Ampliación de Cálculo

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

1. Derivada direccional. Derivada parcial. Diferencial de una función. Reólacin entre la diferencial y derivadas parciales..

2. Vector gradiente. Matriz Jacobiana. Derivadas parciales de orden superior..

3. Teorema de Taylor para funciones escalares.

4. Puntos críticos, clasificación. Matriz Hessiana. Extremos condicionados: reducción de la dimensión, método de los multiplicadores de Lagrange.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Definición. Derivadas parciales

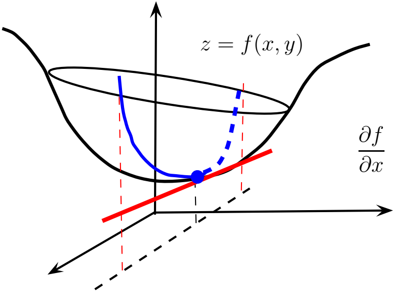
Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define la derivada parcial i-ésima de f como

$$D_i f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{a})}{h}.$$

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ escribimos $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Derivadas parciales. Función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Definición. Derivadas direccionales

Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in U$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ se define la derivada direccional de f en la dirección $\boldsymbol{u}$ como

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{h}.$$

Mide la razón de cambio en la dirección del vector $\boldsymbol{u}$.
Generaliza el concepto de derivada parcial en cualquier dirección.
Si $\boldsymbol{v}$ no es unitario se define la derivada direccional como la asociada al vector:

$$\boldsymbol{u} = \frac{v}{||v||}.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Ejemplos

1. Función continua en un punto tal que existen las derivadas parciales de primer orden

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Función continua en un punto sin derivadas parciales en dicho punto

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} + y\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

3. Función discontinua en un punto con derivadas parciales en dicho punto

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

4. Función discontinua en un punto sin derivadas parciales en dicho punto

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

- La definición dada contiene como caso particular a la definición de derivada para funciones de una sola variable.

- La existencia de todas las derivadas direccionales y la función no es continua. Ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0, \end{cases}$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Derivadas parciales sucesivas

Las derivadas parciales cuando existen en un conjunto, son funciones de las mismas variables, que pueden ser por tanto derivables.
Para el caso de una función de dos variables, $f(x,y)$, las derivadas parciales primeras

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

pueden poseer derivadas parciales que reciben el nombre de derivadas parciales segundas

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),$$

En general escribiremos

$$D_{r,k}\boldsymbol{f} = D_r(D_k\boldsymbol{f}) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_r x_k}.$$

y análogamente para las derivadas de orden superior.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Condición suficiente para coincidencia de derivadas parciales cruzadas

Las derivadas cruzadas no tienen por qué coincidir. Por ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

puesto que $D_1 f(0,y) = -y$ para todo y y $D_2 f(x,0) = x$ y por tanto:

$$D_{1,2}f(0,0) = 1 \neq -1 = D_{2,1}f(0,0)$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Teorema de Schwarz para derivadas cruzadas

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in A$ tal que existen las derivadas parciales f_{x_i}, f_{x_j}, $f_{x_i x_j}$ en un entorno de $\boldsymbol{a}$ y además $f_{x_i x_j}$ es continua en un entorno de $\boldsymbol{a}$, entonces existe $f_{x_j x_i}(\boldsymbol{a})$ y

$$f_{x_j x_i}(\boldsymbol{a}) = f_{x_i x_j}(\boldsymbol{a}).$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Operadores diferenciales

- Gradiente. Para f función escalar

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

Aplicación: (Ley de Fourier)

Si consideramos la función temperatura en un sólido $T(x, y, z)$. El flujo de calor se puede representar por $\boldsymbol{J} = -k\nabla T$, donde $k > 0$ es una constante llamada conductividad térmica.

Los conjuntos de nivel de T se llaman isotermas.

La Ley de Fourier afirma que la variación de calor en un cuerpo el igual al flujo flujo de calor a través de su frontera. Lo formalizaremos con mayor precisión al ver la integral de superficie.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Operadores diferenciales

- Divergencia. Para F función vectorial

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

- Rotacional. Para F función vectorial

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

- Laplaciano.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Diferencial

Extensión del concepto de derivada para funciones reales de variable real.
plano tangente en términos de las derivadas parciales según la ecuación

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2),$$

Para el caso de dimensión n, f es diferenciable en a si existe una aplicación lineal $df(a)$ que verifica:

$$\lim_{h \to \mathbf{0}} \frac{\|f(x+h) - f(\boldsymbol{a}) - df(\boldsymbol{a})(h)\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0,$$

Si f función vectorial es diferenciable en a, a la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es la matriz jacobiana se le denomina diferencial de f en a, y el anterior límite establece que esta aplicación lineal es una buena aproximación de la función en el punto

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Propiedades de las funciones diferenciables

- Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, f es continua en $\boldsymbol{a}$.

- **Diferencial y derivadas direccionales**

  1. Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, existen todas las derivadas direccionales en $\boldsymbol{a}$.
  2. $D_{\boldsymbol{u}}f = df(a)(\boldsymbol{u})$.
  3. En particular para los vectores de la base canónica

$$D_{\boldsymbol{e}_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(\boldsymbol{e}_i).$$

- Como consecuencia la diferencial es única.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Matriz Jacobiana asociada a la Diferencial

En el caso de una función escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la matriz jacobiana se corresponde con el vector gradiente:

$$J_f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

En el caso de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, \ldots, f_m)$ la matriz jacobiana es una matriz de dimensión $m \times n$ donde la fila i viene dado por el vector gradiente de la componente i

$$J_f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

En el caso de una función vectorial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ a la que llamábamos curva en $\mathbb{R}^n$ la jacobiana es

$$J_f(t) = (x_1'(t), \ldots, x_m'(t)),$$

y tiene una interpretación directa como como vector tangente a la curva en $f(t)$. Si la curva representa el desplazamiento de un móvil en el espacio $\mathbb{R}^3$ ese sería el vector velocidad y su módulo lo llamaremos rapidez.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Diferencial y derivadas direccionales

Como consecuencia tenemos una regla fácil para el cálculo de derivadas direccionales

$$D_u f(a) = df(a)(u) = Jf(a) \cdot u$$

y en el caso de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, como $Jf(a) = \nabla f(a)$

$$D_u f(a) = df(a)(\boldsymbol{u}) = \nabla f(a) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(a)\| \cos\theta,$$

donde θ ángulo formado por $\nabla f(a)$ y $\boldsymbol{u}$.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Ejemplo

Sea $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Calcular la derivada direccional en el punto $P(1,1,1)$ en la dirección $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$

Solución Tomamos $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2 2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

entonces

$$\nabla f(1,1,1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Por tanto

$$D_{\boldsymbol{u}} f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1)\cdot \boldsymbol{u} = 1$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

El gradiente como dirección de máxima variación

Como
$$D_{\boldsymbol{u}}f(a) = \nabla f(a) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(a)\| \cos\theta,$$
el valor de la derivada direccional es máximo si $\theta = 0$, es decir el vector $\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección que el vector ∇f. Además el valor de dicha derivada es $\|\nabla f\|$ y

$$-\|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \leq D_{\boldsymbol{u}}f(a) \leq \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|, \quad \text{para todo } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$$

Por tanto el vector gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Condición suficiente de diferenciabilidad

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\boldsymbol{a} \in A$ y existen las funciones

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

y las derivadas parciales son continuas en $\boldsymbol{a}$, para todo i, j, entonces f es diferenciable en a.

Nota

Esta condición no es necesaria. Ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Reglas de diferenciación

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\boldsymbol{a} \in A$. Entonces:

1. $\lambda f + \mu g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y
$$d(\lambda f + \mu g)(\boldsymbol{a}) = \lambda df(\boldsymbol{a}) + \mu g(\boldsymbol{a})$$
2. $f \cdot g$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y
$$d(f \cdot g)(\boldsymbol{a}) = df(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \cdot dg(\boldsymbol{a})$$
3. $\dfrac{f}{g}$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$, para $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Diferenciación de funciones compuestas: Regla de la Cadena

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$g \circ f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tales que $f(A) \subset B$. Sea $h = g \circ f \ : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ la función compuesta de f con g.
En estas condiciones, si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y g es diferenciable en $f(\boldsymbol{a})$, entonces la función $h = g \circ f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y

$$d(g \circ f)(\boldsymbol{a}) = dg(f(\boldsymbol{a})) \circ df(\boldsymbol{a})$$

Forma matricial de la regla de la cadena

$$J_(g \circ f) = J_g(f(\boldsymbol{a}) \cdot J_f(\boldsymbol{a}).$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Regla de la cadena para derivadas parciales

Si la función compuesta es real, interesa en muchos casos el cálculo de una derivada concreta. Pueden darse estas dos situaciones

1. Cuando la función compuesta diferenciable es de una sola variable

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \boldsymbol{y} & \to & z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

La función compuesta es real de una variable y su jacobiana será

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_m}\right) \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} \end{pmatrix}$$

y calculando el producto de matrices

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx}.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Regla de la cadena para derivadas parciales

1. Si la función compuesta es real de varias variables

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y & \rightarrow & z = h(\boldsymbol{x}) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) \end{array}$$

haciendo el producto de jacobianas

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_m}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

de donde resulta de forma abreviada:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Regla de la cadena para derivadas parciales

Dada la composición $h = g \circ f$ la derivada parcial de la función h respecto a x_i viene dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_j}(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n).$$

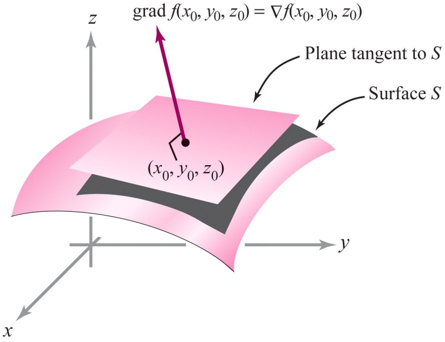
Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Interpretación geométrica del gradiente

- El gradiente es perpendicular a las curva de nivel que pasa por el punto.
- El gradiente nos proporciona el vector que define el plano tangente a una superficie

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Plano tangente a una superficie



En el caso del que la superficie sea la gráfica de una función $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0),$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Interpretación física

Diremos que un campo vectorial F proviene de un potencial escalar f si

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

Un ejemplo el campo gravitatorio. Potencial gravitatorio:

$$V = -GmM/r.$$

La fuerza gravitatoria por unidad de masa m en (x, y, z) producida por una masa M situada en el origen de coordenadas viene dada por:

$$\boldsymbol{F} = \nabla V = -\frac{GmM}{r^2}\boldsymbol{n}.$$

donde $r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia al origen y $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ es el vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{r}$.
Además este potencial V satisface la ecuación en derivadas parciales del potencial:

$$\Delta V = 0.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Diferencial segunda de una función escalar

En el caso de una función escalar, $d^2f(\boldsymbol{a})$ es la forma bilineal cuya matriz asociada es

$$H_f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

En el caso de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H_f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Teorema de Taylor para funciones de varias variables
Desarrollo de Taylor de una función de varias variables hasta el orden 2.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + R_2(a,h).$$

siendo $H_f(a)$ la matriz Hessiana.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Teorema de Taylor para funciones de varias variables

- Desarrollo de Taylor de orden m. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{m+1} en A y siendo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + h$ puntos de A entonces existe $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}]$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!} d^r f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{h}^r + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{h}^{(m+1)}) = P_m(\boldsymbol{h}) + T_m(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{c}).$$

donde se entiende $\boldsymbol{h}^r = (\boldsymbol{h}, \ldots, \boldsymbol{h})$. Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ se llama fórmula de MacLaurin.

- En el caso de una función f de dos variables de clase C^{n+1}:

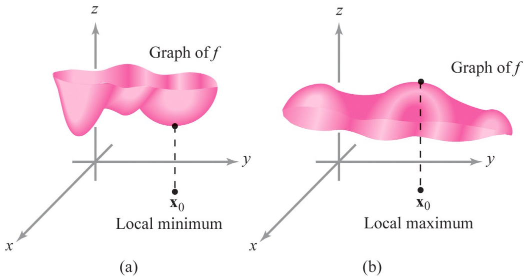
$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-r} \partial y^r} x^{m-r} y^r + T_m.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Extremos relativos Sea

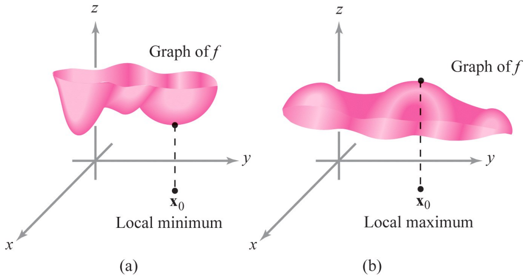
$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

diremos que f alcanza un máximo (respectivamente un mínimo) relativo en el punto $(a,b) \in D$, si existe un entorno U de (a,b) tal que $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in U$, (respectivamente $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in U$)



Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Punto crítico f presenta un punto crítico en **a**, si $\nabla f(a) = 0$



Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Condición necesaria de extremo Si definimos la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow g(x) = f(x, b) \end{aligned}$$

La gráfica de g es la gráfica de f intersecada con el plano $y = b$ de forma que es evidente que si $f(x, y)$ tiene un extremo local en el punto (a, b), entonces $g(x)$ tiene un extremo local en a. Además, si $g'(a)$ existe, debe ser 0 y, por lo tanto, es fácil probar que $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$. Análogamente, fijando la variable x

$$\begin{aligned} h : R &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow h(y) = f(a, y), \end{aligned}$$

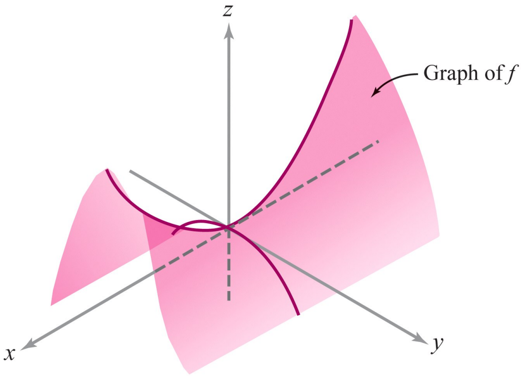
obtendremos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

Queda así probado que si (a, b) es un extremo local de f, entonces necesariamente las derivadas parciales de primer orden de f en (a, b) deben ser cero.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Punto de silla Ejemplo de función con un punto de silla en $x = (0, 0)$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Extremos relativos (*criterio de la derivada segunda*)

$$H_f(x,y) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

1. $f(a,b)$ es *máximo local* de f si $Hf(a,b) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$.

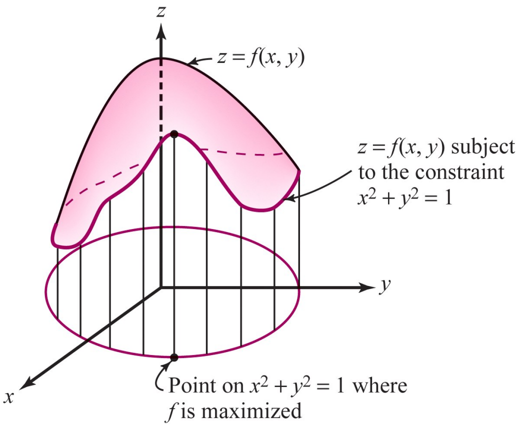
2. $f(a,b)$ es un *mínimo local* de f si $Hf(a,b) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$.

3. $f(a,b)$ no es extremo local de f si $Hf(a,b) < 0$.

4. Si $Hf(a,b) = 0$ entonces el criterio no decide.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange



Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Se trata de buscar máximos y mínimos de una función sujeta a varias restricciones.

Ejemplo:

Dada una función temperatura sobre una placa metálica de forma triangular, hallar la temperatura máxima y mínima en dicha placa

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones con sus primeras derivadas parciales continuas tales que f tiene un máximo o un mínimo $f(x_0,y_0)$ cuando (x,y) está sujeto a la restricción $g(x,y)=0$.
Si $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$, entonces existe un número real λ tal que:

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0).$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Justificación del Teorema de los Multiplicadores de Lagrange

Sabemos que $\nabla g(\boldsymbol{x}_0)$ es perpendicular a la superficie S.
Ahora, si $\boldsymbol{c}$ es una trayectoria en S que pasa por el punto $\boldsymbol{x}_0$, como x_0 es un extremo de la función f,

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{c}(t)) = 0$$

empleando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{c}(t)) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{c}'(t) = 0$$

por tanto $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ es perpendicular a todas las curvas que pasan por $\boldsymbol{x}_0$ contenidas en la superficie S.

Por tato $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ también es perpendicular a la superficie en $\boldsymbol{x}_0$ y por tanto es paralelo a $\nabla g(\boldsymbol{x}_0)$:

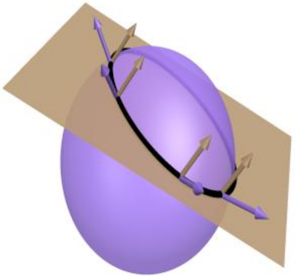
$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}_0).$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

En el caso de varias restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} g_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1 \\ \vdots \\ g_k(x_1,\ldots,x_n)=c_k \end{array}\right.$$



el Teorema de los multiplicadores de Lagrange se puede generalizar como sigue: si f tiene un máximo o un mínimo sobre S en $\boldsymbol{x}_0$, deben existir constantes $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ tales que:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\lambda_1\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0)+\ldots\lambda_k\nabla k(\boldsymbol{x}_0).$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Finalmente se obtiene el siguiente sistema que tenemos que resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\ldots,x_n) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) \\ g(x_1,\ldots,x_n) = 0. \end{cases}$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Multiplicadores de Lagrange: primeros ejemplos sencillos

1. Calcular la distancia mínima de un punto $P = (x_0, y_0)$ a una recta $y = mx + b$
   Consideramos la función cuadrado de la distancia
   $$f(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$
   donde tenemos la restricción $y = mx + b$, es decir
   $$g(x,y) = y - mx - b = 0.$$
2. Se pretende construir una caja de cartón. Si se pretende que tenga volumen V, buscar las dimensiones de la caja para que el gasto de cartón sea mínimo.
   La función que proporciona el área de la caja de cartón es:
   $$f(x,y,z) = 2(xy + xz + yz).$$
   y tenemos la restricción que viene dada por el volumen de la caja $x\,y\,z = V$, es decir
   $$g(x,y,z) = xyz - V = 0.$$

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Aplicación a la economía de los multiplicadores de Lagrange

- Si tenemos función de producción de Cobb-Douglas. Se emplea como modelo matemático para representar la relación entre el número de unidades producidas en función de las cantidades de trabajo y capital. Si x mide las unidades de trabajo e y las unidades de capital, el número de unidades producidas viene dado en este modelo por:

  $$f(x, y) = C x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

  donde C es una constante y $0 < \alpha < 1$.

- Si tenemos el coste de las unidades de trabajo y de capital, podemos desear calcular el máximo nivel de producción para un coste conjunto de trabajo y capital fijado.

- Los economistas llaman Productividad marginal del capital al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción.

  Su interpretación es que por cada euro adicional que se gaste en la producción, se pueden producir x, y unidades adicionales.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Teorema de la Función Implícita

Ecuaciones del tipo $F(x, y, z) = 0$, pueden representar superficies en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo:

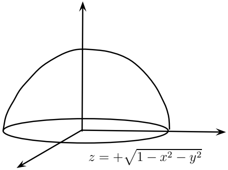
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

es la ecuación de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1.

En esta situación es posible, algunas veces, despejar una de las variables en función de las otras, por ejemplo $z = f(x, y)$.

En el caso de la esfera:

$$z = f(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Teorema de la Función Implícita

En general, dada:

$$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

el Teorema de la Función Implícita nos dice bajo qué condiciones podremos despejar las m últimas variables en función de las n primeras:

$$\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

Además dice cómo calcular las derivadas parciales de $\boldsymbol{y}$ respecto de $\boldsymbol{x}$.

Tema 3. Diferenciación de funciones de varias variables

Teorema de la Función Implícita en el caso de un sistema

Sea el sistema de m funciones con $m+n$ variables:

$$F_1(y_1,\ldots,y_m,x_1,x_2,\ldots,x_n)=0, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

donde $F_1,F_2,\ldots,F_m$ son las componentes de una función vectorial $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^{m+n}\rightarrow\mathbb{R}^m$.
Si se verifican:

1. $F_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ definidas en un entorno del punto $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)$
2. $F_i(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)=0,$ i=1,2,...,m
3. Dada la matriz jacobiana

$$J=\left(\frac{\partial F_1,F_2,\ldots,F_m}{\partial y_1,\ldots,y_m}\right), \quad det(J)\neq 0 \text{ en } \boldsymbol{P}=(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)$$

Entonces en un entorno de $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ existen m funciones de clase uno
$y_i=f_i(x_1,\ldots,x_n) \quad i=1,\ldots,m$, tales que

1.
$$b_i=f_i(a_1,\ldots,a_n)$$
2. y las parciales en $\boldsymbol{a}$ vienen dadas por

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=-\frac{\left(\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\ldots,y_m)}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\left(\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}.$$