

# Modelação e Avaliação de Risco com Métodos de Monte Carlo e MCMC

Ana Catarina Ferreira

up202203869@edu.fc.up.pt

Departamento de Matemática

Ana Sofia Mesquita

up202207295@edu.fc.up.pt

Departamento de Matemática

Inês Fontes

up202207403@edu.fc.up.pt

Departamento de Matemática

Inês Ribeiro

up202207958@edu.fc.up.pt

Departamento de Matemática

**Abstract**—Este trabalho tem como objetivo analisar o risco associado a uma carteira composta por ações e uma opção europeia de venda (*put*). O estudo é desenvolvido em duas etapas: a primeira inclui simulações de Monte Carlo para estimar o valor da carteira e as respetivas medidas de risco (*Value-at-Risk* e *Expected Shortfall*). Na segunda etapa, aplicam-se métodos de Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC) para inferir os parâmetros de retorno e volatilidade do ativo, avaliando o impacto da incerteza paramétrica nas estimativas de risco. A análise é implementada em linguagem R, com base no modelo de Movimento Browniano Geométrico (GBM).

## I. INTRODUÇÃO

A volatilidade dos mercados financeiros motiva a necessidade de ferramentas que permitam avaliar e gerir o risco de carteiras de investimento. Neste contexto, este trabalho considera um investidor que possui 100 ações de uma empresa e adquire uma opção europeia de venda (*put*) como instrumento de proteção (*hedging*) contra quedas no preço do ativo.

O principal objetivo consiste em avaliar o risco desta carteira através de simulações de Monte Carlo e, posteriormente, aplicar métodos MCMC para quantificar a incerteza associada aos parâmetros de retorno e volatilidade do ativo.

### Objetivos específicos:

- Simular a evolução do preço de uma ação com base no modelo de Movimento Browniano Geométrico (GBM);
- Calcular o preço da opção de venda e as medidas de risco da carteira (*Value-at-Risk* e *Expected Shortfall*);
- Estimar os parâmetros de retorno ( $\mu$ ) e volatilidade ( $\sigma$ ) utilizando o algoritmo de Metropolis–Hastings;
- Reavaliar as medidas de risco considerando a incerteza paramétrica.

## II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### A. Movimento Browniano Geométrico (GBM)

Suponhamos que queremos modelar a evolução dos preços de um ativo (uma ação), ao longo do tempo. Se  $X(t)$  representar o preço, no instante  $t$ , o modelo mais frequentemente usado nas finanças é:

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dB, \quad \sigma > 0 \quad (1)$$

Este processo estocástico é designado por Movimento Browniano Geométrico e pode ser simulado no intervalo  $[0, T]$ , dividindo-se o tempo num grande número ( $n$ ) de subintervalos,

cada um com comprimento  $h$ , de modo que  $T = nh$  do seguinte modo:

$$X(jh) = X([j-1]h) \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + \sigma \sqrt{h} Z_j \right] \quad (2)$$

onde  $j = 1, \dots, n$  e  $Z_1, \dots, Z_n \text{ iid } N(0, 1)$ .

Para obter o preço do ativo ao tempo  $T$ :

$$X_T = X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0, 1) \quad (3)$$

onde  $X_0$  é o preço inicial,  $\mu$  é a taxa de crescimento esperado e  $\sigma$  a volatilidade.

### B. Opção Europeia de Venda (Put Option)

Uma opção europeia de venda confere ao detentor o direito de vender o ativo subjacente a um preço fixo  $K$  na data de vencimento  $T$ . O *payoff* no vencimento é dado por:

$$P = \max(K - X_T, 0) \quad (4)$$

e o seu valor esperado é calculado por Monte Carlo como:

$$V_{\text{put}} = e^{-rT} E[\max(K - X_T, 0)] \quad (5)$$

onde  $r$  é a taxa de crescimento sem risco.

### C. Modelo de Black-Scholes

A equação diferencial de Black-Scholes está definida como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial X} X \right) \quad (6)$$

sendo  $V(X(t), t)$  o preço no instante  $t$  de um derivativo sobre um ativo subjacente com preço  $X(t)$ .

### D. Medidas de Risco

As medidas de risco utilizadas são o *Value-at-Risk* (VaR) e o *Expected Shortfall* (ES), amplamente empregues na gestão financeira. O VaR a 95% indica o valor do retorno abaixo do qual se encontram os 5% piores resultados, enquanto o ES a 95% corresponde a perda média nesses casos extremos, permitindo avaliar a gravidade das perdas mais significativas. Estas medidas podem ser expressas como:

$$VaR_{0.95} = \text{quantil}_{0.05}(R) \quad (7)$$

$$ES_{0.95} = E[R | R < VaR_{0.95}] \quad (8)$$

onde  $R = \ln(S_T/S_0)$  representa o retorno logarítmico do ativo.

### E. Métodos de MCMC

O método de Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC) permite, no contexto bayesiano, estimar distribuições posteriores de parâmetros de forma aproximada. Neste trabalho, foi utilizado o algoritmo de Metropolis–Hastings, definido genericamente por:

- 1) Gerar uma proposta  $(\mu', \sigma')$  segundo uma distribuição  $q(\cdot|\mu, \sigma)$  simétrica;
- 2) Calcular a razão de aceitação:

$$\alpha = \min \left( 1, \frac{p(R|\mu', \sigma')p(\mu', \sigma')}{p(R|\mu, \sigma)p(\mu, \sigma)} \right);$$

onde  $p(R|\mu, \sigma)$  representa a verosimilhança e  $p(\mu, \sigma)$  a distribuição a priori dos parâmetros. E de acordo com o Teorema de Bayes, como o objetivo consiste em amostrar as distribuições a posteriori -  $p(\mu, \sigma|R)$  - sabemos que:

$$p(\mu, \sigma|R) \propto p(R|\mu, \sigma)p(\mu, \sigma)$$

- 3) Aceitar a proposta com probabilidade  $\alpha$ ; caso contrário, manter o estado atual.

## III. METODOLOGIA

### A. Etapa 0: Ilustração do Movimento Browniano Geométrico

Vejamos a representação gráfica do MBG com os seguintes parâmetros: preço inicial ( $X_0$ ) 100, taxa de crescimento esperado ( $\mu$ ) 10%, volatilidade ( $\sigma$ ) 15% e data de vencimento ( $T$ ) 10 anos.

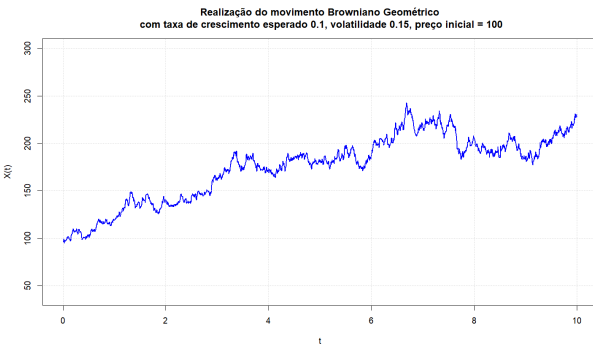


Fig. 1. Variação possível do preço do ativo em estudo.

A Figura 1 representa uma trajetória simulada do preço do ativo segundo o modelo de Movimento Browniano Geométrico (GBM). Observa-se uma tendência média de crescimento ( $\mu = 0.10$ ) combinada com flutuações aleatórias significativas ( $\sigma = 0.15$ ), refletindo a incerteza inerente aos mercados financeiros. Este comportamento justifica o uso de métodos de simulação, como o de Monte Carlo, para avaliar o risco e o valor de ativos financeiros nas etapas seguintes.

### B. Etapa 1: Simulação de Monte Carlo

A simulação foi realizada com  $N = 10\,000$  iterações, com parâmetros iniciais:  $X_0 = 100$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\sigma = 0.15$ ,  $T = 10$  anos,  $r = 0.05$  e  $K = 97$ .

O preço futuro é obtido através da equação do GBM e o preço da opção de venda (*put*) por:

$$\hat{V}_{\text{put}} = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(K - X_T^{(i)}, 0) \quad (9)$$

Com base nesta simulação, obteve-se um valor médio de  $\hat{V}_{\text{put}} \approx 2.38$  (erro padrão  $\approx 0.041$ ).

Em comparação com o valor exato, calculado pelo modelo de Black-Scholes ( $V_{\text{BS}} = 2.363$ ), é de notar a pequena diferença entre os dois métodos que resulta da aleatoriedade do Método de Monte Carlo. É ainda importante realçar a utilização de variáveis antitéticas, que permitiu reduzir a variância do estimador de Monte Carlo, mantendo o valor esperado consistente com o modelo de Black-Scholes.

Analisando o risco da carteira, os resultados obtidos em  $R$  indicam um VaR (*Value-at-Risk*) a 95% de -0.389 e uma ES (*Expected Shortfall*) a 95% de -0.586. Isso significa que, com 95% de confiança, a perda máxima esperada da carteira não deve exceder 38.9% do valor investido, enquanto a perda média nos 5% piores cenários é de aproximadamente 58.6%. Estes indicadores evidenciam a presença de risco significativo em situações extremas e ajudam a avaliar a eficácia da proteção oferecida pelos instrumentos financeiros da carteira.

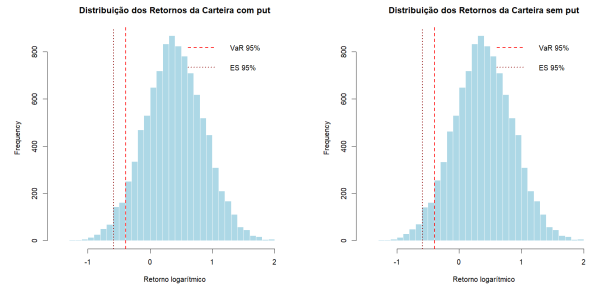


Fig. 2. Histogramas dos logaritmos dos retornos da carteira com 100 ações e com uma opção *put* (painel da esquerda) e sem opção (painel da direita). Em ambos, a linha mais clara representa o VaR e a mais escura representa a ES.

O estudo dos histogramas dos retornos logarítmicos da carteira com e sem a opção de *put*, revela distribuições quase idênticas, exibindo também VaR e ES muito semelhantes. Era de esperar que surgissem algumas diferenças, ainda que não muito grandes, devido à presença *put*, uma vez que este funcionaria como seguro, limitando as perdas no caso da ação cair muito abaixo do valor do *strike* ( $K$ ).

Na prática, a sua inclusão não carrega benefícios significativos na redução do risco, ou seja, gastar recursos na aquisição desta opção não é justificável, uma vez que a proteção oferecida é mínima e o perfil de risco da carteira permanece praticamente inalterado.

### C. Etapa 2: Inferência via MCMC

Com base nos retornos simulados  $R = \log(S_T/S_0)$ , são estimadas as distribuições posteriores de  $\mu$  e  $\sigma$  através do algoritmo de Metropolis-Hastings. Após a análise de convergência dos dados simulados, concluiu-se a necessidade do uso de 25% de *burn-in* para garantir uma melhor aproximação aos valores reais.

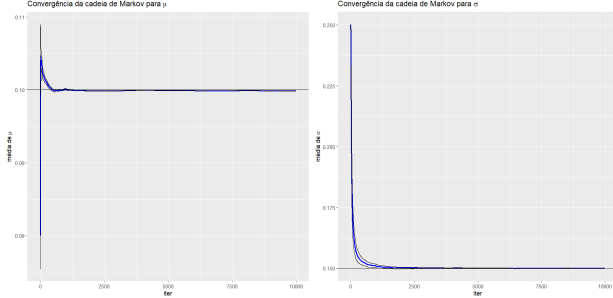


Fig. 3. Convergência da cadeia de Markov para  $\mu$  (esquerda) e para  $\sigma$  (direita).

Apresentamos de seguida os trace plots e histogramas da densidade. É de notar que os valores das densidades não variam entre 0 e 1 uma vez que estamos a trabalhar num intervalo muito pequeno de valores. No entanto, facilmente se verifica que a densidade é 1 tal como é esperado.

```
sum(h$density * diff(h$breaks))
```

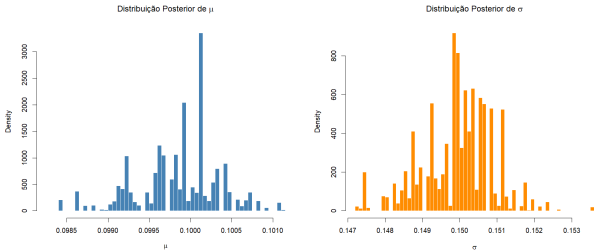


Fig. 4. Histograma das densidades a posteriori de  $\mu$  (esquerda) e  $\sigma$  (direita).

Verifica-se, pela observação dos histogramas, que a maior densidade de probabilidade está em torno do valor exato.

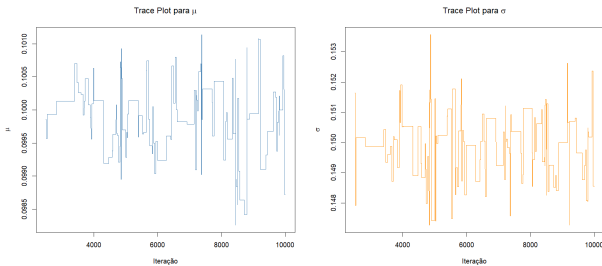


Fig. 5. Trace plot da cadeia de Markov para  $\mu$  (esquerda) e para  $\sigma$  (direita) com burn-in.

Os trace plots mostram ainda uma oscilação para os valores de ambas as cadeias mas são bastantes os momentos em

que observamos uma estabilização. Tomando, esta, valores bastante similares ao valor exato.

### D. Etapa 3: Reavaliação do Risco com Incerteza Paramétrica

Repetiu-se a simulação do preço  $S_T$  com os valores amostrados de  $(\mu, \sigma)$  e recalcularam-se o valor esperado da *put*, o *VaR* e o *ES*.

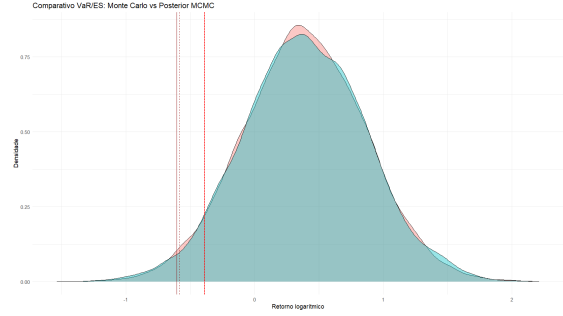


Fig. 6. Densidade dos retornos logarítmicos simulados com os parâmetros obtidos no *MCMC* (azul) em comparação com a densidade dos retornos obtidos através da simulação de Monte Carlo clássica (vermelho). As linhas vermelhas escuras representam o valor do *ES* e as linhas claras o valor do *VaR* tanto para a simulação de Monte Carlo (tracejadas) como para o *MCMC* (contínua).

Os retornos simulados a partir das distribuições posteriores do *MCMC* mostram maior dispersão (representada pela maior densidade nas caudas), refletindo a incerteza nos parâmetros e capturando cenários extremos, enquanto os retornos com valores reais dos parâmetros são mais centrados e fixos (densidade central mais elevada). Assim, o *MCMC* fornece uma visão mais completa do risco, permitindo avaliar não apenas o cenário médio, mas também possíveis perdas extremas (*VaR* e *ES*). Note-se que ambas as medidas de risco obtidas com os parâmetros simulados em *MCMC* são mais extremas em comparação com as clássicas.

	Monte Carlo	MCMC
<b>VaR</b>	38.9%	39.2%
<b>ES</b>	58.6%	60.5%

Table 1. Comparação entre as perdas aproximadas pelos métodos de Monte Carlo e *MCMC*

A análise comparativa entre as estimativas de Value at Risk (*VaR*) e Expected Shortfall (*ES*) obtidas pelos métodos de simulação de Monte Carlo e pelo procedimento Bayesiano via *MCMC* evidencia pequenas, mas relevantes, discrepâncias na avaliação do risco da carteira. Observa-se que o *VaR* a 95% aumentou de 38,9% para 39,2%, enquanto o *ES* a 95% passou de 58,6% para 60,5% quando se incorporou a incerteza dos parâmetros através da abordagem *MCMC*.

Estes resultados sugerem que o método Bayesiano tende a produzir estimativas mais conservadoras do risco, ao considerar a variabilidade inerente dos parâmetros de retorno e volatilidade na distribuição posterior. Assim, o modelo *MCMC* reflete de forma mais abrangente a incerteza presente nas

previsões, conduzindo a valores de perda esperada ligeiramente superiores. Em termos práticos, tal diferença indica que a abordagem Bayesiana pode fornecer uma avaliação de risco mais robusta, sobretudo em contextos onde a precisão na quantificação da incerteza é crucial para a gestão de risco financeiro.

#### IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações de Monte Carlo permitiram estimar o valor da opção de venda europeia e avaliar o seu impacto no risco total da carteira. A presença de opção de venda limita o impacto das perdas extremas, refletindo-se em menores valores absolutos de  $VaR$  e  $ES$ , o que indica uma redução efetiva do risco. A comparação com o modelo analítico de Black–Scholes revelou resultados consistentes, validando a implementação numérica.

Importa realçar que o modelo de Black–Scholes assenta nos seguintes pressupostos: volatilidade constante, ausência de custos de transação, mercados livres de arbitragem e preços que seguem um movimento browniano geométrico. Embora, na prática estas condições raramente se verificam o que pode conduzir à subestimação do risco em cenários de elevada volatilidade.

A aplicação do método Bayesiano de Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC) permitiu considerar a incerteza associada aos parâmetros de retorno ( $\mu$ ) e volatilidade ( $\sigma$ ). As cadeias apresentaram boa convergência, e as distribuições posteriores mostraram-se centradas nos valores esperados iniciais, evidenciando estabilidade e coerência na inferência. A ligeira dispersão observada nas distribuições a posteriori resultou num pequeno aumento das medidas de risco, refletindo uma análise mais ponderada e realista da exposição da carteira.

#### V. CONCLUSÕES

A integração dos dois métodos permitiu obter uma avaliação mais completa e consistente do risco. A simulação de Monte Carlo provou ser adequada para estimativas sob condições de mercado ideais, enquanto o MCMC acrescentou valor ao incorporar a incerteza dos parâmetros e representar de forma mais fiel a dinâmica real dos mercados. A utilização da opção de venda normalmente revela-se uma medida eficaz de proteção contra perdas extremas, contribuindo para uma carteira mais estável e resistente a flutuações adversas, apesar de no nosso estudo não ser notória esta sua competência.

A combinação de ambas as metodologias resulta numa análise mais robusta e abrangente: a simulação clássica fornece estimativas fiáveis sob pressupostos ideais, e o MCMC acrescenta uma dimensão probabilística que melhora a representatividade das condições reais de mercado.

Em síntese, o trabalho destaca a importância dos métodos de simulação na estimação de preços de opções e na avaliação das medidas de risco, mostrando que a integração entre Monte Carlo e MCMC oferece uma abordagem sólida e versátil para a análise quantitativa em finanças.

#### REFERENCES

- [1] J. S. Dagpunar, *Simulation and Monte Carlo with Applications in Finance and MCMC*. Wiley, 2007.
- [2] C. P. Robert, G. Casella, *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Springer, 2010.
- [3] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004.
- [4] OpenAI, *ChatGPT (GPT-5)*, OpenAI, San Francisco, CA, 2025. [Online].