1.1:

(a) (a) Δύο ευθείες με ίδιο σημείο φυγής θα είναι παράλληλες.

(b) Η γωνία που σχηματίζει το τμήμα VQ με την h είναι ίση με τη γωνία που που σχηματίζει το τμήμα PR με τον άξονα α. Επομένως, αν η κατευθύνση των ευθειών είναι $45°$ το τρίγωνο VQN θα είναι ισοσκελές και άρα θα μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση του κέντρου V από την εικόνα ως ίση με το τμήμα NQ.

(c) Οι ευθείες πρέπει να είναι κάθετες.

(d) Τα αποτελέσματα δεν άλλαζουν.

(b) Για τον 3Δ μετασχηματισμό ομοιότητας έχουμε $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(P) = sRP + D$. Ο πίνακας R διατηρεί την ορθογωνιότητα και το το μήκος των διανυσμάτων.

$$\Pi(T(P)) = \Pi(sRP + D) = \Pi(s \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} \\ sr_{21} & sr_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + sr_{13}Z \\ D_2 + sr_{32}Z \end{bmatrix}$$

Υποθέτοντας ότι το Z δεν μεταβάλλεται πολύ η προβολή του 3Δ μετασχηματισμού ομοιότητας T αντιστοιχεί σε ένα δισδιάστατο αφινικό μετασχηματισμό.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d$$

1.2:

(a) Επειδή η επιφάνεια είναι Lambertian η εκπεμπόμενη radiance L είναι σταθερά:

$$L = \frac{\Delta\Phi}{A\cos(\theta)\Delta\Omega} = const, \Delta\Omega = \frac{A_p}{r^2}$$

Επομένως η ακτινοβολός ένταση θα ισούται με:

$$J(\theta) = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega} = LA\cos(\theta) = J(0)\cos(\theta), J(0) = LA$$

(b) Η ακτινοβόλος ένταση είναι $J_e = \Phi/\Omega = 7.95$ W/sr. Η φωτοβόλος ένταση προκύπτει από πολλαπλασιασμό της ακτινοβόλου με την τιμή της LEF σε μήκος κύματος 650 nm, $J_v = 68 * J_e = 541$ cd. Η irradiance είναι $I_e = J_e\Omega/A = J_e/d^2 = 1.99 \quad \mathrm{W/m^2}$ και αντίστοιχα η illuminance, $I_v = 135$ lux.

1.3:

(a) Ξεκινόντας από την εξίσωση gaussian με ισοϋψείς που είναι ελλείψεις $g(x, y) = \exp[-(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})]$ φτιάχνουμε την εξίσωση gaussian με ισοϋψείς που είναι ελλείψεις με περιστροφή και μετατόπιση.

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = g \left(R^{-1} \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix} \right) = \exp[-(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K)]$$

με $A = \cos^2\theta/a^2 + \sin^2\theta/b^2$, $B = \sin(2\theta)(1/a^2 - 1/b^2)$, $C = \sin^2\theta/a^2 + \cos^2\theta/b^2$, $D = -(2Ax_c + By_c)$, $E = -(2Cy_c + Bx_c)$, $K = Ax_c^2 + Cy_c^2 + Bx_cy_c$.

Επομένως, $f(x, y) = h(x, y)\exp[j(\omega_{1c}x + \omega_{2c}y) + \phi]$.

(b) Για τους Fourier μετασχηματισμούς έχουμε:

$$G(\omega_1, \omega_2) = \pi abe^{-\frac{a^2\omega_1^2 + b^2\omega_2^2}{4}}$$

$$H(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 \cos\theta + \omega_2 \sin\theta, -\omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta) \exp[-j(\omega_1(x_c \cos\theta + y_c \sin\theta) + \omega_2(-x_c \sin\theta + y_c \cos\theta)]$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = e^{j\phi} H(\omega_1 - \omega_{1c}, \omega_2 - \omega_{2c})$$

1.4:

(a) Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8 το χρώμα που παράγεται με προσθετικό ταίριασμα θα ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα 3 πρωταρχικά χρώματα. Όμως, τα χρώματα του ανθρώπινου οπτικού χώρου βρίσκονται στο πέταλο του σχήματος και δεν είναι δυνατόν να περιέχονται όλα στο εσωτερικό του τριγώνου.

(b) (a) Προβάλοντας τα R, G, B έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2R - G - B) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(G - B) \end{bmatrix}$$

(b)

$$C_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - RG - RB - GB}$$

$$H_2 = \pi + \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{C_2}, & y \geq 0 \\ 360° - \arccos \frac{x}{C_2}, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \theta, & G \geq B \\ 360° - \theta, & G \leq B \end{cases}$$
$$with \quad \theta = \arccos(-0.5(2R - G - B)/C_2)$$

1.5:

(a)

$$\begin{aligned} f{*}h(x, y) &= \int\int f(x - a, y - b)h(a, b)dadb = \int h_2(b)db \int f(x - a, y - b)h_1(a)da \\ &= \int h_2(b)[(f{*}_1 h_1)(x, y - b)]db = [(f{*}_1 h_1){*}_2 h_2](x, y) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f \oplus h(x, y) &= \bigvee_a \bigvee_b f(x - a, y - b) + h(a, b) = \bigvee_b h_2(b) + \bigvee_a f(x - a, y - b) + h_1(a) \\ &= \bigvee_b h_2(b) + [(f \oplus_1 h_1)(x, y - b)] = [(f \oplus_1 h_1) \oplus_2 h_2](x, y) \end{aligned}$$

1.6:

(a1)

$$X \circ (B_{+z}) = \bigcup_{B_{+z+p} \subseteq X} B_{+z+p} = \bigcup_{B_{+q} \subseteq X} B_{+q} = X \circ B$$

(a2)

$$(X \ominus A) \ominus B = \bigcap_{z \in B} \left(\bigcap_{y \in A} X_{-y-z} \right) = \bigcap_{q \in (A \oplus B)} X_{-q} = X \ominus (A \oplus B)$$

(b1) Αρχικά ισχύουν:

$$\begin{aligned} (f \ominus B)(x) &= \bigwedge_{y \in B} f(x+y) \leq f(x+y) \quad \forall y \in B && (1) \\ (f \oplus B)(x) &= \bigvee_{y \in B} f(x-y) \geq f(x-y) \quad \forall y \in B && (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) θα έχουμε ότι: $\mathbf{0} \in B \Rightarrow f \ominus B \leq f \leq f \oplus B$ και από εδώ έπεται: $\mathbf{0} \in B \Rightarrow f \ominus B \leq f \circ B \leq f \leq f \bullet B \leq f \oplus B$.

(b2) Για να αποδείξουμε την ταυτοδυναμία του φίλτρου θα χρειαστούμε την ταυτοδυναμία του opening και του closing. Το opening $f \circ g$ είναι μη επεκτατικό, επομένως:

$$(f \circ g) \circ g \leq f \circ g \tag{3}$$

Επίσης το closing και το dilation είναι επεκτατικά επομένως:

$$(f \ominus g) \bullet g \geq f \ominus g \Rightarrow ((f \ominus g) \bullet g) \oplus g \geq (f \ominus g) \oplus g \Rightarrow (f \circ g) \circ g \geq f \circ g \tag{4}$$

Επομένως από τις 3,4 λαμβάνουμε $f \circ g \leq (f \circ g) \circ g \leq f \circ g$. Άρα το opening είναι ταυτοδύναμο: $(f \circ g) \circ g = f \circ g$. Αντίστοιχα, το closing είναι ταυτοδύναμο: $(f \bullet g) \bullet g = f \bullet g$. Επομένως:

$$(((f \circ g) \bullet g) \circ) \bullet g \leq ((f \circ g) \bullet g) \bullet g \Rightarrow \psi(\psi(f)) \leq (f \circ g) \bullet g \Rightarrow \psi(\psi(f)) \leq \psi(f)$$

και

$$(((f \circ g) \bullet g) \circ) \bullet g \geq ((f \circ g) \circ g) \bullet g \Rightarrow \psi(\psi(f)) \geq (f \circ g) \bullet g \Rightarrow \psi(\psi(f)) \geq \psi(f)$$

Τελικά $\psi(f) \leq \psi(\psi(f)) \leq \psi(f)$ άρα $\psi(\psi(f)) = \psi(f)$.

(c) Αρχικά για τον τελεστή Φ θα έχουμε:

$$\Phi(X) = X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \Rightarrow \Phi(X) = \Phi_2(\Phi_1(X))$$

όπου:

$$\Phi_1(X) = X \oplus B, \qquad \Phi_2(X) = X \ominus B$$

Τα αντίστοιχα γκρίζα φίλτρα ϕ_1, ϕ_2 που προκύπτουν από υπέρθεση κατωφλίου θα είναι:

$$\phi_i(f)(x) = \sup\{v \in \mathbb{R} : x \in \Phi_i[X_v(f)]\}, \quad i = 1, 2$$

Από τη θεωρία ξέρουμε ότι τα φίλτρα που προκύπτουν αντιστοιχούν στα: $\phi_1(f) = f \oplus B$ και $\phi_2(f) = f \ominus B$. Υποθέτουμε ότι και τα δύο φίλτρα ϕ_1, ϕ_2 commute with thresholding. (Αυτό ισχύει πάντα για το erosion, ενώ για το dilation ισχύει εάν το B είναι συμπαγές.) Άρα για το αρχικό γκρίζο φίλτρο ϕ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(f)(x) &= \sup\{v \in \mathbb{R} : x \in \Phi[X_v(f)]\} \\ &= \sup\{v : x \in \Phi_2[\Phi_1[X_v(f)]]\} \\ &= \sup\{v : x \in \Phi_2[X_v[\phi_1(f)]]\} \\ &= \sup\{v : x \in X_v[\phi_2[\phi_1(f)]]\} \\ &= \phi_2(\phi_1(f))(x) = (f \oplus B) \ominus B(x) = f \bullet B(x) \end{aligned}$$

(d)Για τον τελεστή συνόλων $\Phi(X)$ θα έχουμε:

$$\Phi(X) = X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B = \bigcap_{z \in B} \left(\bigcup_{y \in B} X_{y-z} \right) = \bigcap_{z \in B} (X_{(0,0)-z} \cap X_{(0,1)-z} \cap X_{(1,0)-z})$$
$$= (X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)} \cup X_{(1,0)}) \cap (X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(1,-1)}) \cap (X_{(-1,0)} \cup X_{(-1,1)} \cup X_{(0,0)})$$

Άρα η boolean συνάρτηση $\beta(u_1,...,u_n)$ είναι:

$$\beta(u_1,...u_n) = (u_{0,0}+u_{0,1}+u_{1,0})\cdot(u_{0,-1}+u_{0,0}+u_{1,-1})\cdot(u_{-1,0}+u_{-1,1}+u_{0,0})$$

Τέλος, το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο $\phi(f)(x,y)$ είναι:

$$\begin{aligned}\phi(f)(x,y) = \min\{&\max\left[f(x,y), f(x,y-1), f(x-1,y)\right],\\ &\max\left[f(x,y+1), f(x,y), f(x-1,y+1)\right],\\ &\max\left[f(x+1,y), f(x+1,y-1), f(x,y)\right]\}\end{aligned}$$

1.7:

(a) (a) Αρχικά από την παραμετρική εξίσωση της εικόνας για τις πραγματικές τιμές του gradient θα έχουμε

$$\|\nabla I\| = \sqrt{k_2^2+k_3^2}, \quad \theta = \arctan(k_3/k_2)$$

Επίσης οι τιμές της εικόνας για μία γειτονιά 3×3 θα είναι:

$k_1-k_2-k_3$	k_1-k_3	$k_1+k_2-k_3$
k_1-k_2	k_1	k_1+k_2
$k_1-k_2+k_3$	k_1+k_3	$k_1+k_2+k_3$

Οι τιμές των 2 φίλτρων στο σημείο $(0,0)$ θα είναι $g_x = -2k_2(2a+b), g_y = 2k_3(2a+b)$. Για να είναι οι ανωτέρω ποσότητες ίσες με τις πραγματικές τιμές του gradient πρέπει: $2(2a+b)=1$.

(b) Στην περίπτωση που υπάρχει θόρυβος (μηδενικής μέσης τιμής και με διακύμανση σ^2) τότε η τιμή του g_x θα είναι:

$$g_x = -2k_2(2a+b) - a[w(-1,-1)+w(-1,1)+w(1,-1)+w(1,1)] - b[w(-1,0)+w(1,0)]$$

Επειδή έχουμε θόρυβο με μέση τιμή μηδέν και $2(2a+b)=1$ θα έχουμε $E[g_x] = -2k_2(2a+b) = -k_2$. Επίσης επειδή ο θόρυβος έχει διακύμανση σ^2 και $2(2a+b)=1$ θα έχουμε:

$$\mathrm{Var}[g_x] = 4a^2\sigma^2 + 2b^2\sigma^2 = (4a^2+2b^2)\sigma^2 = (16a^2-4a+1/2)\sigma^2$$

Η τιμή του a που ελαχιστοποιεί το $Var[g_x]$ είναι $(24a-4)\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1/6$. Επίσης, $b = (1/2-2a) = 1/6$ και η μορφή της μάσκας g_x είναι $-1/6$ πολλαπλάσιο της Prewitt μάσκας για ανίχνευση ακμών:

1/6	0	-1/6
1/6	0	-1/6
1/6	0	-1/6

(b) (a) Η διαφορά δύο γκαουσιανών με $\sigma_1 = \sigma$ και $\sigma_1 = \sigma+\Delta\sigma$ είναι:

$$\Delta G(x) = G_{\sigma_1}(x) - G\sigma_2(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right] = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma\frac{d^2G_\sigma(x)}{dx^2}$$

(a) Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier:

$$\frac{\Delta G_\sigma(\omega)}{\Delta\sigma} = -\frac{e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} - e^{-\frac{\omega^2(\sigma+\Delta\sigma)^2}{2}}}{\Delta\sigma} = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\frac{1-e^{-\omega^2\left(\frac{2\sigma\Delta\sigma+(\Delta\sigma)^2}{2}\right)}}{\Delta\sigma} \rightarrow -\sigma\omega^2G_\sigma(\omega) = \sigma FT\left\{\frac{d^2G_\sigma(x)}{dx^2}\right\}$$