Ampliación de Cálculo

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

1. Curvas parametrizadas.
2. Integral de línea.
3. Función gradiente y campo conservativo
4. Teorema de Green.
5. Superficies parametrizadas.
6. Rotacional e diverxencia
7. Integral de superficie. Teorema de Stokes. Teorema da Diverxencia

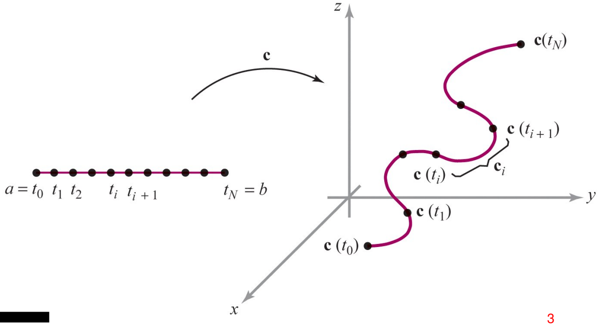
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Curvas parametrizadas

Generaliza el caso de una curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$.

Parametrización de una curva:

$$
\begin{aligned}
c : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\
t &\to (x(t), y(t), z(t))
\end{aligned}
$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Curvas parametrizadas (Ejemplos)

1. Gráficas de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Podemos parametrizarlas tomando $t = x$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} :& [a,b] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \boldsymbol{c}(t) = (t, f(t)). \end{aligned}$$

2. Elipse de semiejes a, b. Basta tomar la parametrización:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} :& [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \boldsymbol{c}(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t). \end{aligned}$$

   En el caso $a = b = r$ obtenemos la circunferencia de radio r.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Diferenciación de trayectorias

Dada una trayectoria

$$\boldsymbol{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{c}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

- La diferencial se calcula

$$\boldsymbol{c}'(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\right)$$

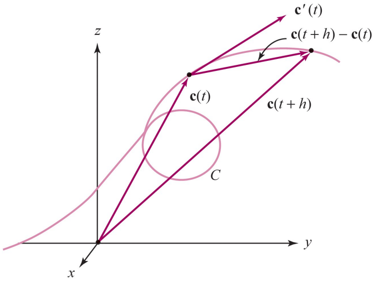
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Velocidad y tangente a una trayectoria

- Si interpretamos la trayectoria como la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces su vector velocidad es:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{c}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{c}(t+h) - \boldsymbol{c}(t)}{h},$$

y su rapidez es $s(t) = \|\boldsymbol{c}'(t)\|$ (s de *"speed"*).



- Si $\boldsymbol{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, es el vector tangente a la trayectoria en el punto $\boldsymbol{c}(t)$.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Longitud de arco

Sea $\boldsymbol{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ un camino $\mathcal{C}^1$ a trozos. Su longitud se calcula como:

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\boldsymbol{c}'(t)\|\, dt.$$

donde:

$$\|\boldsymbol{c}'(t)\| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \ldots + [x_n'(t)]^2}$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

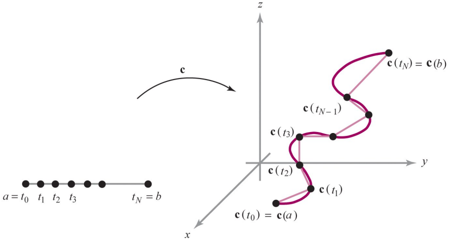
Longitud de arco (Justificación)

Basada en poligonales.

Tomamos una partición de $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b, \; t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{N},$$

Consideramos la poligonal definida por los sucesivos pares de puntos $\boldsymbol{c}(t_i), \; \boldsymbol{c}(t_{i+1})$



La fórmula de cada segmento rectilíneo es:

$$\|\boldsymbol{c}(t_{i+1}) - \boldsymbol{c}(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio por componentes:

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{[x'(t_i^1)]^2 + [y'(t_i^2)]^2 + [z'(t_i^3)]^2}\, dt, \quad \lim_{N \to \infty} S_N = \int_a^b \|\boldsymbol{c}'(t)\|\, dt$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Longitud de arco (Ejemplo)

1. Calcular la longitud de la curva definida por la gráfica de una función de clase C^1, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$.

   Podemos tomar una parametrización de dicha curva sin más que hacer $t = x$:

   $$c(x) = (x, f(x)),$$

   En tal caso el vector normal es:

   $$c'(x) = (1, f'(x)).$$

   Por tanto:

   $$L = \int_a^b \|c'(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

   que es la fórmula que vimos en el Tema de Integración de una variable.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de trayectoria para función escalar

La integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria $\boldsymbol{c}$ está definida cuando $\boldsymbol{c} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y la función compuesta $f(\boldsymbol{c}(t))$

$$t \to f(x(t), y(t), z(t))$$

es continua en I. Definimos esta integral mediante la ecuación:

$$\int_{\boldsymbol{c}} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\boldsymbol{c}'(t)\| dt.$$

A veces se denota por

$$\int_{\boldsymbol{c}} f(x, y, z) ds,$$

y también

$$\int_a^b f(\boldsymbol{c}(t)) \|\boldsymbol{c}'(t)\| dt,$$

Si $\boldsymbol{c}$ es C^1 a trozos o f es continua a trozos la definimos descomponiendo $[a, b]$ en segmentos en los que $f(\boldsymbol{c}(t))\|c'(t)\|$ sea continua y sumamos las integrales en dichos segmentos.

NOTA. Interpretación física: Si tenemos un alambre de densidad variable y $f(x, y, z)$ representa la densidad de dicho alambre, la integral anterior es la masa total del alambre.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de trayectoria para función escalar. Justificación

Lo justificamos nuevamente mediante sumas de Riemann. Tomamos la partición

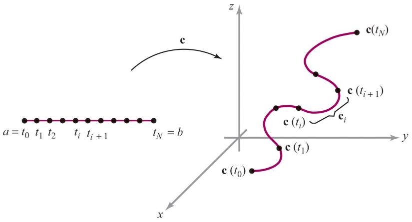
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

donde $\Delta s_i = \boldsymbol{c}(t)$, para algún $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Por el Teorema del valor medio

$$\Delta s_i = \|\boldsymbol{c}'(t_i^*)\|\Delta t_i$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\|\boldsymbol{c}'(t_i^*)\|\Delta t_i = \int_I f(x(t), y(t), z(t))\|\boldsymbol{c}'(t)\| = \int_c f(x, y, z)ds$$



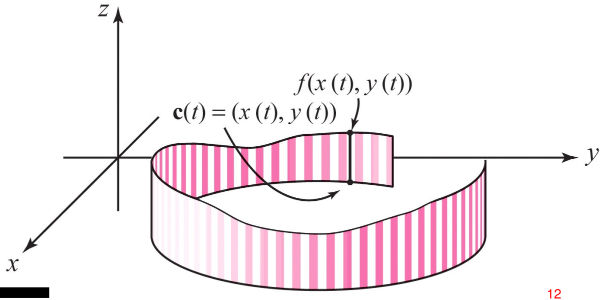
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de trayectoria para curvas planas

Un caso importante de integral a lo largo de una trayectoria se presenta cuando la trayectoria $\boldsymbol{c}$ describe una curva plana. Si todos los puntos $\boldsymbol{c}(t)$ están en el plano XY y $f(x,y)$ es una función de dos variables con valores reales:

$$\int_{\boldsymbol{c}} f(x,y)dt = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2},$$

Si $f(x,y) \geq 0$, se interpreta geométricamente como el área de una "valla" cuya base es la curva $\boldsymbol{c}$ y de altura $f(x,y)$.



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de línea. Trabajo ejercido por un campo de fuerza

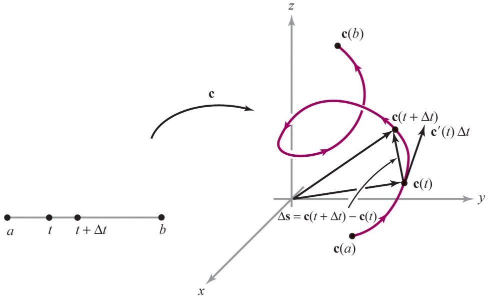
Si tenemos un campo de fuerza $\boldsymbol{F}$. Supongamos una partícula que se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria $\boldsymbol{c}$ mientras que una fuerza $\boldsymbol{F}$ actúa sobre ella.

Si $\boldsymbol{F}$ es constante y $\boldsymbol{c}$ es un desplazamiento rectilíneo dado por el vector $\boldsymbol{d}$, entonces

$$\text{trabajo} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{c}.$$

Si la trayectoria es curva la podemos aproximar por desplazamientos rectilíneos infinitesimales, obteniendo:

$$\text{trabajo realizado por } \boldsymbol{F} = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)dt.$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de línea para función vectorial

Dada $C = \boldsymbol{c}(t)$ una curva regular en $\mathbb{R}^3$ con $t \in [a, b]$. La integral

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt,$$

se llama a integral de línea del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ a lo largo de C.

Observación:

También se puede calcular como una integral de trayectoria para la componente tangencial de $\boldsymbol{F}$, para trayectorias tales que $\boldsymbol{c}'(t) \neq 0$ (multiplicando y dividiendo por la rapidez de la curva):

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \frac{\boldsymbol{c}'(t)}{\|\boldsymbol{c}'(t)\|}\right] \|\boldsymbol{c}'(t)\| dt.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de línea. Reparametrizaciones

Sea $h : I \to I_1$ una biyección C^1 entre los intervalos $I = [a, b]$ y $I_1 = [a_1, b_1]$. Sea $\boldsymbol{c} : I_1 \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria C^1 a trozos. Diremos entonces que la composición

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} \circ h : I \to \mathbb{R}^3$$

es una reparametrización de $\boldsymbol{c}$.

Esto significa que $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{c}(h(t))$, de modo que h cambia la variable.

Interpretación física: h cambia la rapidez con la que el punto se mueve a lo largo de la trayectoria:

$$\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{c}'(h(t))\, h'(t),$$

el vector velocidad de $\boldsymbol{p}$ es igual al de $\boldsymbol{c}$, pero multiplicado por el factor escalar $h'(t)$.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de línea. Reparametrizaciones

Si $\boldsymbol{c} \circ h$ es una reparametrización de $\boldsymbol{c}$ distinguimos dos casos de reparametrizaciones:

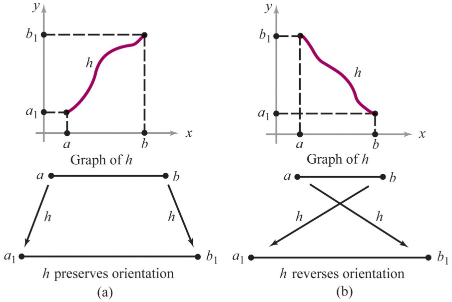
i) Reparametrización que conserva la orientación:

$$(\boldsymbol{c} \circ h)(a) = \boldsymbol{c}(a_1), \quad (\boldsymbol{c} \circ h)(b) = \boldsymbol{c}(b_1).$$

i) Reparametrización que invierte la orientación

$$(\boldsymbol{c} \circ h)(a) = \boldsymbol{c}(b_1), \quad (\boldsymbol{c} \circ h)(b) = \boldsymbol{c}(a_1).$$

Gráficamente:



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema. Cambio de parametrización para integrales de línea

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo sobre la trayectoria C^1, $\boldsymbol{c} : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$, y sea $\boldsymbol{p} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $\boldsymbol{c}$. Si $\boldsymbol{p}$ conserva la orientación, entonces

$$\int_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

y si $\boldsymbol{p}$ invierte la orientación:

$$\int_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

En cálculo infinitesimal de una variable se introduce el Teorema Fundamental del Cálculo. Si g, G funciones continuas definidas en $[a,b]$ tal que G es derivable en (a,b) y $G' = g$, entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a).$$

Integral de línea de campos gradiente

Supongamos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y que $\boldsymbol{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces:

$$\int_{\boldsymbol{c}} \nabla f \cdot d\boldsymbol{s} = f(\boldsymbol{c}(b)) - f(\boldsymbol{c}(a)).$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Consecuencia

Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial que proviene de un gradiente, entonces la integral $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ es independiente del camino. Su valor sólo depende de los puntos extremos.

Y en el caso de que la curva sea cerrada (es decir, $\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{c}(b) = 0$), la integral es nula.

Ejemplos:

La fuerza eléctrica de Coulomb:

$$\boldsymbol{F} = \varepsilon \frac{Qe}{r^3}\boldsymbol{r},$$

y la fuerza gravitatoria

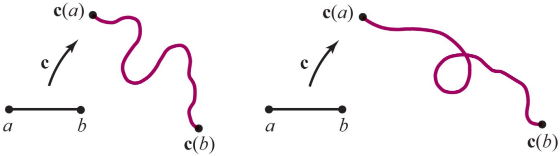
$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

provienen de gradientes, y en consecuencia el trabajo realizado entre dos puntos es independiente del camino: son fuerzas conservativas.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Definición. Curva Simple

Definimos una curva simple como la imagen de una aplicación C^1 a trozos $\boldsymbol{c} : I \to \mathbb{R}^3$, que es inyectiva en el intervalo I; $\boldsymbol{c}$ recibe el nombre de parametrización de $\boldsymbol{C}$. Así una curva simple es una curva que no se corta a sí misma.
Si $I = [a, b]$ llamamos a $\boldsymbol{c}(a)$ $\boldsymbol{c}(b)$ los extremos de la curva.



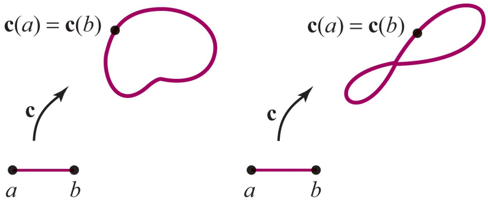
Simple curve Not a simple curve

Cada curva simple tiene dos orientaciones asociadas

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Definición. Curva cerrada simple

Por curva cerrada simple entendemos la imagen de una trayectoria C^1 a trozos $\boldsymbol{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ inyectiva en $[a,b)$ y tal que $\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{c}(b)$.
Si $\boldsymbol{c}$ satisface que $\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{c}(b)$, pero no es inyectiva diremos que es una curva cerrada.



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Propiedades de la integral de línea

1.
$$\int_C \lambda \boldsymbol{F} = \lambda \int_C \boldsymbol{F}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

2.
$$\int_C \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \int_C \boldsymbol{F} + \int_C \boldsymbol{G}.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Propiedades de la integral de línea. Aditividad respecto a caminos

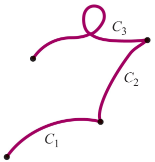
3. Aditividad respecto a curvas

Si C es una curva regular a trozos compuesta por una cantidad finita de curvas regulares $C_1, \ldots, C_n$ tales que el punto final de C_i coincide con el punto inicial de C_{i+1}, entonces

$$C = C_1 + \ldots + C_n,$$

y

$$\int_C \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \boldsymbol{F}.$$

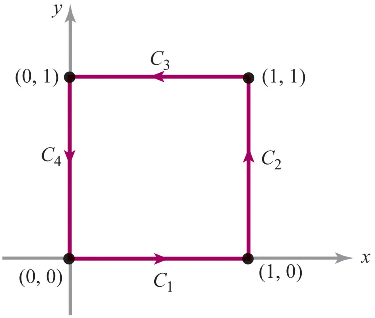


Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Propiedades de la integral de línea. Aditividad respecto a caminos Un primer ejemplo.

Calcular

$$\int_C x^2 dx + xydy$$

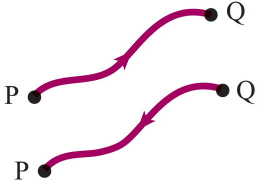


Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Propiedades de la integral de línea

4. Si denotamos por $-C$ a la curva C recorrida en sentido inverso, entonces

$$\int_C \boldsymbol{F} = -\int_{-C} \boldsymbol{F}.$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

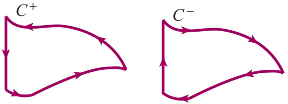
Teorema de Green

Si C es un camino (curva suave a trozos) simple, cerrado y positivamente orientado (recorrido en sentido inverso a las agujas del reloj), y $F = (F_1, F_2)$ un campo vectorial $\mathcal{C}^\infty$ sobre la región del plano D que encierra dicho camino, entonces

$$\int_C F = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (x, y)\, dx\, dy$$

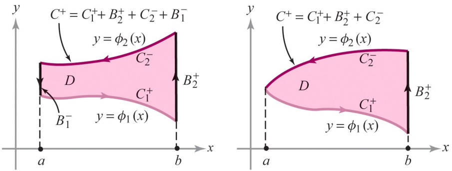
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Regiones simples y elementales sus fronteras

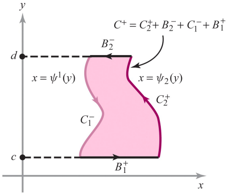


Positive orientation Negative orientation

(a) (b)



Región y-simple



Región x-simple

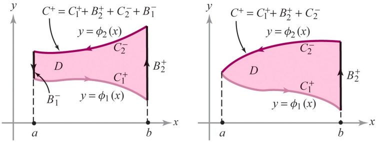
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de Green. Demostración en regiones elementales

Si suponemos que la región es de Tipo 1 (y-simple) podemos demostrar el Teorema de Green

$$D = \{a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$

$$C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$$



Por el Teorema de Fubini:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b [P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))]\, dx.$$

Y basta tener en cuenta que como x es constante en B_2^+, B_1^-,

$$\int_{C^+} P\, dx = \int_{C_1^+} P\, dx + \int_{C_2^+} P\, dx.$$

de donde:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{C^+} P\, dx.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

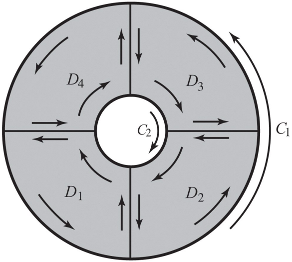
Teorema de Green

El Teorema de Green también es válido en regiones que no son simples, pero que se pueden descomponer en unión de regiones simples. Por ejemplo si D es un anillo con frontera:

$$C = C_1 + C_2$$

podemos descomponer

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Aplicaciones del Teorema de Green

- La primera aplicación interesante del teorema de Green es poder hallar áreas de recintos en $D \subset \mathbb{R}^2$ a través de una integral de línea realizada a lo largo de la frontera de D, considerando campos vectoriales adecuados. Es suficiente con escoger $F = (F_1, F_2)$ tal que

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(x, y) = k$$

de modo que aplicando la fórmula de Green:

$$\int_C F = \int\int_D k\, dx\, dy = k \cdot Area(D).$$

Un ejemplo de estos campos es: $F(x, y) = (-y, x)$.

Ejemplo

Comprobar mediante una integral de línea que el área encerrada por una elipse de semiejes a, b es πab. Emplear la parametrización de la elipse

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\, t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

y comprobar que

$$A(D) = \int_C x dy = \pi ab.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Aplicaciones del Teorema de Green

- La segunda aplicación aparece a partir da equivalencia siguiente: la integral de F a lo largo de una curva cerrada C cualquiera es sempre 0 si, y sólo si, la integral de F a lo largo de una curva C depende solo de los extremos de C y no de la trayectoria de C para unir esos dos puntos. Para probar esta equivalencia es suficiente con tener en cuenta que si C_1 y C_2 son dos curvas con los mismos extremos entonces $C_1 - C_2$ es una curva cerrada. Teniendo en cuenta esta equivalencia se prueba que la integral de F a lo largo de una curva cualquiera depende sólo de los extremos de la curva si y sólo si:

$$(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})(x,y) = 0$$

o equivalentemente si y solo si F es un gradiente $F = \nabla \cdot f$ para alguna función potencial f. De hecho se puede probar que se $F = \nabla \cdot f$ y C es una curva uniendo los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$, entonces:

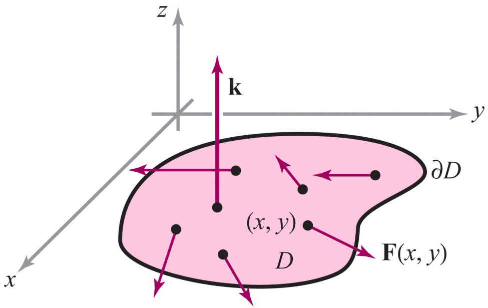
$$\int_C F = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Forma vectorial del T. de Green empleando el rotacional

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la que es aplicable el Teorema de Green, y sea ∂D su frontera (positivamente orientada), y sea $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ un campo vectorial C^1 definido en D. Entonces:

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_D (\text{rot}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k}\, dA.$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

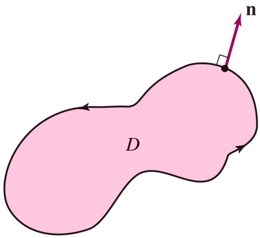
Forma vectorial del T. de Green empleando la divergencia

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la que es aplicable el Teorema de Green, y sea ∂D su frontera (positivamente orientada). Sea $\boldsymbol{n}$ la normal unitaria exterior a ∂D. Si $\boldsymbol{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización positivamente orientada de ∂D, $\boldsymbol{n}$ viene dado por

$$n = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

Si $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ es un campo vectorial C^1 sobre D entonces:

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} ds = \iint_D (\operatorname{div} \boldsymbol{F}) dA.$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

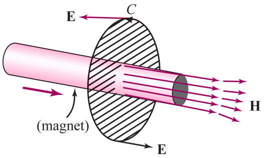
Aplicaciones: formulación integral de la Ley de Faraday

Ley de inducción electromagnética de Faraday (o simplemente Ley de Faraday) se basa en los experimentos que Michael Faraday realizó en 1831 y establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado (integral de línea del campo eléctrico) es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera con el circuito como borde:

$$\int_C \boldsymbol{E}\, ds = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{H}\cdot\, d\boldsymbol{S}$$

donde:
– $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico y
– $\boldsymbol{H}$ la campo magnético inducido
– y S una superficie con borde C.
En el Tema 6 (Integral de superficie) Por medio del teorema de Stokes (que relaciona integral de línea y de superficie) obtendremos una formulación diferencial de esta ley:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial H}{\partial t}$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

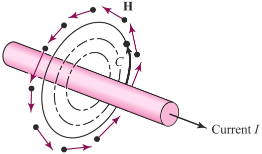
Aplicaciones: formulación integral de la Ley de Ampère

Una aplicación interesante de la integral de línea es la formulación matemática de la Ley de Ampère, que relaciona corriente eléctrica con sus efectos magnéticos.
Si:
– $\boldsymbol{H}$ campo magnético en $\mathbb{R}^3$
– C curva orientada cerrada en $\mathbb{R}^3$
– I corriente neta que atraviesa cualquier superficie limitada por C
entonces:

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} = I.$$

Si la densidad de corriente se describe por un campo vectorial $\boldsymbol{J}$, entonces, la corriente total que atraviesa S es:

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}.$$



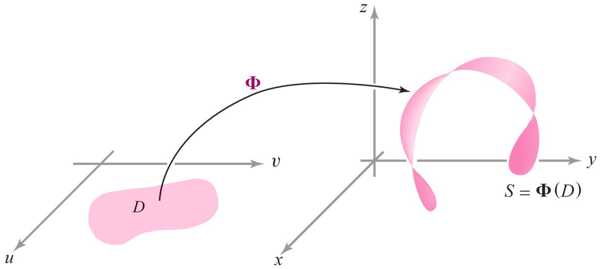
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Superficie parametrizada

Generaliza el caso de superficies de $\mathbb{R}^3$ que no se corresponden con la gráfica de una función.

Parametrización de una superficie.

$$\begin{aligned} \Phi : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\to (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

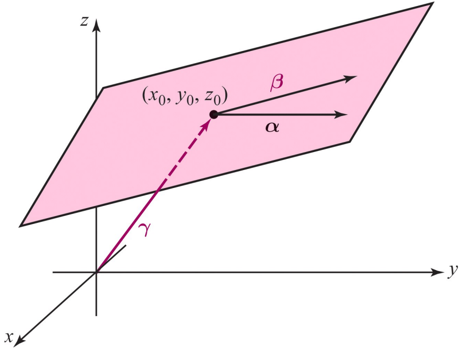


Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Superficie parametrizada. Ejemplo

Ecuación paramétrica de un plano.
Plano paralelo a los vectores $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y pasa por el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ que es el extremo del vector $\boldsymbol{\gamma}$.
Vector normal $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (A, B, C)$. Ecuación paramétrica del plano:

$$\boldsymbol{\Phi}(u, v) = \boldsymbol{\alpha} u + \boldsymbol{\beta} v + \boldsymbol{\gamma}$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

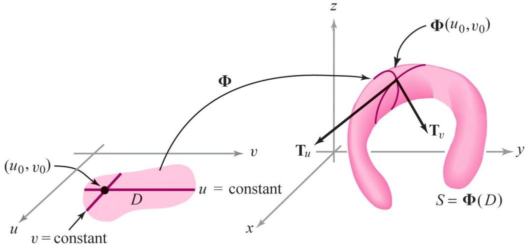
Vectores tangentes a una superficie parametrizada

Si fijamos $u = u_0$, obtenemos la curva $t \to \mathbf{\Phi}(u_0, t)$ en $S = \mathbf{\Phi}(D)$

$$\boldsymbol{T}_v = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\boldsymbol{k}$$

Análogamente fijando $v = v_0$

$$\boldsymbol{T}_u = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\boldsymbol{k}$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Superficie regular

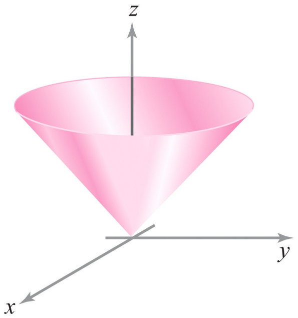
Como $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$ son tangentes a la superficie, el vector $\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v$ es normal a la superficie.
Decimos que la superficie es regular o suave en $\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0)$ si $\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v \neq 0$ en (u_0, v_0). Se dice que la superficie es regular si lo es en todos los puntos $\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0) \in S$.

Ejemplo. Superficie no regular

La superficie

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\mathrm{sen}\, v, \quad z = u, \quad u \geq 0,$$

no es una superficie regular en $(0, 0, 0)$.



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Plano tangente a una superficie parametrizada

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v$ es normal a la superficie parametrizada y nos sirve para definir el plano tangente.

Definición

Si $\boldsymbol{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie parametrizada regular en $\Phi(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v \neq 0$ en (u_0, v_0) definimos el plano tangente a la superficie, como el plano determinado por $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v) = 0.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Ejemplo

Supongamos que una superficie S es la gráfica de una función diferenciable $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Escribir S en forma paramétrica y demostrar que es regular en todos sus puntos $(u_0,v_0,g(u_0,v_0))$.

$$x=u,\quad y=v,\quad z=g(u,v).$$

$$\boldsymbol{T}_u=(1,0,\frac{\partial g}{\partial u}),\quad \boldsymbol{T}_u=(0,1,\frac{\partial g}{\partial v}).$$

Por tanto

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v=(-\frac{\partial g}{\partial u},-\frac{\partial g}{\partial v},1)\neq 0.$$

Esto demuestra también que la definición de plano tangente para superficies parametrizadas coincide con la dada para superficies consideradas como gráficas.

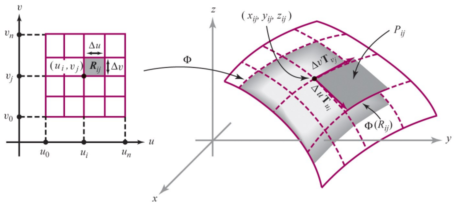
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Área de una superficie parametrizada

Se define el área, $A(S)$, de una superficie parametrizada S como:

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

Justificación de la fórmula del área



$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \boldsymbol{T}_{u_i} \times \Delta v \boldsymbol{T}_{v_j}\| = \|\boldsymbol{T}_{u_i} \times \boldsymbol{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v$$

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\boldsymbol{T}_{u_i} \times \boldsymbol{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_D \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\| du dv.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Aplicación: área de una superficie expresada como gráfica

Una superficie S que sea gráfica de la forma $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, tiene parametrización

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v).$$

y

$$\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$$

Por tanto

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Aplicación: área de una superficie de revolución

Sabemos por cálculo infinitesimal de una variable que el área de una superficie de revolución generada al girar la gráfica de $y = f(x)$ en torno al eje X es

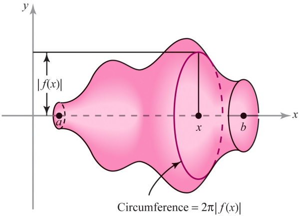
$$A(s) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Se puede calcular tomando la parametrización

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v, \quad z = f(u)\operatorname{sen} v.$$

En este caso

$$\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v = (f(u)\operatorname{sen} v, f(u)f'(u), f(u)\cos v),$$



y por tanto

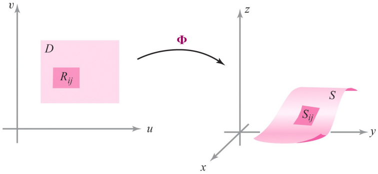
$$A(s) = \iint_D |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de superficie de una función escalar
Si $f = f(x,y,z)$ es una función escalar continua definida sobre una superficie parametrizada S, definimos la integral de f sobre S por

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\phi(u,v))\|T_u \times T_v\| dudv$$

siendo ϕ una parametrización de S definida en el conjunto D.



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

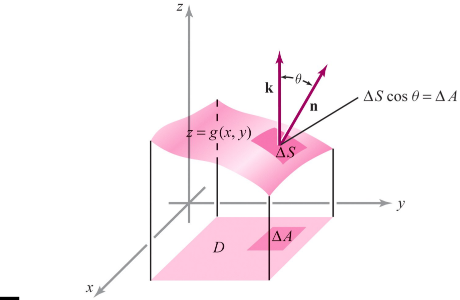
Integral de superficie de una función escalar sobre gráficas

Si $f = f(x, y, z)$ es una función escalar continua definida sobre una superficie parametrizada S, que es gráfica de una función C^1, $z = g(x, y)$.
En tal caso

$$\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\| = \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}$$

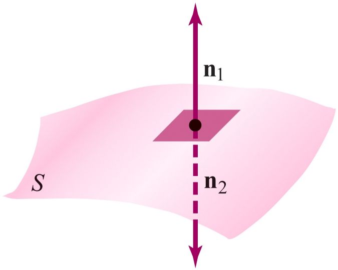
de modo que

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2}dxdy.$$



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Definición. Superficie orientada



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

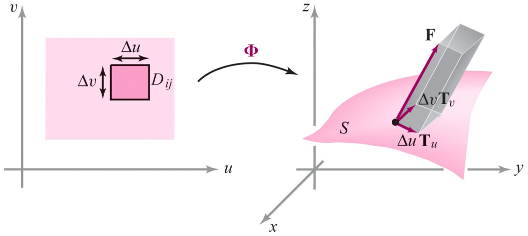
Integral de superficie de una función vectorial

$$\iint_S F = \iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) du\, dv.$$

Se llama **FLUJO de *F* a través de la superficie *S***

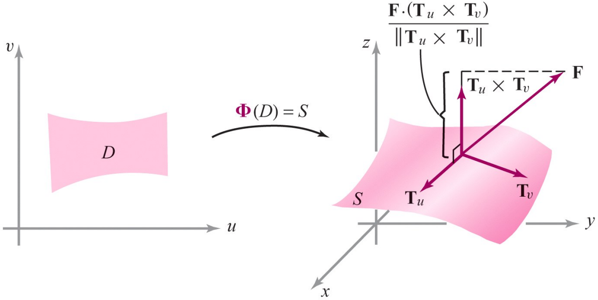
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de una función vectorial



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Integral de una función vectorial



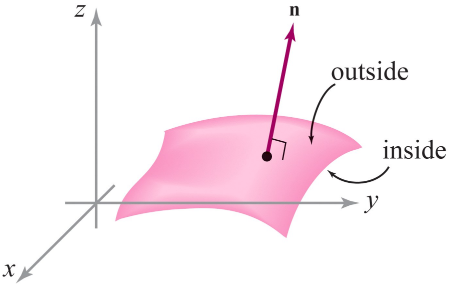
Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Orientación de gráficas

Sea S una superficie descrita por $z = g(x, y)$.

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + 1}}$$

La cara positiva está determinada por la normal unitaria $\boldsymbol{n}$ con componente $\boldsymbol{k}$ positiva.



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Independencia de la parametrización

Sea S una superficie orientada y $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$ dos parametrizaciones regulares de S que conservan la orientación y sean $\boldsymbol{F}$ un campo definido sobre S. Entonces:

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

y si $\mathbf{\Phi}_1$ conserva la orientación y $\mathbf{\Phi}_2$ la invierte:

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{\mathbf{\Phi}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Y si f es una función con valores reales definida en S, y $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$ dos parametrizaciones regulares de S:

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} f dS = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} f dS$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Relación con las integrales escalares

La integral de superficie de $\boldsymbol{F}$ sobre S, es igual a la integral de la componente normal de $\boldsymbol{F}$ sobre S:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

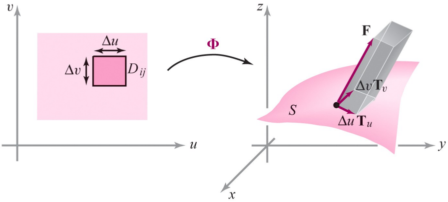
Justificación

Para una superficie orientada suave S y una parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ que preserve la orientación, podemos expresar $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ como una integral de una función f de valores reales sobre la superficie. Sea $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)/\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|$ normal unitaria que apunta al exterior de S

$$\iint_S \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v) du dv = \iint_D (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\| du dv = \iint_D f dS.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Interpretación física de la integral de superficie



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de la Divergencia

Sea $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ una función vectorial definida y continua en un dominio $V \subset \mathbb{R}^3$ limitado por una superficie cerrada $S = \partial V$. Si $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F_3}{\partial z}$ son funciones continuas en V, entonces:

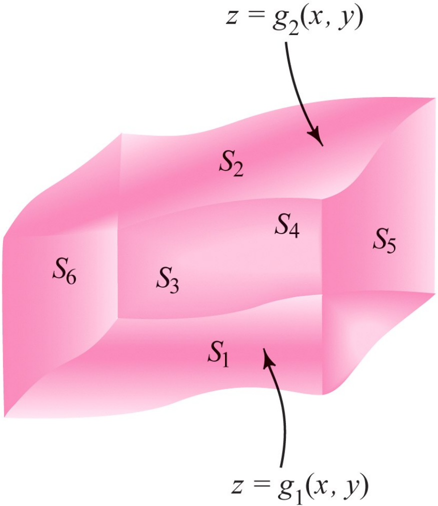
$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario perpendicular a S en cada punto.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de la divergencia

Demostración



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de la divergencia

Demostración

La idea de la demostración es

a) Escribir $F = Pi + qj + Rk$, de forma que

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

b) Establecer las igualdades:

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_{\partial W} Pi \cdot dS$$

$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_{\partial W} Qj \cdot dS$$

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_{\partial W} Rk \cdot dS$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de la divergencia. Aplicación al cálculo de volúmenes

Veremos que en el caso en que F sea tal que $divF = k$ entonces el Teorema de la Divergencia nos proporciona una forma de calcular el flujo que atraviesa una superficie sin más que conocer el volumen del sólido encerrado por dicha superficie.

$$\iint_S F \cdot ndS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_V k \, dx \, dy \, dz = k \cdot vol\,(V),$$

por lo que es posible calcular el volumen de V a través de una integral de superficie sobre la frontera de V.

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de la divergencia. Demostración del ppo. de Arquímedes

Principio de Pascal

La presión ejercida por un fluido a profundidad h se transmite de igual forma en todas las direcciones.

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} \Rightarrow F = P \cdot A$$

La presión de un objeto sumergido en un líquido a profundidad h viene dada por

$$\text{presión } = P = \rho \cdot h$$

siendo ρ la densidad del líquido (peso de la unidad de volumen).
El fluido ejerce una presión sobre cada punto de S y por tanto la fuerza total ejercida sobre S es

$$\boldsymbol{F} = -\iint_S p\boldsymbol{n}dS$$

Supongamos un sistema de coordenadas con eje z vertical y supongamos que el fluido llena una región del espacio hasta $z = c$. La profundidad de cada punto será $c - z \Rightarrow p(x, y, z) = \rho(c - z)$
Demostrar que

$$\boldsymbol{F} = \iiint_W \rho dV.$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de la divergencia

Aplicación al estudio de la estabilidad del buque
Centro de carena
Centro de flotación
Centro de inercia y centro de masas
(ver Salas-Hille)

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de Stokes

Sea S una superficie regular contenida en $\mathbb{R}^3$ y limitada por la curva cerrada y simple C. Entonces, para

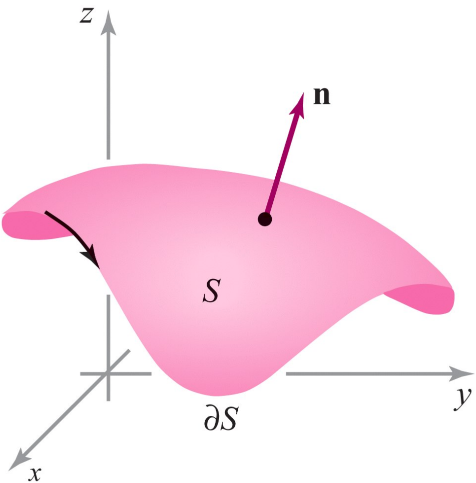
$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

una función vectorial continua y con derivadas parciales de primer orden continuas en S, entonces la integral de la componente normal del campo sobre la superficie S es igual a la integral de la componente tangencial del campo sobre la frontera de S, es decir:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n dS = \int_{\partial S} F\, dt,$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Teorema de Stokes



Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Aplicaciones

Obtención de la ecuación de continuidad, ecuaciones de Euler

Obtención de la formulación diferencial de la Ley de Maxwell mediante el Teorema de Stokes.

Ley de inducción electromagnética de Faraday (o simplemente Ley de Faraday) se basa en los experimentos que Michael Faraday realizó en 1831 y establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera con el circuito como borde:

$$\int_C E\,dl = -\frac{d}{dt}\iint_S B\,dS$$

donde E es el campo eléctrico y B la densidad de campo magnético y S una superficie con borde C.
Por medio del teorema de Stokes puede obtenerse una forma diferencial de esta ley:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Tema 5. Integragración en curvas y superficies

Aplicaciones