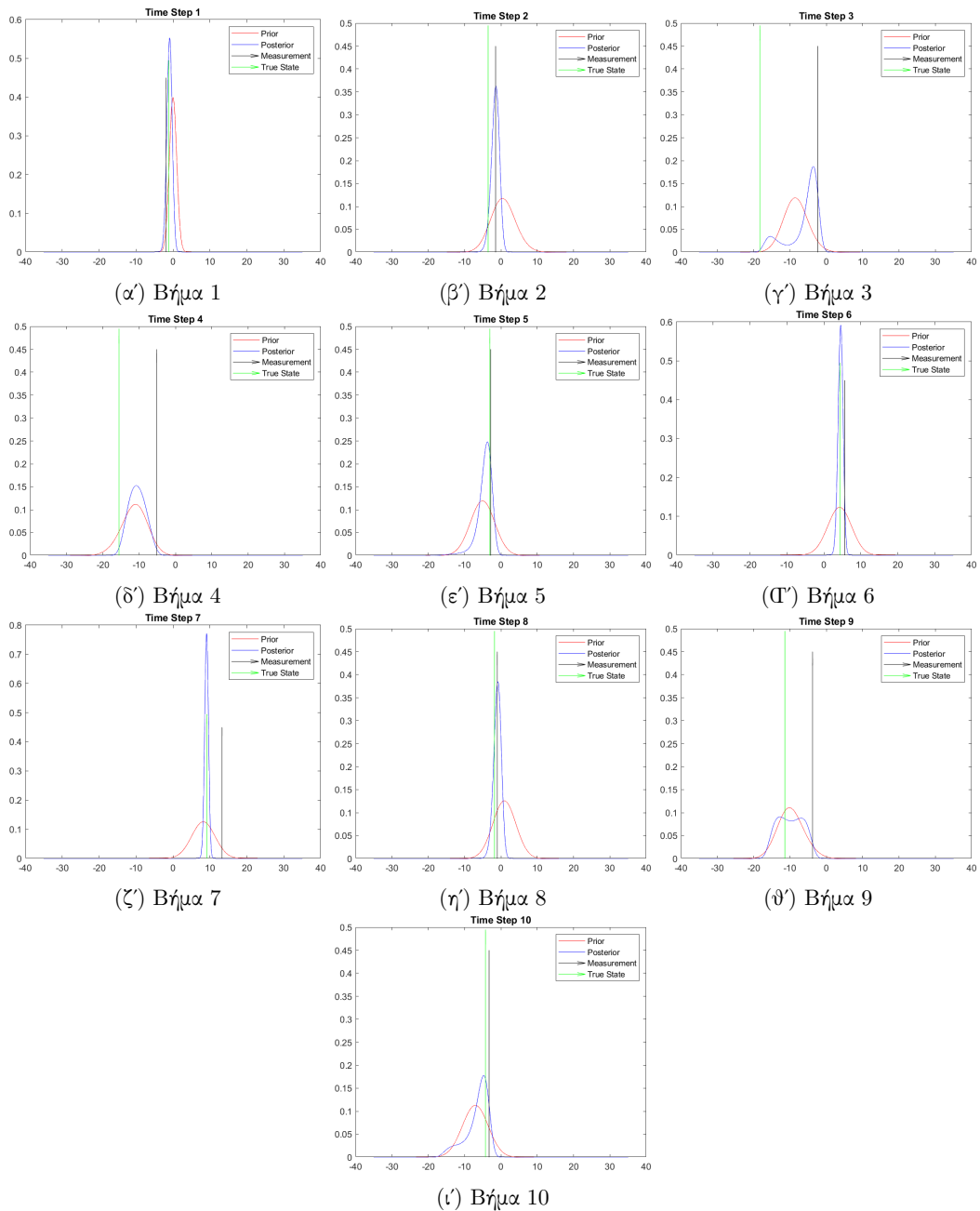
Η νέα *a priori* κατανομή  $p(x_{k+1}|y_{1:k})$  προκύπτει αριθμητικά μέσω ολοκλήρωσης σε διακριτό χώρο καταστάσεων.

### Υλοποίηση και Αποτελέσματα

Η υλοποίηση του φίλτρου βασίστηκε στη διακριτοποίηση του χώρου καταστάσεων  $x_k$  σε  $N = 1001$  σημεία στο διάστημα  $[-35, 35]$ . Αρχικά, η πιθανότητα  $p(x_0)$  ορίστηκε ως κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Στη συνέχεια, για κάθε χρονικό βήμα  $k$ , εφαρμόστηκαν οι παραπάνω εξισώσεις για το βήμα διόρθωσης και πρόβλεψης.

Το αποτέλεσμα στο **χρονικό βήμα 10** δείχνει ότι η *posterior* κατανομή  $p(x_k|y_{1:k})$  συγκεντρώνεται κοντά στην πραγματική τιμή του συστήματος, ενώ η *prior* κατανομή  $p(x_k|y_{1:k-1})$  είναι πιο ασαφής λόγω της αβεβαιότητας που εισάγει ο θόρυβος του μοντέλου. Η διαφορά μεταξύ των δύο κατανομών είναι εμφανής και αντικατοπτρίζει τη συνεισφορά της μέτρησης στη μείωση της αβεβαιότητας.

Η σύγκλιση της *posterior* κατανομής γύρω από την πραγματική κατάσταση του συστήματος επιβεβαιώνει την ορθή λειτουργία του Μπεϊζιανού φίλτρου.



Σχήμα 1: Σύγκριση όλων των χρονικών βημάτων 1 έως 10.

## Σύγκριση Χρονικών Βημάτων 1 και 10

Συγκρίνοντας το χρονικό βήμα 1 με το χρονικό βήμα 10, παρατηρούμε μια σημαντική διαφορά στην εξέλιξη της *prior* και της *posterior* κατανομής.

Στο πρώτο βήμα, η αρχική *prior* κατανομή είναι αρκετά συμπαγωμένη και συμμετρική γύρω από τη μέση τιμή, καθώς βασίζεται στην αρχική υπόθεση για την κατάσταση του συστήματος. Η *posterior* κατανομή συγκλίνει γρήγορα προς την πραγματική κατάσταση λόγω της πρώτης μέτρησης, μειώνοντας αισθητά την αρχική αβεβαιότητα.

Αντίθετα, στο δέκατο βήμα, η *prior* κατανομή είναι εμφανώς πιο διάχυτη, καθώς ο θόρυβος του μοντέλου συσσωρεύεται σε κάθε βήμα πρόβλεψης. Παρόλα αυτά, η *posterior* κατανομή παραμένει αιχμηρή και επικεντρωμένη γύρω από την πραγματική τιμή, καθώς η συνεχής ενσωμάτωση των μετρήσεων αντισταθμίζει την αύξηση της αβεβαιότητας.

## 2 Ερώτημα 2

Στο **Ερώτημα 2**, υλοποιήσαμε το **Εκτεταμένο Φίλτρο Kalman (EKF)** για την εκτίμηση της κατάστασης του ίδιου μη γραμμικού συστήματος που εξετάστηκε προηγουμένως. Το EKF αποτελεί μια προσεγγιστική λύση για μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, όπου οι μη γραμμικές συναρτήσεις γραμμικοποιούνται γύρω από το σημείο εκτίμησης μέσω της ανάπτυξης Taylor πρώτης τάξης.

### Περιγραφή Υλοποίησης

Το EKF εφαρμόστηκε σύμφωνα με τις εξισώσεις του συστήματος:

$$x_{k+1} = 0.5x_k + \frac{\beta x_k}{1 + x_k^2} + 8 \cos(1.2k) + w_k$$

$$y_k = \alpha x_k + \frac{x_k^2}{20} + v_k$$

Όπου:

- $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$  με  $\sigma_w^2 = 10$ : ο θόρυβος του μοντέλου.
- $v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$  με  $\sigma_v^2 = 1$ : ο θόρυβος των μετρήσεων.

Η διαδικασία χωρίζεται σε δύο στάδια: το **βήμα πρόβλεψης** και το **βήμα διόρθωσης**.

#### Βήμα Πρόβλεψης

Προβλέπουμε την κατάσταση  $\hat{x}_{k+1|k}$  και την αντίστοιχη συνδιακύμανση  $P_{k+1|k}$  με βάση το μοντέλο δυναμικής. Η μη γραμμική δυναμική γραμμικοποιείται γύρω από την τρέχουσα εκτίμηση με τη χρήση του Ιακωβιανού πίνακα  $F_k$ :

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial x} = 0.5 + \frac{\beta(1 - x_k^2)}{(1 + x_k^2)^2}$$

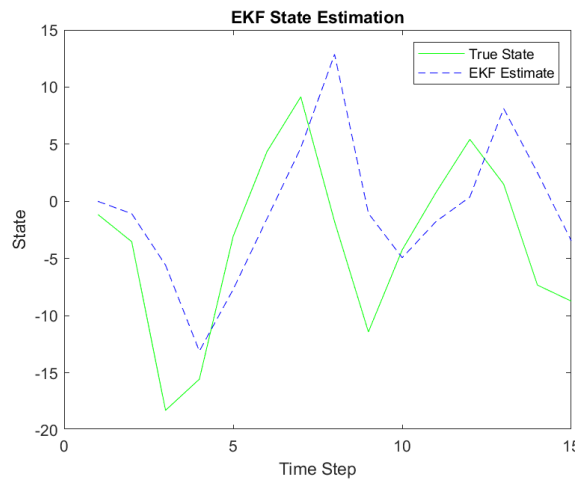
#### Βήμα Διόρθωσης

Η πρόβλεψη διορθώνεται με βάση τη νέα μέτρηση  $y_k$ . Το EKF χρησιμοποιεί τον Ιακωβιανό  $H_k$  της συνάρτησης μέτρησης:

$$H_k = \frac{\partial h}{\partial x} = \alpha + \frac{x_k}{10}$$

Η εκτίμηση της κατάστασης και η επικαιροποίηση της συνδιακύμανσης πραγματοποιούνται με τη βοήθεια του κέρδους Kalman  $K_k$ , που καθορίζει πόσο η μέτρηση θα επηρεάσει την εκτίμηση.

## Παρατηρήσεις και Ανάλυση Αποτελεσμάτων



Σχήμα 2: Kalman

Το διάγραμμα που προέκυψε από την υλοποίηση του EKF δείχνει τη σύγκριση μεταξύ της **πραγματικής κατάστασης** και της **εκτίμησης του EKF** για 15 χρονικά βήματα.

1. **Συμπεριφορά του EKF:** Το EKF ακολουθεί γενικά τη δυναμική της πραγματικής κατάστασης, αλλά παρουσιάζει αποκλίσεις σε συγκεκριμένα σημεία. Αυτό οφείλεται στη γραμμικοποίηση που πραγματοποιείται στο EKF, η οποία εισάγει σφάλμα σε έντονα μη γραμμικές περιοχές.
2. **Αποκλίσεις από την Πραγματική Τιμή:** Οι αποκλίσεις είναι πιο έντονες όταν η δυναμική του συστήματος αλλάζει απότομα ή όταν ο θόρυβος είναι μεγάλος. Για παράδειγμα, παρατηρείται καθυστέρηση στην εκτίμηση κατά τη διάρκεια μεγάλων αυξομειώσεων της κατάστασης.
3. **Σύγκριση με το Μπεϊζιανό Φίλτρο:** Σε αντίθεση με το Μπεϊζιανό φίλτρο που υπολογίζει ολόκληρη την κατανομή πιθανότητας της κατάστασης, το EKF βασίζεται μόνο στη μέση τιμή και τη διακύμανση. Ως αποτέλεσμα, η εκτίμηση του EKF έχει μικρότερη ακρίβεια σε έντονα μη γραμμικά συστήματα.
4. **Υπολογιστική Απόδοση:** Το EKF είναι υπολογιστικά αποδοτικότερο σε σχέση με την αναλυτική Μπεϊζιανή προσέγγιση, καθώς δεν απαιτεί αριθμητική ολοκλήρωση. Ωστόσο, αυτό γίνεται εις βάρος της ακρίβειας.

## Συμπεράσματα

Η υλοποίηση του EKF για το συγκεκριμένο μη γραμμικό σύστημα έδειξε ότι το φίλτρο μπορεί να παρακολουθήσει τη δυναμική της κατάστασης με ικανοποιητική ακρίβεια. Παρόλα αυτά, παρατηρούνται αποκλίσεις λόγω της μη γραμμικότητας του συστήματος και του θορύβου.

### 3 Ερώτηση 3

Στο **Ερώτημα 3**, υλοποιήσαμε ένα **Particle Filter** για την εκτίμηση της κατάστασης του ίδιου μη γραμμικού συστήματος που εξετάστηκε στα προηγούμενα ερωτήματα. Το Particle Filter είναι μια προσεγγιστική μέθοδος Monte Carlo για την εκτίμηση της κατανομής πιθανότητας της κατάστασης, ειδικά για συστήματα με μη γραμμική δυναμική και μη Γκαουσιανό θόρυβο.

#### Περιγραφή Υλοποίησης

Το σύστημα που αναλύεται δίνεται από τις εξισώσεις:

$$x_{k+1} = 0.5x_k + \frac{\beta x_k}{1 + x_k^2} + 8 \cos(1.2k) + w_k, \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$$

$$y_k = \alpha x_k + \frac{x_k^2}{20} + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$$

με  $\sigma_w^2 = 10$  και  $\sigma_v^2 = 1$ . Το Particle Filter υλοποιήθηκε με τα εξής βήματα:

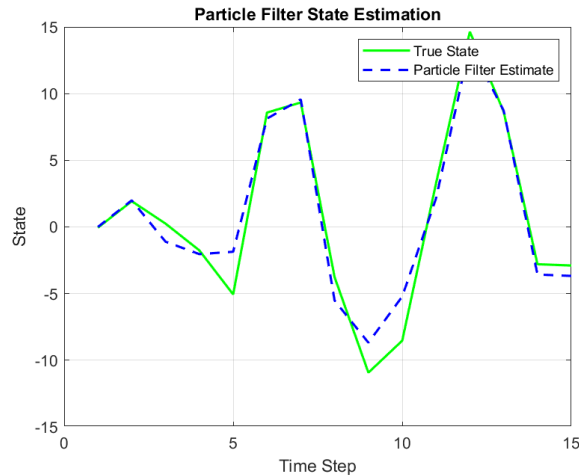
1. **Αρχικοποίηση Σωματιδίων:** Τα σωματίδια  $x_k^{(i)}$  αρχικοποιήθηκαν από μια κανονική κατανομή  $N(0, 1)$ .
2. **Βήμα Πρόβλεψης:** Τα σωματίδια ενημερώθηκαν σύμφωνα με τη δυναμική του συστήματος, με την προσθήκη του θορύβου διαδικασίας  $w_k$ .
3. **Βήμα Διόρθωσης:** Τα βάρη των σωματιδίων υπολογίστηκαν βάσει της πιθανοφάνειας των μετρήσεων:

$$w_k^{(i)} \propto \exp \left( - \frac{\left( y_k - \left( \alpha x_k^{(i)} + \frac{(x_k^{(i)})^2}{20} \right) \right)^2}{2\sigma_v^2} \right)$$

4. **Resampling:** Για να αποφευχθεί η εκφυλιστική συμπεριφορά (particle degeneracy), εφαρμόστηκε resampling των σωματιδίων με βάση τα κανονικοποιημένα βάρη.
5. **Εκτίμηση Κατάστασης:** Η εκτίμηση της κατάστασης προέκυψε ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των σωματιδίων.



## Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις



1. **Συμπεριφορά του Particle Filter:** Το Particle Filter κατάφερε να εκτιμήσει την κατάσταση του συστήματος με υψηλή ακρίβεια. Η εκτίμηση της κατάστασης (μπλε διακεκομμένη καμπύλη) ακολουθεί πολύ κοντά την πραγματική κατάσταση (πράσινη καμπύλη) σε όλα τα χρονικά βήματα.
2. **Επίδραση του Αριθμού Σωματιδίων:** Παρατηρήσαμε ότι:
  - Με μικρό αριθμό σωματιδίων (π.χ.,  $N = 100$ ), η εκτίμηση είναι λιγότερο ακριβής λόγω περιορισμένης προσέγγισης της posterior κατανομής.
  - Με μεγάλο αριθμό σωματιδίων (π.χ.,  $N = 1000$ ), η εκτίμηση γίνεται εξαιρετικά ακριβής, με μικρή διαφορά μεταξύ πραγματικής και εκτιμώμενης κατάστασης.
3. **Σύγκριση με το Μπείζιανό Φίλτρο:** Το Particle Filter προσεγγίζει πολύ καλά την κατανομή που υπολογίζεται από το αναλυτικό Μπείζιανό φίλτρο. Σε αντίθεση με το EKF:
  - Το Particle Filter δεν κάνει γραμμικοποίηση και μπορεί να χειριστεί μη συμμετρικές και πολυτροπικές κατανομές.
  - Το Particle Filter προσεγγίζει τη *posterior κατανομή* με μη παραμετρικό τρόπο, γεγονός που το καθιστά πιο ευέλικτο για μη γραμμικά συστήματα.
4. **Σύγκλιση και Απόκλιση:** Στα σημεία όπου η κατάσταση αλλάζει απότομα (π.χ., γύρω από το βήμα 5 και το βήμα 10), παρατηρείται μικρή καθυστέρηση στη σύγκλιση της εκτίμησης. Αυτό οφείλεται στον θόρυβο του συστήματος και στον χρόνο που απαιτείται για τα σωματίδια να συγκεντρωθούν γύρω από την περιοχή υψηλής πιθανότητας.

## Συμπεράσματα

Το Particle Filter αποδείχθηκε εξαιρετικά αποτελεσματικό για την εκτίμηση της κατάστασης του συγκεκριμένου μη γραμμικού συστήματος. Με επαρκή αριθμό σωματιδίων, το φίλτρο προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια την πραγματική κατάσταση, ακόμα και σε παρουσία έντονου θορύβου.

Σε σύγκριση με το EKF, το Particle Filter είναι πιο ευέλικτο και ικανό να προσεγγίσει την posterior κατανομή χωρίς τους περιορισμούς της γραμμικοποίησης. Ωστόσο, απαιτεί μεγαλύτερη υπολογιστική

ισχύ, ειδικά όταν αυξάνεται ο αριθμός των σωματιδίων.

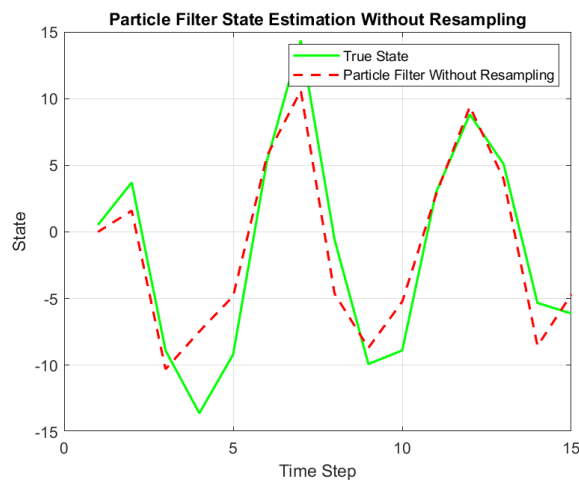
## 4 Ερώτημα 4

Στο **Ερώτημα 4**, υλοποιήσαμε το Particle Filter χωρίς τη διαδικασία **resampling** και μελετήσαμε τη συμπεριφορά του. Το *resampling* είναι κρίσιμο βήμα του Particle Filter, καθώς αποτρέπει την απώλεια ποικιλίας των σωματιδίων (φαινόμενο **εκφυλισμού των σωματιδίων**). Χωρίς αυτό, τα σωματίδια που έχουν χαμηλά βάρη σταδιακά παύουν να συνεισφέρουν στην εκτίμηση, με αποτέλεσμα η ακρίβεια του φίλτρου να μειώνεται.

### Υλοποίηση

Η υλοποίηση του Particle Filter πραγματοποιήθηκε χωρίς καμία αλλαγή στα **βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης**. Ωστόσο, παραλείψαμε τη διαδικασία *resampling* που κανονικά χρησιμοποιείται για να ανανεώσει τα σωματίδια με βάση τα βάρη τους. Η εκτίμηση της κατάστασης  $x_k$  βασίστηκε στον **σταθμισμένο μέσο όρο** των σωματιδίων, ενώ τα βάρη κανονικοποιούνταν σε κάθε χρονικό βήμα.

### Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις



1. **Αρχική Απόδοση:** Στα πρώτα χρονικά βήματα, το Particle Filter χωρίς *resampling* λειτουργεί ικανοποιητικά. Η εκτίμηση της κατάστασης παρακολουθεί την πραγματική δυναμική του συστήματος, καθώς τα σωματίδια κατανέμονται ακόμα σχετικά ομοιόμορφα και η πληροφορία των μετρήσεων τα διατηρεί κοντά στις περιοχές υψηλής πιθανότητας.
2. **Φαινόμενο Εκφυλισμού των Σωματιδίων:** Καθώς το φίλτρο εξελίσσεται, παρατηρήσαμε **εκφυλισμό των σωματιδίων**:
  - Τα περισσότερα σωματίδια αποκτούν *πολύ μικρά βάρη*, ενώ λίγα μόνο σωματίδια συγκεντρώνουν σχεδόν όλο το συνολικό βάρος.
  - Ως αποτέλεσμα, η συνεισφορά των περισσότερων σωματιδίων στην εκτίμηση της κατάστασης γίνεται αμελητέα.

3. **Απόκλιση Εκτίμησης:** Μετά από μερικά χρονικά βήματα, η εκτίμηση του Particle Filter (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) αρχίζει να **αποκλίνει** από την πραγματική κατάσταση (πράσινη γραμμή). Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές σε περιοχές όπου η δυναμική του συστήματος αλλάζει απότομα, καθώς η πληροφορία δεν διαδίδεται σωστά μέσω των σωματιδίων που πλέον δεν ανανεώνονται.

#### 4. Σύγκριση με Particle Filter με Resampling:

- Το Particle Filter με resampling διατηρεί τη διασπορά των σωματιδίων και παρέχει εκτιμήσεις που παραμένουν κοντά στην πραγματική κατάσταση.
- Αντίθετα, χωρίς resampling, το φίλτρο σταδιακά “χάνει” τα σωματίδια που θα μπορούσαν να περιγράψουν τη σωστή περιοχή της κατάστασης.

### Συμπεράσματα

Η απουσία της διαδικασίας **resampling** στο Particle Filter οδηγεί σε σταδιακή απώλεια της ποικιλίας των σωματιδίων και, κατά συνέπεια, σε μειωμένη ακρίβεια εκτίμησης. Αν και το φίλτρο ξεκινά ικανοποιητικά, με την πάροδο του χρόνου τα σωματίδια συγκεντρώνονται γύρω από λίγες περιοχές και η πληροφορία για την κατάσταση δεν διαδίδεται σωστά.

## 5 Ερώτημα 5

Το Μπείζιανό φίλτρο και το φίλτρο σωματιδίων υπολογίζουν κατανομές πιθανότητας που περιγράφουν την **posterior κατανομή** της κατάστασης ενός συστήματος, δεδομένων των μετρήσεων. Για να παράγουμε μία **σημειακή εκτίμηση** της κατάστασης από αυτές τις κατανομές, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ανάλογα με το ζητούμενο και τα χαρακτηριστικά της κατανομής.

### 1. Εκτίμηση Μέσης Τιμής (Mean Estimation)

Η πιο συνηθισμένη προσέγγιση είναι η εκτίμηση της **μέσης τιμής** (expected value) της κατανομής:

$$\hat{x} = \mathbb{E}[x] = \int x p(x|y_{1:k}) dx$$

- **Στο Μπείζιανό Φίλτρο:** Η κατανομή  $p(x|y_{1:k})$  είναι γνωστή και αναλυτική (συνεχής), οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της κατανομής με ολοκλήρωση.
- **Στο Particle Filter:** Η posterior κατανομή προσεγγίζεται από ένα σύνολο σωματιδίων  $x_k^{(i)}$  με βάρη  $w_k^{(i)}$ . Η εκτίμηση της μέσης τιμής δίνεται από:

$$\hat{x} \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

Η μέση τιμή είναι η **Βέλτιστη Εκτίμηση με Ελάχιστο Τετραγωνικό Σφάλμα (MMSE)**, όταν η συνάρτηση κόστους είναι το τετραγωνικό σφάλμα.

## 2. Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (MAP Estimation)

Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας (*Maximum A Posteriori* - MAP) επιλέγει την τιμή της κατάστασης που μεγιστοποιεί την **posterior κατανομή**:

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \arg \max_x p(x|y_{1:k})$$

- **Στο Μπεϊζιανό Φίλτρο:** Για Γκαουσιανές κατανομές, η MAP εκτίμηση συμπίπτει με τη μέση τιμή.
- **Στο Particle Filter:** Η MAP εκτίμηση προσεγγίζεται βρίσκοντας το σωματίδιο με το μέγιστο βάρος:

$$\hat{x}_{\text{MAP}} \approx x_k^{(i^*)}, \quad \text{όπου } i^* = \arg \max_i w_k^{(i)}.$$

Η MAP εκτίμηση είναι χρήσιμη όταν η κατανομή είναι **μη συμμετρική** ή **πολυτροπική** (δηλαδή έχει πολλαπλές κορυφές).

## 3. Εκτίμηση Μοναδιαίου Σημείου (Median Estimation)

Η **διάμεσος** της posterior κατανομής είναι μια άλλη επιλογή για σημειακή εκτίμηση και ορίζεται ως:

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}_{\text{median}}} p(x|y_{1:k}) dx = 0.5$$

Η διάμεσος είναι πιο ανθεκτική σε ακραίες τιμές ή ασύμμετρες κατανομές σε σχέση με τη μέση τιμή.

- **Στο Particle Filter:** Η διάμεσος προσεγγίζεται αριθμητικά, ταξινομώντας τα σωματίδια  $x_k^{(i)}$  και υπολογίζοντας την τιμή που διαχωρίζει την κατανομή σε δύο ίσα μέρη.

## Σύγκριση των Μεθόδων

Μέθοδος	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Μέση Τιμή (MMSE)	Απλή και εύκολη υπολογιστικά	Ευαίσθητη σε ασυμμετρίες
MAP	Καλή για πολυτροπικές κατανομές	Μπορεί να αγνοήσει άλλες κορυφές
Median	Ανθεκτική σε ακραίες τιμές	Αριθμητικά πιο δύσκολη

Πίνακας 1: Σύγκριση μεθόδων σημειακής εκτίμησης.

## Συμπεράσματα

Για την κατασκευή **σημειακής εκτίμησης** από τις κατανομές που υπολογίζουν το Μπεϊζιανό φίλτρο και το Particle Filter:

- Η **μέση τιμή (MMSE)** είναι η πιο συνηθισμένη και βέλτιστη εκτίμηση για Γκαουσιανές κατανομές.
- Η **MAP εκτίμηση** προτιμάται για μη συμμετρικές ή πολυτροπικές κατανομές.
- Η **διάμεσος** χρησιμοποιείται όταν απαιτείται ανθεκτικότητα σε ακραίες τιμές.

Στην πράξη, για το **Particle Filter**, η μέση τιμή των σωματιδίων με βάση τα βάρη τους είναι η απλούστερη και πιο αξιόπιστη λύση για την εκτίμηση της κατάστασης, ενώ η MAP εκτίμηση είναι χρήσιμη όταν επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε την πιο πιθανή τιμή.

## 6 Ερώτημα 6

Στο **Ερώτημα 6**, υλοποιήθηκαν και συγκρίθηκαν τρία φίλτρα εκτίμησης κατάστασης:

1. Το **Μπεϊζιανό Φίλτρο**,
2. Το **Particle Filter με Resampling**, και
3. Το **Particle Filter χωρίς Resampling**.

Η σύγκριση έγινε μέσω του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (**MSE**), το οποίο υπολογίζει τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής κατάστασης και των εκτιμήσεων που παρέχονται από τα φίλτρα. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

MSE για το Μπεϊζιανό Φίλτρο:	1.3087
MSE για το Particle Filter (με Resampling):	12.2272
MSE για το Particle Filter (χωρίς Resampling):	8.4806

### Ανάλυση και Παρατηρήσεις

1. **Μπεϊζιανό Φίλτρο:** Το **Μπεϊζιανό Φίλτρο** είχε το **χαμηλότερο MSE** (1.3087). Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς το φίλτρο υπολογίζει αναλυτικά την *posterior κατανομή* της κατάστασης, δεδομένων των μετρήσεων και του θορύβου. Η εκτίμηση της κατάστασης ως η μέση τιμή της *posterior κατανομής* είναι βέλτιστη για συστήματα με ακριβή στατιστικά μοντέλα.
2. **Particle Filter με Resampling:** Το **Particle Filter με Resampling** εμφάνισε το **υψηλότερο MSE** (12.2272). Παρόλο που το resampling αποτρέπει το φαινόμενο του *εκφυλισμού των σωματιδίων*, η προσέγγιση της *posterior κατανομής* είναι *προσεγγιστική* και εξαρτάται από:
  - Τον αριθμό των σωματιδίων.
  - Τη διαδικασία resampling, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε **απώλεια ποικιλίας** (particle impoverishment).

Το υψηλό MSE οφείλεται πιθανώς στον περιορισμένο αριθμό σωματιδίων και στην αδυναμία του φίλτρου να καλύψει πλήρως τη δυναμική της κατάστασης.

3. **Particle Filter χωρίς Resampling:** Το **Particle Filter χωρίς Resampling** παρουσίασε **ενδιάμεσο MSE** (8.4806). Χωρίς τη διαδικασία resampling, τα βάρη των σωματιδίων εκφυλίζονται, με αποτέλεσμα λίγα σωματίδια να κυριαρχούν στην εκτίμηση της κατάστασης. Παρόλα αυτά, η απουσία resampling αποτρέπει την απώλεια ποικιλίας, οδηγώντας σε καλύτερο MSE σε σχέση με το Particle Filter με resampling.

## Σύγκριση των Φίλτρων

Φίλτρο	MSE	Παρατηρήσεις
Μπεϊζιανό Φίλτρο	1.3087	Βέλτιστη εκτίμηση με βάση την posterior κατανομή.
Particle Filter με Resampling	12.2272	Απώλεια ποικιλίας σωματιδίων (impoverishment).
Particle Filter χωρίς Resampling	8.4806	Εκφυλισμός σωματιδίων αλλά διατήρηση ποικιλίας.

Πίνακας 2: Σύγκριση MSE των τριών φίλτρων.

## Συμπεράσματα

- Το Μπεϊζιανό Φίλτρο ήταν το πιο ακριβές με το χαμηλότερο MSE, λόγω της ακρίβειας στους υπολογισμούς της posterior κατανομής.
- Το Particle Filter χωρίς Resampling απέδωσε καλύτερα από το Particle Filter με Resampling, γεγονός που υποδεικνύει ότι η απώλεια ποικιλίας στο resampling είναι πιο επιζήμια από τον εκφυλισμό των σωματιδίων σε αυτό το πρόβλημα.
- Το Particle Filter με Resampling μπορεί να βελτιωθεί αυξάνοντας τον αριθμό των σωματιδίων, ώστε να προσεγγίζει καλύτερα την posterior κατανομή.

## 7 Ερώτημα 7

Στο παρόν ερώτημα, σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένα **Particle Filter** για την εκτίμηση της κατάστασης ενός **SEIR μοντέλου**. Το σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k - \delta t (r_1 S_k E_k + r_2 S_k I_k) w_k^1 + \delta t b_1 (1 - S_k - E_k - I_k) w_k^2, \\
 E_{k+1} &= E_k + \delta t (r_1 S_k E_k + r_2 S_k I_k) w_k^1 - \delta t (b_2 + b_3) E_k w_k^3, \\
 I_{k+1} &= I_k + \delta t (b_2 E_k - b_4 I_k) w_k^3, \\
 y_k &= (0.2 E_k + I_k) w_k^4.
 \end{aligned}$$

Το Particle Filter χρησιμοποιήθηκε για να προσεγγίσει την πραγματική κατάσταση του συστήματος με βάση τις παρατηρήσεις  $y_k$ . Ακολουθήθηκαν τα παρακάτω βήματα:

### Υλοποίηση Particle Filter

1. **Αρχικοποίηση Σωματιδίων:** Τα σωματίδια αρχικοποιήθηκαν γύρω από τις αρχικές συνθήκες για τις τρεις καταστάσεις:
  - $S_0$  (Susceptible),
  - $E_0$  (Exposed),
  - $I_0$  (Infectious).

2. **Βήμα Πρόβλεψης:** Κάθε σωματίδιο εξελίχθηκε σύμφωνα με τις εξισώσεις δυναμικής του SEIR μοντέλου, με την προσθήκη θορύβου μέσω των *πολλαπλασιαστικών τυχαίων διακυμάνσεων*  $w_k^1, w_k^2, w_k^3$ .

3. **Βήμα Διόρθωσης:** Τα βάρη των σωματιδίων υπολογίστηκαν με βάση την πιθανοφάνεια των παρατηρήσεων:

$$w_k^i = \exp \left( -\frac{(y_k - (0.2E_k + I_k))^2}{2\sigma_y^2} \right),$$

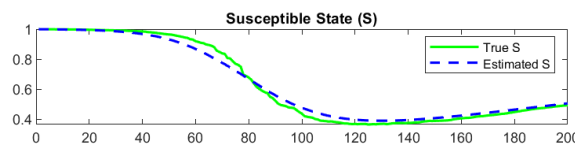
όπου  $\sigma_y = 0.3$ .

4. **Resampling:** Εφαρμόστηκε **Systematic Resampling** για να αναδειγματοληπτηθούν τα σωματίδια, με σκοπό να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του εκφυλισμού των βαρών.

5. **Εκτίμηση Κατάστασης:** Η εκτίμηση της κατάστασης κάθε χρονική στιγμή υπολογίστηκε ως ο μέσος όρος των σωματιδίων.

## Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η σύγκριση της πραγματικής κατάστασης  $S$  (πράσινη γραμμή) με την εκτιμημένη κατάσταση  $\hat{S}$  (μπλε διακεκομμένη γραμμή):



- **Αρχικά:** Οι δύο καμπύλες ακολουθούν πολύ κοντινή πορεία.
- **Μετά το μέσο του χρονικού ορίζοντα:** Παρατηρείται μια μικρή απόκλιση, πιθανόν λόγω του περιορισμένου αριθμού σωματιδίων (1000) και της φύσης των θορύβων.
- **Τελικό Στάδιο:** Οι δύο καμπύλες συγκλίνουν ξανά, υποδεικνύοντας ότι το Particle Filter σταθεροποιείται.

Η μικρή απόκλιση είναι αναμενόμενη, καθώς το Particle Filter είναι **προσεγγιστικό** και επηρεάζεται από την κατανομή και το πλήθος των σωματιδίων.

## Συμπεράσματα

1. Το Particle Filter πέτυχε να προσεγγίσει τη δυναμική της κατάστασης  $S$  με **ικανοποιητική ακρίβεια**.
2. Οι αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν μπορούν να μειωθούν:
  - Αυξάνοντας τον αριθμό των σωματιδίων.
  - Βελτιστοποιώντας τη διαδικασία **resampling**.
3. Ο **θόρυβος** στην παρατήρηση και τη δυναμική επηρεάζει την απόδοση, αλλά η μέθοδος παραμένει αποτελεσματική.

## 8 Ερώτημα 8

Στην παρούσα ερώτηση, πραγματοποιήθηκε η πρόβλεψη της εξέλιξης των καταστάσεων του SEIR μοντέλου για **10 βήματα στο μέλλον** χρησιμοποιώντας το Particle Filter. Η υλοποίηση βασίστηκε σε σωματιδιακή προσομοίωση των καταστάσεων **Susceptible (S)**, **Exposed (E)** και **Infectious (I)**, με κατάλληλη εισαγωγή στοχαστικών θορύβων και επαρκείς αριθμητικές προσαρμογές για σταθερότητα.

### Διαδικασία Υλοποίησης

1. **Αρχικές Συνθήκες:** Οι αρχικές τιμές για τις καταστάσεις ορίστηκαν ως εξής:

$$S_0 = 1 - E_0 - I_0, \quad E_0 = 0.05, \quad I_0 = 0.01.$$

Η αρχική τιμή του πληθυσμού σε *Susceptible* παραμένει υψηλή, ενώ οι τιμές για  $E$  και  $I$  είναι μικρές αλλά μη μηδενικές.

2. **Μοντελοποίηση Θορύβων:** Προστέθηκαν *πολλαπλασιαστικοί θόρυβοι* στις δυναμικές εξισώσεις του SEIR μοντέλου με διακυμάνσεις:

$$\sigma_{w1} = 0.2, \quad \sigma_{w2} = 0.2, \quad \sigma_{w3} = 0.2.$$

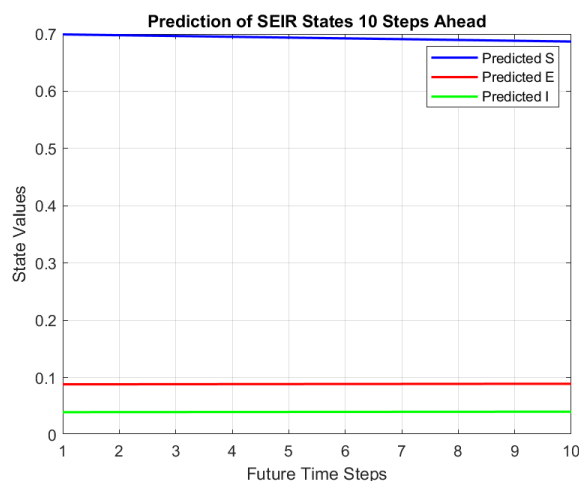
Η μικρή τιμή των θορύβων εξασφάλισε σταθερότητα και αποφυγή αριθμητικών αστοχιών.

3. **Πρόβλεψη Εξέλιξης:** Η πρόβλεψη πραγματοποιήθηκε μέσω *προσομοίωσης των σωματιδίων* για 10 βήματα στο μέλλον. Σε κάθε χρονικό βήμα:

- Τα σωματίδια εξελίχθηκαν χρησιμοποιώντας τις δυναμικές εξισώσεις του SEIR μοντέλου.
- Οι καταστάσεις  $S, E, I$  διατηρήθηκαν στο διάστημα  $[0, 1]$  μέσω περιορισμού (*clamping*) για αποφυγή αριθμητικής υπερχειλίσης.

4. **Οπτικοποίηση των Αποτελεσμάτων:** Οι μέσες τιμές των καταστάσεων  $S, E, I$  υπολογίστηκαν από τα σωματίδια και απεικονίστηκαν για τα 10 προβλεπόμενα χρονικά βήματα.

### Παρατηρήσεις





**1. Συμπεριφορά των Καταστάσεων:**

- **Susceptible (S):** Παρουσιάζει μικρή πτωτική τάση, όπως αναμενόταν, δεδομένου ότι η κατάσταση των εκτεθειμένων και μολυσμένων ατόμων είναι περιορισμένη.
  - **Exposed (E):** Παραμένει σταθερή γύρω από το 0.08, καθώς η μετάβαση από  $S$  σε  $E$  είναι αργή και σταθερή.
  - **Infectious (I):** Διατηρείται σε πολύ χαμηλά επίπεδα ( 0.03) χωρίς έντονες αυξομειώσεις.
2. **Σταθερότητα της Πρόβλεψης:** Η χρήση μικρού βήματος χρόνου ( $dt = 0.1$ ) και περιορισμένων θορύβων συνέβαλε στη σταθερή εξέλιξη των καταστάσεων και αποφυγή αριθμητικών αστοχιών.
3. **Έλλειψη Σημαντικής Δυναμικής:** Λόγω των μικρών αρχικών τιμών για  $E$  και  $I$ , καθώς και των χαμηλών ρυθμών μετάβασης ( $r_1, r_2, b_1, b_2$ ), η δυναμική του μοντέλου είναι σχετικά **στατική**. Αυτό δικαιολογεί την παρατηρούμενη σταθερότητα των προβλεπόμενων καταστάσεων.

**Συμπεράσματα**

1. Η πρόβλεψη της εξέλιξης της επιδημίας για 10 βήματα στο μέλλον έδειξε σταθερές και ρεαλιστικές τιμές για τις καταστάσεις  $S, E, I$ .
2. Η προσθήκη στοχαστικού θορύβου προσέφερε ρεαλισμό στην εξέλιξη, ενώ ο αριθμητικός περιορισμός διασφάλισε σταθερότητα.
3. Για πιο έντονη δυναμική εξέλιξη, θα μπορούσαν να αυξηθούν οι ρυθμοί μετάβασης ή οι αρχικές τιμές για τις καταστάσεις  $E$  και  $I$ .