Δευτερη Σειρα Ασκησεων
Ψηφιακη Επεξεργασια Σηματος
Αναστασα Χριστινα Λιβα
ΕΛ19029
anachrilliva@gmail.com

Ασκηση 1

α1) Για γραμμικό προβλέπτη τάξης p:

$$R_x = \begin{bmatrix} r[0] & r[1] & r[2] \\ r[1] & r[0] & r[1] \\ r[2] & r[1] & r[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,05 & 0,7 & 0,5 \\ 0,7 & 1,05 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 1,05 \end{bmatrix}$$

Για να βρω ιδιοτιμές:

$$\det(\lambda I - R_x) = \begin{vmatrix} 1,05-\lambda & 0,7 & 0,5 \\ 0,7 & 1,05-\lambda & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 1,05-\lambda \end{vmatrix} = (1,05-\lambda)\begin{vmatrix} 1,05-\lambda & 0,7 \\ 0,7 & 1,05-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-0,7\begin{vmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,5 & 1,05-\lambda \end{vmatrix} + 0,5\begin{vmatrix} 0,7 & 1,05-\lambda \\ 0,5 & 0,7 \end{vmatrix} =$$

$$(1,05-\lambda)\left((1,05-\lambda)^2-0,49\right) - 0,7\left(0,7(1,05-\lambda)-0,7\cdot 0,5\right) +$$

$$0,5\left(0,49-0,5(1,05-\lambda)\right)$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του πολυωνύμου.
Προκύπτει $\lambda_1 = 0,2789$ $\lambda_2 = 0,55$ $\lambda_3 = 2,321$
Είναι όλες θετικές άρα θετικά ορισμένος ο R_x

α2) $E_{min}^{(0)} = r[0] = 1,05$

$$k_1 = -\frac{r[1]}{E_{min}^{(0)}} = \frac{-0,7}{1,05} = -0,667$$

άρα $a_1^{(1)} = 0,667$

$E_{min}^{(1)} = (1 - 0,667^2)\, 1,05 = 0,583$

$$k_2 = -\frac{r[2] - a_1^{(1)} r[1]}{E_{min}^{(1)}} = -\frac{0,5 - 0,667 \cdot 0,7}{0,583} = -0,057$$

$a_2^{(2)} = -k_2 = 0,057$

$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + k_2 a_1^{(1)} = 0,667 - 0,057 \cdot 0,667 = 0,63$

$E_{min}^{(2)} = (1 - k_2^2)\, E_{min}^{(1)} = 0,581$

$$k_3 = -\frac{r[3] - \sum_{j=1}^{2} a_j^{(2)} r[3-j]}{E_{min}^{(2)}} = -\frac{0,4 - 0,63 \cdot 0,5 - 0,057 \cdot 0,7}{0,581} =$$

$$-\frac{0,4 - 0,315 - 0,0399}{0,581} = -0,0776$$

$a_3^{(3)} = -k_3 = 0,0776$

$a_1^{(3)} = a_1^{(2)} + k_3 a_2^{(2)} = 0,667 - 0,0776 \cdot 0,057 = 0,65$

$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + k_3 a_1^{(2)} = 0,057 - 0,0776 \cdot 0,63 = 0,008$

$E_{min}^{(3)} = (1 - k_3^2)\, E_{min}^{(2)} = (1 - (0,0776)^2)\, 0,581 = 0,577$

β) Σε μορφή πίνακα η αναδρομή είναι

$$a^{(i)} = \begin{bmatrix} a^{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + k_i \begin{bmatrix} J a^{(i-1)} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}_{(i-1)\times(i-1)}$$

Για $i=4$

$$\begin{bmatrix} a_1^{(4)} \\ a_2^{(4)} \\ a_3^{(4)} \\ a_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} a_3^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ a_1^{(3)} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= a_1^{(3)} + k_4 a_3^{(3)} \\ a_2 &= a_2^{(3)} + k_4 a_2^{(3)} \\ a_3 &= a_3^{(3)} + k_4 a_1^{(3)} \\ a_4 &= -k_4 \end{aligned}$$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} a_4 = -k_4 &\Rightarrow k_4 = -0{,}5 \\ -1{,}065 &= a_3^{(3)} - 0{,}5 \cdot a_1^{(3)} \\ 0{,}338 &= a_2^{(3)} - 0{,}5\, a_2^{(3)} \\ 0{,}93 &= a_1^{(3)} - 0{,}5\, a_3^{(3)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_4 &= -0{,}5 \\ a_3^{(3)} &= -0{,}8 \\ a_2^{(3)} &= 0{,}676 \\ a_1^{(3)} &= 0{,}53 \end{aligned}$$

Για $i=3$

$$\begin{bmatrix} a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} a_2^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^{(3)} &= a_1^{(2)} + k_3 a_2^{(2)} \\ a_2^{(3)} &= a_2^{(2)} + k_3 a_1^{(2)} \\ a_3^{(3)} &= -k_3 \end{aligned}$$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} k_3 &= -a_3^{(3)} = 0{,}8 \\ a_2^{(3)} &= a_2^{(2)} + 0{,}8 a_1^{(2)} \\ a_1^{(3)} &= a_1^{(2)} + 0{,}8\, a_2^{(2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} k_3 &= 0{,}8 \\ 0{,}676 &= a_2^{(2)} + 0{,}8\, a_1^{(2)} \\ 0{,}53 &= a_1^{(2)} + 0{,}8\, a_2^{(2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_3 &= 0{,}8 \\ a_2^{(2)} &= 0{,}7 \\ a_1^{(2)} &= -0{,}03 \end{aligned}$$

Για $i=2$:

$$\begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^{(2)} &= a_1^{(1)} + k_2 a_1^{(1)} \\ a_2^{(2)} &= -k_2 \end{aligned}$$

Άρα $k_2 = -0{,}7$

$-0{,}03 = a_1^{(1)} - 0{,}7\, a_1^{(1)} \Rightarrow -0{,}3 a_1^{(1)} = 0{,}03 \Rightarrow a_1^{(1)} = -0{,}1$

$k_1 = -a_1 = 0{,}1$

Άσκηση 2

α) Ψάχνω σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{1,min}(z)$ και all pass σύστημα $H_{ap}(z)$ τέτοιο ώστε

$$H(z) = H_{min}(z)\, H_{ap}(z)$$

Το all pass σύστημα θα έχει μορφή

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}}$$

ενώ το ελάχιστης φάσης έχει πόλους και μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Το μόνο μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου είναι το $z=4$ και θέλω να το καθρεπτίσω εντός μοναδιαίου κύκλου άρα

$$H_{ap} = \frac{z^{-1} - 1/4}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

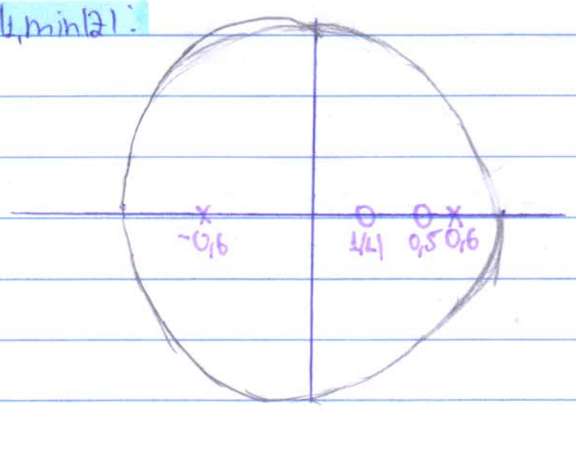
Συνεπώς $H_{min}(z) = \frac{H(z)}{H_{ap}} = \frac{(1-0,5z^{-1})(1-4z^{-1})}{1-0,36z^{-2}} \cdot \frac{1 - z^{-1}/4}{z^{-1} - 1/4} =$

$$= \frac{-4(1-0,5z^{-1})(1-z^{-1}/4)}{1-0,36z^{-2}} = \frac{(1-0,5z^{-1})(z^{-1}-4)}{(1-0,36z^{-2})}$$

Και

$$H(z) = H_{min}(z)\, H_{ap} = \frac{(1-0,5z^{-1})(z^{-1}-4)}{(1-0,36z^{-2})} \cdot \frac{z^{-1} - 1/4}{1 - z^{-1}/4}$$

β) $H_{1,min}(z)$:



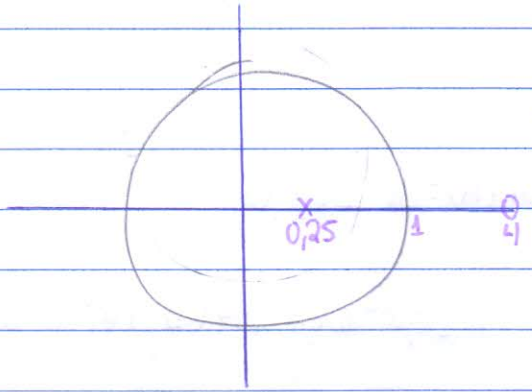
Μηδενικά: $0,5,\ \frac{1}{4}$

Πόλοι: $\pm 0,6$

Άρα ROC:

$|z| > 0,6$

Αλλ πως:



Μηδενικά: 4

Πόλοι: 1/4

ROC: $|z|>1/4$

γ) Τα FIR φίλτρα έχουν ΣΜ της μορφής

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\dots+b_M z^{-N} = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1}+\dots+b_M}{z^M}$$

Γνωρίζω ότι τα FIR συστήματα εάν έχουν μηδενικό στη θέση $a \in R$ τότε θα έχουν και στη θέση $\frac{1}{a} \in R$.

$$\frac{1-0{,}5z^{-1}}{z^2(1-4z^{-1})(1-z^{-1}/4)}$$

Άρα $H_{lin}(z) = \frac{(z-4)(z-1/4)}{z^2}$

$$H_{2,min}(z) = \frac{H(z)}{H_{lin}(z)} = \frac{(1-0{,}5z^{-1})(1-4z^{-1})\,z^2}{(1-0{,}36z^{-2})(z-4)(z-1/4)} =$$

$$\frac{(1-0{,}5z^{-1})(1-4z^{-1})z^2}{z^2(1-0{,}36z^{-2})(1-4z^{-1})(1-z^{-1}/4)} = \frac{1-0{,}5z^{-1}}{(1-0{,}36z^{-2})(1-z^{-1}/4)}$$

Θέτω $z=e^{j\omega}$ στο $H_{lin}(z)$:

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{(e^{j\omega}-4)(e^{j\omega}-1/4)}{e^{2j\omega}} = \frac{e^{2j\omega}-\frac{17}{4}e^{j\omega}+1}{e^{2j\omega}} = 1-\frac{17}{4}e^{-j\omega}+e^{-2j\omega} =$$

$$e^{-j\omega}\left(e^{j\omega}+e^{-j\omega}-\frac{17}{4}\right) = e^{-j\omega}\left(2\cos(\omega)-17/4\right)$$

$\cos\omega<1 \Rightarrow 2\cos\omega<2 \Rightarrow 2\cos\omega-\frac{17}{4} < -\frac{9}{4} < 0 \ \forall\omega$, άρα η φάση είναι πάντα $-\omega+\pi$

Άσκηση 3

α) $Var(w[n]) = \sigma_w^2 \quad Var(A) = \sigma_A^2 \quad E\{A\} = 0$

$r_x[k,l] = E\{x(k)x^*(l)\} = E\{(A\cos(\omega_0 k+\varphi) + w[k])(A^*\cos(\omega_0 l+\varphi) + w^*[l])\} =$

$E\{AA^*\cos(\omega_0 k+\varphi)\cos(\omega_0 l+\varphi)\} + \cancel{E\{A\cos(\omega_0 k+\varphi)w^*[l]\}}^{\to 0} +$

$\cancel{E\{A^*\cos(\omega_0 l+\varphi)w[k]\}}^{\to 0} + E\{w[k]w^*[l]\} =$

Θόρυβος ασυσχέτιστος με τυχαίες μεταβλητές σύμφωνα

$E\{AA^*\}\cos(\omega_0 l+\varphi)\cos(\omega_0 k+\varphi) + \underbrace{\sigma_w^2 \delta[k-l]}_{\text{ιδιότητα λ. θορ.}}$

$\sigma_A^2\cos(\omega_0 l+\varphi)\cos(\omega_0 k+\varphi) + \sigma_w^2\delta[k-l]$

Η αυτοσυσχέτιση δεν εξαρτάται μόνο από τη διαφορά k-l άρα όχι WSS στοχαστική ανέλιξη

β) Αφού φ ομοιόμορφα κατανεμημένη $E\{\varphi\}=0$ $f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < \varphi \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$Var[\varphi] = E\{\varphi^2\} - \cancel{E^2\{\varphi\}}^{\to 0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi^2}{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2}{3}$

$r_x[k,l] = E\{x[k]x^*[l]\} = E\{(A\cos(\omega_0 k+\varphi) + w[k])(A^*\cos(\omega_0 l+\varphi) + w[l])\} =$

ομοίως με πριν θόρυβος ασυσχέτιστος

$E\{AA^*\cos(\omega_0 k+\varphi)\cos(\omega_0 l+\varphi)\} + \sigma_w^2\delta[k-l] =$

$|A|^2 E\left\{\frac{\cos(\omega_0(k-l))}{2}\right\} + \frac{|A^2|}{2} E\left\{\cancel{\cos(\omega_0(k+l)+2\varphi)}^{\to 0}\right\} + \sigma_w^2\delta[k-l]$

Άρα $r_x[k,l] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0(k-l)) + \sigma_w^2\delta[k-l]$

Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται από το k-l άρα έχω WSS στοχαστική ανέλιξη

Αφού η στοχαστική ανέλιξη είναι WSS ισχύει το θεώρημα Einstein-Wiener-Khintchine οπότε το φάσμα ισχύος ισούται με τον DTFT της αυτοσυσχέτισης

Άρα θέτω $y=k-l$ κι έχω $r_x[y] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 y) + \sigma_w^2 \delta[y]$

$$P_x(e^{jy}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)\right) + \sigma_w^2$$

Άσκηση 2.4

α) Έχω $r_x[k] = 17\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k+1|}$

και για το φάσμα ισχύος $P_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x[k] z^{-k}$

Για τον όρο $\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|}$: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{0} \left(-1/3\right)^{-k} - 1 =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} z^{k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} z^{k} - 1 = \frac{z}{z+1/3} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z} - 1 = \frac{8/9}{\left(1+\frac{z^{-1}}{3}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)}$$

Οι υπόλοιποι δύο όροι έχουν καθυστερήσεις που στο πεδίο z εκφράζονται ως z^{-1} και z αντίστοιχα οπότε τελικά θα έχω:

$$P_x(z) = \frac{8}{9}\,\frac{17+4z^{-1}+4z}{\left(1+\frac{z^{-1}}{3}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{8}{9}\,\frac{(1+4z)(1+4z^{-1})}{(1+z^{-1}/3)(1+z/3)}$$

β) Θέτω $z=e^{j\omega}$ και παίρνω

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{8}{9}\,\frac{(4e^{j\omega}+1)(1+4e^{-j\omega})}{(1+e^{j\omega}/3)(1+e^{-j\omega}/3)} = \frac{8}{9}\,\frac{(17+4e^{-j\omega}+4e^{j\omega})}{\left(1+\frac{1}{9}+\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{3}\right)} =$$

$$4\,\frac{17+8\cos\omega}{5+3\cos\omega}$$

γ) Έχω: $P_x(z) = \frac{8}{9}\,\frac{(4z+1)(1+4z^{-1})}{(1+z^{-1}/3)(1+z/3)}$

Για τη φασματική παραγοντοποίηση θέλω να γράψω την $P_x(z)$ στη μορφή $P_x(z) = c_0^2 H(z) H^*(1/z^*)$, $H(z)$ αιτιατό και ελάχιστη φάση, δηλαδή δεν έχει μηδενικά και πόλους εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

$P_x(z) = \frac{8}{9}\,\frac{4z+1}{1+z/3}\,\frac{(4z^{-1}+1)}{1+z^{-1}/3}$, $H(z) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{(4+z)}{(3z+1)}$ min phase σύστημα

Η $P_x(z)$ είναι κανονική διαδικασία αφού μπορεί να παραγοντοποιηθεί με αυτόν τον τρόπο, άρα μπορεί να παραχθεί από το φιλτράρισμα λευκού θορύβου μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ με το φίλτρο $H(z)$

Άσκηση 2.5

α) Γενικός τύπος εξίσωσης διαφορών που δημιουργεί μια AR(1) στοχαστική ανέλιξη είναι:

$$x[n] = \sum_{l=1}^{p} a(l)\, x[n-l] = b[0]\, v[n]$$

Έχω $x[n] = 0{,}4\, x[n-1] + v[n]$, άρα $p=1$, $a[1] = 0{,}4$ $b[0] = 1$

Η ανέλιξη αυτή προκύπτει από φίλτρο με απόκριση τη μορφή

$$H(z) = \frac{b[0]}{1 + \sum_{k=1}^{p} a[k] z^{-k}} = \frac{1}{1 - 0{,}4 z^{-1}}$$

Για το φάσμα ισχύος:

$$P_x(z) = \sigma_v^2 |H(z)|^2$$

Θέτω $z = e^{jw}$ και παίρνω

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1 - 0{,}4 e^{-jw}} = \frac{1}{e^{-jw/2}\left(e^{jw/2} - 0{,}4 e^{-jw/2}\right)} = \frac{1}{0{,}8 e^{-jw/2} j \sin(w/2) + 0{,}6}$$

$$|H(e^{jw})|^2 = \frac{1}{|0{,}8 e^{-jw/2} j \sin(w/2) + 0{,}6|^2} = \frac{1}{|0{,}4 j \sin(w) + 0{,}8\left(\frac{1 - \cos w}{2}\right) + 0{,}6|^2} =$$

$$\frac{1}{|1 - 0{,}4\cos(w) + j0{,}4\sin(w)|^2} = \frac{1}{(1 - 0{,}4\cos(w))^2 + 0{,}16 \sin^2 w} =$$

$$\frac{1}{1 - 0{,}8\cos(w) + 0{,}16(\sin^2(w) + \cos^2 w)} = \frac{1}{1{,}16 - 0{,}8 \left(\frac{e^{jw} + e^{jw}}{2}\right)} \overset{z = e^{jw}}{=}$$

$$\frac{1}{1{,}16-0{,}4(z^{-1}+z)}$$

Άρα $P_x(z) = \sigma_w^2 \, |H(z)|^2 = \dfrac{\sigma_w^2}{1{,}16-0{,}4(z^{-1}+z)} = \dfrac{z}{-0{,}4z^2+1{,}16z-0{,}4}$

β) Μετασχηματίζω αντίστροφα κατά z οπότε βρίσκω το $r_x[k]$

$$P_x(z) = \frac{z}{-0{,}4z^2+1{,}16z-0{,}4} \Rightarrow \frac{P_x(z)(-0{,}4)}{z} = \frac{1}{(z-2{,}5)(z-0{,}4)}$$

$$\frac{1}{(z-0{,}4)(z-2{,}5)} = \frac{A}{z-0{,}4} + \frac{B}{z-2{,}5} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z-0{,}4)(z-2{,}5)} = \frac{(A+B)z-2{,}5A-0{,}4B}{(z-0{,}4)(z-2{,}5)}$$

$$\left.\begin{aligned} &A=-B \\ &2{,}5A+0{,}4B=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &A=-10/21 \\ &B=10/21 \end{aligned}$$

Τελικά $P_x(z) = \dfrac{10}{21}\dfrac{(-0{,}4)z}{z-0{,}4} + \dfrac{10}{21}\dfrac{(-0{,}4)z}{z-2{,}5} = \dfrac{25}{21}\left(\dfrac{1}{1-0{,}4z^{-1}} - \dfrac{1}{1-2{,}5z^{-1}}\right)$

$0{,}4<|z|<2{,}5$

Άρα $r_x[k] = \dfrac{25}{21}\left(0{,}4^k u[k] + 2{,}5^k u[-k-1]\right)$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2}-(\bar{x})^2 = r_x(0) = \frac{25}{21}$$

γ) $r_x(k) + \sum_{l=1}^{p} a(l)\, r_x(k-l) = \sigma_w^2 \, |b(0)|^2 \delta(k), \quad k \geq 0 \qquad p=1$

$$r_x(k) + a(1)\, r_x(k-1) = \sigma_w^2 \, |b(0)|^2 \delta(k), \quad k \geq 0$$

Για $k=0$ $\quad r_x(0) - 0{,}4\, r_x(-1) = 1 \overset{r_x(1)=r_x(-1)}{\Longrightarrow}$

$$r_x(0) - 0{,}4\, r_x(1) = 1$$

Για $k=1$: $\quad r_x(1) - 0{,}4 r_x(0) = 0 \Rightarrow r_x(1) = 0{,}4 r_x(0)$

Οπότε $\quad r_x(0) - 0{,}16 r_x(0) = 1 \Rightarrow r_x(0) = \dfrac{1}{1-0{,}16}$

Για $k=2$ $\quad r_x(2) = 0{,}4 r_x(1) = 0{,}16 r_x(0)$

Για $k=3$ $\quad r_x(3) = 0{,}4 r_x(2) = 0{,}064 r_x(0)$

Επαγωγικά: $\quad r_x(k) = 0{,}4 r_x(k-1) = 0{,}4^k r_x(0), \quad k>0$

Άρα γενικά $\quad r_x(k) = (-a(1))^k r_x(0)$

$$r_x(k) = \frac{b^2(0)}{1-a^2(1)} (-a(1))^k \Rightarrow$$

$$r_x(k) = \frac{0{,}4^k}{1-0.16} = \frac{25}{21} 0{,}4^k, \quad k \geq 0$$

$r_x(k) = r_x(-k)$ $\quad$ οπότε $\quad r_x(k) = \dfrac{25}{21} 0{,}4^{|k|}$

$$r_x(k) = \frac{b^2(0)}{1-a^2(1)} (-a(1))^k$$

Και με τους δυο τρόπους καταλήγω στο ίδιο $r_x(k)$

Άσκηση 2.6

α) $x[n] = 0,4\, x[n-1] + \eta[n], \quad \sigma_n^2 = 0,76$

$p = 1 \quad b[0] = 1 \quad a[1] = -0,4$

Yule Walker εξισώσεις: $r_x(k) + a(1) r_x(k-1) = \sigma_n^2 |b(0)|^2 \delta(k)$

$$\left.\begin{array}{l} k=1:\ r_x(1) + a(1) r_x(0) = 0 \\ k=0:\ r_x(0) + a(1) r_x(1) = \sigma_n^2 |b(0)|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r_x(0) = \frac{b^2(0)\ \sigma_n^2}{1 - a^2(1)}$$

Όμοια με την προηγούμενη άσκηση έχω $r_x(k) = \dfrac{\sigma_n^2\, b^2(0)}{1 - a^2(1)} (-a(1))^k$

Οπότε για τη στοχαστική ανέλιξη $x[n]$:

$$r_x(k) = \frac{0,76}{0,24} (0,4)^{|k|} = 4 (0,4)^{|k|}$$

$$r_y(k) = r_x(k) + r_v(k) = 4(0,4)^{|k|} + \delta[k], \quad (\sigma_v^2 = 1)$$

εφόσον x, v ασυσχέτιστα

β)

$[R_x + \sigma_v^2 I] w = r_{dy}, \quad r_{dy}(k) = r_x(k+1) \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4+1 & 3,6 \\ 3,6 & 4+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6 \\ 3,24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3,6 \\ 3,6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6 \\ 3,24 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,526246 \\ 0,2691 \end{bmatrix}$$

$W(z) = w(0) + w(1) z^{-1} = 0,526246 + 0,2691 z^{-1}$

Άρα $w[n] = w(0)\delta[n] + w(1)\delta[n-1] = 0,526246\,\delta[n] + 0,2691\,\delta[n-1]$

$J_{min} = r_x(0) - w(0) r_x(1) - w(1) r_x(2) \simeq 1,233$

γ)

$$\begin{bmatrix} r_x(0)+\sigma_v^2 & r_x(1) & r_x(2) \\ r_x(1) & r_x(0)+\sigma_v^2 & r_x(1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0)+\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ r_x(3) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3{,}6 & 3{,}24 \\ 3{,}6 & 5 & 3{,}6 \\ 3{,}24 & 3{,}6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6 \\ 3{,}24 \\ 2{,}916 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}497 \\ 0{,}212 \\ 0{,}108 \end{bmatrix}$$

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1} + w(2)z^{-2} = 0{,}497 + 0{,}212z^{-1} + 0{,}108z^{-2}$$

$$w[n] = 0{,}497\delta[n] + 0{,}212\,\delta[n-1] + 0{,}108\,\delta[n-2]$$

$$\xi_{min} = r_x(0) - \sum_{k=0}^{2} w(k)\, r_{dx}(k) \simeq 1{,}207$$

Βλέπω πως $\xi_{min} < \xi_{min}$, πράγμα λογικό καθώς εφόσον χρησιμοποιώ περισσότερα μελλοντικά δείγματα έχω πιο ακριβή πρόβλεψη συνεπώς μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Όσο αυξάνεται η τάξη του φίλτρου τόσο ελαττώνεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα