Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Εξηγείστε επαρκώς την εργασία σας. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην HELIOS ιστοσελίδα του μαθήματος `https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=964` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `cv23_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Επισημαίνεται ότι απαγορεύεται η ανάρτηση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων σε ιστοσελίδες ή η διανομή τους με οποιονδήποτε άλλο τρόπο. Η σχεδίαση και το περιεχόμενο των ασκήσεων αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της διδακτικής ομάδας του μαθήματος.

Ασκηση 2.1: (ΜΔΕ Ανάλυσης σε Πολλαπλές Κλίμακες)
Θεωρούμε την scale-space συνάρτηση $u(x,y,t)$ που προκύπτει ως λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (ΜΔΕ)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = ||\nabla u||\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{||\nabla u||}\right)$$

Αυτή η εξίσωση μοντελοποιεί μια μη-γραμμική ανισοτροπική διάχυση της αρχικής εικόνας $u(x,y,0)$ η οποία ομαλοποιεί επιλεκτικά και κατευθυντικά την εικόνα χωρίς άμβλυνση των ακμών σε πολλαπλές κλίμακες t. Να αποδειχθεί ότι αυτή η επιλεκτική ομαλοποίηση ισοδυναμεί με διάχυση σε κατεύθυνση παράλληλη των ακμών, δηλ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

όπου ξ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα σε κατεύθυνση κάθετη προς την ∇u.

Ασκηση 2.2: (Σχήμα - Καμπυλότητα) Θεωρούμε μια επίπεδη ομαλή καμπύλη $\vec{C} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση $\vec{C}(p) = (x(p), y(p))$. Η καμπυλότητα της ισούται με

$$\kappa(p) = \frac{x'(p)y''(p) - x''(p)y'(p)}{[(x'(p))^2 + (y'(p))^2]^{3/2}}, \quad x'(p) = dx/dp,\ y'(p) = dy/dp$$

Να βρεθεί αναλυτικά πως αλλάζει η καμπυλότητα αν η καμπύλη υποστεί τους εξής μετασχηματισμούς:
(a) Περιστροφή κατά γωνία θ ως προς τον x-άξονα.
(b) Παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Άσκηση 2.3: (Ανάλυση Υφής με ενεργειακά μοντέλα)
Στην ανάλυση υφής συχνά χρησιμοποιούνται τοπικά μοντέλα διαμόρφωσης που παριστάνουν μια συνιστώσα υφής ως $g(x,y) = a(x,y)\exp(j\phi(x,y))$, όπου $a(x,y)$ είναι το στιγμιαίο πλάτος, $\phi(x,y)$ η στιγμιαία φάση και $\nabla\phi(x,y)$ το διάνυσμα στιγμιαίων χωρικών συχνοτήτων. Για εξαγωγή αυτής της πληροφορίας από μια γκρίζα εικόνα $f(x,y)$, συχνά χρησιμοποιούνται συστοιχίες από quadrature ζεύγη φίλτρων με κρουστικές αποκρίσεις

$$h_1(x,y) = G_\sigma(x,y)\cos(ux+vy), \quad h_2(x,y) = G_\sigma(x,y)\sin(ux+vy)$$

όπου G_σ είναι μια Gaussian συνάρτηση (πιθανώς ανισοτροπική) και (u,v) είναι η κεντρική συχνότητα της συνιστώσας υφής. Εάν γνωρίζετε τα σήματα εξόδου $g_1 = f * h_1$ και $g_2 = f * h_2$ από τα δύο φίλτρα του quadrature ζεύγους και θεωρήσετε ότι αυτά τα σήματα προσεγγίζουν καλά το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα της συνιστώσας υφής g, περιγράψετε ένα υπολογιστικό σύστημα που θα εξάγει το πλάτος και στιγμιαίες συχνότητες της g από αυτά τα δεδομένα.

Ασκηση 2.4: (Ενεργές Καμπύλες)
Εστω η παραμετροποίηση $\vec{C}(p,t) = [x(p,t), y(p,t)]$, $p \in [0,1]$, μιας κλειστής ομαλής επίπεδης καμπύλης που εξελίσσεται βάσει μιας διαφορικής εξίσωσης κίνησης:

$$\frac{\partial \vec{C}(p,t)}{\partial t} = -\kappa \vec{N}_o(p,t)$$

όπου $\vec{N}_o(p,t)$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στα σημεία της καμπύλης. Να αποδειχθεί αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την μέθοδο μεταβολικού λογισμού του Εδαφίου 17.5.4 του βιβλίου Ο.Υ. 2005, ότι αυτή η κίνηση της καμπύλης ελαχιστοποιεί το μήκος της καμπύλης $L(\vec{C}) = \int_0^1 \sqrt{x_p^2 + y_p^2}dp$, όπου $x_p = x' = \partial x/\partial p$, με τον ταχύτερο δυνατό ρυθμό.

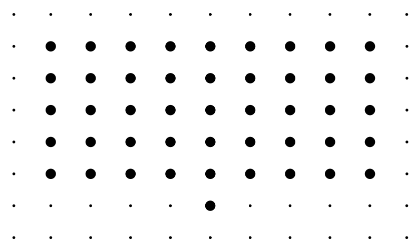
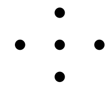
Άσκηση 2.5 (3Δ $\longrightarrow$ 2Δ Κίνηση):
Θεωρήστε ένα σημείο $X, Y, Z)$ στον 3Δ χώρο που ακολουθεί απλή μεταφορική κίνηση με ταχύτητα (U, V, W) από το σημείο εκκίνησης (X_0, Y_0, Z_0). Να γράψετε τις εξισώσεις για τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου προβολής στο επίπεδο εικόνας την χρονική στιγμή t. Να αποδειχθεί ότι το σημείο προβολής στην εικόνα κινείται κατα μήκος μιας ευθείας καθώς αυξάνει ο χρόνος t.

Άσκηση 2.6: (Προβολική Γεωμετρία) [2]
(α) Αφινικοί μετασχηματισμοί. Να αποδείξετε ότι για την περίπτωση των αφινικών μετασχηματισμών στο επίπεδο, είναι δυνατό να μετασχηματιστεί ένας κύκλος σε μία έλλειψη, ενώ είναι αδύνατο να μετασχηματιστεί μία έλλειψη σε υπερβολή ή παραβολή.
(β) Αφινικοί μετασχηματισμοί. Να αποδείξετε ότι για την περίπτωση των αφινικών μετασχηματισμών στο επίπεδο, ο λόγος των μηκών δύο παράλληλων ευθύγραμμων τμημάτων παραμένει σταθερός, ενώ ο λόγος των μηκών δύο μη παράλληλων ευθύγραμμων τμήματων δεν διατηρείται.
(γ) Ιδιότητες προβολικής κάμερας. Θεωρήστε τον 3×4 προβολικό πίνακα κάμερας (camera projection matrix) $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ (όπου με M συμβολίζεται ο αριστερός 3×3 υποπίνακας του P και με $\mathbf{p}_4$ η τέταρτη στήλη του). Να αποδείξετε ότι το κέντρο $\mathbf{C}$ της κάμερας αποτελεί τον μονοδιάστατο δεξιό μηδενοχώρο του P, δηλαδή $P\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Επίσης, να βρείτε και να αποδείξετε σε ποια μορφή θα είναι τα κέντρα των καμερών $\mathbf{C}$ στην περίπτωση των πεπερασμένων καμερών και καμερών στο άπειρο. Τέλος, η κάμερα που περιγράφεται από τον πίνακα $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μία πεπερασμένη κάμερα ή μία κάμερα στο άπειρο και γιατί; Ποιο είναι το κέντρο της;
(δ) Ιδιότητες προβολικής κάμερας. Να αποδείξετε ότι οι δύο πρώτες γραμμές του προβολικού πίνακα κάμερας P (συμβολίζονται με $\mathbf{P}^{1T}$ και $\mathbf{P}^{2T}$) αναπαριστούν επίπεδα στον χώρο που προσδιορίζονται από τις εξής δύο ιδιότητες: α) διέρχονται από το κέντρο $\mathbf{C}$ της κάμερας και β) περιλαμβάνουν όλα τα σημεία του χώρου τα οποία προβάλλονται στους άξονες της εικόνας $x = 0$ και $y = 0$, αντίστοιχα.
(ε) Θεμελιώδης πίνακας F. Θεωρήστε ότι δύο κάμερες ‘‘στοχεύουν’’ σε κάποιο σημείο του χώρου, με τέτοιο τρόπο ώστε οι δύο κύριοι άξονες (principal axis) των καμερών να τέμνονται σε αυτό το σημείο. Εάν οι συντεταγμένες της εικόνας είναι κανονικοποιημένες ούτως ώστε η αρχή των αξόνων τους $(0, 0)$ να συμπίπτει με το κύριο σημείο (principal point) του επιπέδου της εικόνας, τότε το στοιχείο F_{33} του θεμελιώδους πίνακα F είναι ίσο με μηδέν. Σημείωση: Το κύριο σημείο του επιπέδου της εικόνας ορίζεται ως το σημείο τομής του κύριου άξονα της κάμερας με το επίπεδο της εικόνας.

Άσκηση 2.7: (Ανάλυση Σχήματος με Μετ/σμό Απόστασης και Σκελετό)
Θεωρούμε μια διακριτή δυαδική εικόνα (σύνολο) X, που εγγράφεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 6×9 pixels (βλ. επισυναπτόμενο Σχήμα), και ένα συμμετρικό κυρτό δομικό στοιχείο B (που προσεγγίζει τον δίσκο με βάση τον οποίο γίνεται η σκελετικοποίηση του σχήματος).
(a) Να υπολογισθεί ο εσωτερικός μετασχηματισμός απόστασης $DT(X)$ του συνόλου X με τον two-pass forward-backward αλγόριθμο chamfer χρησιμοποιώντας την απόσταση cityblock. Να βρεθούν οι τιμές των εικόνων u_0 ($0/\infty$ indicator function του X), u_1 (ενδιάμεσο στάδιο απόστασης), και $u_2 = DT(X)$ (τελική απόσταση).
(b) Να υπολογισθεί ο μορφολογικός σκελετός $SK(X) = \bigcup_{n \geq 0} S_n(X)$, ως ένωση των σκελετικών υποσυνόλων $S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B]$, όπου B είναι ο 5-pixel ρόμβος. Επίσης, να βρεθούν τα σημεία των: erosions $X \ominus nB$, skeleton subsets $S_n(X)$, partial unions of skeleton subsets $U_{k \geq n} S_k(X)$, openings $X \circ nB$, για $n = 0, 1, 2, ...$
(Σημεία ενός συνόλου συμβολίζονται με '•', ενώ σημεία του συμπληρώματος του συμβολίζονται με '·')
(c) Να επαληθεύσετε υπολογιστικά για το ανωτέρω παράδειγμα ότι τα σημεία του σκελετού στο μέρος (b) είναι ακριβώς τα σημεία τοπικού μεγίστου του μετ/σμού απόστασης στο μέρος (a), όπου τα τοπικά μέγιστα υπολογίζονται με βάση την γειτονιά B.
Η λύση να επιστραφεί στην επισυναπτόμενη σελίδα με τον πίνακα σχημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

[1] Π. Μαραγκός, *Ανάλυση Εικόνων και Οραση Υπολογιστών*, ΕΜΠ, 2005-2022.
[2] Hartley - Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2003.

$X =$  , $B =$  $= B^s$.

Chamfer Distance $(a,b) = (1, +\infty)$

u_0 $(+ = +\infty)$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

u_1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

u_2

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Skeleton