1. Utilizando programação, calcule $\sqrt{10}$ usando o método babilônico.

2. Dado um determinado ponto em uma função contínua, pode-se estimar pontos próximos a partir da derivada nesse ponto. A derivada pode ser calculada como o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Podemos utilizar um valor de h suficientemente pequeno para aproximar $f'(a)$. Utilize esse conceito para calcular dois pontos próximos a um ponto, um à esquerda, outro à direita, na função $f(x) = x^2$. Plote a função $f(x)$, a reta tangente ao ponto escolhido e os dois pontos próximos calculados. Vide Figura 1.

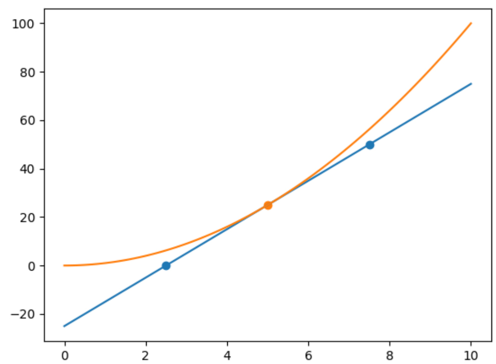

Figure 1: Exemplo de resultado

3. Dado um determinado ponto em uma função contínua, pode-se estimar pontos próximos de $(a, f(a))$ a partir de **n** derivadas nesse ponto, conforme o polinômio de Taylor de ordem n dado por:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Observe que se utilizarmos $n = 1$, teremos a aproximação linear da questão anterior. Escolha, criteriosamente, uma função e um ponto nessa função. Utilize o polinômio de Taylor de ordem 2 para calcular dois pontos próximos a um ponto na função, um à esquerda $(x_1, p(x_1))$, outro à direita $((x_2, p(x_2)))$. Plote a função $f(x)$, o polinômio de Taylor de ordem 2 $p_2(x)$ e os pontos: $(x_1, p_2(x_1)), (x_1, f(x_1)), (x_2, p_2(x_2)), (x_2, f(x_2))$. Certifique-se de que todos os 4 pontos aparecem na imagem e que seja possível visualizar que há uma distância entre o ponto na função e a aproximação pela série de Taylor. Vide um exemplo na Figura 2, onde foi escolhido um ponto tal que $a = 2$.

4. Em algumas aplicações, uma função não é conhecida, mas sua derivada e algum ponto da função são conhecidos. Integrar a função pode ser inviável. Nessa situação, uma forma de descobrir a função desconhecida, pelo menos em algumas amostras, é o método de Euler (a forma mais simples dos métodos Runge-Kutta). Funciona assim: parte-se do ponto conhecido e, utilizando a aproximação pela Série de Taylor, calcula-se um segundo ponto da função desconhecida. A partir do segundo ponto, calcula-se um terceiro ponto. Esse processo é repetido tantas vezes quanto se queira.

   Dados:

   - A função desconhecida $f(x) = xcos(x) + 1$ (veja que a função desconhecida está sendo escrita aqui para que você possa comparar o resultado com a função $f(x)$ – na prática essa função não seria conhecida)
   - $f(0) = 1$ (o ponto conhecido)
   - $f'(x) = cos(x) - xsen(x)$ (a derivada conhecida)

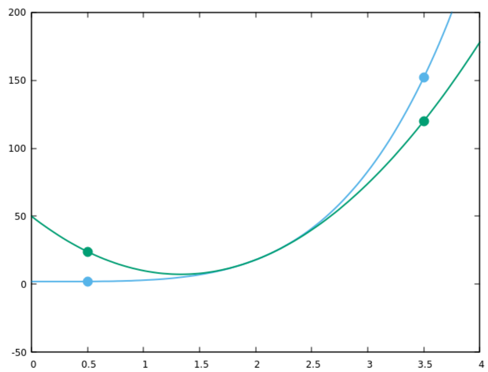

Figure 2: Exemplo de resultado

Partindo do ponto conhecido desta função $f(0)$, estime outros pontos de $f(x)$ no intervalo $[0, 6]$. Plote em um único gráfico a função $f(x)$ e os pontos estimados, conectando-os com segmentos de reta.