Όραση Υπολογιστών
Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων
Αναστασία Χριστίνα Λίβα
03119029
anachriliva@gmail.com

Άσκηση 1

Έχω $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\right) = \frac{u_{xx}u_y^2 - u_x u_{xy} u_y}{|\nabla u|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{|\nabla u|}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\right) = \frac{u_{yy}u_x^2 - u_y u_x u_{xy}}{|\nabla u|^3}$$

$$|\nabla u| \operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^2}$$

Γενικά

$$\partial^2_{\xi\xi} u(x) = \partial_\xi(\partial_\xi u) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_\xi u(x+t\xi) - \partial_\xi u(x)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\nabla u(x+t\xi)\xi - \nabla u(x)\xi}{t} = \frac{\lim_{t\to 0} \xi_i \partial_{x_i} u(x+t\xi) - \xi_i \partial_{\xi_i} u(x)}{t} =$$

$$\xi_i \, \partial_{x_i x_j} u(x) \xi_i$$

$$\partial^2_{\xi\xi} u(x) = \xi^T H \xi, \quad H = D^2 u(x) = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix}$$ (Πίνακας Hessian)

Για το ξ: $\xi = (-u_y, u_x) / |\nabla u|$

Άρα $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \xi^T H \xi = \left[-\frac{u_y}{|\nabla u|}, \frac{u_x}{|\nabla u|}\right] \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{u_y}{|\nabla u|} \\ -\frac{u_x}{|\nabla u|} \end{bmatrix} =$

$$\left[\frac{u_x u_{xy} - u_y u_{xx}}{|\nabla u|} \quad \frac{u_x u_{yy} - u_y u_{xy}}{|\nabla u|}\right] \begin{bmatrix} -\frac{u_y}{|\nabla u|} \\ \frac{u_x}{|\nabla u|} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{-u_y u_x u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{|\nabla u|^2} + \frac{u_x^2 u_{yy} - u_y u_x u_{xy}}{|\nabla u|^2} = ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{u_y u_{xx} + u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^2}$$

Άρα: $\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \, \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$

Άσκηση 2

Περιστροφή της καμπύλης κατά θ

Αρχική καμπύλη $C_1 = (x(p), y(p))$

Μετά από την περιστροφή έχω: $C_2 = (x_2(p), y_2(p))$

$x_2(p) = \cos\theta \, x(p) - \sin\theta \, y(p)$

$y_2(p) = \sin\theta \, x(p) + \cos\theta \, y(p)$

C_1: $\frac{d\vec{C_1}}{dp} = C_1'(p) = \left(\frac{dx}{dp}, \frac{dy}{dp}\right)$

Ταχύτητα κίνησης της C_1: $C_1 = g_1(t) = |C_1'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

C_2:

$\frac{d\vec{C_2}}{dp} = (x'\cos\theta - y'\sin\theta, x'\sin\theta + y'\cos\theta)$

Ταχύτητα ώρασης της $c_2 = y_2 = |c_2'| = y_1$

Εφαπτόμενη της $c_1 = \measuredangle c_1'(p) \Rightarrow a_1(p) = \arctan(y'/x')$

Εφαπτόμενη της $c_2 = \measuredangle c_2'(p)$

$a_2(p) = \arctan(y_2'/x_2')$

καμπυλότητα της $c_1 = \dfrac{da_1}{ds} = \dfrac{a_1'(p)}{y_1(p)} = \dfrac{x'y'' - y'x''}{y_1^3} = k_1(t)$

καμπυλότητα της $c_2 = \dfrac{da_2}{ds} = \dfrac{a_2'(p)}{y_2(p)} = \dfrac{x_2' y_2'' - y_2' x_2''}{y_1^3} = k_2(p)$

$$k_2(p) = \frac{(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x''\sin\theta + y''\cos\theta) - (x'\sin\theta + y'\cos\theta)(x''\cos\theta - y''\sin\theta)}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$k_2(p) = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = k_1(t)$$

Οπότε η καμπυλότητα δεν αλλάζει λόγω περιστροφής

Παράλληλη μετατόπιση κατά $\bar{V} = \langle V_1, V_2 \rangle$

Αρχική καμπύλη: $c_1(p) = (x(p), y(p))$

Μετά το ΜΙΣ: $c_2(p) = (x(p) + V_1, y(p) + V_2)$

Ταχ. ώρασης της c_1: $y_1(p) = \left|\dfrac{dc_1}{dp}\right| = |x'(p), y'(p)| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

" " της c_2: $y_2(p) = \left|\dfrac{dc_2}{dp}\right| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

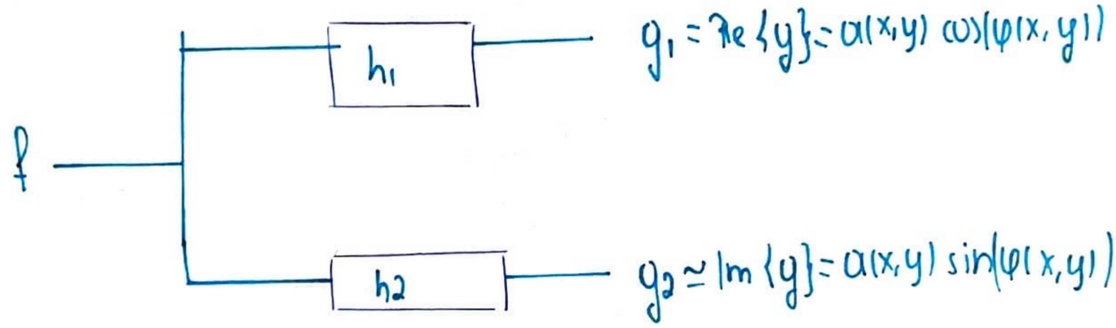
$a_1(p) = \measuredangle G_1(p) = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right)$

$a_2(p) = \measuredangle G_2(p) = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) = a_1(p)$

$K_1(p) = \dfrac{a_1(p)}{g_1(p)} = K_2(p)$

Οπότε η καμπυλότητα ΔΕΝ αλλάζει

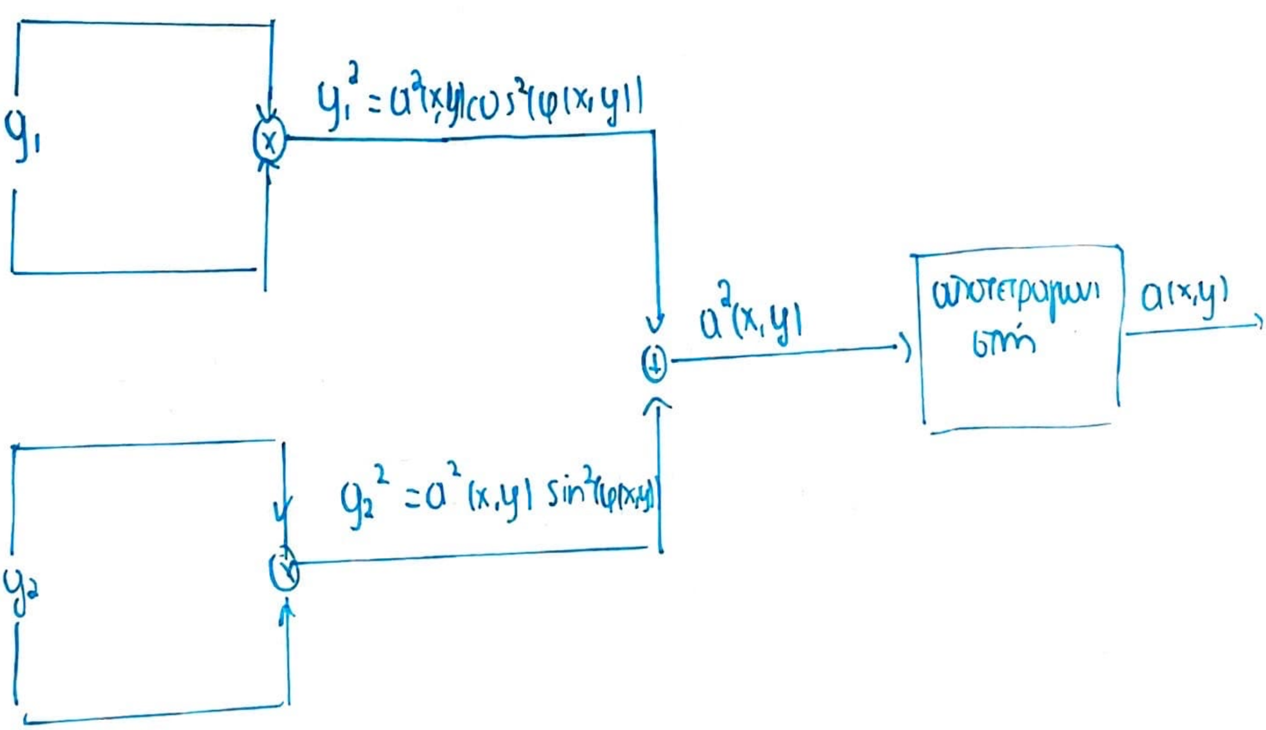
Άσκηση 3



Πρώτα $a(x,y)$ υπολογίζεται ως:

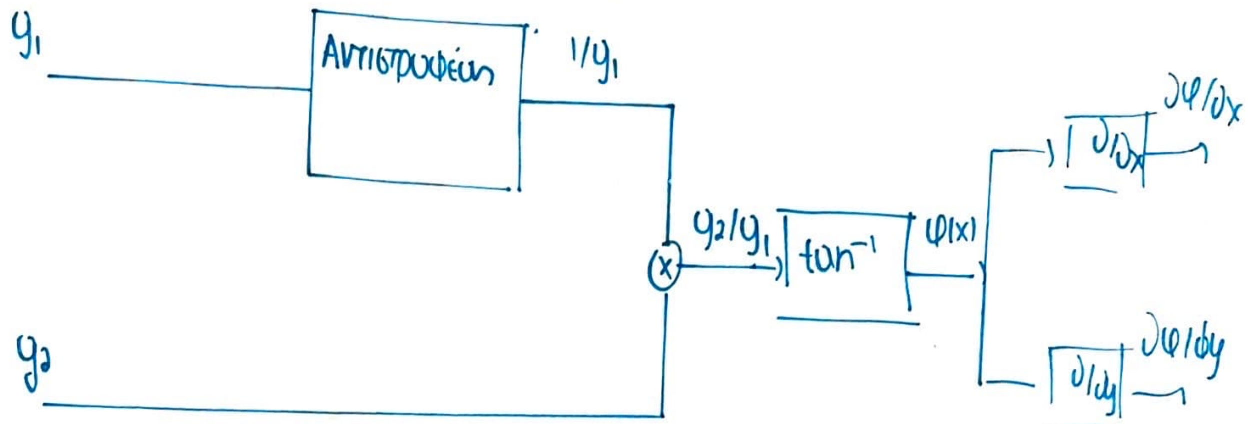
$g_1^2 + g_2^2 = a^2\cos^2(\varphi(x,y)) + a^2\sin^2(\varphi(x,y)) = a^2 \Rightarrow$

$a(x,y) = \sqrt{g_1^2+g_2^2}$



Για στιγμιαίες συχνότητες τη συνάρτηση τόξου:

Διαιρώ y_1 και y_2 άρα έχω $\frac{y_2}{y_1} = \tan(\varphi(x,y))$



Άρα φιλτράρω την f με quadrature ζεύγος φίλτρων h_1, h_2 και εισάγω τις εξόδους στα σχεδιασμένα συστήματα για να λάβω τη ζητούμενη πληροφορία

Άσκηση 3.1

Θεωρία ελαχιστοποίησης: $L = L(c) = \int_0^1 \sqrt{x_p^2+y_p^2}\,dp$

Η καμπύλη ελαχίστου μήκους:

$$\vec{C_t} = -[F]_{\vec{e}}, \quad C(p,t) = [x(p,t), y(p,t)]$$

$$F_x = -\frac{\partial f_{x'}}{\partial p} = -\frac{\partial f_{x'}}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right) = -\frac{x''\sqrt{x'^2+y'^2} - x'\left(\frac{x'x''+y'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)}{x'^2+y'^2}$$

$$= \frac{y'(x'y''-x''y')}{\sqrt[3]{x'^2+y'^2}} = \kappa y'$$

Όμοια:

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dp} = -\frac{dF_{y'}}{dp} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right) = -\frac{y''\sqrt{x'^2+y'^2} - y'\left(\frac{x'x''+y'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)}{(x')^2+(y')^2} =$$

$$-kx'$$

Τελικά:

$$\vec{C_1} = k(y_p, x_p) = -\left(k\frac{\sqrt{x_p^2+y_p^2}}{k}\right)\frac{(y_p, -x_p)}{\sqrt{x_p^2+y_p^2}} =$$

$$-k\vec{N_0}(p,t)$$

Άσκηση 5

Για την κίνηση στο 3D χώρο:

$$X = Ut + X_0$$
$$Y = Vt + Y_0$$
$$Z = Wt + Z_0$$

Άρα για το σημείο φυγής:

$$x = f\frac{X}{Z} = f\frac{Ut+X_0}{Wt+Z_0} = x(t)$$

$$y = f\frac{Y}{Z} = f\frac{Vt+Y_0}{Wt+Z_0} = y(t)$$

$t=0$: $x(0) = f\,\dfrac{x_0}{z_0}$ $\quad y(0) = f\,\dfrac{y_0}{z_0}$

$t=1$: $x(1) = f\,\dfrac{U+x_0}{W+z_0}$ $\quad y(1) = f\,\dfrac{V+y_0}{W+z_0}$

Αν $y = ax+b$:

$$a = \frac{y(1)-y(0)}{x(1)-x(0)} = \frac{Vz_0 - Wy_0}{Uz_0 - Wx_0}$$

$$y(t) = \frac{Vz_0 - Wy_0}{Uz_0 - Wx_0}\,x + b$$

$t=0$: $b = y_0 - a\,x(0) \Rightarrow b = \dfrac{f}{z_0}\left(\cancel{y_0}\, y_0 - x_0\,\dfrac{Vz_0 - Wy_0}{Uz_0 - Wx_0}\right)$

Για να επαληθεύω $\forall t$:

$y(t) = ax(t) + b$

$$\frac{Vt+y_0}{Wt+z_0} = \left(\frac{Vz_0 - Wy_0}{Uz_0 - Wx_0}\right)\left(\frac{Ut+x_0}{Wt+z_0}\right) + \frac{1}{z_0}\left(y_0 - x_0\,\frac{Vz_0 - Wy_0}{Uz_0 - Wx_0}\right)$$

Κάνοντας τις πράξεις καταλήγω σε αληθή σχέση οπότε η προβολή είναι πράγματι πάνω ευθεία

Άσκηση 6

α) Αφινικοί Μ/ς

Έστω κωνική τομή με εξίσωση $x^T C_1 x = 0$ και αφινικό μ/σ $x' = H_A x \Rightarrow x = H_A^{-1} x'$

$$(H_A x')^T C_1 (H_A^{-1} x) = 0 \Rightarrow x'^T \underbrace{H_A^{-T} C_1 H_A^{-1}}_{C_2} x = 0$$

$$H_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{12}t_y - a_{22}t_x \\ -a_{21} & a_{11} & -a_{11}t_y + a_{21}t_x \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \frac{1}{|H_A|}$$

Θέτω
$$H_A^{-1} = \begin{bmatrix} A & \bar{t} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} Q & \bar{b} \\ \bar{b}^T & f \end{bmatrix}$$

$$C_2 = H_A^{-T} C_1 A^{-1} = \begin{bmatrix} A & \bar{0}^T \\ \bar{t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \bar{b} \\ \bar{b}^T & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \bar{t} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A^T Q A & A^T (Q\bar{t} + \bar{b}) \\ (Q\bar{t} + \bar{b})^T A & X \end{bmatrix}$$

Άρα $q[0:2][0:2] = A^T Q A$

$$A^T Q A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{22}^2 \cdot a - a_{22}a_{21}b + a_{21}^2 c & -a_{12}a_{22}a + \frac{1}{2}(a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22})b - a_{11}a_{21}c \\ -a_{12}a_{22}a + \frac{1}{2}(a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22})b - a_{11}a_{21}c & a_{12}^2 a - a_{12}a_{11}b + a_{11}^2 c \end{bmatrix}$$

Άρα C_2 συμμετρικός

Για να είναι κύκλος ο C_1 θέλω:

$$\left.\begin{array}{l} b^2-4ac<0 \\ a=c \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ac>0 \\ a=c \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=c\neq 0 \\ b=0 \end{array}$$

Άρα:

$$A^T Q A = \begin{bmatrix} a(a_{22}^2+a_{21}^2) & -a(a_{12}a_{22}+a_{11}a_{21}) \\ -a(a_{12}a_{22}+a_{11}a_{21}) & a(a_{12}^2+a_{11}^2) \end{bmatrix}$$

Για να είναι έλλειψη ο C_2 θέλω:

$$[-2a(a_{12}a_{22}+a_{11}a_{21})]^2-4a^2(a_{22}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{11}^2)<0 \Rightarrow$$

$$(a_{12}a_{22}+a_{11}a_{21})^2<(a_{22}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{11}^2) \Rightarrow$$

$$(a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12})^2>0 \Rightarrow \det(HA)\neq 0$$ που ισχύει γιατί

HA non singular άρα μετασχηματίζεται σε έλλειψη οποιοσδήποτε κύκλος

αφ. κ.λ.π.

Μετατροπή έλλειψης σε υπερβολή/παραβολή

Για να είναι έλλειψη ο C_1: $b^2-4ac<0$

Για να είναι παραβολή ο C_2:

$$(-2a_{12}a_{22}a+(a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})b-2a_{11}a_{21}c)^2-4(a_{22}^2a-a_{22}a_{21}b+a_{21}^2c)\cdot(a_{12}^2a-a_{12}a_{11}b+a_{11}^2c)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\dots \Rightarrow$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2b^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2ac\geq 0 \Rightarrow$$

$$\det(HA)^2(b^2-4ac)\geq 0 \Rightarrow b^2-4ac\geq 0$$

Δε γίνεται εάν C_1 είναι έλλειψη, συνεπώς δε μετασχηματίζεται σε υπερβολή/παραβολή μέσω αφ. μ/σ

β) Αφινικοί M/S

Εστω $U = (u_1, u_2, 1)$ $V = (v_1, v_2, 1)$ δυο σημεία που δε βρίσκονται πάνω στην ιδανική ευθεία και $U' = (u_1', u_2', 1)$ $V' = (v_1', v_2', 1)$ οι εικόνες αυτών μέσω αυθαίρετου αφινικού μ/σ.

$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$

$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$

$x_3' = x_3$

Τοτε: $v_1' - u_1' = a_{11}(v_1 - u_1) + a_{12}(v_2 - u_2)$

$v_2' - u_2' = a_{21}(v_1 - u_1) + a_{22}(v_2 - u_2)$

Αρα το τετράγωνο του λόγου την απόσταση $(U'V')$ με την (UV) είναι:

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(v_1 - u_1)^2 + 2(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22})(v_1 - u_1)(v_2 - u_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(v_2 - u_2)^2 / (v - u)^2 +$$

Αν $v_1 - u_1 = 0$ τοτε η έκφραση γίνεται $a_{12}^2 + a_{22}^2$ η οποία εξαρτάται $(v_2 - u_2)^2$ μόνο από τους συντελεστές την εξίσωση του δοθέντος μ/σ

Αν $(v_1 - u_1) \neq 0$ τοτε διαιρώ με $(v_1 - u_1)^2$.

$m = \dfrac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1}$ κλίση ευθείας που περιέχει το $\overline{UV}$

$$\frac{(U'V')^2}{(UV)^2} = \frac{(a_{11}^2 + a_{21}^2) + 2(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22}) m + (a_{12}^2 + a_{22}^2) m^2}{1 + m^2}$$

Άρα η παραπάνω έκφραση εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη εξίσωση του Μ/Ο και τη κλίση του ευθ. τμήματος
συμπεραίνω ότι ο αφ. Μ/Ο πυξίζει τα μήκη όσον τα τμήματα σε κατεύθυνση με έναν συντελεστή που εξαρτάται μόνο από το Μ/Ο στη δεδομένη κατεύθυνση

Κάτω από αφ. Μ/Ο λόγος μήκους των δύο παράλληλων ευθ. τμημάτων παραμένει σταθερός, ενώ λόγος των μηκών μη παράλληλων δεν διατηρείται

γ) Ιδιότητες Προβολικής κάμερας

$P = [M \mid p_4]$

P: Αντιστοίχηση από τις 3 στις 4 διαστάσεις και γι αυτό έχει μονοδιάστατο μηδενόχωρο

Άρα: $\exists\ \vec{C} \in \mathbb{R}^4 : P\vec{C} = \vec{0}$

Έστω ευθεία l που ορίζεται από το $\vec{C}$ και αυθαίρετο σημείο $\vec{Q}$. Κάθε σημείο της l μπορεί να γραφτεί ως:

$$x = \vec{C} + \lambda \vec{Q},\ \lambda \in R$$

$$y = Px = P(\vec{C} + \lambda\vec{Q}) = \cancel{P\vec{C}}^{0} + \lambda P\vec{Q} = \lambda P\vec{Q}$$

$$y = \lambda P\vec{Q}$$

Ο λ δεν επηρεάζει την ταυτότητα των σημείων y διότι έχω ομογενείς συντεταγμένες. Άρα κάθε σημείο της l απεικονίζεται μέσω του P σε μοναδικό σημείο του επιπέδου της εικόνας.
Αυτό ισχύει μόνο όταν η κάμερα βρίσκεται στο σημείο $\vec{C}$ λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος προβολής με

κάμερα

Πεπερασμένη κάμερα: $\det M \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$P\vec{C} = \vec{0} \Rightarrow [M_{3\times3} \mid P_{3\times1}]\ \vec{C} = 0 \Rightarrow [M_{3\times3} \mid P_{3\times1}] \begin{bmatrix} C_{3\times1} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$C_{3\times} = -M_{3\times3}^{-1} P_{3\times1} \Rightarrow \vec{C} = \begin{bmatrix} -M^{-1}P_4 \\ 1 \end{bmatrix}$

κάμερα στο άπειρο: $\det M = 0$

$\vec{C} = \begin{bmatrix} C_{3\times1} \\ 0 \end{bmatrix}$

$P\vec{C} = \vec{0} \Rightarrow M C_{3\times1} = 0$

Ο M έχει $\det = 0$, άρα έχει τουλ. ένα ΙΔ μηδενικό

και $\exists$ $C_{3\times1}$ τω $M C_{3\times1} = \vec{0}$

Για το δοθέν P:

$\det(M) = 2\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ κάμερα στο άπειρο

$M C_{3\times1} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \lambda(-2/9) \\ C_2 &= \lambda(-10/9) \\ C_3 &= \lambda \cdot 1 \end{aligned}$ $\quad \lambda = -9 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$

κέντρο κάμερας

§1 Ιδιότητες προβολικής κάμερας

$$P = \begin{bmatrix} p^{1T} \\ p^{2T} \\ p^{3T} \end{bmatrix} \Rightarrow Px = \begin{bmatrix} p^{1T}x \\ p^{2T}x \\ p^{3T}x \end{bmatrix}$$

Θεωρώ το επίπεδο που ορίζεται από την p^{1T}. $\forall$ x_1 στο χώρο που $\in$ το επίπεδο: $p^{1T} x_1 = 0$ άρα το σημείο στο επίπεδο της εικόνας που αντιστοιχεί στο x_1 θα έχει ομογενείς συντεταγμένες της μορφής $[0, y, z]^T$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει και για τα σημεία του χώρου που $\in$ στο επίπεδο που ορίζεται από το C (κέντρο κάμερας) και την ευθεία $x=0$
Άρα p^1: ορίζεται από κέντρο C και τη $x=0$ στην εικόνα
Αντίστοιχα θεωρώ το επίπεδο που ορίζεται από την p^{2T}. $\forall$ x_2 $\in$ στο χώρο του επιπέδου: $p^{2T} x_2 = 0$
Όμοια προκύπτει το ίδιο με πριν για συντεταγμένες $[x, 0, z]^T$. Άρα ορίζεται από κέντρο C και ευθεία $y=0$

Αντίθετα με το p^3 τα p^1, p^2 εξαρτώνται από τους άξονες x, y της εικόνας (δηλ. την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων)

§1 Θεμελιώδης πίνακας F

Τα principal points x_1, x_2 των επιπέδων της εικόνας συνδυάζονται:

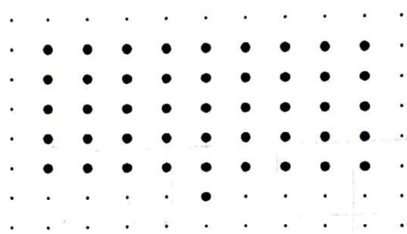
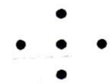
$$x_2^T F x_1 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Apu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow f_{33} = 0.$$

$X =$  , $B =$  $= B^s$.

Chamfer Distance $(a, b) = (1, +\infty)$

u_0 $(+ = +\infty)$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

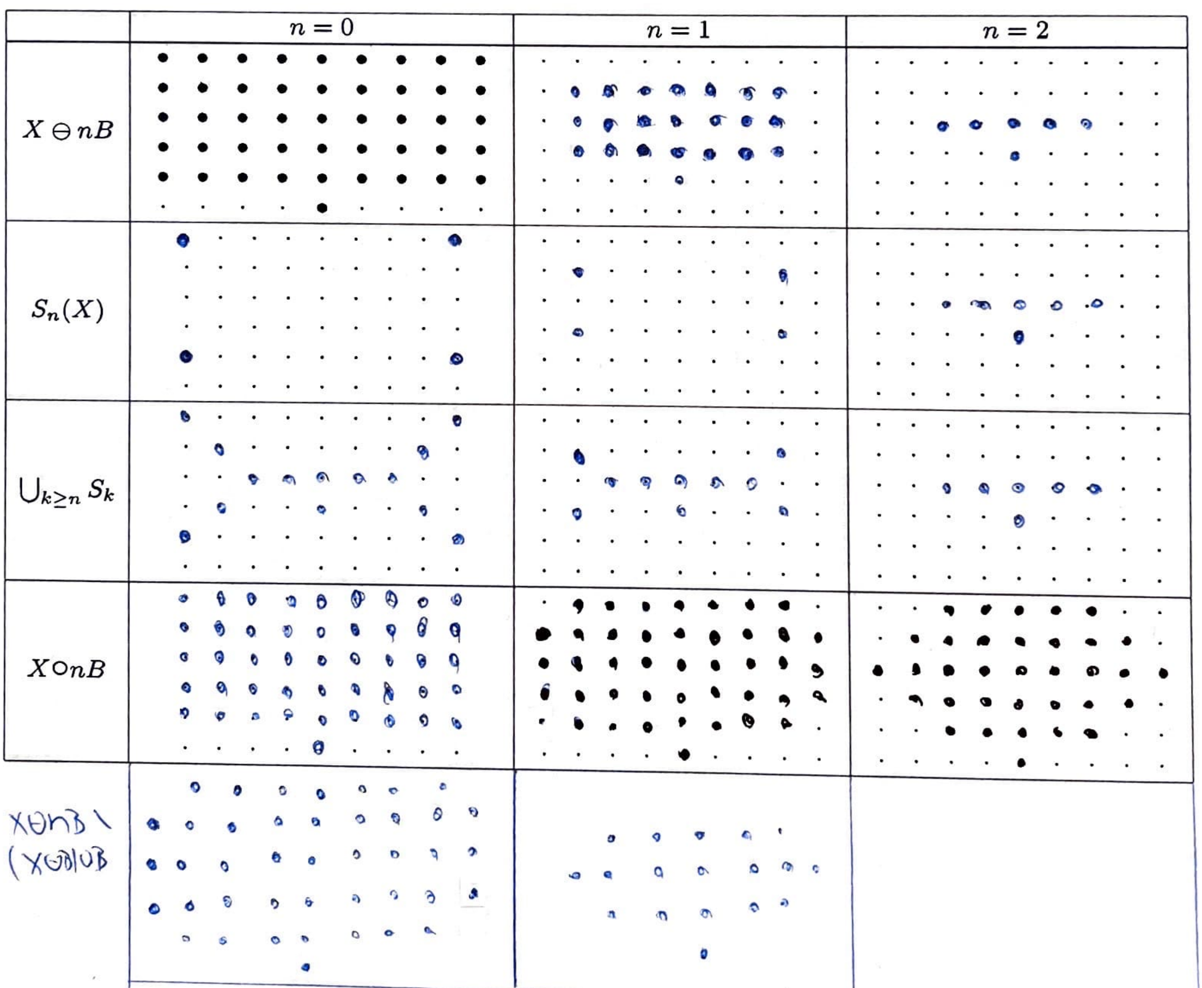
u_1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0
0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0
0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	0
0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

u_2

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	3	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Skeleton



Ο μορφολογικός σκελετός εικονίζεται στη $\bigcup_{k>n} S_k$ με $n=0$.
Τα σημεία τοπικού μεγίστου σε γειτονιά 3 συμφωνούν με το πρώτο ερώτημα του Μ/Σ απόστασης:

1								1	
	2						2		
		3	3	3	3	3			
	2			3			2		
1								1	

Τα σημεία τοπικού μεγίστου ταυτίζονται με τα σημεία του σκελετού