Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων

Πρωτη Σειρα Ασκησεων
Οραση Υπολογιστων

Αναστασία Χριστίνα Λίβα
03119029
anachriliva@gmail.com

Σημείωση: Επειδή δεν πρόλαβα να τα περάσω όλα καοια ερωτήματα είναι χειρόγραφα και έχουν παραληφθεί κάποιες πράξεις λόγω τενοντίτιδας. Συγγνώμη

Άσκηση 1.1

Άσκηση 2.6 βιβλίου

α) Αν h η γραμμή του ορίζοντα, $Q \in h$, άρα Q σημείο φυγής. Εφόσον τα σημεία φυγής είναι σημεία τομής των προβολών πραγματικών τρισδιάστατων ευθειών τότε οι δυο ευθείες l και m είναι παράλληλες στον πραγματικό κόσμο.

β) Γνωρίζοντας τις θέσεις των σημείων Q και N πάνω στο Ε βρίσκω την QN. Αν το ορθογώνιο τρίγωνο QNV είναι ισοσκελές, η απόσταση VN, δηλ. η απόσταση του προοπτικού κέντρου ῞ από την εικόνα, είναι ίση με QN. Προκειμένου να βρεθεί, θέλουμε η γωνία NQV να ισουται με π/4. . Αρα η γωνία μεταξυ των δυο παραλληλων ευθειων και του άξονα α πρέπει να είναι π/4

γ) Οι δύο ευθείες θα πρέπει να είναι κάθετες ως προς τον άξονα α, ώστε η τομή των προβολών τους Χ να είναι ίδιο με το κεντρικό σημείο φυγής Ν.

δ) βλ τελος

Άσκηση 2.9 βιβλίου

Για την ορθογραφική προβολή έχω:

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$\Pi \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Για τον τρισδιάστατο μετασχηματισμό ομοιότητας έχω:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(P) = sRP + D, pou :$$
$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

και R είναι 3×3 πίνακας περιστροφής με στοιχεία ημιτονα.

Ο πίνακας R είναι ορθογώνιος, δηλαδή $R \cdot R^T = I_{3\times 3}$.

Έχω:

$$\Pi(T(P)) = \Pi(sRP + D) =$$
$$P\Bigg(\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \Bigg) =$$
$$P\Bigg(\begin{bmatrix} s(r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z) + D_1 \\ s(r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z) + D_2 \\ s(r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z) + D_3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} \\ sr_{21} & sr_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + sr_{13}z \\ D_2 + sr_{23}z \end{bmatrix}$$

Άρα η προβολή του τρισδιάσταρου μετασχηματισμού ομοιότητας T αντιστοιχεί σε δισδιάστατο αφινικό μετασχηματισμό

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d$$

όπου

$$L = \begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} \\ sr_{21} & sr_{22} \end{bmatrix}$$
$$d = \begin{bmatrix} D_1 + sr_{12}z \\ D_2 + sr_{23}z \end{bmatrix}$$

Γενικά, για να αποδείξω ότι ενα τρισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας ενός τρισδιάστατου αντικειμένου αντιστοιχεί σε εναν 2δ μετασχηματισμό στο επίπεδο της εικόνας μέσω ορθογραφικής προβολής πρεπει να δείξω ότι ο μετασχηματισμός διατηρεί τις κατευθύνσεις των ευθειών, τις αναλογίες των αποστάσεων ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες και τις γωνίες μεταξύ των ευθειών.

Μετατόπιση: Μια μετατόπιση κατά διάνυσμα $D = (D_1, D_2, D_3$ αντιστοιχεί σε παράλληλη μετατόπιση στηο επίπεδο της εικόνας κατά το ίδιο διάνυσμα $D = (D_1, D_2)$. Αυτό συμβαίνει επειδή οι προβολές των ευθειών από κάθε σημείο P του αντικείμενου στο επίπεδο της εικόνας ειναι παράλληλες οπότε η μετατόπιση διατηρείται.

Περιστροφή: Μια περίστροφή κατά γωνία θ γύρω από κάποιον άξονα αντιστοιχεί σε γραμμικό μετασχηματισμό στο επίπεδο της εικόνας. Αυτό συμβαίνει επειδή οι προβολές των ευθειών από κάθε σημείο P του αντικείμενου στο επίπεδο της εικόνας είναι κάθετες στο επίπεδο της εικόνας, οπότε διατηρείται και η γωνία μεταξύ οποιωνδήποτε ευθειών,

Scaling: Ένα scale κατά παράγοντα $s > 0$ σε όλους τους άξονες αντιστοιχεί σε διαστολή στο επίπεδο της εικόνας κατά τον ίδιο παράγονρα. Αυτό συμβαίνει επειδή οι προβολές των ευθειών από κάθε σημείο P του αντικείμενου στο επίπεδο της εικόνας ειναι παράλληλες οπότε η μετατόπιση διατηρείται. Ομοίως για σμίκρυνση.

Άσκηση 1.2

Άσκηση 2.12 βιβλίου

Η επιφάνεια είναι Lambertian η εκπεμπόμενη radiance είναι σταθερά:

$$L = \frac{\Delta\Phi}{Acos(\theta)\Delta\Omega} = \text{σταθερά}$$

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Επομένως η ακτινοβόλος είναι ένταση θα ισούται με

$$J(\theta) = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega} = LAcos(\theta) = J(0)cos(\theta)$$

$$J(0) = LA$$

Άσκηση 2.14 βιβλίου

Έχω $\Omega = 4\pi\text{sr}$

$$\Omega = \frac{A}{h^2} = \frac{A}{4}$$

$$I_e = J_e\frac{\Omega}{A} = \frac{J_e}{h^2} = \frac{J_e}{4}$$

Από το σχήμα έχω $\kappa(650) = 68$

$$J_e = \frac{100}{4\pi} = 7.96w/sr$$

$$J_v = 68 \cdot J_e = 541.28cd$$

$$I_e = \frac{J_e}{h^2} = \frac{7.96}{4} = 1.99 w/m^2$$
$$I_v = 68 \cdot I_e = 135.32 lux$$

Άσκηση 1.3

α) Χρησιμοποιώ τον ακόλουθο τύπο για το Gabor φίλτρο:

$$\exp\left[-(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K)\right] \exp\left[j(ux + vy + \varphi)\right]$$

και έχω:

$$A = \frac{cos^2\theta}{4\alpha^2} + \frac{sin^2\theta}{4b^2}$$
$$B = sin(2\theta)(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{b^2}$$
$$c = \frac{cos^2\theta}{4b^2} + \frac{sin^2\theta}{4\alpha^2}$$
$$D = -(2(\frac{cos^2\theta}{4\alpha^2} + \frac{sin^2\theta}{4b^2})x_c + (sin(2\theta)(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{b^2})y_c)$$
$$E = -(2(\frac{cos^2\theta}{4b^2} + \frac{sin^2\theta}{4\alpha^2})y_c + sin(2\theta)(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{b^2})x_c)$$
$$K = (\frac{cos^2\theta}{4\alpha^2} + \frac{sin^2\theta}{4b^2})x_c^2 + (sin(2\theta)(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{b^2})x_c y_c + (\frac{cos^2\theta}{4b^2} + \frac{sin^2\theta}{4\alpha^2})y_c^2$$

Άσκηση 1.4

Άσκηση 5.5 βιβλίου

α) Τα τρία πρωταρχικά χρώματα είναι τα R, G, B.

Έστω δύο χρώματα

$$s_1 = a_1 R + b_1 G + c_1 B$$
$$s_2 = a_2 R + b_2 G + c_2 B$$
$$a_i, b_i, c_i > 0, i = 1, 2$$

Το προσθετικό ταίριασμά τους είναι:

$$s_{12} = (a_1 + a_2)R + (b_1 + b_2)G + C_1 + c_2)B$$

Έχω:

$$s'_1 = (r_1, g_1) = \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1 + c_1}, \frac{b_1}{a_1 + b_1 + c_1} \right)$$
$$s'_2 = (r_2, g_2) = \left(\frac{a_2}{a_2 + b_2 + c_2}, \frac{b_2}{a_2 + b_2 + c_2} \right)$$
$$s'_{12} = (r_{12}, g_{12}) = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2}, \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2} \right)$$

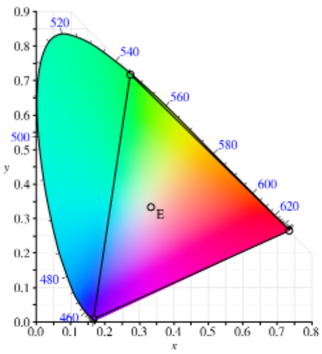
Αποδεικνύεται εύκολα ότι σε κάθε περίπτωση τα τρία παραπάνω σημεία στο επίπεδο είναι συγγραμμικά. Για να το αποδείξω μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο που δίνει το εμβαδό του τριγώνου που ορίζεται από τρία σημεία (κορυφές). Ο τύπος αυτός δίνει μηδενικό αποτέλεσμα για τα παραπάνω σημεία, άρα έχω συγγραμμικά σημεία.

Άρα βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος εξάγω το εξής συμπέρασμα:

Το χρώμα που προκύπτει από το προσθετικό ταίρισμα δύο άλλων χρώματων βρίσκεται πάντα πάνω στην ευθεία η οποία ενώνει τα δύο αρχικά χρώματα.

Έτσι τα τρία πρωταρχικά χρώματα R, G, B σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Μπορώ να παράξω όλα τα χρώματα μέσω του προσθετικού ταιριάσματος.

Βάσει του σχήματος των ορατών χρωμάτων



συμπεραίνω ότι δεν υπάρχει συνδυασός τριών σημείων εκτός αυτού τα οποία να ορίζουν ένα τρίγωνο που να καλύπτει όλο το εμβαδό.

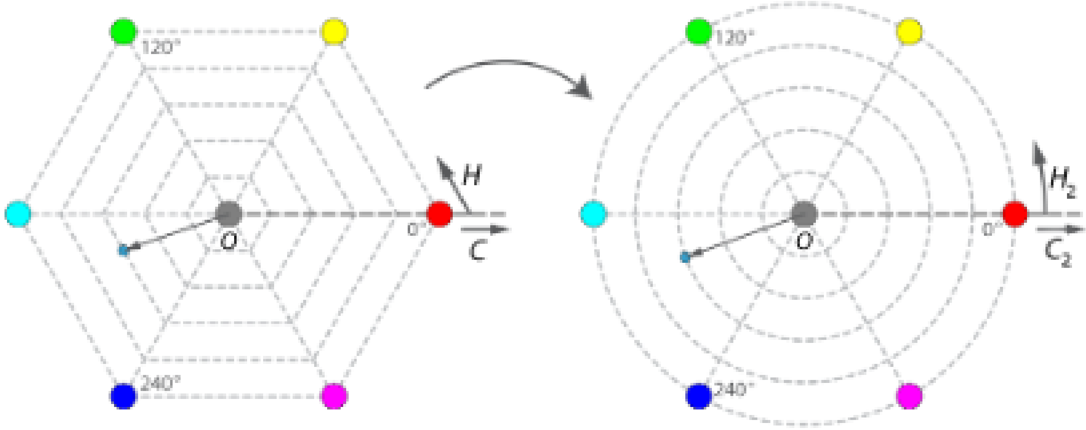
Άρα, δε μπορώ να παράξω όλα τα χρώματα που βλέπει το ανθρώπινο μάτι χωρίς αρνητικό ποσοστό.

Άσκηση 5.12 βιβλίου

α)

Από το σχήμα:

(α)



$$x = Rcos(0) - Gcos(\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(2R - G - B)$$

$$y = Gsin(\frac{\pi}{3} - Bsin(\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(G - B)$$

β) Για να αποδείξω ότι οι ορισμοί του chroma C_2 και hue H_2 είναι ίδοι με την ευκλείδια νόρμα και τη γωνία της προβολής του διανύσματος που ορίζουν τα τρία χρώματα R, G, B στο χρωματικό επίπεδο:

$$C2 = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - RG - RB - GB} \Rightarrow$$

$$C_2 = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(2R - G - B)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(G - B)\right]^2} \Rightarrow$$

$$C_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$H2 = \begin{cases} \theta, & G \geq B \\ 360° - \theta, & G \leq B \end{cases}, \ \theta = \cos^{-1}\left[\frac{0.5(2R - G - B)}{C2}\right]$$

- Αν $G \geq B$:

$$H_2 = \cos^{-1}[\frac{0.5(2R - G - B)}{C2}$$
$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow}$$
$$x^2 - x^2cos^2\theta = y^2cos^2\theta \Rightarrow$$
$$x^2sin^2\theta = ycos^2\theta \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\tau = tan\theta = \frac{y}{x} = tan(\theta - \pi) \Rightarrow$$
$$\theta - \pi = arctan(\frac{y}{x}$$

Άρα

$$H_2 = \theta = \pi + atan2(y, x)$$

- Αν $B \geq G$:

$$H_2 = \pi - \theta = arccos(frac0.5(2R - G - B)C2) \Rightarrow$$
$$cos\theta = frac0.5(2R - G - B)C2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Άρα $H_2 = \pi + atan2(\frac{y}{x})$

Άσκηση 1.5

α)

$$H(x, y) = h_1(x)h_2(y)$$
$$(f * h)(x, y) = \int\int h(a(, b)f(x - 1, y - b)dadb =$$
$$\int\int h_1(a)h_2(b)f(x - a, y - b)da =$$
$$\int h_2(b)\int f(x - a, y - b)h_1(a)dadb =$$
$$\int h_2(b)(f * h_1)(x, y - b)db =$$
$$[(f * 1h_1) * 2h_2](x, y)$$

β

$$h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$$

$$\left\{ \underbrace{\quad\quad}_{\alpha} \right\}$$

$h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$

$(f \oplus h)(x,y) = \bigvee_a \bigvee_b h(a,b) + f(x-a, y-b) =$

$\bigvee_a \bigvee_b h_1(a) + h_2(b) + f(x-a, y-b) =$

$\bigvee_b h_2(b) + \left(\bigvee_a h_1(a) + f(x-a, y-b)\right) =$

$\bigvee_b h_2(b) + (f \oplus h_1)(x, y-b)$

$[(f \oplus h_1) \oplus h_2](x,y)$

Άσκηση 1.6

Θέλω νδο $X \circ B = (X^c \bullet B^s)^c \ \forall X, B \subseteq \mathbb{R}^n$

α.1) Για τα X

$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$

Εξ ορισμού $X \circ B = (X^c \oplus B^s)^c$ άρα $\underline{X \oplus B = (X^c \ominus B^s)^c}$ $(((X^c \oplus B^s)^c)^c \ominus B^s)^s$ $\underline{(X \ominus B) \oplus}$ $X \bullet B =$

$X \ominus B = (X^c \oplus B^s)^c$

$X \circ B = (X^c \oplus B^s)^c \oplus B$

$(X^c \bullet B^s)^c$

α.2) $X \oplus B \overset{\text{ορ}}{=} \{x+y,\ x \in X,\ y \in B\} \Leftrightarrow X \oplus B = \bigcup_{y \in B} X_{+y}$ άρα $X \oplus B \supseteq X$

αν $0 \in B$

Ομοίως $X \ominus B = \bigcap_{y \in B} X_{-y} \Leftrightarrow X \ominus B \subseteq X,\ 0 \in B$

$X \circ B \overset{\text{ορ}}{=} (X \ominus B) \oplus B$

$X \bullet B \overset{\text{ορ}}{=} (X \oplus B) \ominus B$

Οπότε: $X \circ B = \bigcup_{y \in B} (X \ominus B) \supseteq (X \ominus B)$, $O \in B$

$X \supseteq X \circ B$

$X \cdot B = \bigcap_{y \in B} (X \oplus B)$, $X \cdot B \subseteq X \oplus B$, $O \in B$

Άρα $O \in B \Rightarrow X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \cdot B \subseteq X \oplus B$

δ Αν f, g, h γκρίζες εικόνες

δ1) Ισχύει: $(f \ominus g)(x) = \bigwedge_{y \in G} f(x+y) - g(y) \Rightarrow$

$((f \ominus g) \ominus h)(x) = \bigwedge_{y \in G_1} \bigwedge_{z \in G_2} f(x+z+y) - g(y+z) - h(z)$

$(g \oplus h)(x) = \bigvee_{y \in G_1} g(x-y) + h(y) \Rightarrow$

$(f \ominus (g \oplus h))(x) = \bigwedge_{z \in G_2} [f(z+x) - \bigvee_{y \in G} g(z) - h(y+z)]$

θέτοντας $z = y + z$ έχω

$f \ominus (g \ominus h))(x) = \bigwedge_{z \in G_1} \bigwedge_{y \in G_2} f(x+y+z) - g(y+z) - h(z)$

δ2) Αν $f = f \circ g$ τότε:

$f = f \circ g = (f \ominus g) \oplus g = h \oplus g$, $h = f \ominus g$

και: $f \circ g = ((h \oplus g) \ominus g) \oplus g = (h \cdot g \oplus g) \supseteq h \oplus g = f$, αν $f = h \oplus g$

Οπότε $f \circ g \geq f$

Με τον ίδιο τρόπο με το α2 αποδεικνύεται ότι

$f \circ g \leq f$

Οπότε $f \circ g \leq f \leq f \circ g \Rightarrow f = f \circ g$

c) Για τον Φ έχω $\Phi(X) = X \circ B = (X \oplus B) \ominus B$

Αν $\Phi_1(X) = X \oplus B$ κ' $\Phi_2(X) = X \ominus B$ τότε

$\Phi(X) = \Phi_2(\Phi_1(X))$

$\varphi_2(f) = \sup\{u : x \in X_u(f) \ominus B\} = \sup\{u : f(x+y) \geq u \ \forall y \in B\} =$

$\inf\{f(x+y) : y \in B\} = (f \ominus B)(x)$

Όμοια για το $\varphi_1(f)(x) = (f \oplus B)(x)$

Αρχικό γκρι:

$\varphi(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R} : x \in \Phi(X_u(f))\} = \sup\{u \in \mathbb{R} : x \in \Phi_2[\Phi_1(X_u(f))]\} =$

$\sup\{u : x \in X_u[\Phi_2(\varphi_1(f))]\} = \varphi_2(\varphi_1(f))(x) = ((f \oplus B \ominus B)(x) = f \circ B$

$\varphi(f) = \varphi_2(\varphi_1(f)) = f \circ B$

Σημείωση: Αυτό ισχύει ω:

$\varphi_1(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R} : x \in \Phi_1(X_u(f))\}$
$\varphi_2(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R} : x \in \Phi_2[X_u(f)]\}$

ii) Είναι $X \oplus B = \bigcup_{y \in B} X_{+y}$

$X \ominus B = \bigcap_{z \in B} X_{-z}$

$X \circ B = (X \oplus B) \ominus B$

$\phi(x) = X \cdot B = X \oplus B \ominus B = \bigcap_{z \in B} \left(\bigcup_{y \in B} X_{y-z} \right)$, $B = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$

Άρα $\phi(x) = \bigcap_{z \in B} \left(X_{(0,0)-z} \cup X_{(0,1)-z} \cup X_{(1,0)-z} \right) =$

$(X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)} \cup X_{(1,0)}) \cap (X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(1,-1)}) \cap (X_{(-1,0)} \cup X_{(-1,1)} \cup X_{(0,0)})$

Boolean συνάρτηση:

$b(u_1, \dots u_n) = (u_{(0,0)} + u_{(0,1)} + u_{(1,0)})(u_{(0,-1)} + u_{(0,0)} + u_{(1,-1)})$

$(u_{(-1,0)} + u_{(-1,1)} + u_{(0,0)}))$

Αλγεβρική:

$\varphi(f)(x,y) = \min\{ \max[f(x,y), f(x,y-1), f(x-1,y)], \max[f(x,y+1), f(x,y),$

$f(x-1, y+1)], \max[f(x+1,y), f(x+1,y-1), f(x,y)]\}$

Άσκηση 1.7

10.2 βιβλίου:

Παραμετρική εικόνα: $\|\nabla I\| = \sqrt{k_2^2+k_3^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{k_3}{k_2}\right)$

Για γειτονιά 3x3

$$\begin{vmatrix} k_1-k_2-k_3 & k_1-k_3 & k_1+k_2-k_3 \\ k_1-k_2 & k_1 & k_1+k_2 \\ k_1-k_2+k_3 & k_1+k_3 & k_1+k_2+k_3 \end{vmatrix}$$

Στο (0,0): $g_x = -2k_2(2a+b)$

$g_y = 2k_3(2a+b)$

$g = 2(a+b)\sqrt{k_2^2+k_3^2}$, $\theta_g = \arctan\frac{k_3}{k_2}$

Για να έχω ισότητα θέλω: $2(2a+b)=1$

β) Αν έχω θόρυβο:

$g_x = -2k_2(2a+b) - a\,[w(-1,-1)+w(-1,1)+w(1,-1)+w(1,1)]$
$- b\,[w(-1,0)+w(1,0)]$

Έχω θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και $2(2a+b)=1$

Άρα: $E(g_x) = -2k_2(2a+b) = -k_2$

και: $var[g_x] = (4a^2+2b^2)\sigma^2 =$ Λόγω θορύβου μηδενικής διακύμανσης

$\left(16a^2 - 4a + \frac{1}{2}\right)\sigma^2$

Για εξαχιστοποίηση θέλω $var[g_x]=0 \Rightarrow a=+1/6$

$b=\frac{1}{6}$ Άρα $\begin{vmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{vmatrix}$

Άρα:
είναι κατά $-1/6$ ποσοστό της Prewitt μάσκας

10.5 Βιβλίου

~~Ορισμός~~ $LoG = L_\sigma(x) = \frac{d^2 G_\sigma}{dx^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) = \frac{-x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right) = \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{x^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

b Άρα $L_\sigma(x) = \frac{d^2 G_\sigma}{dx^2} = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}-1\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$

Σαμπώ: $G_\sigma(x) = G_\sigma(x,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

Αν $u=2\sigma^2$:

$G_\sigma(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^3/u}$, $u=2\sigma^2$

$$\frac{\partial G_\theta(x,\sigma)}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{u}\right)\right) = \dots$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{x}{\sigma^2}-1\right) = \frac{1}{4}L_\sigma(x) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_\sigma(x)$$

Τελικα $\frac{\partial^2}{\partial x^2}[G_\sigma(x,\sigma^2)] \propto \frac{\partial}{\partial\sigma^2}G(x,\sigma^2) =$

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(x,\sigma^2+h)-G(x,\sigma^2)}{h}$$

θετω $\sigma_1 = \sigma^2+h$ αρα $h=\sigma_1-\sigma_2$

$\sigma_2 = \sigma^2$

Τελικη $L_\sigma(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[G_\sigma(x,\sigma^2)] \propto \lim_{(\sigma_1-\sigma_2)\to 0}\frac{G_\sigma(x,\sigma_1)-G(x,\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2}$

πολ/στική σταθερα $= 1/4$

β) $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

$$g(\omega) = F\{G_\sigma(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}G_\sigma(x)e^{-j\omega x}dx \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

Απο Μ/σ Fourier:

$$F\{L_\sigma(x)\} = -\frac{\omega^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$$

Για την $\frac{\partial G_\sigma}{\partial\sigma^2}$,

$$F\left\{\frac{\partial G_\sigma}{\partial\sigma^2}\right\} = F\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2\sigma^2)\left(\frac{x^2}{\sigma^2}-1\right)\right\}$$

$$\frac{1}{4} \frac{1}{\sigma^2}\left(F\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{x^2}{\sigma^2} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right)\right\} - F\left\{ G_\sigma(x) \right\}\right)$$

Προκύπτει: $F\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_\sigma(x) \right\} = e^{-\sigma^2 \omega^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1-\omega)$

Τελικά:

$$F\left\{ \frac{\partial G_\sigma}{\partial \sigma^2} \right\} = \frac{1}{4} e^{-\sigma \frac{\omega^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1-\omega^2) - F\{ G_\sigma(\omega) \} :$$

$$F\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_\sigma \right\}$$

Άσκ. 3

$\phi(x,y) = A(x-x_c)^2 + C(y-y_c)^2 + B(x-x_c)(y-y_c)$

$f(x,y) = \exp(-j x_c \omega_1 - j y_c \omega_2)\exp(-B(x-x_c)(y-y_c))$

$\exp(j u(x-x_c) + j v(y-y_c))$

Άρα: ΜF:

$\exp(-j x_c \omega_1 - j y \omega_2) F(\omega_1 - u, \omega_2 - v)$

όπου: $F(\omega_1, \omega_2) \to \exp[-Ax^2 + y^2] \cdot \exp(-Bxy)$

$F(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{\sqrt{AC}} \exp\left(-\left[\frac{\omega_1^2}{4A}\right] + \left[\frac{\omega_2^2}{4A}\right]\right) *$

$F(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{1}{4\pi^2}$ όπου

$F_1(\omega_1, \omega_2) \leftrightarrow e^{-Bxy}$

Άσκηση 2.6 βιβλίου δ1

Αν $l = p + u \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \cos\theta \\ b \end{bmatrix}$ και $m = \beta + u \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ \cos\theta \\ c \end{bmatrix}$

θ: γωνία μεταξύ δύο επιπέδων

Τα αποτελ. του u δε θα αλλάξουν ~~γιατί~~ αφού η θ επηρεάζει μόνο το y των l' και m'

Από πρ. γεωμετρία έχω:

$y = \dfrac{2f \cdot y_p}{2p + u\sin\theta_1}$ $\quad y = \dfrac{2f(y_p + u\cos\theta)}{2p + u\theta}$

άρα $b = c$, $\theta_1 = \theta_2$

Τελικά: b, c δεν μεταβάλλονται, αφού η ~~…~~ έξτρα μεταβλητή δεν αλλοιώνει το πρόβλημα.