Señales y Sistemas

Ana X. Ezquerro

ana.ezquerro@udc.es, GitHub

Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos
Universidad de A Coruña (UDC)

Curso 2020-2021

Tabla de Contenidos

Tema 1: Introducción a los números complejos

1.1. Definición de número complejo

Un número complejo z se expresa de la forma:

$$z = a + jb$$

donde a y b son números reales y j es la unidad imaginaria.

El conjunto de números complejos se define formalmente como: $\mathbb{C} = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Teorema fundamental del álgebra: Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene n raíces que pueden ser números reales o complejos.

Unidad imaginaria j

La unidad imaginaria j es la solución positiva de la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$.

$$\boxed{j = \sqrt{-1}}$$

- $j^2 = -1$.
- $-j$ también es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.
- $(-j)^2 = -1$.

Parte real y parte imaginaria

Sea $z = a + jb$ un número complejo:

$$a = \mathbb{R}\{z\} \quad \text{Parte real}$$
$$b = \mathbb{I}\{z\} \quad \text{Parte imaginaria}$$

- Un número real se puede interpretar como un número complejo cuya parte imaginaria es 0.
- Cuando la parte real de un número complejo es 0, se dice que el número es imaginario puro: $z = 0+jb = jb$.
- Un número imaginario es un número complejo cuyas partes real e imaginaria son no nulas: $z = a + jb, a \neq 0, b \neq 0$.

Forma polar de un número complejo (ρ, θ)

Sea $z = x + jy$ un número complejo, se pueden obtener sus coordenadas polares a partir de sus coordenadsa cartesianas:

- Módulo: $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho \in \mathbb{R}$.

- Fase: $\theta = \angle z = \arctan(y/x)$.

La operación inversa (**conversión polar-cartesiana**) se realizaría aplicando las siguientes desigualdades:

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \sin \theta$

Consideraciones para el cálculo de la fase

La tangente es una función periódica de período π. Así, distintos ángulos pueden tener la misma tangente:

$$\tan(\theta \pm k\pi) = \tan \theta, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Por ese motivo, la arcotangente no es unívoca. Por ejemplo:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \ \ \arctan(1) = \frac{5\pi}{4}$$

Para calcular la fase de un número complejo de forma correcta, hay que determinar a qué cuadrante pertenece y corregir el cálculo de la arcotangente sumando o restando π para ajustarlos a un rango determinado:

- Primer cuadrante: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- Segundo cuadrante: $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- Tercer cuadrante: $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ o $\theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$.
- Cuarto cuadrante: $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ o $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$.

1.2. Representación exponencial de los números complejos

Propiedades de la función exponencial

La función exponencial $f(x) = e^x$ tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad del producto: $e^x e^y = e^{x+y}$
- Propiedad de derivación: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- Propiedad de integración: $\int e^x dx = e^x$
- Identidad de Euler: $e^{j\pi} = -1$
- $e^{j2\pi} = 1$

La **fórmula de Euler** dice lo siguiente:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Por tanto, un número complejo z se puede expresar en términos de su módulo y fase empleando el número de Euler:

$$\begin{aligned} z &= x + jy = \rho \cos \theta + j\rho \sin \theta \\ &= \rho(\cos \theta + j \sin \theta) = \rho e^{j\theta} \end{aligned}$$

Miscelánea de la fórmula de Euler

- Argumento negativo: $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$
- Sumando 1 y 2: $\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$
- Restando 1 y 2: $\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$.
- Parte real: $\cos\theta = \mathbb{R}\{e^{j\theta}\}$.
- Parte imaginaria: $\sin\theta = \mathbb{I}\{e^{j\theta}\}$

Representación polar de un número real

Sea $z = a$ un número real:

$$\text{Módulo}: \quad \rho = |z| = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & -a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Fase}: \quad \theta = \angle z = \begin{cases} 0 & a > 0 \\ \pi & a < 0 \end{cases}$$

Representación exponencial:

$$z = a = |a|e^{j\theta} = \begin{cases} a & a > 0 \\ |a|e^{j\pi} & a < 0 \end{cases}$$

Representación polar de un número imaginario puro

Sea $z = jb$ un número imaginario puro:

$$\text{Módulo}: \quad \rho = |z| = \sqrt{b^2} = |b| = \begin{cases} b & b > 0 \\ -b & b < 0 \end{cases}$$

$$\text{Fase}: \quad \theta = \angle z = \begin{cases} \pi/2 & b > 0 \\ -\pi/2 & b < 0 \end{cases}$$

Representación exponencial:

$$z = jb = |b|e^{j\theta} = \begin{cases} be^{j\frac{\pi}{2}} & b > 0 \\ |b|e^{-j\frac{pi}{2}} & b < 0 \end{cases}$$

1.3. Operaciones con números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ y $z_2 = x_2 + jy_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$, se cumple:

- Igualdad de números complejos:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

- Suma y resta de números complejos:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

  La suma de dos números complejos equivale gráficamente a una suma vectorial.

- Multiplicación de números complejos:

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Cociente de números complejos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Potencia n-ésima:

$$z^n = (\rho e^{j\theta})^n = \rho^n e^{jn\theta} \Longrightarrow \begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \angle z^n = n\angle z \end{cases}$$

Propiedades del operador módulo

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Ejemplos de potencias n-ésimas

- $e^{j2\pi n} = 1^n = 1$
- $e^{j\pi n} = (-1)^n$
- $e^{j\frac{\pi}{2}n} = j^n$
- $e^{-j\frac{\pi}{2}n} = (-j)^n$

Propiedades de la suma de números complejos

- Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- El elemento neutro es el $0 = 0 + j0$ porque $z + 0 = z$.
- El elemento simétrico de $z = x + jy$ es $-z = -x - jy$ porque $z - z = 0$.

Propiedades del producto de números complejos

- Conmutativa: $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- Asociativa: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- Distributiva respecto de la suma: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
- El elemento neutro es el número $1 = 1 + j0$ porque $z \cdot 1 = z$.
- EL elemento inverso de $z = x + jy$ es $z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$ porque $z \cdot z^{-1} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$.

1.4. Conjugado de un número complejo

Sea $z = x + jy$ un númer complejo, su conjugado es:

$$z^* = x - jy$$

Que en coordenadas polares se traduce a cambiar de signo la fase:

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$

- z^* es el simétrico de z respecto al eje horizontal.
- $\mathbb{R}\{z^*\} = \mathbb{R}\{z\} = x$
- $\mathbb{I}\{z^*\} = -\mathbb{I}\{z\} = -y$
- $|z^*| = |z| = \rho$
- $\angle z^* = -\angle z = -\theta$
- $\mathbb{R}\{z\} = \dfrac{z + z^*}{2}$
- $\mathbb{I}\{z\} = \dfrac{z - z^*}{2j}$
- $\rho^2 = zz^*$
- $e^{j2\theta} = \dfrac{z}{z^*}$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
- $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$
- $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

Tema 2: Representación de señales en el dominio del tiempo

2.1. Señales básicas en el tiempo

Conceptos de señales

- **Señales causales y no causales**: Una señal $x(t)$ es causal si $x(t) = 0$ cuando $t < 0$.
- **Señales deterministas**: Una señal es determinista si no hay incertidumbre sobre su valor en todos los instantes de tiempo.
- **Señales aleatorias**: Una señal es aleatoria cuando hay incertidudmbre de su valor en algún instante de tiempo.

Señales básicas de tiempo continuo

Escalón unidad	$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$
Señal signo	$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$
Rampa	$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$
Módulo	$m(t) = \|t\| = \begin{cases} -t & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$
Pulso gaussiano	$x(t) = e^{-at^2}$
Pulso sinc	$\text{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

Pulso rectangular de duración T	$p_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Pulso rectangular centrado de duración T	$p_2(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Señal exponencial real unilateral	$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$

Pulso triangular de duración T y amplitud A:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} + t\right) & -T/2 < t < 0 \\ \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) & 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Propiedad del pulso sinc

Recordemos que $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ (la expansión en serie de Taylor). Cuando $x \to 0$, $\sin(x)$ se puede aproximar por el primér término y $\sin(x) \approx x$. Gracias a esta propiedad se resuelve que:

$$\text{sinc}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{\pi t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \quad \text{y que} \quad \text{sinc}(t) = 0 \iff t \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Características de la señal exponencial real unilateral

- Decreciente si $a > 0$
- Creciente si $a < 0$
- $\lim_{t\to\infty} e^{-at} = e^{-\infty} = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}dt = \left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty} - e^0}{-a} = \frac{1}{a}$

Señales en tiempo discreto

Escalón unidad	$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$	Pulso rectangular longitud L	$p_1(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Rampa unidad	$r(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & n \geq 0 \end{cases}$	Pulso rectangular longitud $2L+1$	$p_2(n) = \begin{cases} 1 & n \in [-L, L] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
Pulso sinc	$x(n) = \frac{\sin Wn}{\pi n}$	Señal exponencial real unilateral	$x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ a^n & n \geq 0 \end{cases}$

- Decreciente si $a \in [0, 1]$ y creciente si $a > 1$.
- Si $a < 0$, el signo de $x(n)$ se va alternando.
- Alternada decreciente si $a \in [-1, 0]$ y alternada creciente si $a < -1$.
- $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$
- Cuando $|a| < 1$, la suma de infinitos valores de $x(n)$ es una serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

2.2. Operaciones básicas en el tiempo

Sea $y(t)$ la operación básica en el tiempo de una señal $x(t)$, dicha operación puede ser:

Operación	**Nombre**	**Parámetros y comentarios**
$y(t) = ax(t)$	Escalado en amplitud	Atenuación $(a < 1)$ Amplificación $(a > 1)$
$y(t) = x(t - t_0)$	Desplazamiento en tiempo	A la izquierda (adelanto): $t_0 < 0$ A la derecha (retardo): $t_0 > 0$
$y(t) = x(-t)$	Inversión en tiempo	

Operación	**Nombre**	**Parámetros y comentarios**
$y(t) = x(at)$	Escalado en tiempo	Compresión: $a > 1$ Expansión: $a < 1$
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	Integración en tiempo	La integral del escalón unidad es la rampa La integral de la velocidad es la distancia
$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	Derivación en tiempo	
$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$	Acumulación en tiempo	
$y(n) = x(n) - x(n-1)$	Diferencia en tiempo	
	Simetría de una señal	Simétrica/par: $x(t) = x(-t)$ Antisimétrica/impar: $x(-t) = -x(t)$

2.3. Señal impulso unidad

Impulso unidad en tiempo continuo

Consideramos el pulso rectangular de duración A y amplitud $1/A$ y denotémosla como $\delta_A(t)$. Cuando $A \to 0$, $\delta_A(t)$ se convierte en el **impulso unidad** definido como $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \lim_{A \to 0} \delta_A(t), \quad \text{donde} \quad \delta_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} & 0 < t < A \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Cuando $t \neq 0 \Longrightarrow \delta(t) = 0$
- Cuando $t = 0 \Longrightarrow \delta(t) \to \infty$.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

El impulso unidad es la **derivada del escalón unidad**. Sea $u_A(t)$:

$$u_A(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{A}t & 0 < t < A \\ 1 & t > A \end{cases}$$

Cuando $A \to 0 \;\; \Rightarrow \;\; u_A(t) \to u(t)$. Si derivamos $u_A(t)$ obtenemos el pulso rectangular $\delta_A(t)$.

$$\delta_A(t) = \frac{du_A(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{A}, & 0 < t < A \\ 0, & t > A \end{cases}$$

Y por tanto: $\displaystyle\lim_{A\to 0} \delta_A(t) = \lim_{A\to 0} \frac{du_A(t)}{dt} \iff \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

El escalón unidad es el resultado de **integrar en tiempo el impulso unidad**.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Impulso unidad en tiempo discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- El impulso unidad en tiempo discreto es la **diferencia del escalón unidad**.

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

- El escalón unidad resulta de la **acumulación del impulso unidad**.

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} d(k)$$

2.4. Energía y potencia media en señales

Potencia instanténea de una corriente eléctrica

Sea $i(t)$ una corriente eléctrica que atraviesa una resistencia de valor R.

Fórmula	Definición
$v(t) = R \cdot i(t)$	Voltaje en resistencia
$p(t) = R \cdot i^2(t) = \dfrac{v^2(t)}{R}$	Potencia instantánea disipada en la resistencia
$p(t) = x^2(t)$	Potencia instantánea de una señal real
$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$	Energía disipada por x en el intervalo $[-T/2, T/2]$

Energía y potencia media de una señal $x(t)$

Fórmula	Definición
$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	Energía en el intervalo $[-T/2, T/2]$
$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	Energía en la recta real
$P_x^T = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	Potencia media en el intervalo $[-T/2, T/2]$
$P_x = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	Potencia media en la recta real

- Una señal tiene energía finita si su amplitud tiende a 0 cuando $|t| \to \infty$.
- La potencia media de una señal de energía finita es siempre 0: $P_x = 0 \iff E_x \neq \infty$.
- $x(t)$ es una señal de potencia media finita cuando $0 < P_x < \infty$.
- $E_x = \infty \iff P_x > 0$

Energía y potencia media de una señal $x(n)$

Fórmula	Definición
$E_x^N = \sum_{n=-N}^{N} \lvert x(n)\rvert^2$	Energía en el intervalo $[-N, N]$
$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2$	Energía en la recta real
$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x(n)\rvert^2$	Potencia media

Energía y potencia media de una señal compleja $x(t)$

La energía de una señal compleja $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ es la suma de las energía de la parte real e imaginaria:

$$E_x = E_{x_r} + E_{x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} x_r^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t)dt$$

Tema 3: Señales Senoidales

3.1. Señales periódicas

Señal periódica en tiempo continuo

Una señal $x(t)$ es periódica de período T si y sólo si $x(t) = x(t+T)$. Una señal periódica de período T también lo es de periodo nT, $n \in \mathbb{N}$.

El **período fundamental** T_0 de la señal periódica se define como el valor más pequeño de T que cumple que $x(t+T_0) = x(t)$. Por tanto, se puede representar la señal periódica $x_{T_0}(t)$ como la **suma de infinitas versiones** de la señal aperiódica desplazada $x(t-nT_0)$ de longitud T_0, para $n \in \mathbb{N}$.

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

Energía, potencia media y valor medio

Sea $x_{T_0}(t)$ una señal periódica de período T_0 como la definida anteriormente:

Fórmula	Definición
$E_x^{T_0} = \int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	Energía en un período T_0
$E_x^{nT_0} = nE_x^{T_0}$	Energía en n períodos
$E_x = \infty$	Energía en la recta real
$P_x^{T_0} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	Potencia media en un período
$P_x^{nT_0} = P_x^{T_0}$	Potencia media en n períodos
$P_x = P_x^{T_0}$	Potencia media en la recta real
$m_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt$	Valor medio del período T_0

- Si $y(t) = x(t) - m_x$, $y(t)$ tiene valor medio 0.

Señal periódica en tiempo discreto

Una señal de tiempo discreto $x(n)$ es periódica con período N si y solo si $x(n) = x(n+N)$.

El **período fundamental** N_0 es el valor más pequeño de N para el que se cumple esta igualdad. Por tanto, una señal periódica $x_{N_0}(n)$ se puede construir a partir de una señal aperiódica $x(n)$ sumando infinitas versiones de la señal aperiódica desplazada:

$$x_{N_0}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN_0)$$

Fórmula	**Definición**
$E_x^{N_0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \lvert x(n)\rvert^2$	Energía en un período N_0
$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \lvert x(n)\rvert^2$	Potencia media enun período N_0
$m_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)$	Valor medio en un período N_0

3.2. Definición de señal senoidal

Una señal senoidal es una señal $x(t)$ de tiempo continuo que se define como:

$$x(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$$

con tres parámetros: **amplitud** A, **frecuencia** f y **fase** ϕ. De forma alternativa, se puede representar con la función seno:

$$x(t) = A\sin(2\pi ft + \varphi)$$

Periodicidad de una señal senoidal

Sea $x(t)$ una señal senoidal de la forma $x(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$. Se cumple que $x(t)$ es una señal periódica gracias a la propiedad del coseno:

$$\cos\theta = \cos(\theta + n2\pi), \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}^+$$

En efecto, al desplazar la señal $x(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A\cos(2\pi f(t+T)+\phi) \\ &= A\cos(2\pi ft + 2\pi fT + \phi) \end{aligned}$$

Por tanto, para que $x(t)$ sea periódica se tiene que cumplir que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$:

$$x(t+T) = x(t) \iff 2\pi fT = 2\pi n \iff T = \frac{n}{f}$$

Por tanto, $x(t)$ será una señal periódica de período fundamental $T_0 = \dfrac{1}{f}$ (el valor más pequeño que se le puede dar a T).

Parámetros de las señales senoidales

- **Período fundamental**: Duración de un ciclo (en segundos). El valor de T cuando $n = 1$

$$T_0 = \frac{1}{f}$$

- **Frecuencia**: Número de ciclos por unidad de tiempo (en Hz). El inverso del período fundamental.

$$f = \frac{1}{T_0}$$

  - En la representación trigonométrica, $f \in \mathbb{R}^+$.
  - El valor más pequeño de f es $f = 0$.
  - Si $f = 0$, $x(t) = A\cos(0) = A$. Esto es, $x(t)$ es una señal constante.
  - Cuanto más grande es la frecuencia, más rápidas son las oscilaciones de la señal senoidal.

La **frecuencia angular** de una señal senoidal $x(t)$ se define como $\omega = 2\pi f$, y se mide en radianes por segundo.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad \text{donde } \omega = 2\pi f$$

La frecuencia angular y el período se relacionan a través de:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0} \implies T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Fase de una señal senoidal

La fase ϕ, medida en radianes, define el valor de $x(t)$ cuando $t = 0$. Puede interpretarse como una desplazamiento en tiempo: si suponemos $x_0(t) = A\cos(\omega t)$, donde $\phi = 0$ y $A = 1$, y desplazamos en tiempo t_0 unidades:

$$\begin{aligned} x_0(t-t_0) &= A\cos(\omega(t-t_0)) \\ &= A\cos(\omega t - \omega t_0) \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Entonces, un desplazamiento en tiempo t_0 se traduce en un fase $\phi = -\omega t_0 = -\dfrac{2\pi t_0}{T_0}$.

Operaciones con la fase

Sabiendo las siguientes propiedades trigonométricas:

$$\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta$$

Podemos definir las siguientes operaciones para la señal senoidal $x(t)$.

- **Desfase -90º**. Sea $\phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$, la señal senoidal toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \\ &= A\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = A\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

- **Desfase de -180**. Sumar o restar π radianes a la fase es equivalente a cambiar de signo su amplitud.

$$A\cos(\omega t + \phi \pm \pi) = -A\cos(\omega t + \phi)$$

3.3. Representación exponencial de una señal senoidal

Representación exponencial de una señal senoidal

Sea $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ una señal senoidal, su representación exponencial compleja se define como:

$$\tilde{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi) + jA\sin(\omega t + \phi) = Ae^{j(\omega t + \phi)}$$

Por tanto, $x(t)$ es la **parte real** de $\tilde{x}(t)$.

Factorización de la señal senoidal compleja

La señal exponencial compleja se puede factorizar de la siguiente forma:

$$\tilde{x}(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} = Ae^{j\phi}e^{j\omega t} = Xe^{jwt}$$

Donde número complejo $X = Ae^{j\phi}$ se denomina el **fasor** de $x(t)$, y es la posición inicial del movimiento circular en $t = 0$.

$$\tilde{x}(t = 0) = Ae^{j(0+\phi)} = Ae^{j\phi} = X$$

Periodicidad de una señal senoidal compleja

Sea $x(t) = \cos(\omega t)$ una señal senoidal, $\tilde{x}(t) = e^{j\omega t}$ su representación exponencial y $\tilde{x}(t + T)$ un desplazamiento en tiempo T.

$$\tilde{x}(t + T) = e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t}e^{j\omega T}$$

La propiedad de periodicidad se cumple si, y sólo si $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T)$: Equivalentemente, si:

$$e^{j\omega T} = 1 \iff \omega T = n2\pi \iff T = \frac{2\pi}{|\omega|}n, \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}^+$$

Y el **período fundamental** T_0 se corresponde a T cuando $n = 1$:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

Frecuencias negativas

En la representación trigonométrica de una señal senoidal, la frecuencia *siempre* es una magnitud positiva. Sin embargo, en la representación exponencial, la frecuencia también puede ser negativa y se corresponde con un *movimiento circular constante en la dirección de las agujas del reloj*.

$$\tilde{x}^*(t) = Ae^{-j(\omega t+\phi)} = A\cos(\omega t+\phi) - jA\sin(\omega t+\phi)$$

- La señal senoidal $x(t)$ también es la parte real de $\tilde{x}^*(t)$.
- La parte imaginaria sí cambia de signo: $\mathbb{I}\{Ae^{-j(\omega t+\phi)}\} = -A\sin(\omega t+\phi)$
- El fasor de la señal exponencial negativa es el conjugado del fasor de la exponencial positiva.

$$\tilde{x}^*(t) = Ae^{-j(\omega t+\phi)} = Ae^{-j\phi}e^{-j\omega t} = X^*e^{-j\omega t}$$

- Una señal senoidal se puede expresar como la suma de una exponencial compleja de frecuencia positiva y otra de frecuencia negativa. [1]

$$x(t) = A\cos(\omega t+\phi) = \frac{1}{2}Xe^{j\omega t} + \frac{1}{2}X^*e^{-j\omega t}$$

Sumas de señales senoidales

Sea $x_1(t) = A_1\cos(\omega t+\phi_1)$ y $x_2(t) = A_2\cos(\omega t+\phi_2)$, la suma de estas dos señales senoidales se define como la parte real de la suma de las representaciones exponenciales complejas: $x_1(t)+x_2(t) = \mathbb{R}\{\tilde{x}_1(t)\}+\mathbb{R}\{\tilde{x}_2(t)\} = \mathbb{R}\{\tilde{x}_1(t)+\tilde{x}_2(t)\}$.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t)+\tilde{x}_2(t) &= A_1e^{j(\omega t+\phi_1)} + A_2e^{j(\omega t+\phi_2)} \\ &= (A_1e^{j\phi_1} + A_2e^{j\phi_2})e^{j\omega t} = (X_1+X_2)e^{jwt}\end{aligned}$$

- La suma de dos señales senoidales de frecuencia ω es una nueva señal senoidal de la misma frecuencia ω.
- El fasor de la suma de señales senoidales es la suma de los fasores.

3.4. Potencia media de una señal senoidal

Sea la señal senoidal $x(t) = A\cos(\omega t)$, donde $\omega = 2\pi/T_0$ y $\phi = 0$.

- **Energía en un período**: $E_x^{T_0} = \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{T_0} A^2\cos^2(\omega t)dt = \frac{A^2}{2}T_0$ [2]
- **Potencia media**: $P_x = P_x^{T_0} = \frac{1}{T_0}E_x^{T_0} = \frac{A^2}{2}$

Sea la representación exponencial de una señal senoidal $\tilde{x}(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)}$.

[1] Ver demostración en representación de una señal senoidal como suma de de exponenciales complejas
[2] Ver demostración en energía de una señal senoidal en un período

- **Energía en un período**: $$E_{\tilde{x}}^{T_0} = \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{T_0} A^2 dt = A^2 T_0$$

- **Potencia media**: $$P_{\tilde{x}} = \frac{1}{T_0} E_{\tilde{x}}^{T_0} = A^2$$

3.5. Señales senoidales de tiempo discreto

Representación trigonométrica de una señal senoidal en tiempo discreto

Sea $x(n)$ una señal senoidal en tiempo discreto. Su representación trigonométrica se define como:

$$x(n) = A\cos(2\pi Fn + \phi) = A\cos(\Omega n + \phi)$$

donde A es la amplitud, ϕ es la fase (en radianes), F es la frecuencia en ciclos por muestra y $\Omega = 2\pi F$ es la frecuencia angular en radianes por muestra.

Propiedad 1: Periodicidad

Una señal senoidal de tiempo discreto es periódica si, y sólo si, su frecuencia F es un número racional.

$$x(n+N) = A\cos(2\pi F(n+N) + \phi) = A\cos(2\pi Fn + 2\pi FN + \phi)$$

Por tanto, $x(n)$ es periódica $\iff 2\pi FN = 2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Dicho de otra forma:

$$x(n) \text{ es periódica} \iff F = \frac{k}{N}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}^+$$

Propiedad 2. Alias

Dos señales senoidales de tiempo discreto cuyas frecuencias angulares estén separadas por un múltiplo de 2π son idénticas. Sea $x(n) = \cos(\Omega_0 n + \phi)$ una señal senoidal de tiempo discreto:

$$\cos((\Omega_0 + 2\pi)n + \phi) = \cos(\Omega_0 n + 2\pi n + \phi) = \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

En consecuencia, todas las señales senoidales definidas de la siguiente manera **son idénticas**.

$$x_k(n) = A\cos(\Omega_k n + \phi)$$

donde $\Omega_k = \Omega_0 + 2\pi k$, para $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\Omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

Y por tanto se obtiene la **propiedad de aliasing**, que dice que:

- Dos señales senoidales de tiempo discreto con $\Omega \in (-\pi, \pi] \equiv F \in (-1/2, 1/2]$ son distintas.
- Una señal senoidal de tiempo discreto con $\Omega_1 \notin (-\pi, \pi] \equiv F \notin (-1/2, 1/2]$ es idéntica a otra con frecuencia $\Omega_0 = \Omega_1 - 2\pi \in (-\pi, \pi]$, y se dice que es un **alias** de la señal senoidal de tiempo discreto de frecuencia $\Omega_0 \in (-\pi, \pi]$.
- Para obtener cuál sería la señal original de un alias, se le debe restar a la frecuencia Ω_1 (la cual no está en el rango $[-\pi, \pi]$) un total de 2π.

Propiedad 3. Interpretación de la oscilación

La tasa de oscilación más alta de una señal senoidal de tiempo discreto se alcanza cuando $\Omega = \pi$, equivalentemente, cuando $F = 1/2$.

Representación exponencial

La representación exponencial de una señal senoidal de tiempo discreto se define como:

$$\tilde{x}(n) = Ae^{j(\Omega n+\phi)} = A\cos(\Omega n + \phi) + jA\sin(\Omega n + \phi)$$

3.6. Muestreo de señales senoidales

Concepto de muestreo

El **muestreo** es una operación que consiste en tomar muestras de una señal analógica. El resultado del muestreo es una **señal de tiempo discreto** que se representa por una función real de una variable independiente discreta que sólo toma valores enteros.

Cuando las muestras se toman equiespaciadas por un intervalo de tiempo de T_s segundos, el muestreo se dice que es regular o periódico.

- **Período de muestreo** T_s: Separación temporal entre dos muestras (en segundos).
- **Frecuencia de muestreo** $f_s = 1/T_s$: Número de muestras por segundo (en Hertz).
- **Frecuencia de muestreo** $w_s = 2\pi/T_s$: Frecuencia de muestreo en radianes por segundo.

En el muestreo **regular o periódico** las variables independientes (tiempo continuo o tiempo discreto) se relacionan a través del período de muestreo T_s de la siguiente forma:

$$t = nT_s = \frac{n}{f_s}$$

Muestreo de una señal senoidal

Sea $x_c(t) = \cos(2\pi f t)$ una señal senoidal de tiempo continuo (donde $A = 1$ y $\phi = 0$). Si $x_c(t)$ se muestrea con un período de muestreo T_s, la señal de tiempo discreto resultante es:

$$x_d(n) = x_c(nT_s) = \cos(2\pi f nT_s) = \cos\left(2\pi \frac{f}{f_s} n\right) = \cos(2\pi F n)$$

donde $F = \frac{f}{f_s}$ es la frecuencia de la nueva señal senoidal de tiempo discreto.

Recordemos que la frecuencia angular más alta de una señal senoidal de tiempo discreto tenía que ser: $\Omega = \pi \iff F = \frac{1}{2}$. De la misma forma, la frecuencia de muestreo f_s debe ser mayor que el doble de la frecuencia continua f.

$$\text{Restricción:} \quad F < \frac{1}{2} \iff \frac{f}{f_s} < \frac{1}{2}$$

En caso contrario, el resultado del muestreo sería un alias de una señal senoidal discreta de frecuencia más baja.

Reconstrucción

Sea $x_c(t)$ una señal senoidal de tiempo continuo y frecuencia f, $x_d(n)$ una señal senoidal de tiempo discreto y frecuencia $F = f/f_s$ (resultado de muestrear $x_c(t)$). La señal de tiempo continuo $x_r(t)$ que se reconstruye a partir de $x_c(n)$ tiene frecuencia $f_r = F \cdot f_s$.

Fenómeno del aliasing

Debido a que el rango de frecuencias discretas está acotado: $F \in [-1/2, 1/2]$. El rango de frecuencias continuas reconstruidas también está acotado: $f_r \in [-f_s/2, f_s/2]$.

Cuando una frecuencia continua reconstruida está fuera del intervalo, se produce el fenómeno del **aliasing**. La señal reconstruida no es la original.

Relaciones entre las variables frecuencia

Señales en tiempo continuo:

$$\omega = 2\pi f$$
$$-\infty < f, \omega < \infty$$

Señales en tiempo discreto:

$$\Omega = 2\pi F, \quad -\frac{1}{2} < F \leq \frac{1}{2}$$
$$-\pi < \Omega \leq \pi$$

Relación al muestrear a frecuencia f_s:

$$F = \frac{f}{f_s}, \;\; \Omega = \omega T_s \quad \Longleftrightarrow \quad f_r = F \cdot f_s, \;\; \omega = \frac{\Omega}{T_s}$$

$$\text{donde} \quad f \in \Big(-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\Big], \quad \omega \in \Big(-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\Big]$$

Teorema del muestreo

Una señal senoidal de tiempo continuo de frecuencia f se muestrea correctamente (sin experimentar aliasing) si la frecuencia de meustreo f_s es mayor que el doble de f.

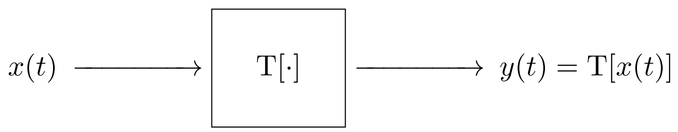
$$f < \tfrac{f_s}{2} \Longrightarrow f_s > 2f_s$$

Tema 4: Representación de Sistemas en el Dominio del Tiempo

4.1. Concepto de sistema y sus propiedades

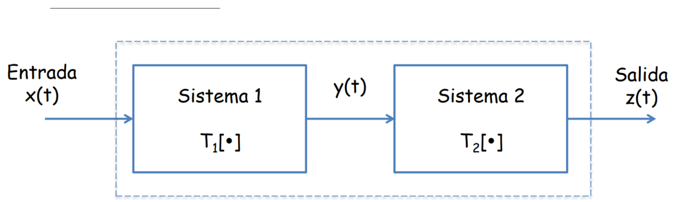
Definición de sistema

Un **sistema** es una transformación de una señal a otra, y se denota como $\mathrm{T}[\cdot]$. Sea $x(t)$ la señal de entrada al sistema $T[\cdot]$, la salida (la señal resultante) se denota como $y(t) = \mathrm{T}[x(t)]$.

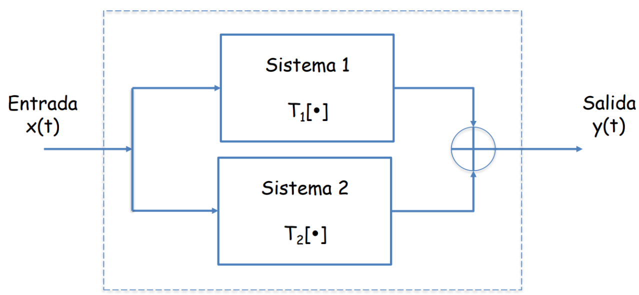


Conexiones entre sistemas

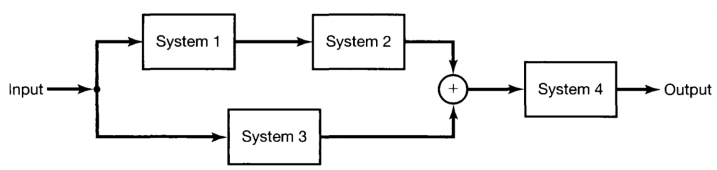
Conexión serie
$z(t) = \mathrm{T}_2[\mathrm{T}_1[x(t)]]$



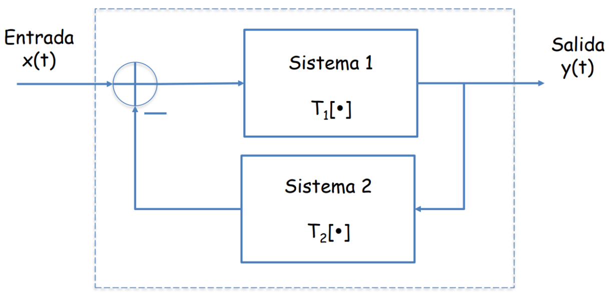
Conexión paralela
$y(t) = T_1[x(t)] + \mathrm{T}_2[x(t)]$



Conexión híbrida
serie-paralelo



Conexión con realimentacion



Propiedades básicas de los sistemas

- Un sistema es **sin memoria** o estático si, y solo si, la salida en un instante depende de la entrada de ese mismo instante.
- Un sistema es **invertible** si, y sólo si, entradas distintas dan lugar a salidas distintas y por tanto existe un sistema inverso que conectado en serie con el sistema original produce una salida igual a la entrada.
- Un sistema es **causal** si la salida en un instante depende de valores de la entrada de ese instante o instantes pasados.
- Un sistema es **estable** si, y sólo si, las entradas pequeñas producen salida que no divergen. Está demostrado que si la entrada de un sistema estable es acotada, entonces la salida también es acotada.
- Un sistema es **invariante en el tiempo** si un desplazamiento en tiempo de la entrada da lugar al mismo desplazamiento de la salida. Es decir, dado $y(t) = T[x(t)]$, entonces $y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$.
- Un sistema es **lineal** si, y sólo si, cumple estas dos propiedades:
  - Escalado u homogeneidad: Sea $ax(t)$ una señal de entrada, $T[ax(t)] = aT[x(t)]$.
  - Aditividad: Sea $x_1(t) + x_2(t)$ una señal de entrada, $T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$.
- **Sistemas LTI**. Un sistema se dice LTI (*Linear and Time Invariante*) si posee conjuntamente las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo.

4.2. Sistemas LTI de tiempo discreto

Representación de señales de tiempo discreto en términos de impulsos

Teorema: Cualquier señal de tiempo discreto $x(n)$ se puede representar en el dominio del tiempo como una combinación lineal de impulsos unidad.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

La **respuesta al impulso** se denota como $h(n)$ y es la salida que se obtiene cuando la señal de entrada a un sistema LTI (denotado como T) es $\delta(n)$.

$$h(n) = \mathrm{T}[\delta(n)]$$

Se va a demostrar que los sistemas LTI se pueden representar en el dominio del tiempo por su respuesta al impulso.

Suma de convolución

Sea T un sistema LTI de tiempo discreto, $x(n)$ una señal de tiempo discreto tal que $y(n) = \mathrm{T}[x(n)]$, y $h(n) = \mathrm{T}[\delta(n)]$ la respuesta al impulso. La salida $y(n)$ se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathrm{T}[x(n)] \\ &= \mathrm{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathrm{T}[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

La operación $*$ se denomina **suma de convolución**. Sea $x(n)$ una señal de entrada a un sistema LTI y $h(n)$ su respuesta al impulso, al aplicar la suma de convolución entre $x(n)$ y $h(n)$ obtenemos el valor de la salida del sistema LTI:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

La secuencia de pasos a seguir para determinar $y(n)$ cuando $n = n_0$ es:

1. Obtener $x(k)$.
2. Invertir $h(k)$ para obtener $h(-k)$.
3. Desplazar $h(-k)$ el valor n_0 para obtener $h(n_0 - k)$.
   - Si $n_0 > 0$, desplazamiento a la derecha.
   - Si $n_0 < 0$, desplazamiento a la izquierda.
4. Multiplicar $x(k)$ y $h(n_0 - k)$ para obtener $v_{n_0}(k) = x(k)h(n_0 - k)$.
5. Sumar todos los valores de la secuencia producto.

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{n_0}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k)$$

La **suma de convolución** cumple estas propiedades:

- El resultado de convolucionar dos señaes de duración finita es una señal de duración finita.
- Sea $x(n)$ una señal de duración N_x y $h(n)$ la respuesta al impulso de duración N_h, entonces $y(n) = x(n) * h(n)$ tiene una duración $N_y = N_x + N_h - 1$.

4.3. Sistemas LTI de tiempo continuo

Representación de señales de tiempo continuo en términos de impulsos

Teorema: Cualquier señal de tiempo continuo $x(t)$ se puede representar por medio de la siguiente integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Sea $x(t)$ una señal de entrada (de tiempo continuo) a un sistema LTI y $h(t)$ la respuesta al impulso ($h(t) = T[\delta(t)]$), la salida $y(n)$ al sistema es:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{T}[x(t)] \\ &= \mathrm{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{T}[\delta(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

Integral de convolución

La operación $*$ en el caso continuo se denomina **integral de convolución**. Sean dos señales $x(n)$ y $h(n)$ en tiempo discreto a las que se le aplica la integral de convolución, su valor es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)$$

La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ cuando $t = t_0$ sigue la siguiente secuencia:

1. Obtener $x(\tau)$.
2. Invertir $h(\tau)$ para obtener $h(-\tau)$.
3. Desplazar $h(-\tau)$ el valor t_0 para obtener $h(t_0 - \tau)$.
   - Si $t_0 > 0$, desplazamiento a la derecha.
   - Si $t_0 < 0$, desplazamiento a la izquierda.
4. Multiplicar $x(\tau)$ y $h(t_0 - \tau)$: $v_{t_0}(\tau) = x(\tau)h(t_0 - \tau)$.
5. Sumar todos los valores de la secuencia producto.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{t_0}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t_0-\tau)d\tau$$

Si la duración de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es finita, entonces el resultado de la integral de convolución entre las dos señales también es finito.

4.4. Propiedades de los sistemas LTI

- Propiedad conmutativa.

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma:

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad = \quad x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$

- Propiedad asociativa.

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \quad = \quad [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)]$$

Elemento neutro

La señal impulso unidad es el elemento neutro de la operación de convolución.

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \quad \text{y} \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Cuando se convoluciona $x(n)$ con $h(n)$, se obtiene la representación de $x(n)$ en términos de impulsos unidad.
- Cuando se convoluciona $x(t)$ con $h(t)$, se obtiene la representación de $x(t)$ en términos de impulsos unidad.
- Debido a la propiedad de invarianza en tiempo: $\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$

Desplazamientos

Los desplazamientos en tiempo de la entrada $x(t)$ y/o de la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI resultan en la salida $y(t)$ con el mismo desplazamiento.

$$x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t-t_0)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t-t_0)} \longrightarrow y(t-t_0)$$

Señales periódicas

Anteriormente vimos que una señal periódica de período T_0 se podía representar como la suma de infinitas versiones de la señal aperiódica $x(t)$ desplazadas:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0)$$

El desplazamiento en tiempo $x(t-nT_0)$ se puede reescribir como la convolución $x(t) * \delta(t-nT_0)$.

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-nT_0) \\ &= x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0) \\ &= x(t) * p_{T_0}(t) \end{aligned}$$

La señal $p_{T_0}(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0)$ se denomina **tren de impulsos**.

Por tanto, señal periódica $x_{T_0}(t)$ se puede interpretar como la salida de un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t) = x(t)$ cuando la entrada es la señal tren de impulsos $p_{T_0}(t)$.

Causalidad de un sistema LTI

Un sistema es causal si, y solo si, su salida depende de los valores pasados y presentes de la entrada.

- Un sistema LTI de tiempo discreto es causal $\iff$ $h(n) = 0$ para $n < 0$. Por tanto, la suma de convolución se puede reescribir de la siguiente forma:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

- Un sistema LTI de tiempo continuo es causal $\iff$ $h(t) = 0, t < 0$. Por tanto, la integral de convolución se puede reescribir de la siguiente forma:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Sistemas LTI sin memoria

Un sistema no tiene memoria si, y sólo si, su salida en cualquier instante depende de la entrada de ese instante. Formalmene, un sistema LTI no tiene memoria si y sólo si $h(n) = 0$ para $n \neq 0$ (caso discreto) o $h(t) = 0$ para $t \neq 0$ (caso continuo). En este caso, la respuesta al impulso tiene la forma $h(n) = k\delta(n)$ (caso discreto) o $h(t) = k\delta(t)$ (caso continuo) y la salida del sistema quedan simplificada a:

$$y(n) = kx(n), \quad \text{y} \quad y(t) = kx(t)$$

Invertibilidad de sistemas LTI

Si un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t)$ es invertible, existe un sistema de respuesta al impulso $h^{-1}(t)$ que lo invierte y la conexión serie de estos dos sistemas equivale al sistema identidad, de tal forma que la señal de entrada es la señal de salida.

Estabilidad de sistemas LTI

Teorema: Un sistema es estable si cada entrada prouce una salida acotada.

Sea $x(n)$ una señal acotada, $|x(n)| < B$, y la entrada de un sistema LTI de respuesta al impulso $h(n)$. El módulo de la salida es:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| = |y(n)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

Y como $x(n)$ es acotada, tenemos que $|x(n-k)| < B$, por tanto: $|y(n)| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$.

Observamos por tanto que si la respuesta al impulso es absolutamente sumable, entonces $y(n)$ es acotada y el sistema es estable.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

En el caso de sistemas LTI de tiempo continuo, la condición de estabilidad es equivalente a que la respuesta al impulso $h(t)$ sea absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Tema 5: Análisis en Frecuencia de Señales y Sistemas de tiempo continuo

5.1. La respuesta en frecuencia

Sea $x(t)$ la señal de entrada a un sistema LTI de tiempo continuo y $h(t) = \mathrm{T}\delta(t)$ la respuesta al impulso. La señal de salida se define mediante la **integral de convolución**:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) \\ = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Cuando la entrada de un sistema LTI es una **señal exponencial compleja** $x(t) = e^{j\omega t}$, $-\infty < t < \infty$, la salida se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= e^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{H(\omega)} = H(\omega)e^{j\omega t} \end{aligned}$$

donde $H(\omega)$ es una constante que no depende de la variable independiente t.

La conclusión que sacamos es que las señales exponenciales complejas son **autofunciones** de los sitemas LTI. La salida de un sistema LTI cuando la entrada es una exponencial compleja es la entrada multiplicada por una constante.

Respuesta en frecuencia

Sea $x(t) = e^{j\omega t}$ la entrada a un sistema LTI en el dominio del tiempo, se define un autovalor denominado **respuesta en frecuencia**, $H(\omega)$, que no depende de la variable independiente t (tiempo), sino de la frecuencia ω.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Quedando así la salida del sistema:

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

Forma polar de la respuesta en frecuencia

En general, $H(\omega)$ es un número complejo que se puede expresar en forma polar:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$$

- $|H(\omega)|$ es el módulo de la respuesta en frecuencia.
- $\angle H(\omega)$ es la fase de la respuesta en frecuencia.

Quedando la respuesta del sistema LTI como:

$$\begin{aligned} y(t) &= H(\omega)e^{j\omega t} \\ &= |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}e^{j\omega t} \\ &= |H(\omega)|e^{j(\omega t+\angle H(\omega))} \end{aligned}$$

Interpretación

- El sistema ha cambiado la amplitud y la fase de la entrada $x(t)$, pero no su frecuencia.
- Los sistemas LTI no crean frecuencias a su salida que no existen en su entrada, sino que **modifican la amplitud y la fase** de las señales exponenciales complejas a su entrada.
- La respuesta en frecuencia de un sistema LTI puede ser cero en alguna frecuencia. Esto quiere decir que la señal de entrada (una exponencial compleja) desaparece a la salida del sistema.
- Los sistemas LTI también se les denomina **filtros** porque dejan pasar algunas frecuencias de la entrada y otras no.

Tipos de respuesta en frecuencia

- **Filtro paso bajo**: Permite el paso de frecuencias más bajas y atenúa mucho las frecuencias más altas.

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{Filtro paso bajo ideal}$$

  - Deja pasar sin alterar la amplitud y la fase de las frecuencias bajas en un rango y elimina completamente las restantes.
  - ω_0 es el ancho de banda del filtro en rad/seg.

- **Filtro paso alto**: Atenúa mucho las frecuencias más bajas y poco las frecuencias más altas.

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ 1 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{Filtro paso alto ideal}$$

  - Elimina completamente las frecuencias bajas en un rango y deja pasar las restantes sin alterar su amplitud ni si fase.
  - ω_0 es el ancho de las frecuencias bajas eliminadas.

- **Filtro paso banda**: Atenúa poco las frecuencias en un determinado rango en torno a una frecuencia central y mucho todas las demás.

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_c - \frac{\omega_0}{2} < \omega < -\omega_c + \frac{\omega_0}{2} \\ 1 & \omega_c - \frac{\omega_0}{2} < \omega < \omega_c + \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{Filtro paso banda ideal}$$

  - Deja pasar sin alterar la amplitud y la fase de las frecuencias en torno a una frecuencia central ω_c y elimina completamente las restantes.

- ω_0 es el ancho de banda del filtro.

- **Filtro banda eliminada**: Atenúa mucho las frecuencias en un determinado rango en torno a una frecuencia central y poco todas las demás.

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_c - \frac{\omega_0}{2} < \omega < -\omega_c + \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \omega_c - \frac{\omega_0}{2} < \omega < \omega_c + \frac{\omega_0}{2} \\ 1 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{Filtro banda eliminada ideal}$$

  - Elimina las frecuencias en torno a una frecuencia central ω_c y deja pasar las restantes sin alterar su fase.
  - ω_0 es el ancho de las frecuencias eliminadas.

5.2. Transformada de Fourier

Sea $x(t)$ una señal en el dominio del tiempo, se puede obtener su representación en el dominio de la frecuencia a partir de la Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

donde $X(\omega)$ se conoce como **espectro de** $x(t)$.

Observaciones sobre los cálculos de la Transformada de Fourier

- Aunque $x(t)$ sea real, el producto $x(t)e^{-j\omega t}$ es complejo.
- La integración del producto $x(t)e^{-j\omega t}$ a lo largo de toda la recta real dará un resultado complejo.
- Representación polar: $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$.

Estudio de la convergencia de la TF

Para que la TF de una señal $x(t)$ converja, se deben dar las siguientes condiciones:

- $x(t)$ debe ser absolutamente integrable: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$
- $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
- $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades finitas dentro de cualquier intervalo finito.

Transformada de Fourier inversa

La Transformada de Fourier inversa permite obtener una señal $x(t)$ en el dominio del tiempo a partir de su espectro $X(\omega)$ en el dominio de la frecuencia.

$$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada de Fourier en términos de frecuencia f

La Transformada de Fourier también se puede escribir en términos de la frecuencia f en Hz en lugar de la frecuencia ω en rad/seg.

Ecuación de análisis: $$X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Ecuación de síntesis: $$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

5.3. Propiedad de convolución de la Transformada de Fourier

Sea $x(t)$ la entrada a un sistema LTI en el dominio del tiempo, $h(t)$ su respuesta al impulso y $y(t) = x(t) * h(t)$ la salida del sistema. Transformando estas señales al dominio de la frecuencia, obteniendo $X(\omega)$, $H(\omega)$ y $Y(\omega)$ respectivamente, la **propiedad de convolución** de la Transformada de Fourier nos dice que (véase la demostración en el apéndice) la operación de **convolución** en el dominio del tiempo se traduce en la operación **producto** en el dominio de la frecuencia.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Donde $Y(\omega)$ también puede representarse en su forma polar.

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \Longrightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)| & \text{Módulo de } Y(\omega) \\ \angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega) & \text{Fase de } Y(\omega) \end{cases}$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- Propiedad conmutativa: $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.
- Propiedad distributiva. $Y(\omega) = X(\omega)H_1(\omega) + X(\omega)H_2(\omega) = X(\omega)\Big(H_1(\omega) + H_2(\omega)\Big)$
- Propiedad asociativa (el orden de interconexión en serie es irrelevante).

Ancho de banda

El ancho de banda W de una señal es el rango de frecuencias en las que $X(\omega)$ toma los valores más significativos. En la práctica, podemos asumir que, si cuando $\omega > \alpha$, $X(\omega) \approx 0$, en este caso $W = \alpha$ es el ancho de banda.

Debido a la simetría en el dominio de la frecuencia, esto se cumple también cuando $\omega > -\alpha$.

Espectro normalizado

El espectro normalizado de una señal $X(\omega)$ en el dominio de la frecuencia se define como:

$$X_N(\omega) = \frac{X(\omega)}{\text{máx}(X(\omega))}$$

- El módulo de $X_N(\omega)$ se expresa en decibelios (dB), un tipo de unidad logarítmica:

$$|X_N(\omega)|\text{dB} = 20\log_{10}(|X_N(\omega)|) = 10\log_{10}(|X_N(\omega)|^2)$$

- El valor máximo de los espectros normalizados es siempre 1 (0 decibelios).

Dualidad de la Transformada de Fourier

Las ecuaciones de análisis y síntesis de la TF son muy parecidas:

$$X(\omega) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Elemento neutro

El elemento neutro en el dominio del tiempo era $\delta(t)$. De forma análoga, el elemento neutro en el dominio de la frecuencia es $\text{TF}[\delta(t)] = 1$.

5.4. Propiedades de la Transformada de Fourier

Invertibilidad en los sistemas LTI

El sistema LTI en frecuencia que invierte a otro se denomina **ecualizador**, porque compensa la respuesta en frecuencia del sistema para que la respuesta conjunta sea igual a 1.

$$\underbrace{h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)}_{\text{Dominio del tiempo}} \iff \underbrace{H(\omega)H^{-1}(\omega) = 1}_{\text{Dominio de la frecuencia}}$$

La respuesta en frecuencia de un ecualizador es la inversa de la respuesta en frecuencia del sistema.

$$H^{-1}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$$

Propiedad de linealidad

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales cuya TF es $X_1(\omega)$ y $X_2(\omega)$ respectivamente. La propiedad de la linealidad de la TF afirma que:

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \quad a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Propiedad de conjugación en tiempo

La operación de conjugación en tiempo es equivalente a conjugar e invertir en frecuencia

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X^*(-\omega)$$

Si $x(t)$ es real: $x^*(t) = x(t) \implies X(\omega) = X^*(-\omega)$

Simetría hermítica

Si $x(t)$ es real, $x(t) = x^*(t) \implies X(\omega) = X^*(-\omega)$. Por tanto:

$$|X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)} = |X(-\omega)|e^{-j\angle X(-\omega)} \begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$$

- Si $x(t)$ es real, $|X(\omega)|$ es una **función simétrica par** de ω.

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$$

- Si $x(t)$ es real, $\angle X(\omega)$ es una **función antisimétrica impar** de ω:

$$\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$$

Respuesta de un sistema LTI real a una señal senoidal

Sea $x(t) = \cos \omega t$ la entrada a un sistema LTI real en el dominio del tiempo. Si descomponemos $x(t)$ de la forma:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}$$

Nos permite representar la salida $y(t)$ de la forma (véase la demostración en el apéndice):

$$y(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \angle H(\omega))$$

Obsérvese que los sistemas LTI reales modifican la amplitud y fase de las señales senoidales, pero no su frecuencia. La demostración puede verse en el apéndice.

Propiedad de inversión en tiempo

Sea $x(t)$ una señal en el domino del tiempo, invertir en tiempo es equivalente a invertir en frecuencia:

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) \\ x(-t) &\xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(-\omega) \end{aligned}$$

Si $x(t)$ es real:

$$x^*(t) = x(t) \quad \implies \begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ X^*(\omega) = X(-\omega) \end{cases}$$

Si $x(t)$ es simétrica:

$$x(-t) = x(t) \quad \implies \quad X(-\omega) = X(\omega)$$

Combinando los dos resultados anteriores, se tiene que, si $x(t)$ es real y simétrica, $X(\omega)$ también es real y simétrica.

Operaciones en el dominio del tiempo

Sea $x(t)$ una señal en el dominio del tiempo con $X(\omega) = \text{TF}[x(t)]$, se definen las siguientes propiedades:

- Desplazamiento en tiempo: $x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

- Derivación en tiempo.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} j\omega X(\omega)$$
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} (j\omega)^2 X(\omega)$$

- Integración en tiempo.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

donde $X(\omega = 0)$ es el área de $x(t)$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

Si $X(0) = 0$, la propiedad se simplifica:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

- Multiplicación en tiempo.

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Propiedad de escalado en tiempo y en frecuencia

Sea $x(t)$ una señal en el dominio del tiempo con $X(\omega) = \text{TF}[x(t)]$.

$$x(at) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Cuando $a > 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} < 1$. La señal se comprime en tiempo y se expande en frecuencia.
- Cuando $a < 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 1$. La seál se expande en tiempo y se comprime en frecuencia.

Una consecuencia de la propiedad de escalado en tiempo de la TF es que no es posible reducir simultáneamente la duración y el ancho de banda de una señal, ya que **disminuir la duración implica aumentar su ancho de banda**.

Operaciones en el dominio de la frecuencia

Sea $x(t)$ una señal en el dominio del tiempo con $X(\omega) = \text{TF}[x(t)]$.

- Desplazamiento en frecuencia:

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega - \omega_0)$$
$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega + \omega_0)$$

- Derivación en frecuencia.

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$
$$tx(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

- Integración en frecuencia: $-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \int_{-\infty}^{\omega} X(\eta)d\eta$

5.5. Transformada de Fourier de señales periódicas y series de Fourier

Definición de una señal periódica

Sea $x_{T_0}(t)$ una señal periódica de período fundamental T_0, se puede representar como la suma de infinitas versiones de una señal aperiódica $x(t)$ desplazada en tiempos múltiplos del período fundamental:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$$

Tren de impulsos

Interpretando $x(t - nT_0)$ como la convolución $x(t) * \delta(t - nT_0)$, la señal periódica $x_{T_0}(t)$ se puede escribir como una convolución entre la señal aperiódica $x(t)$ y el **tren de impulsos** $p_{T_0}(t)$:

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t - nT_0) \\ &= x(t) * \underbrace{\sum_{n-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)}_{\text{Tren de impulsos}} = x(t) * p_{T_0}(t) \end{aligned}$$

La Transformada de Fourier del tren de impulsos $p_{T_0}(t)$ es:

$$P_{T_0}(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ es la frecuencia fundamental en rad/seg.

Transformada de Fourier de $x_{T_0}(t)$

La TF de una señal periódica $x_{T_0}(t) = x(t) * p_{T_0}(t)$ es:

$$\begin{aligned} X_{T_0}(\omega) &= X(\omega)P_{T_0}(\omega) = X(\omega)\frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)\delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

Si introducimos la siguiente secuencia:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0), \quad -\infty < k < \infty$$

que corresponde con los valores de $X(\omega)$ junto con el factor $\frac{1}{T_0}$ en las frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental ω_0. X_k es la secuencia que resulta de muestrear $X(\omega)$ en $\omega = k\omega_0$ con el factor $\frac{1}{T_0}$.

Reescribimos la TF de una señal periódica en términos de X_k:

$$X_{T_0}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Obsérvese que $X_{T_0}(\omega)$ es un tren de impulsos unidad separados entre sí ω_0 con amplitudes X_k.

Series de Fourier

Habíamos explicado que:

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
$$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Si aplicamos la TF inversa a $X_{T_0}(\omega)$ obtendremos:

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \text{TF}^{-1}[X_{T_0}(\omega)] \\ &= \text{TF}^{-1}\left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \text{TF}^{-1}[2\pi\delta(\omega - k\omega_0)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Por tanto, la señal periódica $x_{T_0}(t)$ se puede representar a través de la siguiente serie que se conoce con el nombre de **serie de Fourier**.

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

Que tiene la forma de **combinación lineal** de infinitas exponenciales complejas $e^{jk\omega_0 t}$, con frecuencias múltiplos de $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Análisis de los coeficientes de Fourier

Los coeficientes de la combinación lineal son los valores de $X(\omega)$ en $\omega = k\omega_0$ con el factor $\frac{1}{T_0}$:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Como $x(t)$ es aperiódica, el intervalo anterior de integración se reduce a:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Serie trigonométrica de Fourier

Cuando $x(t)$ es real, $X(\omega)$ tiene simetría hermítica, $\Longrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$. Así pues, $x_{T_0}(t)$ es una señal periódica real y los coeficientes de su serie exponencial de Fourier también son reales y simétricos: $X_{-k} = X_k^*$.

Si descomponemos la serie de Fourier de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Y cambiamos: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$, por la propiedad de simetría hermítica.

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k e^{jk\omega_0 t} + X_{-k} e^{-jk\omega_0 t}) \end{aligned}$$

Si expresamos los coeficientes en forma polar teniendo en cuenta su simetría hermítica:

$$X_k = A_k e^{j\phi_k} \Longrightarrow X_{-k} = X_k^* = A_k e^{-j\phi k}$$

Sustituimos y elaboramos:

$$\begin{aligned} x_{T_0}(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t} + A_k e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t}) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)} + A_k e^{-j(k\omega_0 t + \phi_k)} \right) \\ &= A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned}$$

En conclusión, una señal periódica real $x_{T_0}(t)$ puede reresentarse a través de la siguiente serie conocida como la **serie trigonométrica de Fourier**.

$$x_{T_0}(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

5.6. Gestión del espectro radioeléctrico

Modulación de amplitud (AM)

La modulación de amplitud (AM, *Amplitude Modulation*) consiste en modificar la amplitud de una señal senoidal portadora (*carrier*) según una señal mensaje que se desea transmitir.

$$\begin{cases} x(t) & \text{Señal mensaje} \\ A_c \cos(\omega_c t) & \text{Señal portadora} \\ x_{\mathsf{AM}}(t) = A_c x(t) \cos(\omega_c t) & \text{Señal AM} \end{cases}$$

donde ω_c es la frecuencia de la portadora y A_c es la amplitud de la portadora.

La señal AM, se puede reescribir de la forma:

$$x_{\text{AM}}(t) = A_c x(t)\cos(\omega_c t) = \frac{A_c}{2}x(t)e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2}x(t)e^{-j\omega_c t}$$

Si recordamos las propiedades de desplazamiento en frecuencia, el espectro de la señal AM es:

$$X_{\text{AM}}(\omega) = \frac{A_c}{2}X(\omega - \omega_c) + \frac{A_c}{2}X(\omega + \omega_c)$$

- La modulación AM es una transformación lineal no invariante en el tiempo.
- El espectro de la señal AM existe en frecuencias distintas a las del espectro de la señal mensaje.
- La señal AM es una señal paso banda centrada en la frecuencia portadora ω_c. Su ancho de banda es el doble de ancho de banda del mensaje.

Demodulación AM

Sea $x_{\text{AM}}(t) = A_c x(t)\cos(\omega_c t)$ una señal AM recibida. Si la multiplicamos por la portadora $\cos(\omega_c t)$ obtenemos:

$$r(t) = x_{\text{AM}}(t)\cos(\omega_c t)$$

Cuya representación en el dominio de la frecuencia es:

$$R(\omega) = \frac{1}{2}X_{\text{AM}}(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}X_{\text{AM}}(\omega - \omega_c)$$

Multiplexación en frecuencia

La multiplexación es la combinación de dos o más canales de información en un solo medio de transmisión.

La **multiplexación en frecuencia** consiste en que cada usuario transmite por una banda de frecuencias diferente. Es una técnica de compartición de un medio, usado en las comunicaciones por radio.

5.7. Relación de Parseval, densidad espectral de energía y función de autocorrelación

Relación de Parseval y densidad espectral de energía

La energía de una señal $x(t)$ se define como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

La **densidad espectral de energía** es la distribución de la energía de $x(t)$ en el dominio de la frecuencia:

$$\Psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega)$$

Propiedades de la DEE

- Es una función real y positiva de la variable independiente ω: $\Psi_x(\omega) \geq 0, \forall \omega$.
- Es una función simétrica: $\Psi_x(-\omega) = \Psi_x(\omega) \iff x(t) \in \mathbb{R}$.
- En un sistema LTI con respuesta en frecuencia $H(\omega)$, la DEE de la entrada $\Psi_x(\omega)$ y la DEE de la salida $\Psi_y(\omega)$ se relacionan de la siguiente manera:

$$\Psi_y(\omega) = \Psi_x(\omega)|H(\omega)|^2$$

- Un retardo no modifica la DEE de una señal.

Función de autocorrelación

La función de autocorrelación $r_x(t)$ es la señal en el dominio del tiempo cuya Transformada de Fourier es $\Psi_x(\omega)$.

$$r_x(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \Psi_x(\omega)$$

Aplicando las propiedades de la TF:

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) \\ x^*(t) &\xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X^*(-\omega) \quad \text{Conjugación en tiempo} \\ x^*(-t) &\xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X^*(\omega) \quad \text{Inversión en tiempo} \end{aligned}$$

La **función de autocorrelación** es la convolución de $x(t)$ con una versión invertida en tiempo de sí misma, $x^*(-t)$.

$$\boxed{r_x(t) = x(t) * x^*(-t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega)X^*(\omega) = \Psi_x(\omega)}$$

Si desarrollamos:

$$r_x(t) = x^*(-t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad \begin{cases} \tau = -\sigma \Longrightarrow d\tau = -d\sigma \\ \tau = -\infty \Longrightarrow \sigma = \infty \\ \tau = \infty \Longrightarrow \sigma = -\infty \end{cases}$$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} x^*(\sigma)x(t+\sigma)(-d\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\sigma)x(t+\sigma)d\sigma$$

Podemos reescribir la funciónde autocorrelación:

$$\boxed{r_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau}$$

Propiedades de la función de autocorrelación

- El valor de la función de autocorrelación en $t = 0$ es la energía de $x(t)$.

$$r_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = E_x$$

- La función de autocorrelación tiene simetría hermítica: $r_x(-t) = r_x(t)$.
- El rango de la función de correlación es: $-E_x \leq |r_x(t)| \leq E_x, \forall t$ (véase la demostración en el apéndice).
- El valor máximo de $|r_x(t)|$ es en $t = 0$.

Interpretación de la función de autocorrelación

La función de autocorrelación se puede interpretar como una **medida del parecido** entre $x(t)$ (una función real) y una versión desplazada en tiempo de sí misma $x(t+\tau)$.

Sea $d_\tau(t) = x(t) - x(t+\tau)$ la señal diferencia. Su energía es:

$$E_d(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau^2(t)dt = 2E_x - 2r_x(\tau)$$

donde τ representa el desplazamiento en tiempo.

Demostración:

$$\begin{aligned} E_d(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x(t) - x(t+\tau)\Big)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x^2(t) + x^2(t+\tau) - 2x(t)x(t+\tau)\Big)dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^t(t)dt}_{E_x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t+\tau)dt}_{E_x} - 2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt}_{r_x(\tau)} \end{aligned}$$

Si denotamos la **función de autocorrelación normalizada**:

$$\rho_x(\tau) = \frac{r_x(\tau)}{E_x}, \quad -1 \leq \rho_x(\tau) \leq 1$$

Podemos reescribir $E_d(\tau)$ de la siguiente forma: $E_d(\tau) = 2E_x(1 - \rho_x(\tau))$

Por tanto, $E_d(\tau)$ toma el valor mínimo cero cuando:

$$\rho_x(\tau) = 1 \iff r_x(\tau) = E_x \iff \tau = 0$$

Por tanto, el parecido entre $x(t)$ y $x(t+\tau)$ es máximo cuando $\tau = 0$, cuando las dos señales son iguales y la energía de la señal diferencia es 0.

Por otro lado, $E_d(\tau)$ toma el valor máximo cuando $\rho_x(\tau)$ toma el valor mínimo -1. Cuando esto ocurre:

$$\begin{aligned} x(t+\tau) = -x(t) &\implies r_x(\tau) = -E_x \\ &\implies \rho_x(\tau) = -1 \\ &\implies E_d(\tau) = 4E_x \end{aligned}$$

5.8. Ejemplos de Transformadas de Fourier

Exponencial real unilateral decreciente ($a > 0$)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- Módulo de $X(\omega)$: $|X(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$
- Fase de $X(\omega)$: $\angle X(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
- $X(\omega)$ es una señal de tipo **banda base** o una respuesta en frecuencia de tipo **paso bajo**.
- El máximo de $|X(\omega)|$ es en $\omega = 0$:
$$|X(0)| = \frac{1}{a}$$
- Espectro normalizado: $X_N(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{X(0)} = \dfrac{a}{a + j\omega}$
- Espectro noramlizado en decibelios: $|X_N(\omega)|\text{dB} = 10\log_{10}\left(\dfrac{a^2}{a^2 + \omega^2}\right)$
- Ancho de banda: a.

Pulso rectangular de duraciñon T y amplitud A

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 2A\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$$

- $X(\omega)$ (pulso sinc) es una señal de tipo **banda base** o una respuesta en frecuencia de tipo **paso bajo**.
- El valor máximo de $X(\omega)$ se da en $\omega = 0$:
$$X(0) = \lim_{\omega \to 0} 2A\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} = AT$$
- Espectro noramlizado:
$$X_N(\omega) = \frac{X(\omega)}{X(0)} = \frac{2}{T}\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$$
- Ancho de banda: $W = \frac{2\pi}{T}$ rad/seg (frecuencia del primer nulo).

Pulso sinc

$$x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \begin{cases} 1 & -W < \omega < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- $X(\omega)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro **paso bajo ideal** y $x(t)$ es su respuesta al impulso.
- Ancho de banda: W.
- Primer nulo de $x(t)$ en $t = \frac{\pi}{W}$.

Pulso triangular

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}(T+t) & Tt0 \\ \frac{1}{T}(T-t) & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \frac{4}{T}\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}\right)^2$$

Pulso gaussiano

$$x(t) = \exp(-at^2) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

Impulso unidad

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 1$$

- Ancho de banda infinito.

Señal constante

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Tema 6: Señales y Sitemas Discretos en el Dominio de la Frecuencia

6.1. Respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto

Sistemas LTI en tiempo discreto

Anteriormente habíamos visto que la salida de un sistema LTI en tiempo discreto se podía representar en términos de la respuesta al impulso $h(n) = \mathrm{T}[\delta(n)]$ mediante la **suma de convolución**.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Cuando la señal de entrada es una exponencial compleja: $x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega n}e^{-j\omega k} \\ &= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \end{aligned}$$

La **respuesta en frecuencia** de un sistema LTI se define como:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

- La suma $H(e^{j\omega})$ no depende de la variable independiente n, sino de la frecuencia ω.
- Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI. La salida es la entrada $x(n) = e^{j\omega n}$ multiplicada por una constante.
- $H(e^{j\omega})$ es un autovalor del sistema LTI. Es un número complejo que se puede expresar de forma polar:

  $$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| + e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

  Por tanto, la salida al sistema LTI puede reescribirse de la forma:
- El sistema LTI cambia la amplitd y la fase de la entrada $x(n) = e^{j\omega n}$, pero no la frecuencia.

Periodicidad de la respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto es una **función periódica** de período 2π.

$$
\begin{aligned}
H(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k} \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{H(\omega)} \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1} = H(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

La periodicidad de $H(e^{j\omega})$ es una consecuencia de que las frecuencas en tiempo discreto son únicas en un intervalo 2π. Fuera de ese intervalo, $\omega \in [-\pi, \pi]$ son frecuencias alias.

Las frecuencias bajas son las próximas a $\omega = 0$ y las frecuencias altas son las próximas a $\omega = \pi$.

Tipos de respuesta en frecuencia

- **Filtro paso bajo**: Permite el paso de frecuencias más bajas y atenúa mucho las frecuencias más altas.

$$
H(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_L < \omega < \omega_L \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{Filtro paso bajo ideal}
$$

  - Deja pasar sin alterar la amplitud ni la fase de las frecuencias bajas en el rango $[-\omega_L, \omega_L]$.
  - Elimina completamente las altas alrededor de π: $\omega_L < |\omega| < \pi$.
  - ω_L es el ancho de banda del filtro en rad/seg y debe ser menor que π.

- **Filtro paso alto**: Atenúa mucho las frecuencias más bajas y poco las frecuencias más altas.

$$
H(\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_H < \omega < \omega_H \\ 1 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{Filtro paso alto ideal}
$$

  - Deja pasar sin alterar su amplitud y su fase las frecuencias altas alrededor de π: $\omega_H < |\omega|\pi$.
  - Elimina completamente las frecuencias bajas alrededor de cero: $\omega \in [-\omega_H, \omega_H]$.
  - ω_H es el ancho de las frecuencias bajas eliminadas y debe ser menor que π.

- **Filtro paso banda**: Atenúa poco las frecuencias en un determinado rango en torno a una frecuencia central ω_C y mucho todas las demás (ω_C es el ancho de banda del filtro).

- **Filtro banda eliminada**: Atenúa mucho las frecuencias en un determinado rango en torno a una frecuencia central ω_C y poco todas las demás (ω_C es el ancho de las frecuencias eliminadas).

Hay que tener en cuenta las espeficiaciones del dominio de la frecuencia en tiempo discreto. La frecuencia central ω_C debe ser menor que π y el ancho de banda $\omega_B > 0$ debe cumplir la restricción: $\omega_C + \frac{\omega_B}{2} < \pi$.

6.2. Transformada de Fourier de señales en tiempo discreto

La Transformada de Fourier en tiempo discreto permite representar una señal $x(n)$ en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia:

$$X(e^{j\omega}) = \text{TF}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

En general, $X(e^{j\omega})$ es una función compleja de la variable continua ω y se puede representar de forma polar:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

Para que la TF converja tenemos dos cndiciones suficientes:

- $x(n)$ absolutamente sumable: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$.
- $x(n)$ tiene energía finita: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$.

Nota: Las señales periódicas con energía finita en un período tienen TF en forma de impulsos unidad.

Trasformada de Fourier inversa

La Transformada de Fourier inversa en tiempo discreto permite obtener $x(n)$ a partir de $X(e^{j\omega})$.

$$x(n) = \text{TF}^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

6.3. Señales periódicas en tiempo discreto

En esta sección consideraremos señales en tiempo discreto de duración limitada N_x en el rango $[0, N_x - 1]$.

Cuando $x(n)$ tiene duración finita, la definición de su TF se simplifica a una suma de tamaño N_x:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N_x-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

Señales periódicas en tiempo discreto

Una señal periódica en tiempo discreto $x_{N_0}(n)$ se puede representar como la suma de infinitas versiones de una señal aperiódica $x(n)$ desplazadas en tiempo múltiplos del período fundamental N_0.

$$x_{N_0}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN_0)$$

Sea $p_{N_0}(n)$ la señal de **tren de impulsos discreto** definida como:

$$p_{N_0(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN_0)$$

Es decir, una sucesión de impulsos unidad en tiempo discreto separados por un período N_0. Podemos reinterpretar la señal periódica $x_{N_0}(n)$ como la convolución de $x(n)$ y el tren de impulsos:

$$\begin{aligned} x_{N_0}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) * \delta(n-kN_0) \\ &= x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN_0) = x(n) * p_{N_0}(n) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que la Transformada de Fourier del tren de impulsos en tiempo discreto es:

$$P_{N_0}(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

donde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$ es la frecuencia fundamental en rad/muestra.

Transformada de Fourier de una señal en tiempo discreto

Teniendo en cuenta que $x_{N_0}(n) = x(n) * p_{N_0}(n)$, la TF de $x_{N_0}(n)$ resulta:

$$\begin{aligned} X_{N_0}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})P_{N_0}(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N_0}X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})\delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\omega_0})\delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

Queda por tanto definida la Transformada de Fourier de una señal periódica en tiempo discreto como:

$$X_{N_0}(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\omega_0})\delta(\omega - k\omega_0)$$

6.4. Discrete Fourier Transform

La **Discrete Fourier Transform** es una **señal discreta** en el dominio de la frecuencia así definida:

$$X(k) = X(e^{jk\omega_0}), \quad -\infty < k < \infty$$

Los valores de esta señal discreta coinciden con los valores de $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$. Una forma de interpretar $X(k)$ es como la señal discreta en el dominio de la frecuencia que resulta de muestrear periódicamente $X(e^{j\omega})$ en $\omega = k\omega_0$.

Como $X(e^{j\omega})$ es periódica en ω de período 2π, la señal discreta $X(k)$ también es periódica y su período es N_0:

$$X(k + N_0) = X(e^{j(k+N_0)\omega_0})X(e^{jk\omega_0}e^{jN_0\omega_0}), \quad N_0\omega_0 = 2\pi$$

Al ser $X(k)$ es periódica en k no es necesario conocer sus infinitos valores en $-\infty < k < \infty$ sino que es suficiente con conocer los N_0 valores en el intervalo $[0, N_0]$.

Cálculo de la Discrete Fourier Transform

La DFT se puede calcular directamente a partir de $x(n)$. Como sabemos que $x(n)$ es de duración finita:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

Y en consecuencia, como $X(k) = X(e^{j\omega})$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}$$

Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)

A través de una demostración (véase el apéndice) podemos obtener $x(n)$ a partir de la DFT $X(k)$ mediante la siguiente transformación que se conoce como la **Inverse Discrete Fourier Transform**:

$$x(n) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} X(k)e^{jk\omega_0 n}$$

Resumen de la DFT

La DFT es una transformación que representa una señal $x(n)$ de tiempo discreto y duración finita $(0 \leq n < N_x)$ a través de una señal discreta $X(k)$ en el dominio e la frecuencia y de duración limitada $(0 \leq k < N_0)$, donde $N_0 \geq N_x$).

$$X(k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n} & 0 \leq k < N_0, \;\; \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x(n) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} X(k)e^{jk\omega_0 n} & 0 \leq n < N_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- $X(k)$ se puede interpretar como los valores de $X(e^{j\omega})$ cuando $\omega = k\omega_0$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$.
- La longitud de la DFT debe ser mayor o igual que la duración de $x(n)$, es decir, $N_0 \geq N_x$. En caso contrario, la DFT pierde relación intuitiva entre $X(k)$ y $X(e^{j\omega})$.

Longitud de la DFT

Sea N_x la duración de la señal $x(n)$ y N_0 el período fundamental de la señal periódica $x_{N_0}(n)$, se debe cumplir que:

$$N_0 \geq N_x$$

En caso contrario se produce un **solapamiento** entre las versiones desplazadas en tiempo de $x(n)$ al construir $x_{N_0}(n)$, y por tanto, $x_{N_0}(n) \neq x(n)$ en el intervalo $[0, N_0 - 1]$. $X(k)$ tampoco coincidirá con muestras de $X(e^{j\omega})$ y no será una representación adecuada en el dominio de la frecuencia de $x(n)$.

- El valor mínimo de N_0 para que $X(k)$ coincida con las muestras de $X(e^{j\omega})$ en $\omega = k\omega_0$ y por tanto sea una representación válida de $x(n)$ en el dominio de la frecuencia es que $N_0 = N_x$.
- Cuando $N_0 > N_x$ se introducen $N_0 - N_x$ ceros entre las réplicas desplazadas en tiempo de $x(n)$ dentro de la extensión periódica $x_{N_0}(n)$. Esta operación se conoce como *zero-padding*.
- La DFT con $N_0 > N_x$ equivale a un **sobremuestreo** de $X(e^{j\omega})$ que produce una representación válida de $x(n)$ en el dominio de la frecuencia, pero redundante y computacionalmente más costosa.

Propiedad de desplazamiento circular

Consideramos una secuencia $x(n)$ de longitud N_0 y su correspondiente DFT, $X(k)$ también de longitud N_0, Un desplazamiento circular de $x(n)$ se corresponde con una multiplicación por una exponencial compleja en frecuencia.

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}[\cdot]} X(k)$$
$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{\text{DFT}[\cdot]} X(k)e^{-jk\omega_0 n_0}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{n_0}$.

6.5. Cálculo eficiente de la DFT. Algoritmos Fast Fourier Transform (FFT)

El cálculo de la DFT de longitud N_0 de la señal discreta $x(n)$ se realiza a través de la siguiente suma:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}, \quad \text{donde } k = 0, ..., N_0 - 1, \ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Cálculo directo de la DFT

Introducimos los vectores $\mathbf{f}_k$ y $\mathbf{x}$ de dimensiones $1 \times N_0$ y $N_0 \times 1$ respectivamente:

$$\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} 1 & e^{-jk\omega_0} & e^{-jk\omega_0 2} & \cdots & e^{-jk\omega_0(N_0-1)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N_0 - 1) \end{bmatrix}$$

Y definimos de nuevo $X(k)$ de la siguiente forma:

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-jk\omega_0} & e^{-jk\omega_0 2} & \cdots & e^{-jk\omega_0(N_0-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N_0 - 1) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_k\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}$$

El cálculo de $X(k)$ supone:

- N_0 multiplicaciones complejas ($=4N_0$ multiplicaciones reales y $2N_0$ sumas reales).
- $N_0 - 1$ sumas complejas ($=2N_0 - 2$ sumas reales).

Total: $4N_0$ multiplicaciones reales y $4N_0 - 2$ sumas reales.

Matriz DFT

La matriz DFT, denotada como $\mathbf{F}_{N_0}$, es una matriz de dimensiones $N_0 \times N_0$ que apila los vectores $\mathbf{f}_k$ en fila para $k = 0, ..., N_0 - 1$ y ayuda a calcular los valores de $X(k)$:

$$\mathbf{F}_{N_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0\mathbf{x} \\ \mathbf{f}_1\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_0-1}\mathbf{x} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N_0-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0\mathbf{x} \\ \mathbf{f}_1\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_0-1}\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_0-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{F}_{N_0}\mathbf{x}$$

Cálculo total: N_0^2 multiplicaciones complejas y $N_0^2 - N_0$ sumas complejas.

Conjugación y transposición del vector $\mathbf{f}_k$

$$\mathbf{f}_k^H = (\mathbf{f}_k^*)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{jk\omega_0} \\ e^{jk\omega_0 2} \\ \vdots \\ e^{jk\omega_0(N_0-1)} \end{bmatrix}$$

Producto escalar de vectores complejos

Sea $\mathbf{x} = [x(0), ..., x(N_0 - 1)]$ y $\mathbf{y} = [y(0), ..., y(N_0 - 1)]$. El producto escalar entre estos dos vectores es:

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^H = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N_0-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^*(0) \\ y^*(1) \\ \vdots \\ y^*(N_0-1) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)y^*(n)$$

Si el producto escalar entre dos vectores es igual a cero, los dos vectores son **ortogonales**.

Los vectores $\mathbf{f}_k$, para $k = 0, ..., N_0 - 1$ son ortogonales entre sí.

$$\mathbf{f}_k\mathbf{f}_r^H = \begin{bmatrix} 1 & e^{-jk\omega_0} & e^{-jk\omega_0 2} & \cdots & e^{-jk\omega_0(N_0-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{jr\omega_0} \\ e^{jr\omega_0 2} \\ \vdots \\ e^{jr\omega_0(N_0-1)} \end{bmatrix}$$
$$= \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{-jk\omega_0 n} e^{jr\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j(r-k)\omega_0 n} = \begin{cases} N_0 & r = k \\ 0 & r \neq k \end{cases}$$

- La norma al cuadrado de los vectores $\mathbf{f}_k$ es $\mathbf{f}_k\mathbf{f}_k^H = N_0$.
- Los vectores $\mathbf{f}_k$ y $\mathbf{f}_r$ son ortogonales: $\mathbf{f}_k\mathbf{f}_r^H = 0,\ k \neq r$.

Por tanto la matriz DFT ($\mathbf{F}_{N_0}$) es una matriz unitaria que satisface la siguiente condición:

$$\mathbf{F}_{N_0}\mathbf{F}_{N_0}^H = \mathbf{F}_{N_0}^H\mathbf{F}_{N_0} = N_0\mathbf{I}_{N_0}$$

Inverse Discrete Fourier Transform

La condición anterior implica que la inversa de la matriz DFT es:

$$\mathbf{F}_{N_0}^{-1} = \frac{1}{N_0}\mathbf{F}_{N_0}^{H}$$

Por tanto, podemos representar la transformación matricial de la DFT inversa como:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N_0}\mathbf{F}_{N_0}^{H}\mathbf{X}$$

Ecuaciones de anáisis y de síntesis

Ecuación de análisis: $\mathbf{X} = \mathbf{F}_{N_0}\mathbf{x}$

Ecuación de síntesis: $\mathbf{x} = \dfrac{1}{N_0}\mathbf{F}_{N_0}^{H}\mathbf{X}$

6.6. Algoritmo Fast Fourier Transform (FFT)

Los algoritmos Fast Fourier Transform son un conjunto de algoritmos numéricos que aumentan la eficiencia del cálculo de la DFT. Gracias a ellos es posible calcular la DFT con $\frac{N_0}{2}\log_2 N_0$ multiplicaciones y sumas complejas.

Aplicando la estrategia de tipo *Divide y Vencerás*, una FFT de N_0 puntos se implementa combinando dos FFTs de $N_0/2$ puntos. La estrategia se aplica repetidas veces hasta que sólo es necesario utilizar FFTs de dos puntos.

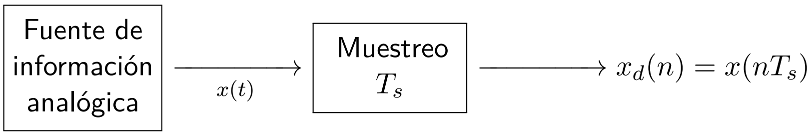
Para $N_0 = 2^v$ esta estrategia se repite $v = \log_2 N_0$ veces, lo que reduce el número de operaciones a $\frac{N_0}{2}\log_2 N_0$.

Es particularmente eficiente cuando la longitud de $x(n)$ es una potencia de 2. Si no lo es, se pueden añadir ceros (*zero padding*) hasta consguir que la longitud de $x(n)$ sea potencia de 2.

Tema 7: Muestreo de Señales en Tiempo Continuo

7.1. Muestreo regular o periódico

Muestreo: Operación que consiste en tomar muestras de una señal en tiempo continuo. El resultado del muestreo es una señal en tiempo discreto cuyos valores coinciden con los de la señal en tiempo continuo en los instantes de muestreo.



- Período de muestreo (T_s): Separación temporal entre dos muestras (segundos).
- Frecuencia de muestreo ($f_s = 1/T_s$): Número de muestras por segundo (Hertzs).
- Frecuencia de muestreo ($\omega_s = 2\pi/T_s$): Frecuencia de muestreo en radianes por segundo.

Para que una señal en tiempo continuo pueda reconstruirse perfectamente, hay que muestrearla a una frecuencia de muesreo adecuada.

- Señales que cambian lentamente en el tiempo = señales con ancho de banda pequeño = frecuencias de muestreo bajas.
- Señales que cambian rápidamente con el tiempo = señales con ancho de banda grande = frecuencias de muestreo altas.

Teorema de muestreo

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada con $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_x$. Esta señal se determina unívocamente por sus muestas $x(nT_s)$, para $n \in \mathbb{Z}$ si se cumple la condición:

$$\omega_s > 2\omega_x$$

donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ es la frecuencia de muestreo. La frecuencia de muestreo mínima es $\omega_s = 2\omega_x$, también conocida como la frecuencia de Nyquist.

7.2. Muestreo con tren de impulsos periódico

Una forma conveniente de representar el muestreo regular de una señal $x(t)$ es mediante su multiplicacion por la señal periódica tren de impulsos de período T_s, obteniendo así una nueva señal también continua de impulsos unidad, cuyas amplitudes coinciden con los valores de $x(t)$ en los instantes de muestreo.

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x(t)$ es de banda limitada y $X(\omega)$ su espectro en el dominio de la frecuencia. Tenemos que $X(\omega)=0$ para $\omega>\omega_x$, donde ω_x es el ancho de banda de $x(t)$.

Como la TF del tren de impulsos periódico es:

$$P(\omega)=\frac{2\pi}{T_s}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

La TF de $x_p(t)$ es (por la propiedad de multiplicación en tiempo):

$$X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s)$$

Esto significa que el espectro de $x_p(t)$ consiste en infinitas versiones desplazadas a la derecha y a la izquierda de $X(\omega)$ en múltiplos de la frecuencia de muestreo ω_s con el factor $\frac{1}{T_s}$.

Reconstrucción en frecuencia

La reconstrucción de $x(t)$ se puede llevar a cabo filtrando $X_p(\omega)$ con un filtro **paso bajo ideal** de amplitud T_s y frecuencia de corte ω_c tal que $\omega_x<\omega_c<\omega_s-\omega_x$. El resultado $X_r(\omega)$ es una réplica de $X_p(\omega)$ en $\omega=0$ eliminando todas las demás.

Para que $x(t)$ se reconstruya de forma efectiva, la frecuencia de muestreo ω_s tiene que ser lo suficientemente grande para que en $X_p(\omega)$ no exista solapamiento entre las réplicas de $X(\omega)$.

Teorema de muestreo en frecuencia

Para que en la señal muestreada $X_p(\omega)$ en el dominio de la frecuencia no se produzca el solapamiento de las réplicas de $X(\omega)$, el ancho de banda ω_x tiene que ser menor que $\omega_s-\omega_x$ (donde ω_s es la frecuencia de muestreo). Esto se traduce en:

$$\omega_x<\omega_s-\omega_x\Longrightarrow\omega_s>2\omega_x$$

La frecuencia mínima (frecuencia de Nyquist) es $\omega_s=2\omega_x$. Cuando la frecuencia es mayor que la frecuencia de Nyquist, se lleva a cabo un **sobremuestreo**, una representación de una señal con un número de muestras mayor al necesario.

Filtro de reconstrucción

La reconstrucción perfecta de $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ se hace con un filtro paso bajo ideal $h_r(t)$ de amplitud T_s y frecuencia de corte ω_c, es decir:

$$h_r(t) = T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} H_r(\omega) = \begin{cases} T_s & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Obteniendo así que $X_r(\omega) = X_p(\omega) H_r(\omega)$.

Reconstrucción en tiempo

En el dominio del tiempo, la señal reconstruida es:

$$\begin{aligned} x_r(t) = x_p(t) * h_r(t) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right) * h_r(t) \\ &= \sum x(nT_s)\big(\delta(t - nT_s) * h_r(t)\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h_r(t - nT_s) \end{aligned}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h_r(t - nT_s)$$

7.3. Conversión tiempo continuo a tiempo discreto

Si introducimos la señal en tiempo discreto $x_d(n) = x(nT_s)$, la señal muestreada $x_p(t)$ también se puede representar de la forma:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\delta(t - nT_s)$$

Se debe destacar que la señal $x_p(t)$ es una señal de tiempo continuo, mientas que $x_d(n)$ es una señal de tiempo discreto. Por extensión, $x(t)$ también se puede representar unívocamente por $x_d(n)$ siempre que se cumplan las condiciones del teorema de muestreo.

Estudio en el dominio de la frecuencia

Sea la TF de la señal $x_d(n)$: $X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) e^{-j\Omega n}$.

Aplicando la propiedad de linelidad de la TF:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) e^{j\omega n T_s}$$

Comparando las expresiones obtenidas en $X_d(e^{j\Omega})$ y $X_p(\omega)$, llegamos a las siguientes conclusiones:

$$X(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{T_s}\right), \qquad X_p(\omega) = X_d(e^{j\omega T_s})$$

- La primera igualdad significa que el espectro de $x_d(n)$ es igual al espectro de $x_p(t)$ haciendo el cambio de variable $\omega = \frac{\Omega}{T_s}$.
- La segunda igualdad significa que el espectro de $x_p(t)$ es igual al espectro de $x_d(n)$ haciendo el cambio de variable $\Omega = \omega T_s$.

Relación entre las variables frecuencia

Frecuencia en tiempo continuo:

$$\omega = 2\pi f$$

$$-\infty < f, \omega < \infty$$

Frecuencia en tiempo discreto:

$$\Omega = 2\pi F$$

$$-1/2 < F < 1/2 \iff -\pi < \Omega < \pi$$

Relación al muestrear a frecuencia $f_s = \dfrac{1}{T_s}$:

$$F = \frac{f}{f_s} \Longrightarrow \Omega = \omega T_s$$

$$f = F \cdot f_s \Longrightarrow \omega = \frac{\Omega}{T_s}$$

$$-\frac{f_s}{2} < f \leq \frac{f_s}{2} \iff -\frac{\pi}{T_s} < \omega \leq \frac{\pi}{T_s}$$

7.4. Cuantificación y codificación de señales en tiempo discreto

Las señales en tiempo continuo producidas por una fuente de información analógica pueden representarse digitalmente (por medio de bits) aplicando las operaciones de muestreo, cuantificación y codificación.

Cuantificación

La cuantificación es el proceso de mapear un conjunto grande de posibles amplitudes de una señal muestreada en un conjunto más pequeño. Consiste en redondear las amplitudes a un determinado nivel de precisión.

- El dispositivo o algoritmo que realiza la operación de cuantificación se denomina **cuantificador**.
- El error de redondeo que se prodce se denomina **error de cuantificación**.

El proceso de cuantificación es el siguiente:

1. Se divide el intervalo $[-x_{\text{máx}}, x_{\text{máx}}]$ en N subintervalos (niveles) de cuantificación.

2. En un cuantificador uniforme todos los niveles tienen el mismo tamaño Δ
$$N = \frac{2x_{\text{máx}}}{\Delta}$$

3. Cada nivel de cuantificación tiene asociado un representante, que normalmente son el punto medio del nivel de cuantificación.

4. Todos los valores en un nivel se redondean al valor de su representante.

Debemos tener en cuenta que:

- La operación de cuantificación no es invertible.
- El error de cuantificación es la diferencia entre el valor de la amplitud analógica y la amplitud cuantificada. Su valor máximo es $\Delta/2$ y se puede minimizar disminuyendo el valor de Δ.
- Al disminuir Δ aumenta la complejidad del cuantificador.

Pulse Codede Modulation (PCM)

- Se enumeran de 0 a $N-1$ todos los niveles de cuantificación y dicho número se expresa en binario.
- El número de bits b necesario para representar en binario cada uno de los niveles de cuantificación debe cumplir:
$$b \geq \log_2 N$$

La tasa de bit R_b que resulta al digitalizar una señal analógica es el número de bits que se utilizan para representar un segundo de señal (en bits por segundo).
$$R_b = b \cdot f_s$$

Apéndice A: Demostraciones Tema 3

Representación de una señal senoidal como suma de exponenciales complejas

Una señal senoidal se puede expresar como la suma de una exponencial compleja de frecuencia positiva y otra de frecuencia negativa.

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}Ae^{j(\omega t+\phi)} + \frac{1}{2}Ae^{-j(\omega t+\phi)} \\
&= \Big(\frac{1}{2}A\cos(\omega t+\phi) + j\frac{1}{2}A\sin(\omega t+\phi)\Big) + \Big(\frac{1}{2}A\cos(\omega t+\phi) - j\frac{1}{2}A\sin(\omega t+\phi)\Big) \\
&= \frac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j\omega t} \\
&= \frac{1}{2}Xe^{j\omega t} + \frac{1}{2}X^{*}e^{-j\omega t}
\end{aligned}$$

Energía de una señal senoidal en un período

La energía en un período T_0 se define como:

$$E_x^{T_0} = \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{T_0} A^2\cos^2(\omega t)dt$$

Pero gracias a la propiedad trigonométrica:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Podemos continuar los cálculos para definir $E_x^{T_0}$.

$$\begin{aligned}
E_x^{T_0} &= \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{T_0} A^2\cos^2(\omega t)dt \\
&= \int_0^{T_0} A^2\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt \\
&= \frac{A^2}{2}\int_0^{T_0} dt + \frac{A^2}{2}\int_0^{T_0}\cos(2\omega t)dt \\
&= \frac{A^2}{2}t\Big|_0^{T_0} + \frac{A^2}{2}\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\Big|_0^{T_0} \\
&= \frac{A^2}{2}T_0 + A^2\frac{\sin(2\omega T_0)}{4\omega}
\end{aligned}$$

Nos damos cuenta de que $\omega = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega T_0 = 2\pi \Rightarrow \sin(2\omega T_0) = \sin(4\pi) = 0$. Por tanto:

$$\boxed{E_x^{T_0} = \frac{A^2}{2}T_0}$$

Apéndice B: Demostraciones Tema 5

B.1. Demostraciones de la Transformada de Fourier

Propiedad de convolución de la Transformada de Fourier

Sea $x(t)$ la entrada a un sistema LTI en el dominio del tiempo, $h(t)$ la respuesta al impulso e $y(t) = x(t) * h(t)$ la salida del sistema. Si pasamos al dominio de la frecuencia estas señales:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
H(\omega) &= \mathrm{TF}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \\
Y(\omega) &= \mathrm{TF}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt
\end{aligned}$$

Podemos reescribir la señal $Y(\omega)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big[x(t) * h(t)\big] e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{no depende de } \tau} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega t}d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt \right] d\tau
\end{aligned}$$

A continuación, elaboramos la integral interior respecto a dt haciendo un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt &= \begin{cases} (t-\tau) = v \iff t = (v+\tau) \\ dt = dv \\ t = -\infty \iff v = -\infty \\ t = \infty \iff v = \infty \end{cases} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-j\omega(v+\tau)}dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-j\omega v}e^{-j\omega\tau}dv \\
&= e^{-j\omega\tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-j\omega v}dv}_{H(\omega)} \\
&= H(\omega)e^{-j\omega\tau}
\end{aligned}$$

Volvemos a sustituir en la ecuación de $Y(\omega)$ y obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= H(\omega)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{X(\omega)} = H(\omega)X(\omega) \end{aligned}$$

Queda demostrado por tanto que la operación de convolución en el dominio del tiempo se traduce en la operación producto en el dominio de la frecuencia.

Salida de un sistema LTI real cuando la entrada es una señal senoidal

Sea $x(t) = \cos(\omega t)$ la entrada a un sistema LTI real, denotado por $\mathrm{T}[\cdot]$. Se puede descomponer la entrada como:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}$$

Lo que permite reescribir la salida $y(t)$ de la forma:

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{T}[x(t)] &= \mathrm{T}\left[\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{T}\left[e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{T}\left[e^{-j\omega t}\right] \\ &= \frac{1}{2}H(\omega)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}H(-\omega)e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

Al ser un sistema real, $H(-\omega) = H^*(\omega)$ y la salida es:

$$y(t) = \frac{1}{2}H(\omega)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}H^*(\omega)e^{-j\omega t}$$

Y si expresamos $H(\omega)$ de forma polar y elaboramos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}|H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}|H(\omega)|e^{-j\angle H(\omega)}e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{2}e^{j(\omega t+\angle H(\omega))} + \frac{1}{2}|H(\omega)|e^{-j(\omega t+\angle H(\omega))} \\ &= \frac{1}{2}|H(\omega)|\left(e^{j(\omega t+\angle H(\omega))} + e^{-j(\omega t+\angle H(\omega))}\right) \\ &= |H(\omega)|\cos(\omega t + \angle H(\omega)) \end{aligned}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que, siendo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales complejas de energía finita se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau)x_2(\tau)d\tau\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(\tau)|^2 d\tau$$

Si aplicamos que $x_1(\tau) = x(\tau)$ y $x_2(\tau) = x(t+\tau)$:

$$\Bigg|\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau}_{r_x(t)}\Bigg|^2 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau}_{E_x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t+\tau)|^2 d\tau}_{E_x}$$

$$|r_x(t)|^2 \leq E_x^2 \Longrightarrow |r_x(t) \leq E_x$$

B.2. Ejemplos de Transformadas de Fourier

Exponencial real unilateral decreciente ($a > 0$)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- Módulo de $X(\omega)$: $|X(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$
- Fase de $X(\omega)$: $\angle X(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
- $X(\omega)$ es una señal de tipo **banda base** o una respuesta en frecuencia de tipo **paso bajo**.
- El máximo de $|X(\omega)|$ es en $\omega = 0$:
$$|X(0)| = \frac{1}{a}$$
- Espectro normalizado: $X_N(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{X(0)} = \dfrac{a}{a + j\omega}$
- Espectro noramlizado en decibelios: $|X_N(\omega)|\text{dB} = 10\log_{10}\left(\dfrac{a^2}{a^2 + \omega^2}\right)$
- Ancho de banda: a.

Pulso rectangular de duraciñon T y amplitud A

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 2A\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$$

- $X(\omega)$ (pulso sinc) es una señal de tipo **banda base** o una respuesta en frecuencia de tipo **paso bajo**.
- El valor máximo de $X(\omega)$ se da en $\omega = 0$:
$$X(0) = \lim_{\omega \to 0} 2A\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} = AT$$
- Espectro noramlizado:
$$X_N(\omega) = \frac{X(\omega)}{X(0)} = \frac{2}{T}\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$$
- Ancho de banda: $W = \frac{2\pi}{T}$ rad/seg (frecuencia del primer nulo).

Pulso sinc

$$x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \begin{cases} 1 & -W < \omega < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- $X(\omega)$ es la respuesta en frecuencia de un filtro **paso bajo ideal** y $x(t)$ es su respuesta al impulso.
- Ancho de banda: W.
- Primer nulo de $x(t)$ en $t = \frac{\pi}{W}$.

Pulso triangular

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}(T+t) & Tt0 \\ \frac{1}{T}(T-t) & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \frac{4}{T}\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}\right)^2$$

Pulso gaussiano

$$x(t) = \exp(-at^2) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{\omega^2}{4a}\right)$$

Impulso unidad

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 1$$

Ancho de banda infinito.

Señal constante

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Pulso rectangular de origen en 0

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T_x \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} X(\omega) = 2\frac{\sin\left(\frac{\omega T_x}{2}\right)}{\omega} e^{-j\omega\frac{T_x}{2}}$$

Pulso rampa

Sea $x(t)$ un **pulso rampa** en el dominio del tiempo de la forma:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2A_x}{T_x}t & -\frac{T_x}{2} < t < \frac{T_x}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Su TF viene dada por:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2A_x}{j\omega T_x}\frac{2\sin\left(\frac{\omega T_x}{2}\right)}{\omega} - \frac{A_x e^{-j\omega\frac{T_x}{2}}}{j\omega} - \frac{A_x e^{j\omega\frac{T_x}{2}}}{j\omega} \\ &= \frac{2A_x}{j\omega}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\omega T_x}{2}\right)}{T_x\omega} - \cos\left(\frac{\omega T_x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Pulso triangular

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2A_x}{T_x}\left(t+\frac{T_x}{2}\right) & -\frac{T_x}{2} < t < 0 \\ \frac{2A_x}{T_x}\left(\frac{T_x}{2}-t\right) & 0 < t < \frac{T_x}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \quad X(\omega) = \frac{2A_x}{T_x}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\omega T_x}{4}\right)}{\omega}\right)^2$$

Pulso bipolar

$$x(t)] = \begin{cases} A_x & -\frac{T_x}{2} < t < 0 \\ -A_x & 0 < t < \frac{T_x}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\text{TF}[\cdot]} \quad X(\omega) = 4jA_x\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_x}{4}\right)}{\omega}$$

Apéndice C: Demostraciones Tema 6

C.1. Inverse Discrete Fourier Transform

Tomemos como punto de partida la siguiente propiedad de las exponenciales complejas discretas $e^{jk\omega_0 n}$ que dice:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{jk\omega_0 n} = N_0\delta(k) = \begin{cases} N_0 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ y $k = 0, ..., N_0 - 1$. En efecto:

$$\text{Cuando } k=0 \quad \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} 1 = N_0$$

$$\text{Cuando } k\neq 0 \quad \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{jk\omega_0 n} = \frac{e^{jk\omega_0 N_0}-1}{e^{jk\omega_0}-1} = \frac{1-1}{e^{jk\omega_0}-1} = 0$$

Si escribimos $X(k) = \sum_{r=0}^{N_0-1} x(r)e^{-jk\omega_0 r}$ y planteamos la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N_0-1} X(k)e^{jk\omega_0 n} &= \sum_{k=0}^{N_0-1}\sum_{r=0}^{N_0-1} x(r)e^{-jk\omega_0 r}e^{jk\omega_0 n} \\
&= \sum_{k=0}^{N_0-1}\sum_{r=0}^{N_0-1} x(r)e^{jk\omega_0 (n-r)} \\
&= \sum_{r=0}^{N_0-1} x(r) \underbrace{\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{jk\omega_0 (n-r)}}_{=N_0\delta(n-r)} \\
&= N_0 \sum_{r=0}^{N_0-1} x(r)\delta(n-r) = N_0 x(n)
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que podemos obtener $x(n)$ a partir de $X(k)$ mediante la siguiente transformación que se conoce con el nombre de **Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)**:

$$x(n) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} X(k)e^{jk\omega_0 n}$$

C.2. Práctica DFT

Sea $x(n)$ una señal en tiempo discreto de duración finita N_x desde el instante inicial $n = 0$ hasta el instante final $n = N_x - 1$. Su Transformada de Fourier viene dada por:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N_x-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Cuando aumenta el valor de N_x se produce una expansión en tiempo discreto de $x(n)$ y, por consiguiente, una reducción del ancho de banda de $X(e^{j\omega})$ (expandir en tiempo equivale a comprimir en frecuencia).
- Cuando disminuye el valor de N_x, $x(n)$ se comprime en tiempo y, por consiguiente, aumenta el ancho de banda de $X(e^{j\omega})$ (comprimir en tiempo equivale a expandir en frecuencia).

Cálculo de la DFT con MATLAB

Recordemos que la DFT de $x(n)$, denotada como $X(k)$, son las muestras de $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega = k\omega_0$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$.

- El dibujo de $X(e^{j\omega})$ no cambia con N_0, sino con N_x (la duración de $x(n)$).
- El dibujo de $x(n)$ sí cambia con N_0, pues se le añaden $N_0 - N_x$ ceros.
- En el dominio de la frecuencia, al aumentar N_0 disminuye ω_0 y por ello las muestras obtenidas de $X(k)$ son más próximas entre sí, y por tanto se aprecian más muestras en el dibujo (sobremuestreo).

Cuando $N_x = N_0$, la DFT colapsa en un impulso unidad en $k = 0$. Esto se debe a que la extensión periódica de $x(n)$ colapsa en la señal de duración infinita $x(n) = 1$ cuya TF es un impulso unidad en la frecuencia $\omega = 0$.

DFT de una señal senoidal

Definamos la siguiente señal senoidal para calcular su DFT:

$$x(n) = \cos(2\pi F_x n), \quad 0 \leq n < N_x$$

- Si $N_0 = N_x$ y $F_x = \frac{k}{N_0}$, donde $k \in \mathbb{N}$, entonces $X(k)$ colapsa en dos impulsos unidad. Esto se debe a que en esas condiciones, $x(n)$ es un número entero de ciclos de una señal senoidal de frecuencia F_x. Su extensión periódica con período N_0 produce una señal senoidal de frecuencia F_x y duración infinita cuya TF son dos impulsos unidad.