Ampliación de Cálculo

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 1: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

1. **Producto escalar, norma y distancia.**
2. **Clasificación de puntos y conjuntos.**
3. **Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos acotados, supremo, ínfimo, máximo e mínimo.**
4. **Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.**

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Consideraremos $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de n-tuplas:

$$\mathbf{v} = (\lambda_\mathbf{1}, \ldots, \lambda_\mathbf{n}).$$

Esto generaliza:

- el caso de los puntos en $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$
- y de los puntos del espacio en $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_n)$.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Suma y producto por escalares en $\mathbb{R}^n$

Dados dos vectores:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n), \quad \boldsymbol{u} = (v_1, \ldots, v_n)$$

definimos dos operaciones en $\mathbb{R}^n$:

1. Suma de vectores

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n),$$

2. Producto de vectores por escalares

$$\lambda\boldsymbol{u} = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n).$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Propiedades de espacio vectorial

La suma de vectores y el producto por escalares satisfacen las siguientes propiedades:

- Asociativa, $(\lambda\,\mu)\,\boldsymbol{v} = \lambda\,(\mu\,\boldsymbol{v})$.
- Distributiva respecto escalares $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{u} = \lambda\,\boldsymbol{u} + \mu\,\boldsymbol{u}$.
- Distributiva respecto vectores, $\lambda\,(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\,\boldsymbol{u} + \lambda\,\boldsymbol{v}$.
- Elemento neutro vector, $\lambda\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
- Elemento neutro escalar, $0\,\boldsymbol{u} = 0$,
- Elemento unidad, $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Con las operaciones de suma de vectores y producto por escalares el conjunto $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial. Llamaremos entonces vectores a los elementos de $\mathbb{R}^n$.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Bases en $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ tenemos una base canónica formada por

$$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$$

donde $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0)$

Todo vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de la base canónica:

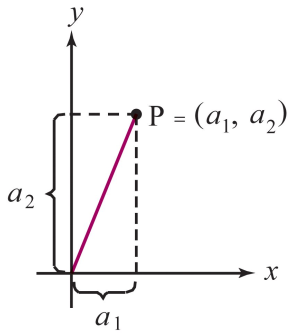
$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n.$$

Los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reciben el nombre de coordenadas cartesianas de $\mathbf{v}$.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

La base canónica de $\mathbb{R}^2$

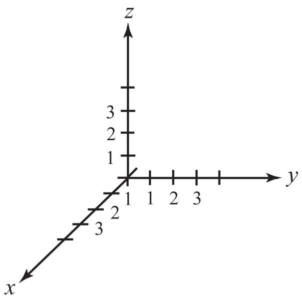
En $\mathbb{R}^2$ podemos representar los puntos en el plano cartesiano como vimos en el Bloque de Cálculo de una variable.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

La base canónica de $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ podemos representar los puntos del espacio como ternas ordenadas. Para ello elegimos tres rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto. A este punto le llamaremos origen de coordenadas y le haremos corresponder la terna $(0,0,0)$.
Estas rectas se llaman *eje x*, *eje y*, *eje z*.



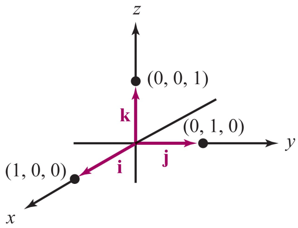
El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

La base canónica de $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ le llamaremos a la base canónica:

$$\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \mathbf{k}.$$

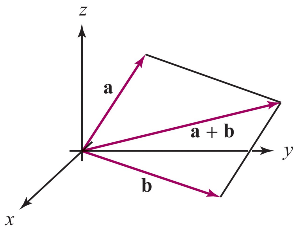
$$\boldsymbol{i} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{j} = (0,1,0), \quad \boldsymbol{k} = (0,0,1).$$



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Geometría de las operaciones vectoriales

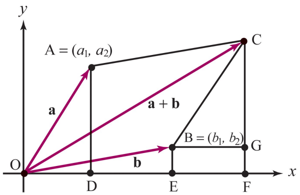
Geométricamente se define la suma de dos vectores $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ como sigue: en el plano que contiene a los dos vectores se forma el paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. La suma es el segmento que parte del origen y recorre la diagonal del paralelogramo.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Geometría de las operaciones vectoriales

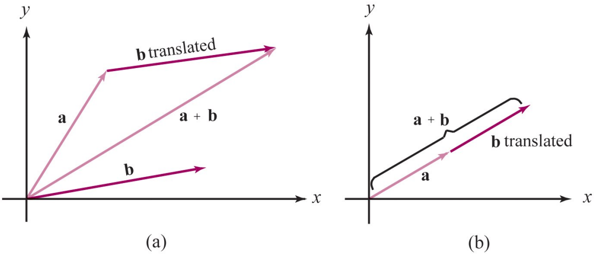
Para el caso de la suma de vectores de $\mathbb{R}^2$ se puede ver que efectivamente esta forma de sumar geométricamente coincide con la suma realizada por componentes: basta emplear semejanza de triángulos.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Geometría de las operaciones vectoriales

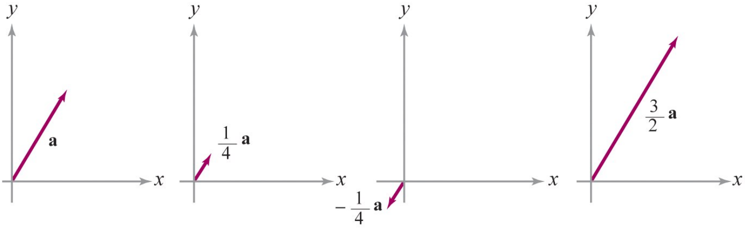
Otra forma de calcular la suma de vectores de forma geométrica es usando triángulos en vez de paralelogramos.
Se traslada sin girarlo el segmento que representa al vector $\boldsymbol{b}$ para que empiece donde termina el vector $\boldsymbol{a}$. El punto donde termina este segmento trasladado es el punto donde termina el vector suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Geometría de las operaciones vectoriales

El producto de vectores por escalares también tiene una interpretación geométrica.
Si $\boldsymbol{a}$ es un vector, y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\boldsymbol{a}$ es el vector con la misma dirección que $\boldsymbol{a}$, cuya longitud es $|\lambda|$ veces la longitud de $\boldsymbol{a}$ y cuyo sentido es el mismo que el de $\boldsymbol{a}$ si $\lambda > 0$ y el opuesto si $\lambda < 0$.



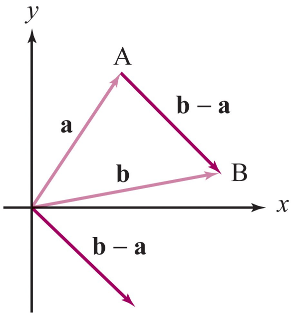
El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Geometría de las operaciones vectoriales

Para el caso de la resta de vectores, basta utilizar que

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}.$$

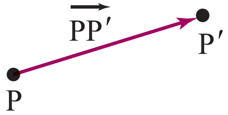
de donde obtenemos que $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ es el vector que hay que sumar a $\boldsymbol{a}$ para obtener $\boldsymbol{b}$.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

El vector que une dos puntos

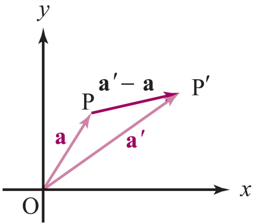
Dados dos puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P'}$ podemos trazar el vector $\boldsymbol{v}$ con inicio en $\boldsymbol{P}$ y con final en $\boldsymbol{P'}$



Si $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z')$ los vectores que van del origen a P y P' son $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$, de modo que el vector $\boldsymbol{PP'}$ es

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = (x - x')\boldsymbol{i} + (y - y')\boldsymbol{j} + (z - z')\boldsymbol{k}$$

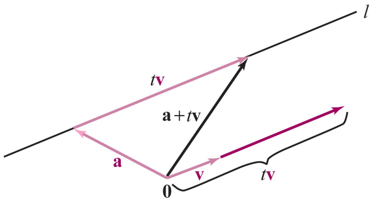
Luego el vector que une dos puntos tiene componentes $(x - x', y - y', z - z')$.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Ecuaciones de rectas

Ecuación de una recta $\boldsymbol{r}$ que pasa por el extremo del vector $\boldsymbol{a}$ y tiene dirección el vector $\boldsymbol{v}$. Todos los puntos de la recta son de la forma $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$. Por tanto la ecuación de la recta se puede expresar paramétricamente como $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}, \quad t \in \mathbb{R}$.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Ecuación punto–vector director de una recta

La ecuación de la recta que pasa por el punto de extremo $\boldsymbol{a}$ y tiene vector director el vector $\boldsymbol{v}$ es

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v},$$

y en coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_1 t, \\ y &= y_0 + v_2 t, \\ z &= z_0 + v_3 t. \end{aligned}$$

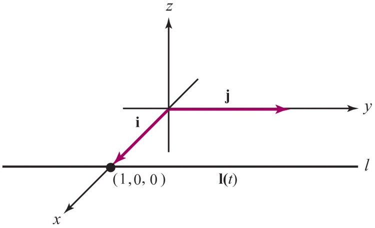
donde $\boldsymbol{a} = (x_0, y_0, z_0)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Ecuaciones de rectas

Ejemplo: Calcular la ecuación de la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y tiene la dirección de $\boldsymbol{j}$ el segundo vector de la base canónica:

$$\boldsymbol{r}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0).$$



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Ecuación paramétrica de una recta que pasa por dos puntos

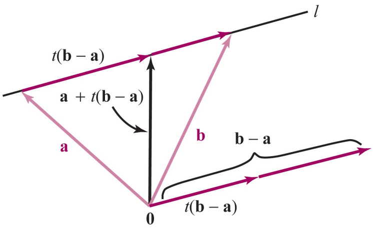
La ecuación paramétrica de una recta r que pasa por dos puntos

$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

viene dada por

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde (x, y, z) es un punto genérico de la recta y $t \in \mathbb{R}$.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Ecuaciones de rectas

Ejemplo:

Calcular la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1, -3)$ y $(6, -1, -5)$

Basta calcular el vector director, $\boldsymbol{v} = (4, -2, -2)$ de manera que la ecuación es:

$$
\begin{aligned}
x &= 2 + 4t, \\
y &= 1 - 2t \\
z &= -3 - 2t.
\end{aligned}
$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Ecuaciones del segmento que une dos puntos

Dados dos puntos $\boldsymbol{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{b} = (x_1, y_1, z_1)$ el segmento que une estos dos puntos se puede parametrizar como:

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \quad t \in [0,1],$$

en forma vectorial:

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_0 + (1-t)x_1, \\ y(t) &= ty_0 + (1-t)y_1, \\ z(t) &= tz_0 + (1-t)z_1. \end{aligned}$$

NOTA: Será de gran utilidad para construir parametrizaciones de segmento en el Tema 5 de Integración sobre curvas.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

En las próximas secciones estudiaremos dos productos de vectores: el producto escalar y el producto vectorial. Ambos muy útiles en las aplicaciones físicas y con interesantes aplicaciones geométricas.

Producto escalar

Dados dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ se define su producto escalar:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Producto escalar (Propiedades)

1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$
   $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

2) $\lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \lambda \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

3) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$
   $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

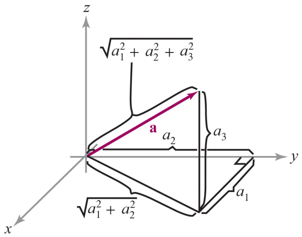
4) Conmutativa
   $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Producto escalar (Norma y distancia)

Este producto escalar define una norma en $\mathbb{R}^n$

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$$

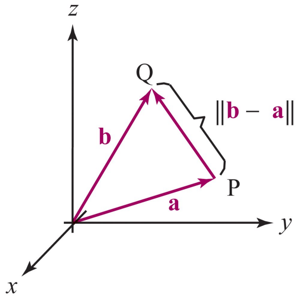


El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Producto escalar (Norma y distancia)

El producto escalar define una distancia en $\mathbb{R}^n$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Vectores unitarios

Llamaremos vectores unitarios a aquellos vectores que tienen norma uno, por ejemplo los vectores de la base canónica.

Para cualquier vector no nulo $\boldsymbol{a}$, $\frac{1}{\|a\|}\boldsymbol{a}$ es unitario. A este vector se le llama el normalizado.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^2$ los vectores de la forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ son unitarios.

2. Normalizar el vector $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}$. Como $\|\boldsymbol{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{53}$

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v} = \frac{4}{\sqrt{53}}\boldsymbol{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{53}}\boldsymbol{k}.$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Teorema

Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ y θ con $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo que forman entre ellos. Entonces:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

Podemos calcular el ángulo formado por dos vectores como

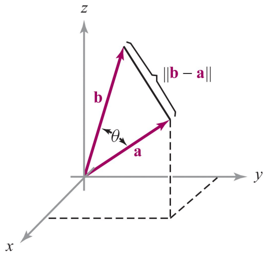
$$\theta = \arccos \left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\|} \right)$$

Demostración:

La comprobación es directa empleando el Teorema del coseno en el triángulo que forman los vectores.

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos \theta.$$

Desarrollando y simplificando obtenemos el resultado buscado.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Teorema (La desigualdad de Cauchy Schwarz)

Para dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ cualesquiera

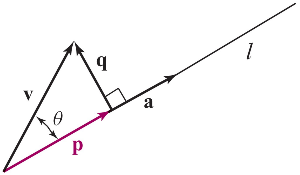
$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|.$$

donde la igualdad se satisface si y sólo si $\boldsymbol{a}$ es múltiplo de $\boldsymbol{b}$ o alguno es cero.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

La proyección ortogonal

Si $\boldsymbol{v}$ es un vector y $\boldsymbol{l}$ es la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector $\boldsymbol{a}$, la proyección ortogonal de $\boldsymbol{v}$ sobre $\boldsymbol{a}$ es el vector $\boldsymbol{p}$ cuyo extremo se obtiene al trazar una recta perpendicular a $\boldsymbol{l}$ desde el extremo de $\boldsymbol{v}$ como se muestra en la figura:



La proyección ortogonal de $\boldsymbol{v}$ sobre $\boldsymbol{a}$ es el vector

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}.$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Teorema (La desigualdad de triangular)

Para dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ cualesquiera

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|.$$

Es una consecuencia directa del Teorema de Cauchy Scharz

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Aplicación del producto escalar en la física

Sabemos que el trabajo realizado por una fuerza de intensidad constante sobre un objeto que sigue una trayectoria rectilínea y uniforme, viene dado por:

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v},$$

donde $\boldsymbol{v}$ es el vector desplazamiento.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Matrices y determinantes

Definimos una matriz 2×2 como una tabla:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y su determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definimos una matriz 3×3 como una tabla:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y su determinante:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

El producto vectorial

Supongamos

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

Se define el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y se denota $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ como

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

o, formalmente:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

El producto vectorial (interpretación geométrica)

Para dar la interpretación geométrica del producto vectorial vamos a dar la definición de producto mixto:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Como consecuencia, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es ortogonal a cualquier vector generado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y en particular a ambos vectores.

Podemos comprobar que

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \cos^2\theta = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

y tomando raíces cuadradas

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\operatorname{sen}\theta|.$$

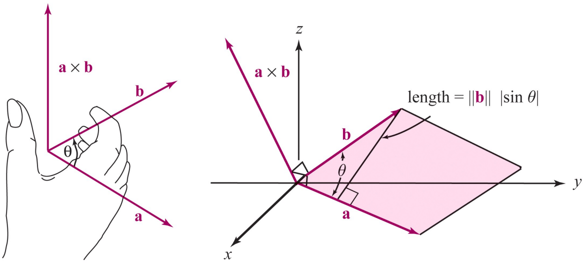
El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Producto vectorial (Definición geométrica)

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es el vector que satisface:

1. $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\mathrm{sen}\,\theta|$, el área del paralelogramo definido por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, siendo θ el ángulo formado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$ y a $\boldsymbol{b}$ y la terna $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ satisface la *"regla de la mano derecha"*.



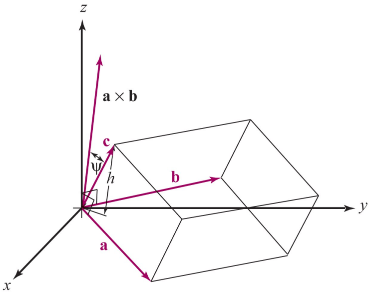
El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Volumen de un paralelepípedo

Dados tres vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ el valor absoluto del determinante

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

coincide con el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son dichos vectores, puesto que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es el área de la base y $\boldsymbol{c}|\cos\theta|$ es el valor de la altura del paralelepípedo.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Aplicación del producto ecalar: la ecuación de un plano

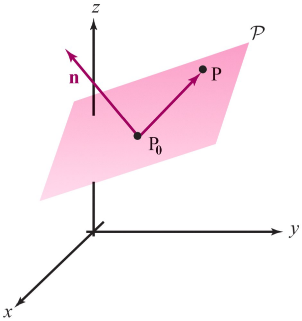
La ecuación del plano Π que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene como vector normal el vector $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B + C\boldsymbol{k}$ es:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

esto es, $(x, y, z) \in \Pi$ si y sólo si

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Aplicación del producto vectorial: distancia de un punto a un plano

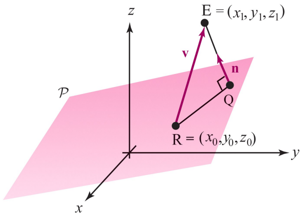
La distancia del punto (x_1, y_1, z_1) al plano $Ax + By + Cz = 0$ viene dada por:

$$d(\boldsymbol{x}, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La demostración es sencilla. Un vector normal unitario al plano es:

$$\boldsymbol{n} = \frac{A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\text{Distancia} = |\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

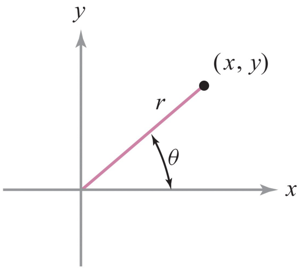


El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Sistemas de coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

donde tomamos $0 \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

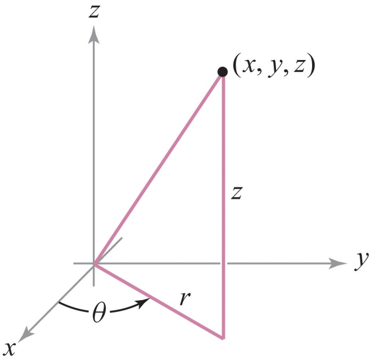


El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Sistemas de coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

donde tomamos $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

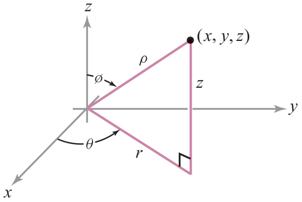


El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Sistemas de coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

donde tomamos $0 \leq \rho$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.



El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Sistemas de coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ (relación con la navegación)

Las coordenadas esféricas están estrechamente ligadas a la navegación, por medio de la latitud y la longitud:

- La longitud geográfica se corresponde con $|\theta|$ y se llama longitud este u oeste dependiendo de si θ es positivo o negativo medido con referencia al meridiano de Greenwich.

- La latitud geográfica es el ángulo ϕ, pero medido con respecto al plano $z = 0$ y varía entre $[-\pi/2, \pi/2]$. En este caso tenemos latitud norte y latitud sur dependiendo de si *phi* es positivo o negativo medido con respecto al ecuador (la circunferencia intersección de la esfera y el plano $z = 0$).