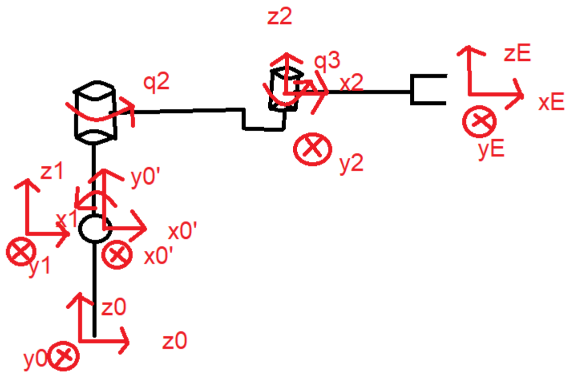
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΕΞΑΜΗΝΙΑΙΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ Ι

Αναστασία Χριστίνα Λίβα
03119029
anachriliva@gmail.com

Περιεχόμενα



Βάσει των παραπάνω πλαισίων για τη μέθοδο D-H έχω:

	θ	d	α	a
$0'$	0	l_0	$\frac{\pi}{2}$	0
1	q_1	0	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	l_1	0	l_2
E	q_3	0	0	l_3

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει:

$$A_{0'}^{0} = \begin{bmatrix} cos(0) & -sin(0)cos(\frac{\pi}{2}) & sin(0)sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ sin(0) & cos(0)cos(\frac{\pi}{2}) & -cos(0)sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & sin(\frac{\pi}{2}) & cos(\frac{\pi}{2}) & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1}^{0'} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1cos(\frac{\pi}{2}) & s_1sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ s_1 & c_1cos(-\frac{\pi}{2}) & -c_1sin(\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & sin(-\frac{\pi}{2}) & cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2}^{1} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2cos(0) & s_2sin(0) & l_2c_2 \\ s_2 & c_2cos(0) & -c_2sin(0) & l_2s_2 \\ 0 & sin(0) & cos(0) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{E}^{2} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3cos(0) & s_3sin(0) & l_3c_3 \\ s_3 & c_3cos(0) & -c_3sin(0) & l_3s_3 \\ 0 & sin(0) & cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει:

$$A_3^0 = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'} \cdot A_2^1 \cdot A_E^2$$

$$A_1^0 = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_2c_1 & -s_1 & l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ c_2s_1 & -s_1s_2 & c_1 & l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - c_1s_2c_3 & -s_1 & l_3c_3c_1c_2 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ s_2c_3 + s_3c_2 & c_2c_3 - s_2s_3 & 0 & l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & c_1 & l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_E^0 = \begin{bmatrix} c_1s_{23} & -s_{23}c_1 & -s_1 & l_3c_{23}c_1 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_3s_{23} + l_2s_2 \\ s_1c23 & -s_1s_{23} & c_1 & l_3s_1c23 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχω τρεις περιστροφικές αρθρώσεις, οπότε η ιακωβιανή μήτρα θα είναι ένα πίνακας διαστάσεων 6×3

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{6\times 3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \end{bmatrix}$$

Πρώτη Στήλη:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1} \times r_{i-1,E} \\ b_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$b_0 = R_0^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{0,E} \\ 0 \end{bmatrix} = A_n^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - A_0^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 \\ l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_0 \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} -(l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0) \\ 0 \\ l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \end{bmatrix}$$

Δεύτερη Στήλη:

$$\begin{bmatrix} J_{L2} \\ J_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \times r_{1,E} \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = R_1^0 \cdot \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{1,E} \\ 0 \end{bmatrix} = A_n^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - A_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 \\ l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 \\ l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -c_1(l_3s_1c_3 + l_3c_2s_3 + l_2c_2) \\ c_1(l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1) + s_1(l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1) \\ -s_1(l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2) \end{bmatrix}$$

Τρίτη Στήλη:

$$\begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \times r_{2,E} \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = R_2^0 \cdot \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{1,E} \\ 0 \end{bmatrix} = A_n^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - A_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 \\ l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_2s_2 \\ l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 \\ l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 \\ l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -c_1(l_3s_1c_3 + l_3c_2s_3) \\ c_1(l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3) + s_1(l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3) \\ -s_1(l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3) \end{bmatrix}$$

Τελικά έχω:

$$J(q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} -s_1(l_3c_{23} + l_2c_2) - l_1c_1 & -c_1(l_3s_{23} + l_2s_2) & -l_3c_1s_{23} \\ 0 & l_3c_{23} + l_2c_2 & l_3c_{23} \\ c_1(l_3c_{23} + l_2c_2) - l_1s_1 & s_1(l_3s_{23} + l_2s_2) & -l_3s_1s_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

Με ενδιαφέρει μόνο η γραμμική ταχύτητα οπότε παίρνω μόνο τις τρεις πρώτες γραμμές και στήλες της Ιακωβιανής μήτρας για να σχηματίσω των 3×3 πίνακα J_L

$$|J_L| = |J_L^T| = (-s_1(l_3c_{23} + l_2c_2) - l_1c_1) \begin{vmatrix} l_3c_{23} + l_2c_2 & -s_1(l_3s_{23} + l_2s_2) \\ l_3c_{23} & -l_3s_1s_{23} \end{vmatrix} +$$

$$(c_1(l_3c_{23} + l_2c_2) - l_1s_1) \begin{vmatrix} -c_1(l_3s_{23} + l_2s_2) & l_3c_{23} + l_2c_2 \\ -l_3c_1s_{23} & l_3c_{23} \end{vmatrix} =$$

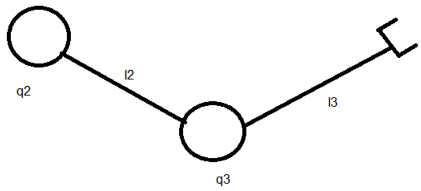
$$(-s_1(l_3c_{23} + l_2c_2) - l_1c_1)(-l_3l_2s_1s_3) + (c_1(l_3c_{23} + l_2c_2) - l_1s_1)(l_3l_2c_1s_3) =$$

$$l_3^2l_2s_1^2s_3c_{23} + l_3l_2^2s_1^2s_3c_2 + l_3l_2l_1s_1s_3c_1 + l_3^2l_2c_1^2s_3c_{23} + l_3l_2^2c_1^2c_2s_3 - l_3l_2l_1c_1s_1s_3 =$$

$$l_3^2l_2s_3c_{23} + l_3l_2^2s_3c_2$$

Ιδιόμορφες διατάξεις: $J_L = 0$

$$l_3^2l_2s_3c_{23} + l_3l_2^2s_3c_2 = 0 \Rightarrow s_3(l_3c_{23} + l_2c_2) = 0$$



ΚΑΤΟΨΗ

Οπότε:

$$s_3 = 0 \Rightarrow sin(q_3) = 0 \Rightarrow q_3 = k\pi, k \in Z$$

$$l_3c_{23} + l_2c_2 = 0 \Rightarrow l_3cos(q_2 + q_3) + l_2cos(q_2) = 0$$

Αντίστροφο Κινηματικό Μοντέλο:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J_{L_{3\times3}} \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \end{bmatrix} = J_{L_{3\times3}}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Ισχύει $j_L^{-1} = \frac{adj J_L}{|J_L|}$, όπου

$$Adj J_L = \begin{bmatrix} J_{L_{11}} & J_{L_{12}} & J_{L_{13}} \\ J_{L_{21}} & J_{L_{22}} & J_{L_{23}} \\ J_{L_{31}} & J_{L_{32}} & J_{L_{33}} \end{bmatrix}^T$$

$$J_{Lij} = (-1)^{ij} det(M_{ij})$$

M είναι ο ελάσσων πίνακας που παίρνω αφαιρώντας από τον πίνακα J_L την i γραμμή και j στήλη.

Τελικά:

$$Adj(J_L) = \begin{bmatrix} -l_3l_2s_1s_3 & 0 & c_1l_3s_3l_2 \\ l_3c_{23}(l_3c_1c_{23} + c_1c_2l_2 - s_1l_1) & l_3s_{23}(l_3c_{23} + l_2c_1) & l_3c_{23}(l_3s_1c_{23} + s_1c_2l_2 + c_1l_1) \\ -(l_3c_{23} + c_2l_2)(l_3c_1c_{23} + c_1c_2l_2 - s_1l_1) & -(l_3s_{23} + s_2l_2)(l_3c_{23} + c_2l_2) & -(l_3c_{23} + c_2l_2)(l_3s_1c_{23} + s_1c_2l_2 + l_1c_1) \end{bmatrix}$$

$$J_L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-s_1}{l_3c_{23}+c_2l_2} & 0 & \frac{c_1}{l_2c_{23}+c_2l_2} \\ \frac{c_{23}(l_3c_1c_{23}+c_1c_2l_2-s_1l_1)}{l_2s_3(l_3c_{23}+c_2l_2)} & \frac{s_{23}}{l_2s_3} & \frac{c_{23}(l_3s_1c_{23}+s_1c_2l_2+c_1l_1)}{l_2s_3(l_3c_{23}+c_2l_2)} \\ \frac{-l_3c_1c_{23}-c_1c_2l_2+s_1l_1}{l_2l_3s_3} & \frac{-l_3s_{23}+s_2l_2}{l_2l_3s_3} & -\frac{l_3s_1c_{23}+s_1c_2l_2+c_1l_1}{l_2l_3s_3} \end{bmatrix}$$

$$p_{ex} = c_1(c_{23}l_3 + l_2c_2) - l_1s_1 \quad (1)$$
$$p_{ey} = s_{23}l_3 + s_2l_2 \quad (2)$$
$$p_{ez} = s_1(c_{23} + c_2l_2) + l_1c_1 + l_0 \quad (3)$$
$$p_{ex}^2 + (p_{ez} - l_0)^2 = (c_{23}l_3c_2l_2)^2 + l_1^2 \quad (4) \Rightarrow$$
$$c_{23}l_3 + l_2c_2 = \pm\sqrt{p_{ex}^2 + (p_{ez} - l_0)^2 - l_1^2} \quad (5)$$

(5), (2) $\Rightarrow$ 2R-planar problem με γνωστές λύσεις:

$$q_3 = atan2(s_3, c_3)$$
$$c_3 = \frac{p_{exz}^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$
$$s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2}$$
$$\begin{Bmatrix} (5) & \Rightarrow & c_{23}l_3 + c_2l_2 = p_{exz} \\ (2) & \Rightarrow & s_{23}l_3 + s_2l_2 = p_{ey} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c_2(l_2 + l_3c_3) - s_2l_3s_3 = p_{exz} \\ c_2l_3s_3 + s_2(l_2 + l_3c_3) = p_{ey} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{Bmatrix} d_1 = l_2l_3c_3,\ d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \\ d_2 = l_3s_3,\ a = atan2(d_2, d_1) \end{Bmatrix}$$

Τότε:

$$q_2 = atan2(p_y, p_{exz}) - atan2(d_2, d_1) \Rightarrow$$
$$q_2 = atan2(p_{ey}, \pm\sqrt{p_{ex}^2 + (p_{ez} - l_0)^2 - l_1^2}) - atan2(l_3s_3, l_2 + l_3c_3)$$

Όμοια:

$$\begin{Bmatrix} (1) & \Rightarrow & p_{ex} = c_1(c_{23}l_3 + c_2l_2) - s_1l_1 \\ (3) & \Rightarrow & p_{ez} - l_0 = c_1l_1 + s_1(c_{23}l_3 + c_2l_2) \end{Bmatrix}$$
$$\lambda_1c_{23}l_3 + c_2l_2,\ \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$
$$\lambda_2 = l_1,\ \beta = atan2(\lambda_2, \lambda_1)$$
$$q_1 = atan2(p_{ez} - l_0, p_{ex}) - atan2(l_1, c_{23}l_3 + c_2l_2)$$