Σχολή ΗΜΜΥ ΕΜΠ
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Πρώτη Σειρά Ασκήσεων
Λίβα Αναστασία Χριστίνα 03119029

Άσκηση 1

α) Έχω $x_c(t) = 2\cos(100\pi t - \pi/4) + \cos(300\pi t + \pi/3)$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του Fourier Μετασχηματισμού παίρνω

$$X_c(j\Omega) = 2\pi e^{-j\Omega\frac{\pi}{4}}\left(\delta(\Omega - 100\pi) + \delta(\Omega + 100\pi)\right) + \pi e^{j\Omega\frac{\pi}{3}}\left(\delta(\Omega - 300\pi) + \delta(\Omega + 300\pi)\right)$$

β) $f_s = 500$ s/sec $\Rightarrow$ $T_s = \frac{1}{500}$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - n\frac{1}{500}\right)$$

Άρα $x_s(t) = x_c(t)\cdot s(t) = x_c(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t - n\frac{1}{500}\right)$

Η μέγιστη συχνότητα Ω_0 του σήματος είναι 300π.
$1000\pi > 2\Omega_0$
Άρα ζηλώ Θ. Nyquist δεν έχω aliasing

Μετασχηματίζοντας κατά Fourier έχω:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * 1000\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - 1000\pi k) = 500\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 1000\pi k))$$

Για $|\Omega| \leq 1000\pi$:

$$X_s(j\Omega) = 500\sum 2\pi e^{-j\frac{\Omega\pi}{4}}\left(\delta(\Omega - 100\pi - 1000\pi k) + \delta(\Omega + 100\pi - 1000\pi k)\right)$$
$$+ 500\pi e^{j\Omega\frac{\pi}{3}}\sum\left(\delta(\Omega - 300\pi - 1000\pi k) + \delta(\Omega + 300\pi - 1000\pi k)\right) =$$
$$500\cdot 2\pi e^{-j\frac{\Omega\pi}{4}}\left(\delta(\Omega - 100\pi) + \delta(\Omega - 900\pi) + \delta(\Omega + 100\pi) + \delta(\Omega + 900\pi)\right) +$$
$$500\pi e^{j\Omega\frac{\pi}{3}}\left(\delta(\Omega - 300\pi) + \delta(\Omega - 700\pi) + \delta(\Omega + 300\pi) + \delta(\Omega + 700\pi)\right)$$

$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X_s(j\Omega) = 1000\pi e^{-j\Omega\frac{\pi}{4}} \delta(\Omega - 100\pi) + 500\pi e^{j\Omega\frac{\pi}{3}} \delta(\Omega - 300\pi)$
$+ 1000\pi e^{-j\Omega\frac{\pi}{4}} \delta(\Omega + 100\pi) + 500\pi e^{j\Omega\frac{\pi}{3}} \delta(\Omega + 300\pi)$

γ) $f_s = \frac{1}{T} = 250 \text{ s/sec}$

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\frac{1}{250})$

$x_s(t) = s(t) \cdot x_c(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{n}{250})$

$X_s(j\Omega) = 250 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 500\pi k))$

Για $|\Omega| \leq 500\pi$:

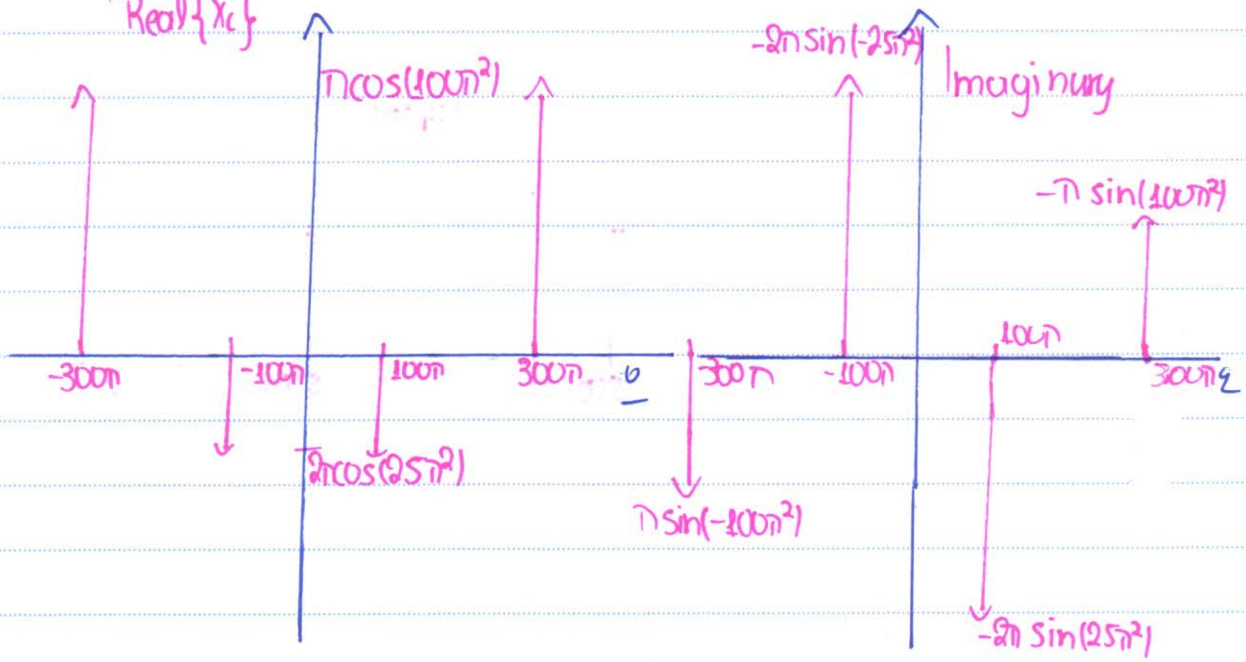
$X_s(j\Omega) = 500\pi e^{-j\frac{\Omega\pi}{4}} \sum(\delta(\Omega - 100\pi - 500\pi k) + \delta(\Omega + 100\pi - 500\pi k)) +$
$250\pi e^{j\frac{\Omega\pi}{3}} \sum(\delta(\Omega - 300\pi - 500\pi k) + \delta(\Omega + 300\pi - 500\pi k)) =$
$500\pi e^{-j\Omega\frac{\pi}{4}} (\delta(\Omega - 100\pi) + \delta(\Omega + 400\pi) + \delta(\Omega + 100\pi) + \delta(\Omega - 400\pi)) +$
$250\pi e^{j\frac{\Omega\pi}{3}} (\delta(\Omega - 300\pi) + \delta(\Omega + 200\pi) + \delta(\Omega + 300\pi) + \delta(\Omega - 200\pi))$

Διάγραμμα α ερωτήματος:

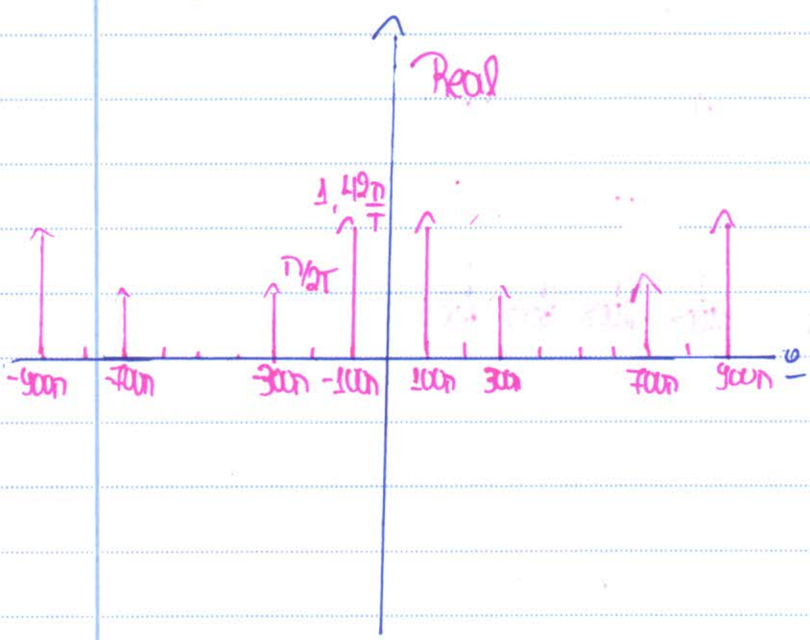
Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler έχω:

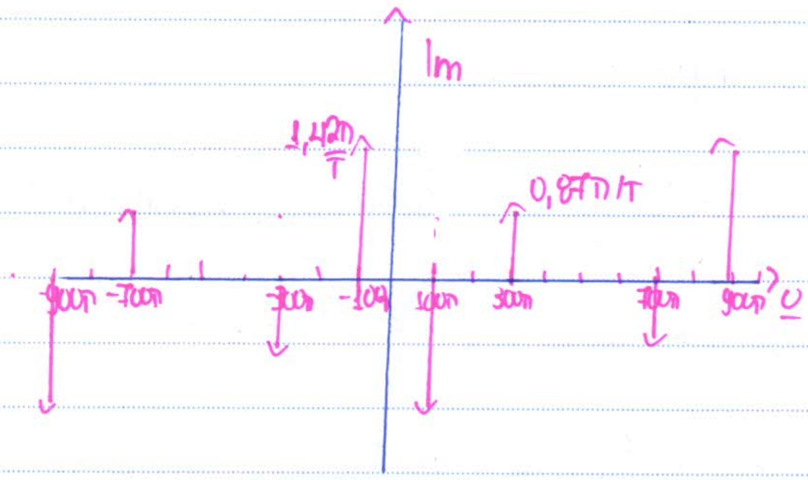
$$X_c(j\Omega) = 2\pi\cos\left(\Omega\frac{\pi}{4}\right)\left(\delta(\Omega-100\pi)+\delta(\Omega+100\pi)\right)+\pi\cos\left(\Omega\frac{\pi}{3}\right)\left(\delta(\Omega-300\pi)+\delta(\Omega+300\pi)\right)$$

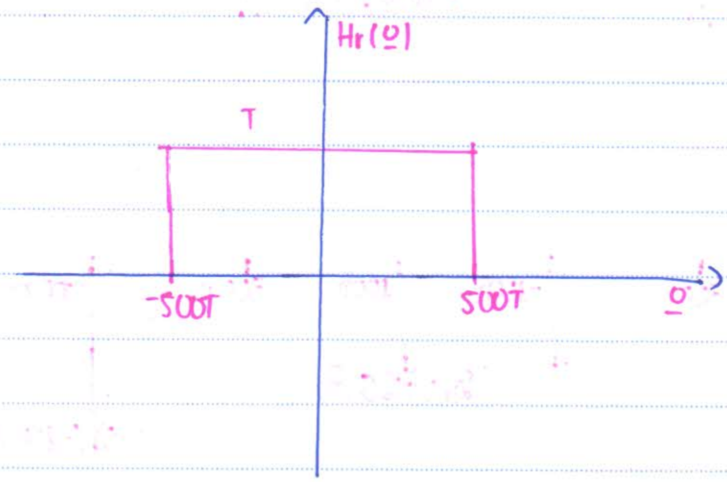
$$+j\left(-2\pi\sin\left(\Omega\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\delta(\Omega-100\pi)+\delta(\Omega+100\pi)\right)+\pi\sin\left(\Omega\frac{\pi}{3}\right)\left(\delta(\Omega-300\pi)+\delta(\Omega+300\pi)\right)$$



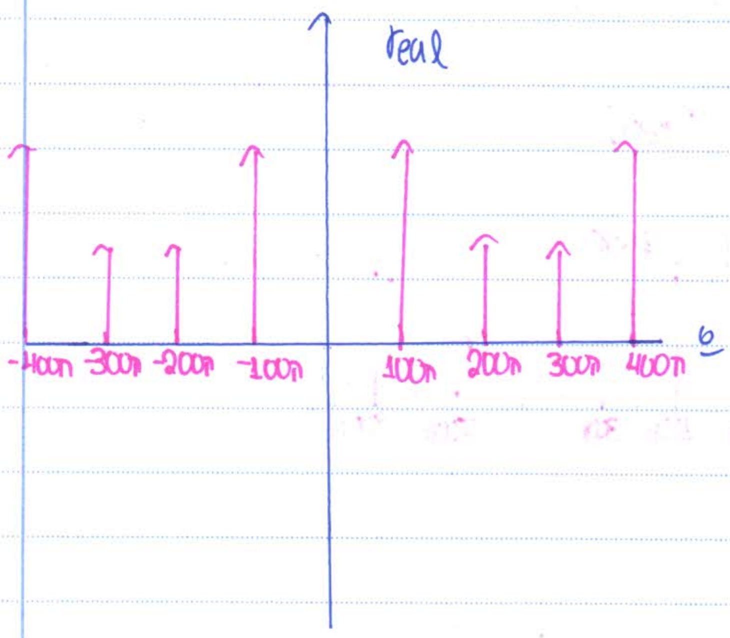
Διάγραμμα β ερωτήματος

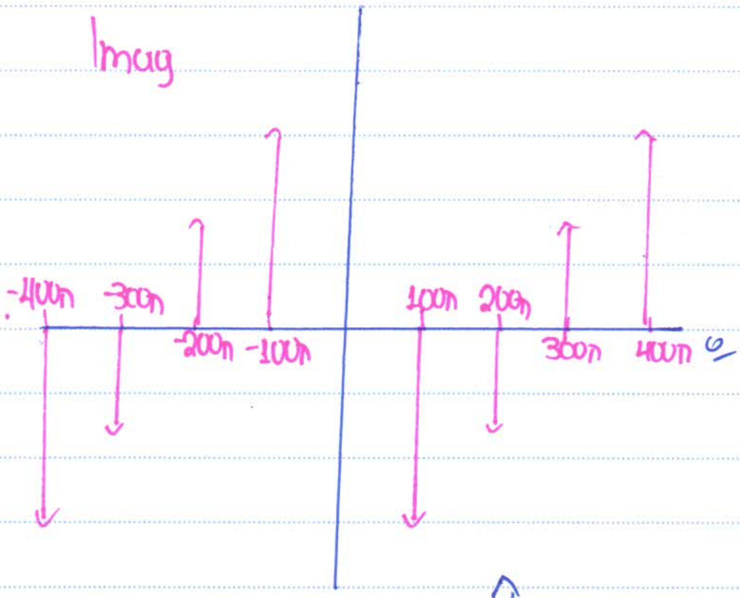


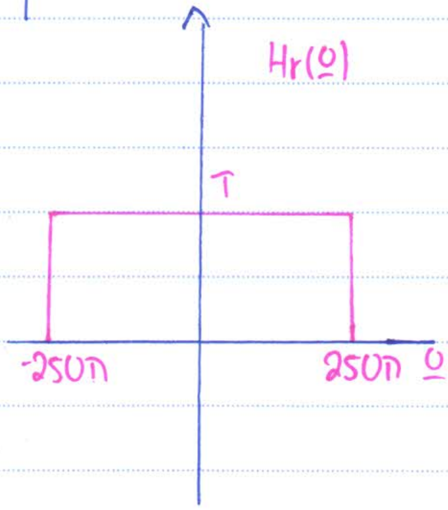




Διαγρ. ερωτήματος γ




Imag
-400π
-300π
-200π
-100π
100π
200π
300π
400π


Hr(Ω)
T
-250π
250π
Ω

Άσκηση 2

α) $X_c(j\Omega) = S_c(j\Omega) + a e^{-jT_d\Omega} S_c(j\Omega)\ ,\ |\Omega| \le \frac{\pi}{T}$

Ισχύει $X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)) \overset{\Omega=\frac{\omega}{T}}{=}$

$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(S_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)\left(1 + a e^{-jT_d\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)}\right)\right)$

β) Ισχύει $R(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) S(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{R(e^{j\omega})}{S(e^{j\omega})}$

Άρα $H(e^{j\omega}) = \dfrac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(S_c\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)\left(1 + a e^{-jT_d\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)}\right)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi}{T} m\right)\right)} =$

$\dfrac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(S_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) e^{-jT_d\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)}\right)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)} + 1 = H(e^{j\omega})$

γ) Μελετώ σε μια περίοδο

$H(e^{j\omega}) = 1 + a e^{-j\omega T_d} = 1 + a e^{-j\frac{\omega}{T}}$

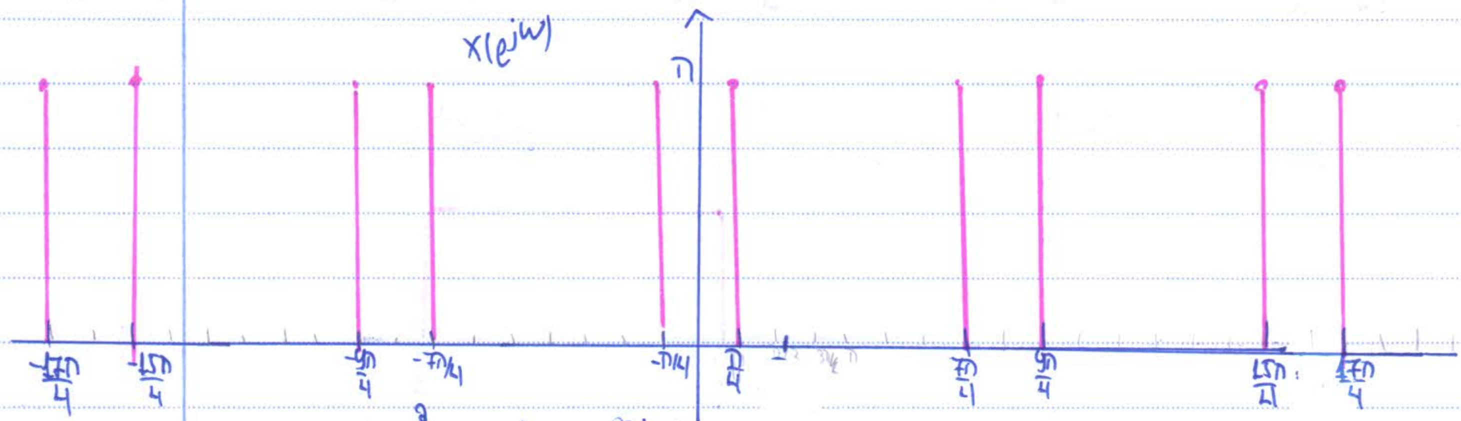
$T_d = T:\ H(e^{j\omega}) = 1 + a e^{-j\omega}$ άρα $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

$T_d = \frac{T}{2}:\ H(e^{j\omega}) = 1 + a e^{-j\frac{\omega}{T}}$ άρα $h[n] = \delta[n] + a\frac{\mathrm{Sinc}(\pi(n-1/2))}{\pi(n-1/2)}$

Άσκηση 13

a) $x[n] = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right)\right)$$

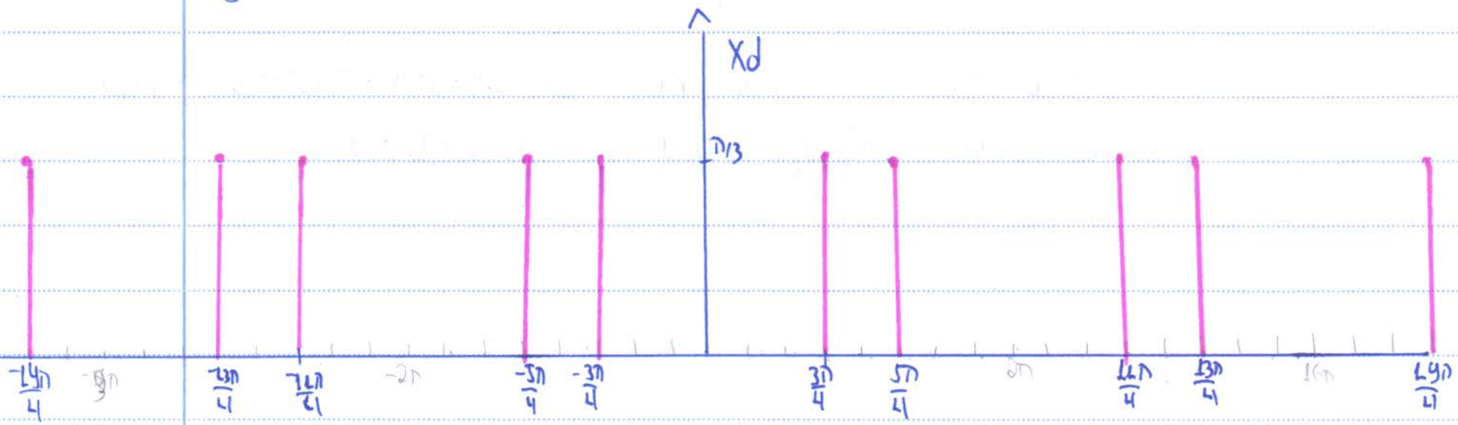


$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} X\left(e^{j(\omega/3 - 2\pi i/3)}\right) =$$

$$\frac{\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(\frac{\omega}{3} - \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) + \delta\left(\frac{\omega}{3} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right)\right) +$$

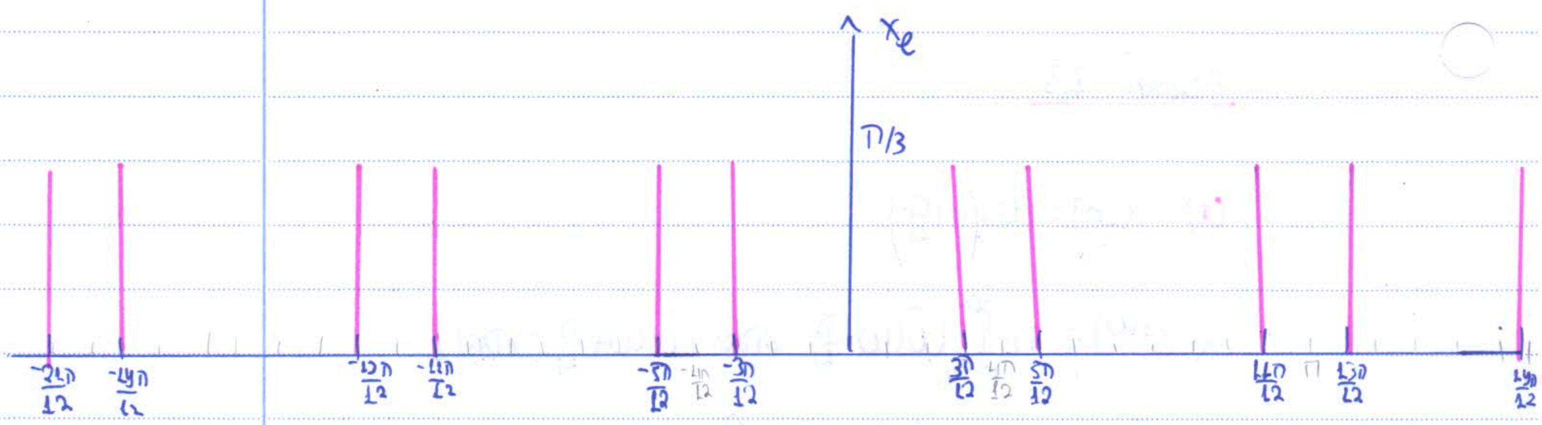
$$\frac{\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(\frac{\omega}{3} - \frac{11\pi}{12} - 2\pi k\right) + \delta\left(\frac{\omega}{3} - \frac{5\pi}{12} - 2\pi k\right)\right) +$$

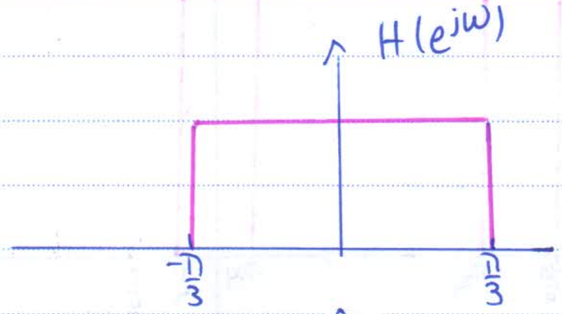
$$\frac{\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(\frac{\omega}{3} - \frac{19\pi}{12} - 2\pi k\right) + \delta\left(\frac{\omega}{3} - \frac{13\pi}{12} - 2\pi k\right)\right)$$

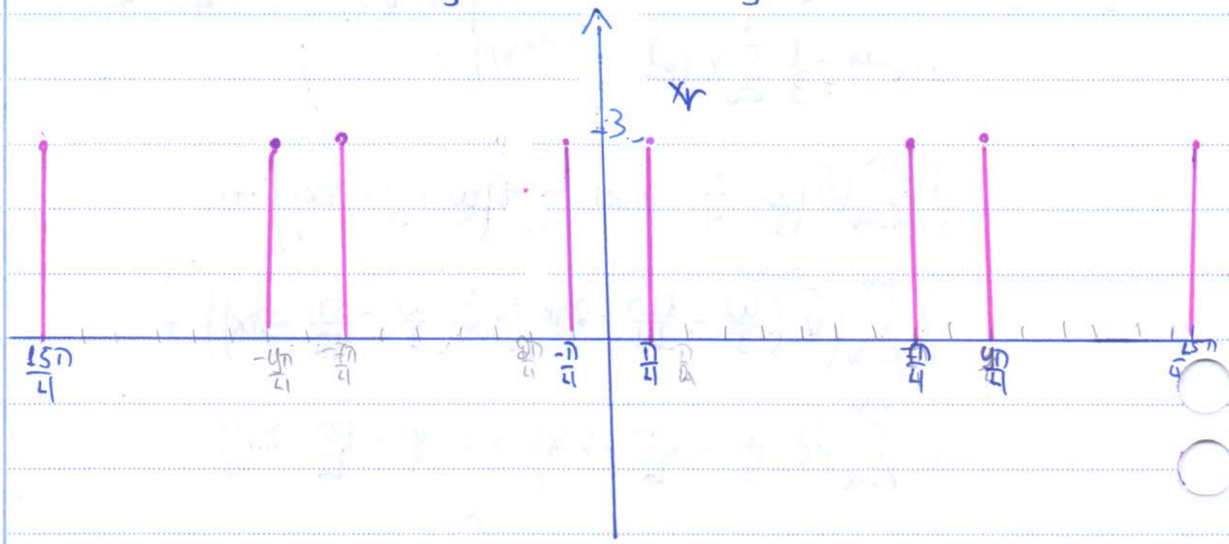


$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right)\right) +$$

$$\frac{\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{11\pi}{12} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega - \frac{5\pi}{12} - 2\pi k\right)\right) + \frac{\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{19\pi}{12} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega - \frac{13\pi}{12} - 2\pi k\right)\right)$$



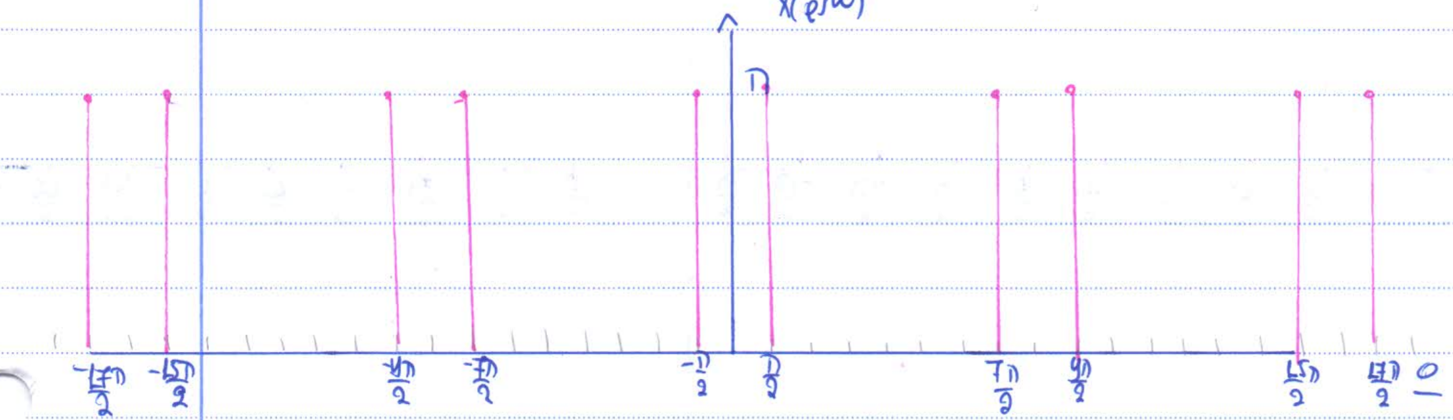




Βλέπω πως το αρχικό σήμα ανακατασκευάζεται πλήρως

b) $x[n] = \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right)$

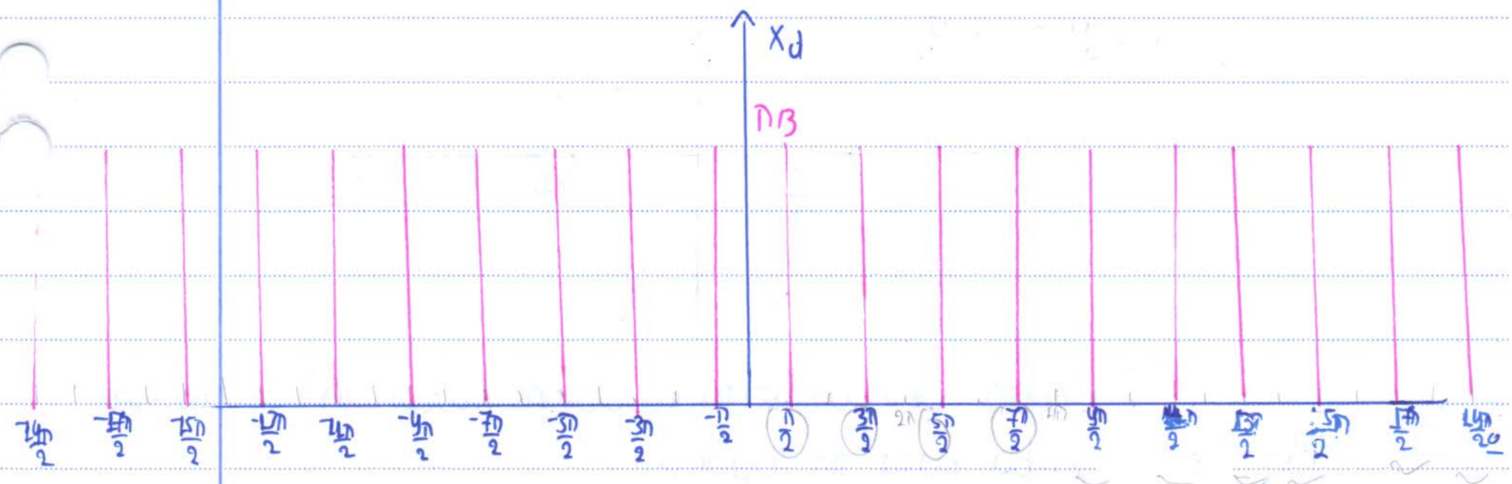
$$X(e^{jw}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(w - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \delta\left(w + \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right)\right)$$



$$X_d(e^{jw}) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2} X\left(e^{j\left(\frac{w}{3} - \frac{2\pi i}{3}\right)}\right) =$$

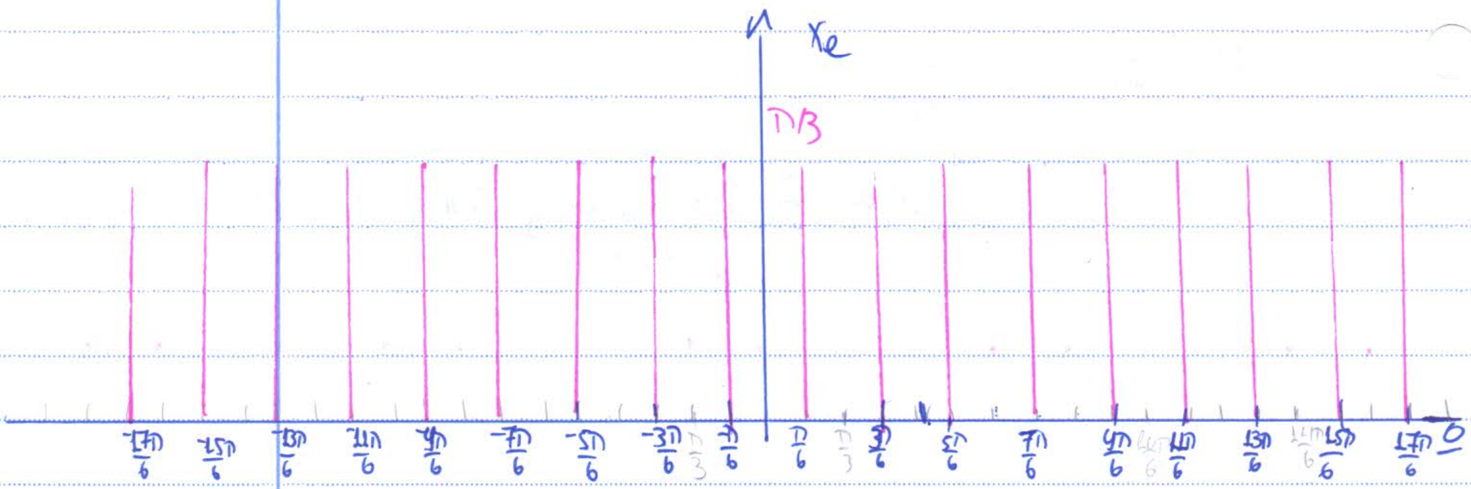
$$\frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\frac{w}{3} - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \delta\left(\frac{w}{3} + \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right)\right) + \frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\left(\frac{w}{3} - \frac{7\pi}{6} - 2\pi k\right) + \delta\left(\frac{w}{3} - \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)\right) +$$

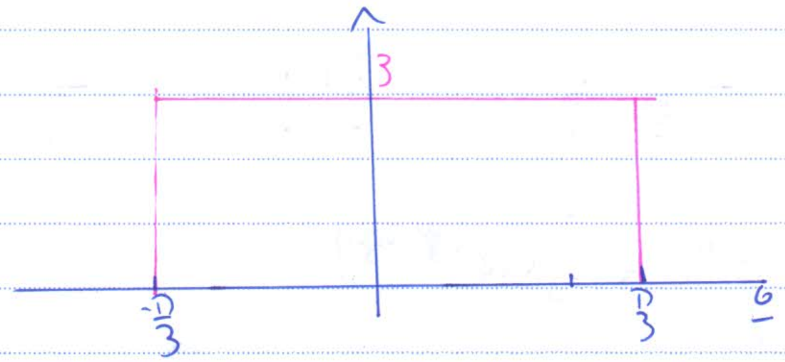
$$\frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\frac{w}{3} - \frac{11\pi}{6} - 2\pi k\right) + \delta\left(\frac{w}{3} - \frac{5\pi}{6} - 2\pi k\right)\right)$$

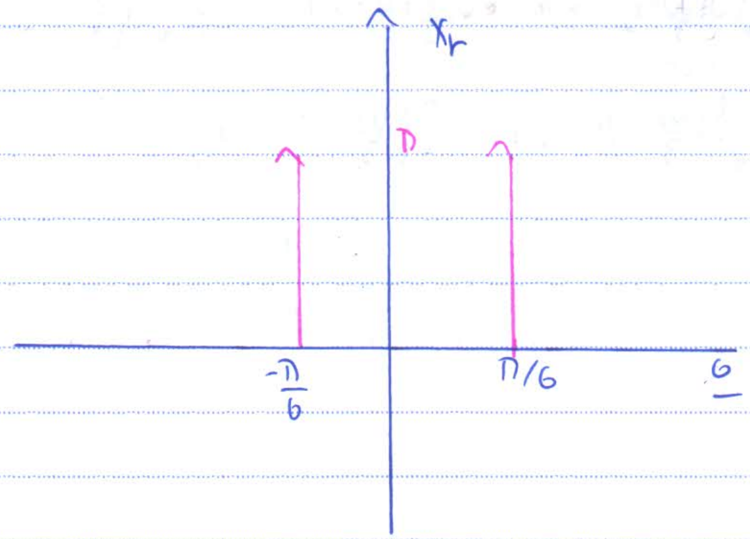


$$X_e(e^{jw}) = X_d(e^{j3w}) = \frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(w - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \delta\left(w + \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \right.$$

$$\frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(w - \frac{7\pi}{6} - 2\pi k\right) + \delta\left(w - \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)\right) + \frac{\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(w - \frac{11\pi}{6} - 2\pi k\right) + \delta\left(w - \frac{5\pi}{6} - 2\pi k\right)\right)$$



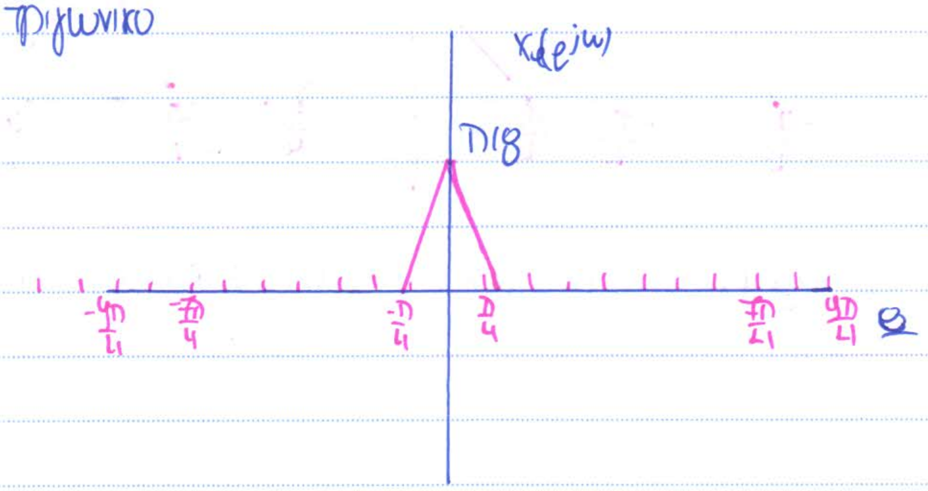


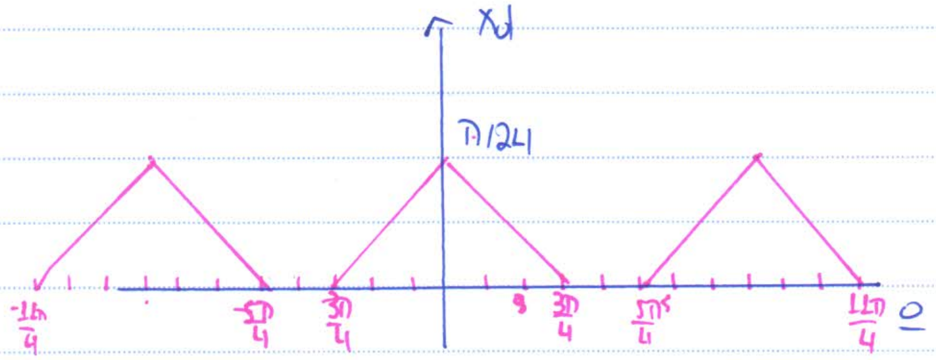


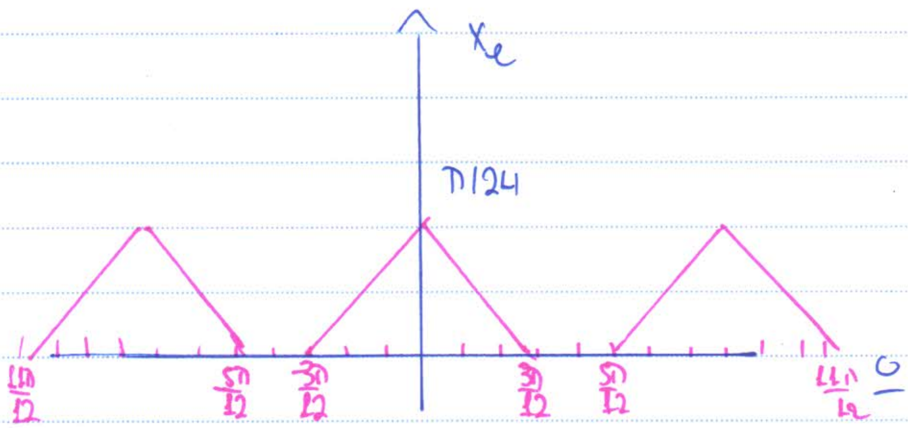
Το σήμα δεν ανακατασκευάστηκε καθώς υπήρξε aliasing στο φάσμα κατά τη συμπίεση γ) Έχω $x[n] = \left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)}{n\pi}\right)^2$

Άρα $X(e^{j\omega}) = F\left\{\frac{\sin(n\pi/8)}{n\pi}\right\} * F\left\{\frac{\sin(n\pi/8)}{n\pi}\right\}$

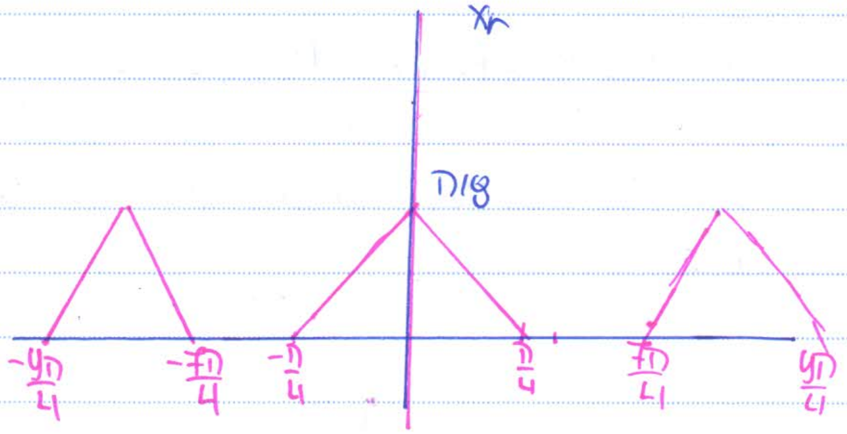
Η συνέλιξη ενός τετρ. παλμού με τον εαυτό του δίνει τριγωνικό







Το φίλτρο είναι όμοιο με πρ. ερώτημα



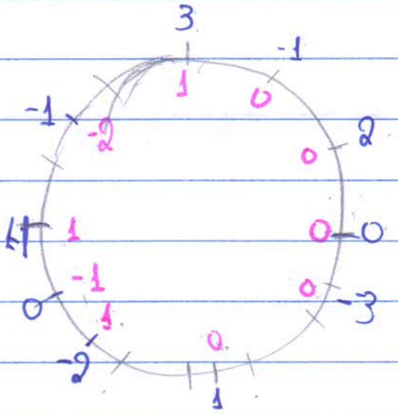
Παρατηρώ ότι το σήμα ανακατασκευάζεται πλήρως

Άσκηση 4

α) Ισχύει $y[n] \xleftrightarrow{DFT} Y[k]$ όπου $Y[k]=X[k]\cdot H[k]$

Συνεπώς το $y[n]$ μπορεί να υπολογιστεί με κυκλική συνέλιξη 10 σημείων άρα $y[n]=x[n] \, ⑩ \, h[n]$

Για τον υπολογισμό χρησιμοποιώ τον ακόλουθο αλγόριθμο:



1. Εκτός του κύκλου βρίσκονται τα στοιχεία του $x[n]$ ξεκινώντας από την κορυφή με το n να αυξάνεται δεξιόστροφα. Εντός βρίσκονται τα στοιχεία του $h[n]$ με το n να αυξάνεται αριστερόστροφα και το $h[0]$ στην κορυφή

2. Πολλαπλασιάζω κάθε ζευγάρι και προσθέτω όλα τα γινόμενα για να βρω το $y[0]$

3. Περιστρέφω την $h[n]$ μια θέση προς τα δεξιά κι επαναλαμβάνω το προηγούμενο βήμα

Τελικώς προκύπτει:

$y[0]=3-2+4+2=7$ $\quad$ $y[1]=-6-1-4-1=-12$

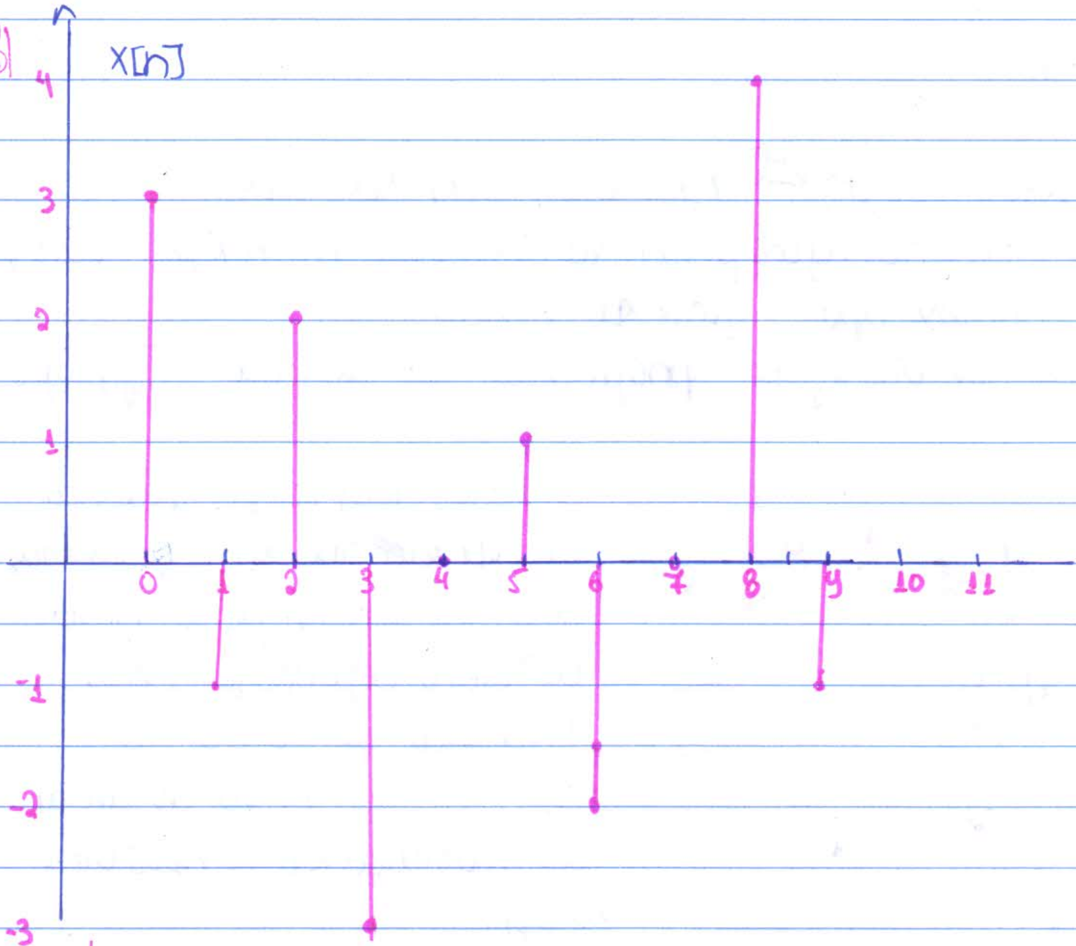
$y[2]=3+2+2+4+1=12$ $\quad$ $y[3]=-3-1-4-1=-9$

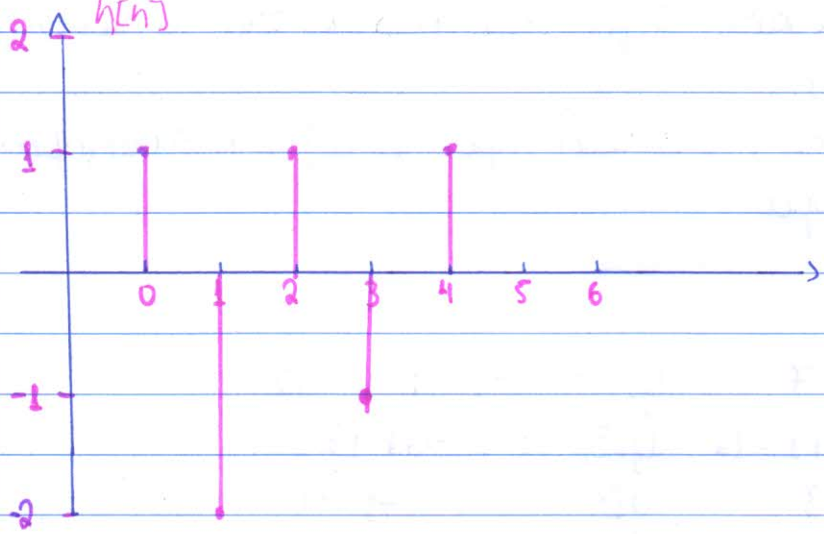
$y[4]=3+1+2-3=3$ $\quad$ $y[5]=-1-2+6+1=4$

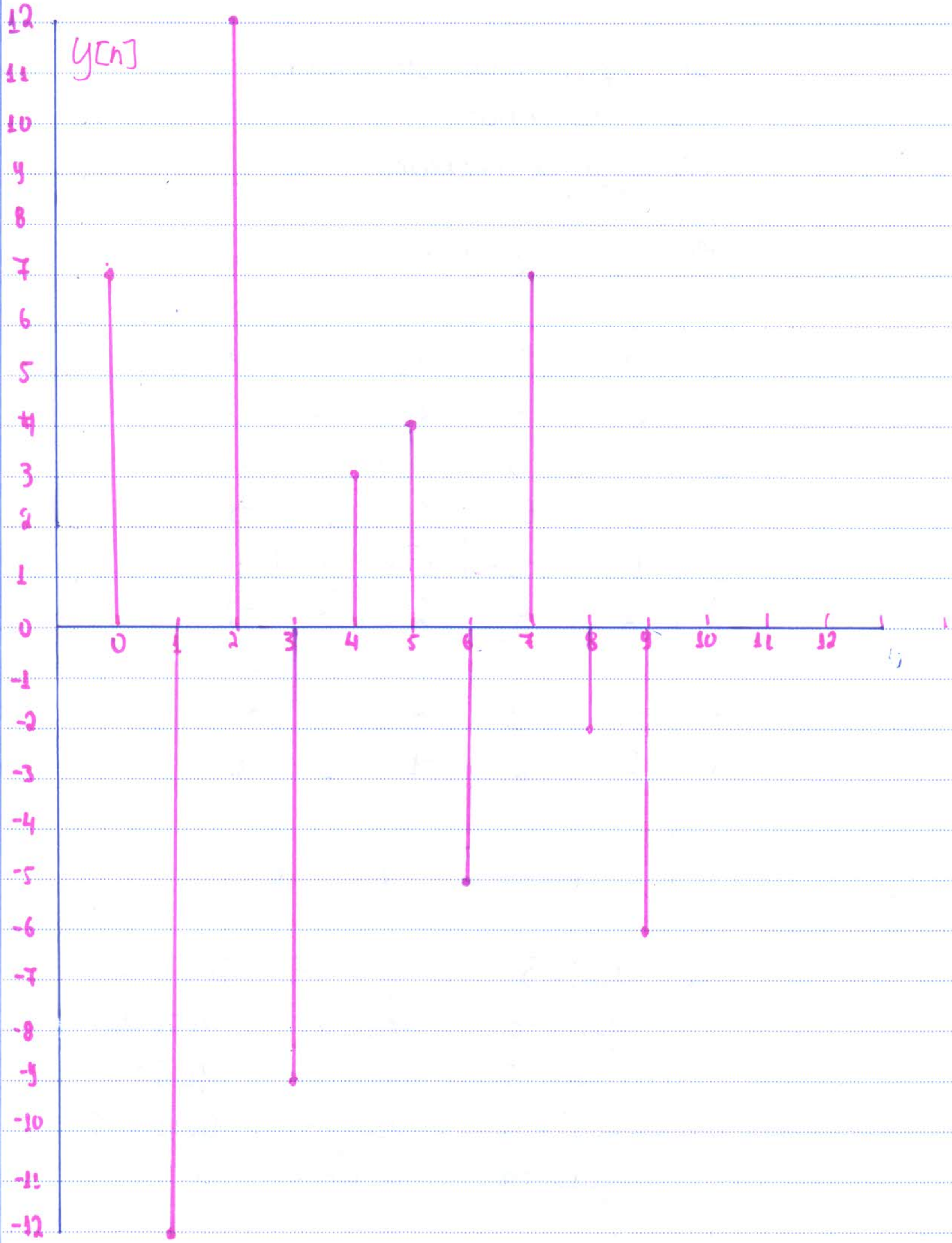
$y[6]=2-3-2-2=-5$ $\quad$ $y[7]=3+1+4=8$

$y[8]=-1-2+4-3=-2$ $\quad$ $y[9]=2+1-1-8=-6$

b)







γ) Καθώς η κυκλική συνέλιξη περιόδου N αντιστοιχεί σε αναδίπλωση της γραμμικής για να ταυτίζονται πρέπει η περίοδος της κυκλικής συνέλιξης να είναι μεγαλύτερη ή ίση της "διάρκειας" της γραμμικής, η οποία ισούται με το άθροισμα των συνελισσόμενων σημάτων -1 στο διακριτό χρόνο, ώστε το μετατοπισμένο σήμα να μην πέφτει πάνω στο κανονικό.

$y[n] = x[n] * h[n]$

Υπολογίζω με πινακάκι:

$x[n]$ \ $h[n]$	1	-2	1	-1	1
3	3	-6	3	-3	3
-1	-1	2	-1	1	-1
2	2	-4	2	-2	2
0	0	0	0	0	0
-3	-3	6	-3	3	-3
1	1	-2	1	-1	1
-2	-2	4	-2	2	-2
0	0	0	0	0	0
4	4	-8	4	-4	4
-1	-1	2	-1	1	-1

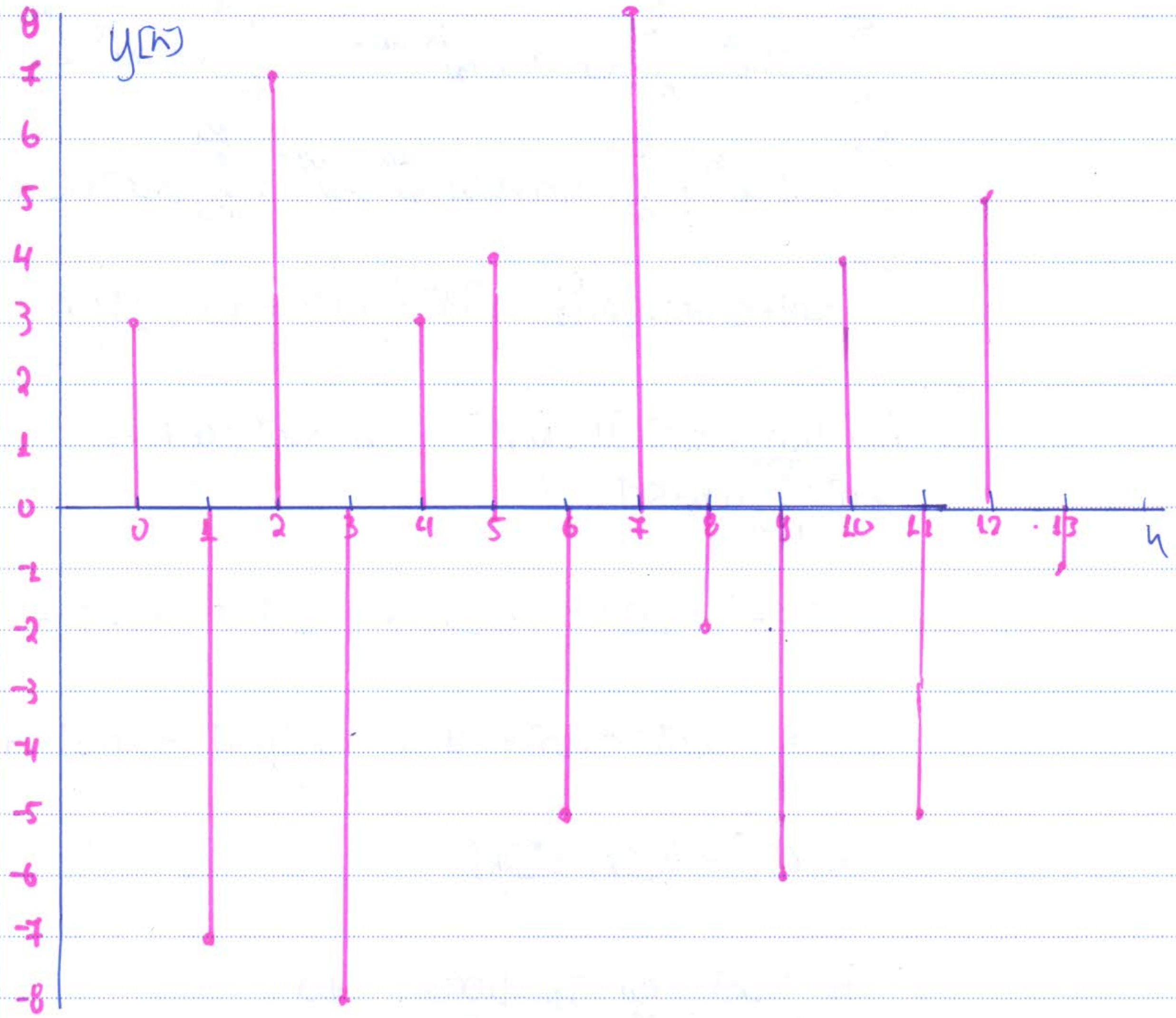
Άρα $y[0] = 3$ $y[1] = -7$ $y[2] = 7$

$y[3] = -8$ $y[4] = 3$ $y[5] = 4$

$y[6] = -5$ $y[7] = 8$ $y[8] = -2$

$y[9] = -6$ $y[10] = 4$ $y[11] = -5$

$y[12] = 5$ $y[13] = -1$



δ) $P[k] = (-1)^k X[k] \quad k=0,1,\dots,9$

δ.1) Ισχύει $(-1)^k = \cos(k\pi) - j\sin(k\pi) = \cos(k\pi) + j\sin(-k\pi) = e^{-jk\pi}$

Άρα $P[k] = e^{-jk\pi}X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{10}k\cdot 5}X[k] = W_{10}^{5k}X[k]$

Οπότε $p[n] = x[((n-5))_{10}]$

δ.2) $Q[k] = |X[2k]|^2, \quad k=0,1,2,3,4$

Θεωρώ u[n] σήμα με DFT X[2k]

Ισχύει: $X[2k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{2kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{2kn} =$

$$\sum_{n=0}^{N/2} x[n] W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n+N/2] W_N^{2k(n+N/2)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n+N/2] W_N^{2kn} \cancel{W_N^{kN}}^{1} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[n]+x[n+N/2]) W_N^{2kn} =$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[n]+x[n+N/2]) W_{N/2}^{kn} = DFT\left\{ x[n] + x[n+\tfrac{N}{2}] \right\}$$ N/2 σημείων

Άρα u[n] περιοδική αναδίπλωση x[n] για N=5

$$u[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-5r]$$

$u[0]=4 \quad u[1]=-3 \quad u[2]=2 \quad u[3]=4 \quad u[4]=-4$

Οπότε $u[n] = 4\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - 4\delta[n-4]$

$$|X[2k]|^2 = X[2k]\,X^*[2k]$$

Η u[n] είναι πραγματική άρα

$u^*[((-n))_5] \xleftrightarrow{DFT} X^*[2k] \implies$

$u[((-n))_5] \longleftrightarrow X^*[2k]$

Άρα $X[2k]\,X^*[2k] \xleftrightarrow{IDFT} u[n] \textcircled{5}\, u[((-n))_5] = q[n]$

Θεωρώ $a[n] = u[((-n))_5]$

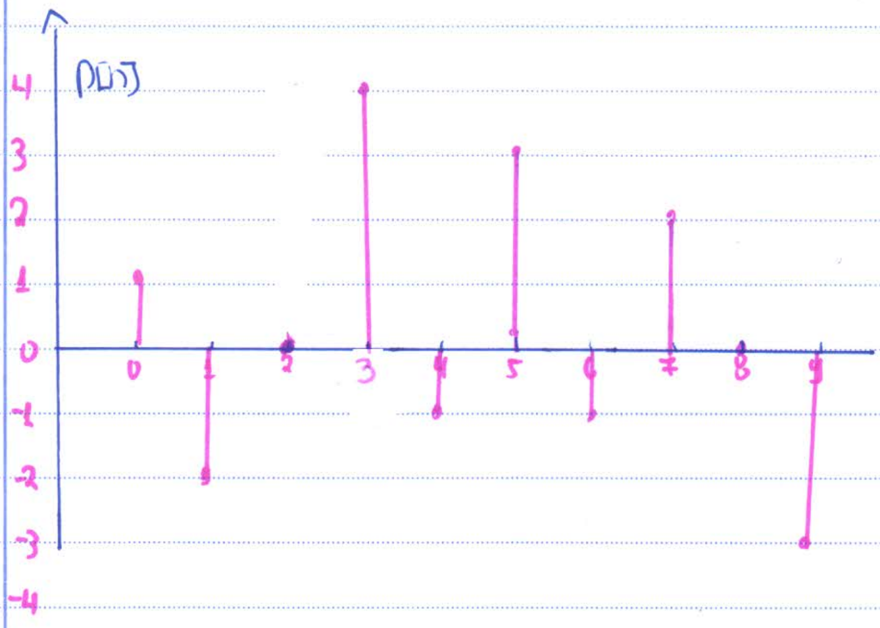
$a[0]=4 \quad a[1]=-4 \quad a[2]=4 \quad a[3]=2 \quad a[4]=-3$

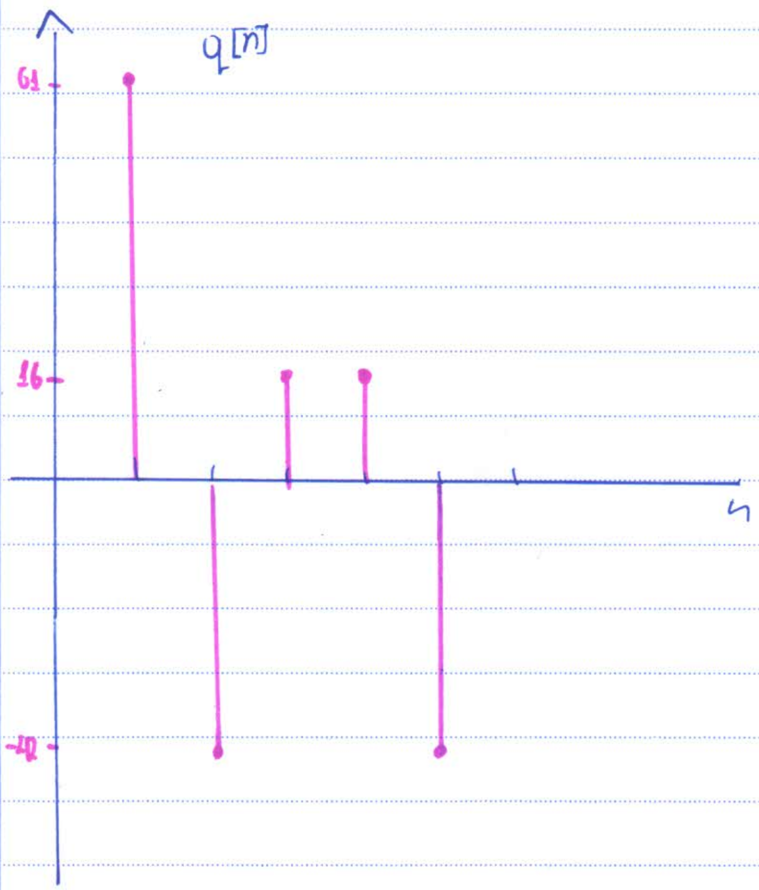
Οπότε $a[n] = 4\delta[n] - 4\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 2\delta[n-3] - 3\delta[n-4]$

$q[n] = u[n] \textcircled{5}\, a[n]$

Υπολογίζοντας τη συνέλιξη όπως στο πρώτο ερώτημα

έχω $q[0]=61 \quad q[1]=-42 \quad q[2]=16 \quad q[3]=16 \quad q[4]=-42$


p[n]
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9


q[n]
61
16
-40
n

Άσκηση 5

(α) Έχω

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} y[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N/2}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n+N/2]) e^{-j\frac{2\pi nk}{N/2}} =$$

$$\sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] e^{-j2\frac{2\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2]\, e^{-2j\frac{2\pi}{N}nk} e^{-2j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k} =$$

$$\sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{2kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_{N/2}^{2k(n+\frac{N}{2})}, \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{2kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_{N/2}^{2kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2kn} = X[2k]$$

Άρα $Y[k] = X[2k] \xrightarrow{n=\frac{k}{2}} Y[n/2] = X[n] \Rightarrow$

$Y[k/2] = Y[k], \quad k = 0, 2, \ldots, N-2$

(β) Αν $y[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+rM], & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Γνωρίζω πως $Y[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi}{M}k}, \quad k = 0, 1, \ldots, M-1.$

Για $M<N$ προκύπτει aliasing στο πεδίο του χρόνου

$$Y(k) = \sum_{m}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(m+rM) W_M^{km} \underline{\underline{\ l = m+rM\ }}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} x(l) W_M^{kl} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{M}}$$

Για $M = \frac{N}{2}$ και $r = [0, 1]$: $y(n) = \sum_r (x + rM) = x(n) + x(n+N/2)$

Άρα όπως το ερ. α είναι ειδική περίπτωση του β.

γ) Για περιττό δείκτη:

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(2k+1)n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} W_N^n + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n+N/2] W_{N/2}^{nk} (-W_N^n) =$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left((x[n] - x[n+N/2]) W_N^n \right) W_{N/2}^{nk}$$

Άρα ο αλγόριθμος είναι

1. Δημιουργώ ακολουθία $y[n] = \begin{cases} x[n] - x[n+N/2], & 0 \le n \le N/2 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

2. Υπολογίζω τον DFT $N/2$ σημείων της $y[n]$, $Y[r]$, $r=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$

3. $X[k] = Y[k/2] \quad k=0,2,\dots,N-2$