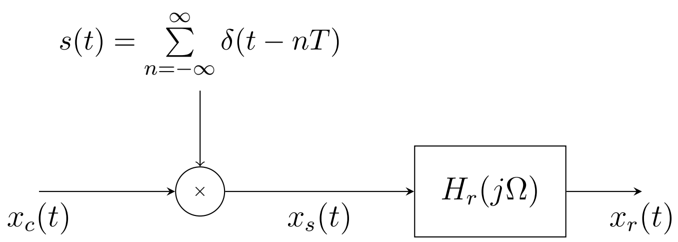
Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ.Μ.Υ. ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΊΑ ΣΗΜΑΤΩΝ Ακαδ.Έτος 2021-22
Ημερομηνία: 26-4-2022 **1η Σειρά Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 10-5-2022

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο HELIOS. Θα πρέπει να υποβάλετε την αναφορά σας ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: dsp22_hwk1_AM_FirstnameLastname.pdf, όπου AM είναι ο οκταψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην πρώτη σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM και email address σας.

Άσκηση 1.1: Θεωρήστε την αναπαράσταση των διαδοχικών διαδικασιών δειγματοληψίας και ανακατασκευής που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Υποθέστε ότι το αναλογικό σήμα εισόδου, $x_c(t)$, είναι:

$$x_c(t) = 2\cos(100\pi t - \pi/4) + \cos(300\pi t + \pi/3) \quad -\infty < t < \infty$$

Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου ανακατασκευής είναι:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$

(α) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου $X_c(j\Omega)$ και σχεδιάστε τον συναρτήσει του Ω.

(β) Υποθέστε ότι $f_s = 1/T = 500$ samples/sec. Σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier $X_s(j\Omega)$ για $-2\pi/T \leq \Omega \leq 2\pi/T$. Ποιο είναι το σήμα εξόδου $x_r(t)$ σε αυτή την περίπτωση; (Δώστε μια ακριβή έκφραση για το σήμα $x_r(t)$.)

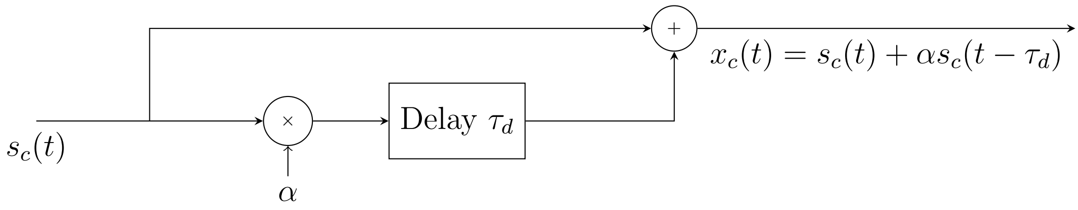
(γ) Υποθέστε τώρα ότι $f_s = 1/T = 250$ samples/sec. Επαναλάβετε το (β) για τη νέα αυτή συχνότητα δειγματοληψίας.

Άσκηση 1.2: Στο Σχήμα 2, απεικονίζεται ένα απλό μοντέλο ενός καναλιού επικοινωνίας πολλαπλών διαδρομών. Υποθέτουμε ότι το σήμα εισόδου, $s_c(t)$, είναι φασματικά περιορισμένο:

$$S_c(j\Omega) = 0, \;\; |\Omega| > \frac{\pi}{T},$$

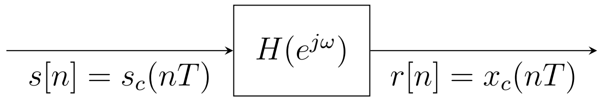
και ότι το σήμα εξόδου, $x_c(t)$, δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας T, ώστε να προκύψει το σήμα διακριτού χρόνου $x[n] = x_c(nT)$.

(α) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier των σημάτων $x_c(t), x[n]$ συναρτήσει του $S_c(j\Omega)$.



Σχήμα 2

(β) Θέλουμε να προσομοιώσουμε το παραπάνω σύστημα μέσω ενός συστήματος διακριτού χρόνου, όπως αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 3. Για το σκοπό αυτό πρέπει να επιλέξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(e^{j\omega})$, έτσι ώστε η έξοδος $r[n] = x_c(nT)$ όταν η είσοδος $s[n] = s_c(nT)$. Να βρεθεί η κατάλληλη $H(e^{j\omega})$ συναρτήσει των παραμέτρων T και τ_d.



Σχήμα 3

(γ) Προσδιορίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος διακριτού χρόνου, $h[n]$, για τις εξής δύο περιπτώσεις: i) $\tau_d = T$ και ii) $\tau_d = T/2$.

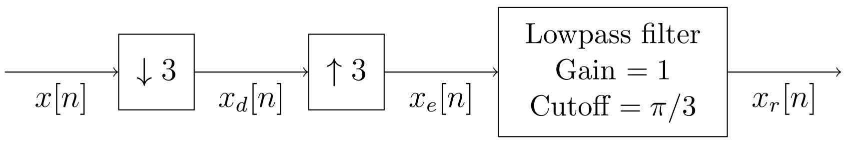
***Άσκηση* 1.3**: Θεωρήστε το σύστημα του Σχήματος 4. Για καθένα από τα παρακάτω σήματα εισόδου $x[n]$ αποφανθείτε για το κατά πόσο η ανακατασκευασμένη έξοδος $x_r[n]$ ισούται με την είσοδο, και εξηγήστε την απάντησή σας.

(α) $x[n] = \cos(\pi n/4)$

(β) $x[n] = \cos(\pi n/2)$

(γ) $x[n] = \left[\frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}\right]^2$

Υπόδειξη: Για το ερώτημα (γ), να υπολογιστεί πρώτα ο μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 4

***Άσκηση* 1.4**: Έστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 3\delta[n-4] + \delta[n-5] - 2\delta[n-6] + 4\delta[n-8] - \delta[n-9]$$

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

(α) Αν $X[k], H[k]$ είναι οι DFT 10-σημείων των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα αντίστροφο DFT 10-σημείων του $Y[k]$. Εξηγήστε πως προέκυψαν αυτές οι τιμές.

(β) Σχεδιάστε τα σήματα $x[n], h[n]$ και $y[n]$.

(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N-σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Εξηγήστε. Επίσης, να σχεδιάσετε το σήμα συνέλιξης $y[n]$.

(δ) Με βάση το μετασχηματισμό $X[k]$ ορίζουμε τις ακολουθίες:

$$P[k] = (-1)^k X[k], \quad k = 0, 1, \ldots, 9$$
$$Q[k] = |X[2k]|^2, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα. Χωρίς να υπολογίσετε τους ευθείς και αντίστροφους DFT των σχετικών ακολουθιών, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του DFT:

(δ.1) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.

(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

***Άσκηση* 1.5**: Θεωρήστε μια ακολουθία $x[n]$ N-σημείων με DFT $X[k], k = 0, 1, \ldots, N-1$ και N άρτιο. Ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει τα δείγματα του DFT της $x[n]$ με άρτιο δείκτη, δηλαδή τα $X[k], k = 0, 2, \ldots, N-2$, χρησιμοποιώντας ένα μόνο DFT $N/2$-σημείων:

1. Σχηματίζουμε μια νέα ακολουθία $y[n]$ ως εξής:

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n + N/2], & 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

2. Υπολογίζουμε τον DFT $N/2$-σημείων της $y[n]$, $Y[r], r = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$.

3. Τότε θα ισχύει $X[k] = Y[k/2], k = 0, 2, \ldots, N-2$.

(α) Δείξτε ότι ο προηγούμενος αλγόριθμος επιστρέφει πράγματι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

(β) Υποθέστε τώρα ότι δημιουργούμε μια ακολουθία πεπερασμένου μήκους $y[n]$ από μια ακολουθία $x[n]$ ως εξής:

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rM], & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Προσδιορίστε τη σχέση μεταξύ του DFT M-σημείων $Y[k]$ και του μετασχηματισμού Fourier $X(e^{j\omega})$ της $x[n]$. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) είναι μια ειδική περίπτωση του αποτελέσματος του ερωτήματος (β).

(γ) Αναπτύξτε έναν αλγόριθμο παρόμοιο με αυτόν που περιγράφεται παραπάνω, ο οποίος θα υπολογίζει τα δείγματα του DFT της $x[n]$ με περιττό δείκτη, δηλαδή τα $X[k], k = 1, 3, \ldots N-1$, με N άρτιο, χρησιμοποιώντας ένα μόνο DFT $N/2$-σημείων.