Ημερομηνία: 4-6-2022 **2η Σειρά Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 17-6-2022

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο HELIOS. Θα πρέπει να υποβάλετε την αναφορά σας ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: dsp22_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf, όπου AM είναι ο οκταψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην πρώτη σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM και email address σας.

Άσκηση 2.1: (Γραμμική Πρόβλεψη, Αλγόριθμος Levinson) [ανεξάρτητα μέρη τα (α),(β)]
(α) Για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι τιμές της αυτοσυσχέτισης του (παραθυρωμένου) σήματος: $r[0] = 1.05, r[1] = 0.7, r[2] = 0.5, r[3] = 0.4$.

(α.1) Επαληθεύσετε ότι ο 3×3 πίνακας αυτοσυσχέτισης που σχηματίζεται από τις παραπάνω αριθμητικές τιμές των $r[k]$ είναι θετικά ορισμένος. (Υπόδειξη: Ελέγξτε τα πρόσημα των κύριων υπο-οριζουσών του πίνακα ή τα πρόσημα των ιδιοτιμών του.)

(α.2) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους βέλτιστους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

(β) Για ένα γραμμικό προβλέπτη τάξης $p = 4$, εάν οι βέλτιστοι LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$ είναι οι:

$$\alpha_1 = 0.93, \quad \alpha_2 = 0.338, \quad \alpha_3 = -1.065, \quad \alpha_4 = 0.5$$

χρησιμοποιείστε την αναδρομή Levinson-Durbin σε μορφή πίνακα για να βρείτε τους αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

Άσκηση 2.2: (Ελάχιστη φάση, Γραμμική Φάση): Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{(1 - 0.36z^{-2})}.$$

(α) Βρείτε εκφράσεις για ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{1,min}(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_{1,min}(z)H_{ap}(z).$$

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το minimum-phase σύστημα $H_{1,min}(z)$ και για το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$, και να βρείτε τις περιοχές σύγκλισης των Z μετ/σμών.

(γ) Βρείτε εκφράσεις για ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{2,min}(z)$ και ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{lin}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_{2,min}(z)H_{lin}(z).$$

Άσκηση 2.3: Έστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός Gaussian θόρυβος με μεταβλητότητα σ_w^2. Για κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να βρείτε την αυτοσυσχέτιση r_x του $x[n]$, και εάν η ανέλιξη είναι WSS να βρείτε και το φάσμα ισχύος της:
(α) A είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή και μεταβλητότητα σ_A^2, ενώ ω_0 και ϕ είναι σταθερές.
(β) ϕ είναι μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα [-π, π], ενώ A και ω_0 είναι σταθερές.

***Άσκηση* 2.4**: (Τυχαία διακριτά σήματα, Φάσμα Ισχύος)
Εστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 17\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k+1|}$$

(α) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z.
(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω.
(γ) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.
Εξηγείστε την εργασία σας.

***Άσκηση* 2.5**: (Στοχαστική ανέλιξη τύπου AR)
Έστω μια AR(1) στοχαστική ανέλιξη που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών:

$$x[n] = 0.4x[n-1] + v[n]$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος με μεταβλητότητα $\sigma_v^2 = 1$.
(α) Να βρεθεί το (μιγαδικό) φάσμα ισχύος $P_x(z)$ του $x[n]$.
(β) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$ του $x[n]$ από το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ και στη συνέχεια η μεταβλητότητα σ_x^2.
(γ) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$ του $x[n]$ λύνοντας τις εξισώσεις Yule-Walker (Ενότητα 3.6.2 του [1]). Συγκρίνετε τις μεθόδους (β) και (γ).

***Άσκηση* 2.6**: (Γραμμική πρόβλεψη παρουσία θορύβου με FIR φίλτρα Wiener)
Έστω μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ τύπου AR(1) που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών:

$$x[n] = 0.9x[n] + \eta[n],$$

όπου $\eta[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_\eta^2 = 0.76$. Παρατηρούμε το σήμα

$$y[n] = x[n] + v[n],$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ και ασυσχέτιστος με το σήμα $x[n]$.
(α) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$ και η αυτοσυσχέτιση $r_y[k]$. Στη συνέχεια επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε γραμμική πρόβλεψη του σήματος $x[n]$ από τη θορυβώδη εκδοχή του $y[n]$, δηλαδή το επιθυμητό σήμα είναι το $d[n] = x[n+1]$. Για το σκοπό αυτό:
(β) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener δεύτερης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1}.$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα $\xi = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = x[n+1] - y[n] * w[n]$.

(γ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener τρίτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1} + w(2)z^{-2}.$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Συγκρίνετε το σφάλμα αυτό με το σφάλμα του ερωτήματος (β) και αιτιολογήστε το αποτέλεσμα.
Σημείωση: Η θεωρία των φίλτρων Wiener εξηγείται στο Κεφ. 7 του [1].

---

[1] M. H. Hayes, Statistical Digital Processing and Modeling, Wiley, 1996