Ampliación de Cálculo

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 2: Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

1. **Funciones escalares y vectoriales.**
2. **Conjuntos de nivel.**
3. **Continuidad.**

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Definición. Funciones escalares y vectoriales

Una función

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \text{ con } m, n \geq 1$$

es una "regla" que asigna a cada elemento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $f(\boldsymbol{x})$ de $\mathbb{R}^m$.

Generaliza el caso de las funciones reales de variable real donde $n = m = 1$.

Utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \to & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \end{array}$$

y diremos que f tiene n variables y m componentes.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Definición. Funciones escalares y vectoriales

Siguiendo el convenio utilizado en el libro de J. Marsden y A. Tromba, llamaremos:

- funciones escalares o funciones reales de varias variables a las definidas sobre vectores de $\mathbb{R}^n$ y que toman valores reales,
- funciones vectoriales a las que toman valores vectoriales,

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Ejemplos de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$ no son ninguna abstracción matemática. Sirven para describir numerosos procesos físicos, químicos, económicos, etc.

Ejemplos de campos escalares:

1. Dado $V \subset \mathbb{R}^3$ un sólido de $\mathbb{R}^3$. Para describir la temperatura en cada punto

$$\begin{aligned} T : D \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\to T(x, y, z) \text{ número real en grados} \end{aligned}$$

2. Si la temperatura depende del tiempo

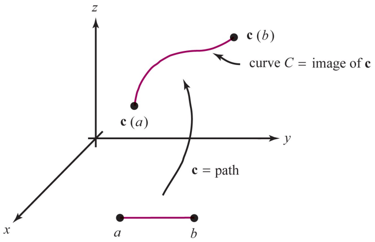
$$\begin{aligned} T : D \subset \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) &\to T(x, y, z, t) \text{ temperatura en el punto } \boldsymbol{x} = (x, y, z) \text{ en el instante } t. \end{aligned}$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Ejemplos de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

1. Describir la trayectoria de un móvil en el espacio $\mathbb{R}^3$

$$c : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \to c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ posición del móvil en el tiempo } t$$



Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Parametrizaciones de curvas

Trayectorias de un móvil en el espacio.

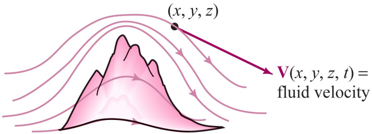
Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Ejemplos de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Ejemplos de campos vectoriales:

1. Velocidad en un punto de un fluido en cada instante de tiempo

$$\boldsymbol{v} : D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z, t) \to \boldsymbol{v}(x, y, z, t) \text{ vector velocidad en } \boldsymbol{x} = (x, y, z) \text{ en el tiempo } t$$



Fluido en movimiento: velocidad de las partículas de fluido en cada punto en cada instante de tiempo.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Ejemplo. Funciones de producción

Funciones de producción. La función de producción de Cobb-Douglas

Una función de dos variables muy empleada en economía es la función de producción de Cobb-Douglas.

Se emplea como modelo matemático para representar la relación entre el número de unidades producidas en función de las cantidades de trabajo y capital.

Si x mide las unidades de trabajo e y las unidades de capital, el número de unidades producidas viene dado en este modelo por:

$$f(x, y) = Cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

donde C es una constante y $0 < \alpha < 1$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Primeras definiciones: dominio e imagen

- Llamamos dominio de una función de varias variables, al subconjunto donde está definida.
- En el caso de una función vectorial, será la intersección de los dominios de las funciones componentes.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Ejemplos

1. Estudiar el dominio de la función

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\mathrm{dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y) \neq (0,0)\}$$

2. Estudiar el dominio de la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2, \mathrm{sen}\, xy,\ \log(x+y)).$$

Estudiamos el dominio de cada una de las funciones componentes. Las dos primeras definidas en todo $\mathbb{R}^2$, basta por tanto estudiar el dominio de f_3:

$$\mathrm{dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y > 0\}$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Gráficas de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Recordamos el caso de funciones reales de variable real
Si $f : D \subset \mathbb{R} \to R$ se definía la gráfica de la función f como el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathrm{Graf}\, f = \{(x, f(x)) \;:\; x \in D\}.$$

Este conjunto lo podíamos representar en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Gráficas de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

En el caso de funciones $f : D \subset \mathbb{R}^n \to R$ se definía la gráfica de la función f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\operatorname{Graf} f = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \; : \; \boldsymbol{x} \in D\}.$$

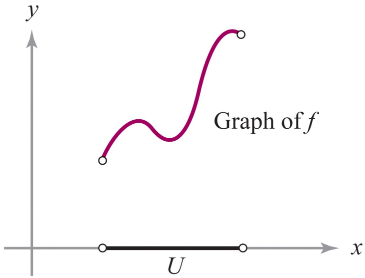
Ahora la gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

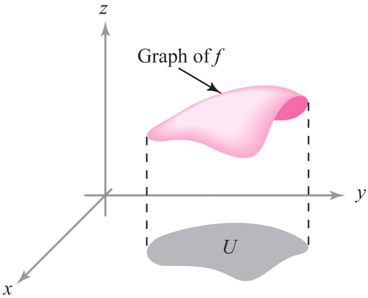
En general estos conjuntos no sabremos representarlos, a diferencia de lo que sucedía para funciones reales de variable real.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Gráficas de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

Para el caso de $n = 1$ la gráfica es una curva de $\mathbb{R}^2$ y para el caso $n = 2$, la gráfica es una superficie de $\mathbb{R}^3$.





Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Técnicas para representación de gráficas

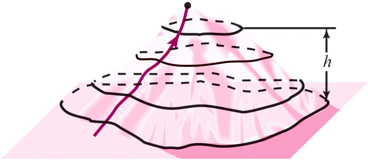
Curvas y conjuntos de nivel

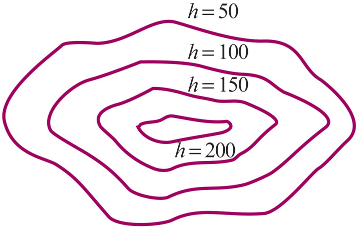
Supongamos

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Un conjunto de nivel para f es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que f es constante. Por ejemplo:

$$\{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$





Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Técnicas para representación de gráficas

Definición (Curvas y superficies de nivel)

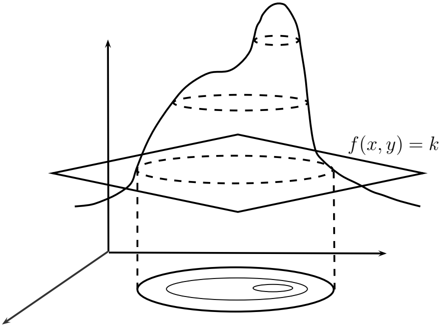
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ constante. Entonces se define el conjunto de nivel de valor c, como el conjunto de los puntos de D en los que f toma el valor c:

$$\{\boldsymbol{x} \in D \,:\, f(\boldsymbol{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Nótese que el conjunto de nivel siempre está contenido en el dominio de la función.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Curvas de nivel para funciones escalares

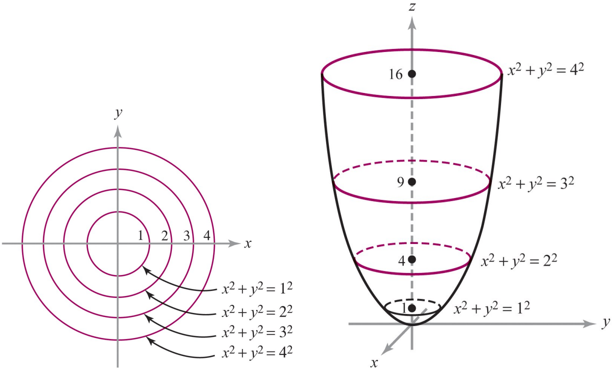


Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Ejemplo: Curvas y superficies de nivel

Describir la gráfica de la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to x^2 + y^2.$$



Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Técnicas para representación de gráficas

El método de las secciones

Por sección de la gráfica de f entenderemos la intersección de la gráfica con un plano vertical

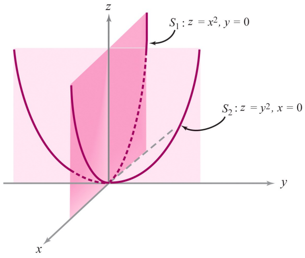
Ejemplo:

Para el ejemplo anterior:
Si P_1 es el plano xz de $\mathbb{R}^3$ definido por $y = 0$:

$$P_1 \cap \text{gráfica de } f = \{(x, y, z) \ : \ y = 0, z = x^2\}.$$

Si P_2 denota el plano yz definido por $x = 0$

$$P_2 \cap \text{gráfica de } f = \{(x, y, z) \ : \ x = 0, z = y^2\}.$$



Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

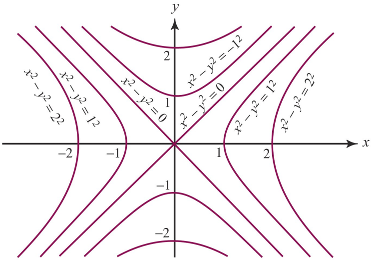
Técnicas para representación de gráficas

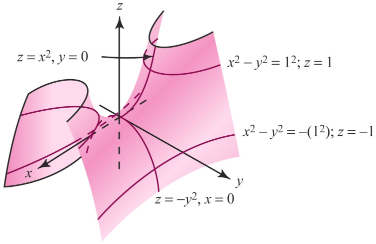
Ejemplo: paraboloide hiperbólico o silla de montar

Describir la gráfica de:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) = x^2 - y^2.$$

llamada paraboloide hiperbólico o silla de montar.
Si dibujamos las curvas de nivel y hacemos las secciones con planos resulta:





Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Límites de funciones de varias variables

Definición (límite de una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\boldsymbol{x}_0 \in A$.

Se dice que el límite de f cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{x}_0$ es $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ entonces:

$$d(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}) = \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon.$$

Y en tal caso se escribe:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Límites de funciones de varias variables

Teorema

El límite, si existe es único

La demostración es la misma que para el caso de funciones reales de variable real.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Cálculo de límites empleando la definición

Se sigue la misma idea que en el caso de límites de funciones reales de variable real, pero en este caso hay que hacer acotaciones con normas de $\mathbb{R}^n$

1. Aplicando la definición de límite, demostrar que la función:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{x+x^2}{1+x^2+y^2} = 0.$$

Tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, entonces $|f(x,y)-f(0,0)| < \varepsilon$

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x+x^2}{1+x^2+y^2}\right| \leq |x+x^2| \leq |x| + |x^2| =$$

$$\sqrt{x^2} + x^2 \leq \sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2) < \delta + \delta^2 < 2\delta < \varepsilon,$$

porque si $0 < \delta < 1$, entonces $\delta^2 < \delta$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Propiedades de los límites

Sea $A \subset \mathbb{R}^n, f, g : A \to R^m, a \in A$ tales que

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}, \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$$

entonces se verifican:

- $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} (f + g)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.
- $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \lambda f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{b}$.
- Si $m = 1$, entonces $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$.
- Si $m = 1$, y $\boldsymbol{c} \neq 0$ entonces $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{b}{c}$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Veremos varias técnicas para el cálculo de límites:

- Límites a través de curvas.
- Límites reiterados.
- Cambio a polares.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Cálculo de límites por sustitución directa. En el caso en que sepamos que una función es continua (se ve a continuación), el límite se calculará por simple sustitución, como en el caso de funciones reales de variable real.

Ejemplo:

1. Calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,0)} \frac{1+e^{xy+2z}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1+e^2}{5}.$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Técnicas de cálculo de límites de funciones de varias variables

Límites siguiendo direcciones

1. Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 - 7y^2}{2x^2 + 5y^2}$$

   Nos acercamos por rectas $y = kx$

$$\lim_{\substack{y=kx \\ (x,y)\to(0,0)}} \frac{5x^2 - 7y^2}{2x^2 + 5y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(5 - 7k^2)}{x^2(2 + 5k^2)} = \frac{5 - 7k^2}{2 + 5k^2}$$

   que depende de k por tanto el límite no existe.

2. Hacemos que alcance el mismo grado numerador y denominador:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

   Nos acercamos por conjuntos $x = ky^3$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Límites reiterados

- Dada $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{a} \in A$ podemos estudiar los llamados límites reiterados o iterativos.

- Se analiza la tendencia de la función cuando varían sucesivamente cada una de las variables $(x_1, \ldots, x_n)$ que definen el punto $\boldsymbol{x}$ hacia cada una de las coordenadas de $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

- Uno de estos posibles límites se expresa

$$L_1 = \lim_{x_1 \to a_1} \lim_{x_2 \to a_2} \ldots \lim_{x_n \to a_n} f(x_1, \ldots, x_n)$$

  y cambiando el orden de cálculo para cada una de las variables se obtienen $n!$ posibles límites reiterados en el punto $\boldsymbol{a}$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Límites reiterados (caso de funciones de dos variables)

En el caso de funciones de dos variables, sólo hay dos posibles límites reiterados:

$$L_1 = \lim_{x \to a_1} \left(\lim_{y \to a_2} f(x,y) \right),$$
$$L_2 = \lim_{y \to a_2} \left(\lim_{x \to a_1} f(x,y) \right).$$

Teorema

En caso de que el límite y los límites reiterados existan, su valor coincide con el valor del límite de la función.

OBSERVACIÓN:

Si los límites reiterados no coinciden, entonces el límite no existe.

Es por tanto un criterio muy útil para justificar la no existencia de límite.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Límites reiterados

Ejemplo

Los límites reiterados pueden existir y ser iguales y sin embargo, no existir el límite

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y).$$

Por ejemplo

$$f((x,y)) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es claro que el límite no existe: basta calcular el límite en el conjunto $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} f(x,y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Ejemplos de no existencia de límites reiterados y existencia de límite:

1. Existe L_2 y no L_1

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Existe L_1 y no L_2

$$g(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. No existen los límites reiterados (L_1 ni L_2) y sí el límite:

$$h(x,y) = f(x,y) + g(x,y).$$

y sin embargo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Ejemplos de cálculo de límites mediante el cálculo de límites reiterados

1. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-2x+y}{x+y}$$

Calculamos los límites reiterados

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy-2x+y}{x+y}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x} = -2,$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy-2x+y}{x+y}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1.$$

Por tanto el límite no existe

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Cálculo de límites mediante cambio a polares

Hacemos el cambio a polares:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array} \right.$$

Estudiar el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

es entonces equivalente a que exista el límite

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta),$$

independientemente del ángulo θ.

NOTA: Esta técnica suele ser muy útil cuando aparecen expresiones de la forma $x^2 + y^2$, ya que en este caso

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2.$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Métodos operativos para el cálculo de límites

Ejemplos de cálculo de límites mediante cambio a polares

1. Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta) = 0.$$

2. Calcular el siguiente límite con indet. $0/0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = [\frac{0}{0}] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}\rho^2 \cos\rho^2}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\rho^2}{2\rho^2} = [\frac{0}{0}] \stackrel{Inf.}{=} 1$$

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Continuidad de funciones de varias variables

- Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{a} \in \bar{A}$. Diremos que f es continua en $\boldsymbol{a}$ cuando:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = f(\boldsymbol{a}).$$

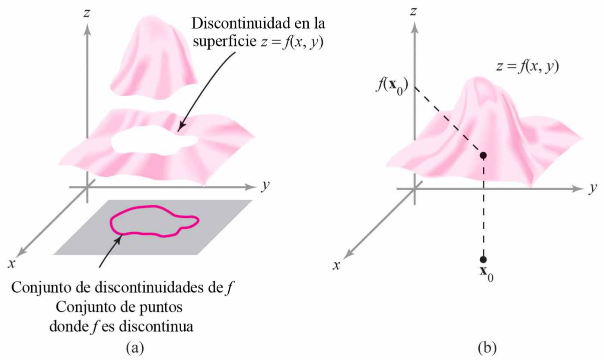
- Con la definición mediante normas, esta condición puede escribirse:

  f es continua en $\boldsymbol{a}$ cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$, entonces $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\| < \varepsilon$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Continuidad de funciones de varias variables

Ejemplos de gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ discontinuas y continuas.



Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Continuidad de funciones de varias variables

Propiedades de las funciones continuas

Sea $A \subset \mathbb{R}^n, f, g : A \to R^m$ continuas en $a \in A$. Entonces se verifican

- $f + g$ es continua en $\boldsymbol{a}$
- λf es continua en $\boldsymbol{a}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
- Si $m = 1$, entonces $f \cdot g$ es continua en $\boldsymbol{a}$.
- Si $m = 1$, y $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\boldsymbol{a}$.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Continuidad de funciones de varias variables

Un ejemplo de funciones continuas son los polinomios, por ejemplo en el caso de dos variables

$$P(x, y) = x^4y^3 + x^2y^4 + x^2y^2 + y^3 + x^2.$$

Cualquier polinomio es una función continua por ser suma de productos de funciones continuas.

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Composición de funciones continuas

Tema 2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Teorema de Weierstrass

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado y $f : C \to \mathbb{R}$ es una función real, continua en C, entonces f alcanza máximo y mínimo en C, es decir, existen x_0 y x_1 tales que:

$$m = f(x_0) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_1) = M, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \in C.$$

OBSERVACIÓN: Será importante para garantizar la existencia de extremos relativos y condicionados.