Ampliación de Cálculo

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

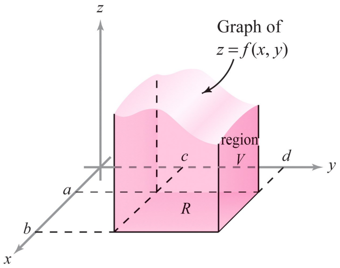
Tema 4. Integral múltiple

1. Integrales dobles.
2. Integrales triples.

Tema 4. Integral múltiple

Integral Doble

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, R rectángulo con lados paralelos a los ejes. Supongamos $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f(x, y) \geq 0$ en R. La gráfica de $z = g(x, y)$ es una superficie sobre el rectángulo R. El rectángulo R, la superficie y los cuatro planos $x = a, x = b, y = c, y = d$ forman una región V en el espacio.



El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de la función no negativa f se llama **integral doble** de f sobre R y se denota

$$\iint_R f(x, y)\,dA, \text{ o } \iint_R f(x, y)\,dxdy.$$

Tema 4. Integral múltiple

El método de las secciones. Principio de Cavalieri

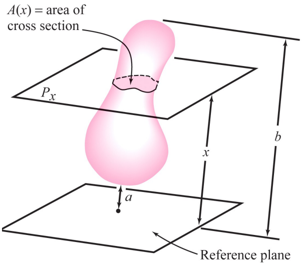
Sea S un sólido y P_x, con $a \leq x \leq b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.

2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

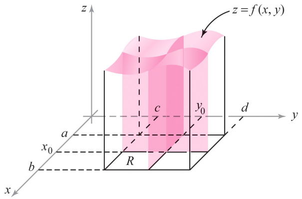
$$\int_a^b A(x)dx.$$



Tema 4. Integral múltiple

Reducción a integrales iteradas

Podemos emplear el ppo. de Cavalieri para calcular integrales dobles.



Si usamos planos de corte paralelos al eje X

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

y si usamos planos de corte paralelos al eje Y

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

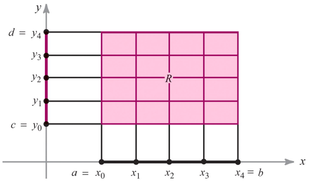
Tema 4. Integral múltiple

La Integral Doble sobre un rectángulo

Consideremos un rectángulo cerrado $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Partición regular de R:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d.$$

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}.$$



Partición regular de un rectángulo

Tema 4. Integral múltiple

Definición de Integral Doble sobre un rectángulo

Una función $f(x, y)$ se llama acotada si existe $M > 0$, tal que $|f(x, y)| < M$.
Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $R = [a, b] \times [c, d]$, función acotada. Para cada rectángulo $R_{j,k} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ de la partición de R tomamos un punto $\boldsymbol{c}_{jk}$. Sea la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n} f(\boldsymbol{c}_{jk})\Delta x \Delta y.$$

Entonces si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ para cualquier elección de los puntos $\boldsymbol{c}_{jk}$ entonces decimos que f es integrable en R y escribimos

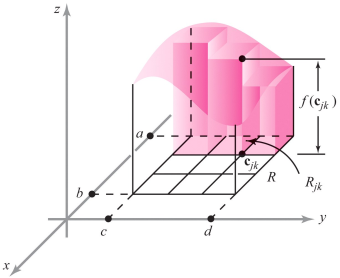
$$\iint_R f(x, y)dA, \quad \iint_R f(x, y)dxdy, \quad \iint_R fdxdy.$$

Por tanto

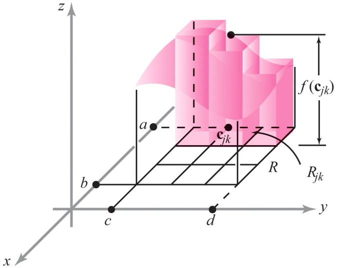
$$\iint_R f(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\boldsymbol{c}_{jk})\Delta x \Delta y.$$

Tema 4. Integral múltiple

La Integral Doble sobre un rectángulo



Sumas inferiores



Sumas superiores

Tema 4. Integral múltiple

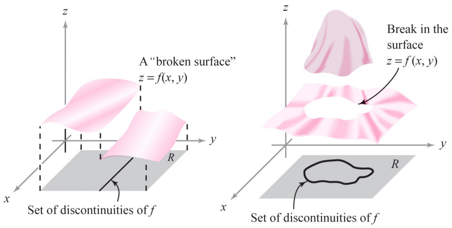
Propiedades de la integral

Teorema (Integrabilidad de las funciones continuas)

Toda función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable.

Teorema (Integrabilidad de las funciones acotadas)

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función real acotada sobre el rectángulo R y supongamos que el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Entonces f es integrable en R.



Tema 4. Integral múltiple

Teorema de Fubini en rectángulos

Sea f una función continua sobre un dominio rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Demostración (Basta probar el primer caso, pues el otro es análogo)

Dada $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, partición de $[c, d]$

Definimos F, y le aplicamos Teor. del valor medio (para integrales)

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\, dy = [TVM] = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k).$$

Tomando $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, partición de $[a, b]$:

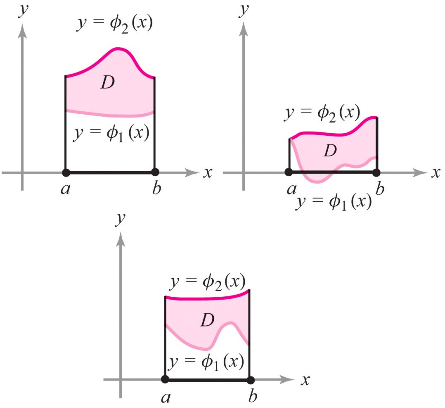
$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy\right] dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_j \sum_k f(\boldsymbol{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Tema 4. Integral múltiple

Extensión del concepto de integral doble a regiones más generales

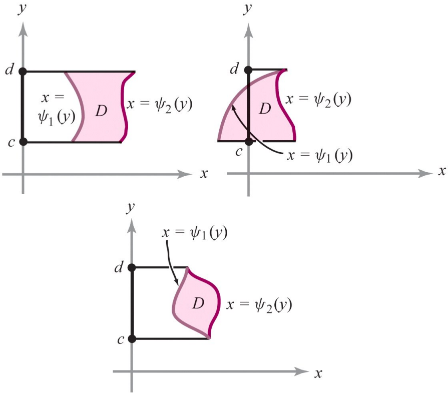
Regiones elementales y-simples



Tema 4. Integral múltiple

Extensión del concepto de integral doble a regiones más generales

Regiones elementales x-simples



Tema 4. Integral múltiple

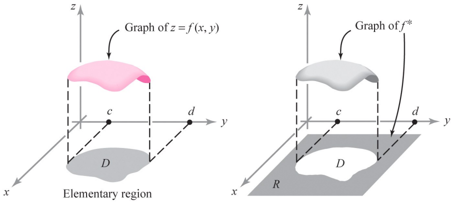
La integral sobre una región elemental

Si D es una región elemental en el plano, elegimos un rectángulo R que contenga a D. Dada una función continua y por tanto acotada, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos $\iint_D f(x, y)dA$, la integral de f sobre el conjunto D, como sigue: extendemos f a una función f^* definida en R como

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \text{ y } (x, y) \in R \end{cases}$$

Entonces podemos definir

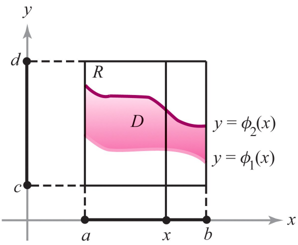
$$\iint_D f(x, y) = \iint_R f^*(x, y)dA.$$



(a) (b)

Tema 4. Integral múltiple

Reducción a integrales iteradas



Reducción a integrales iteradas para regiones y-simples

Si D es una región y-simple entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right] dx$$

Reducción a integrales iteradas para regiones x-simples

Si D es una región x-simple entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \right] dy$$

Tema 4. Integral múltiple

Propiedades de la integral doble

1. Si f, g funciones integrables en D, entonces $\lambda f + \mu g$ es integrable en D y
$$\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy + \mu \iint_D g(x,y)dxdy.$$

2. Si f y g integrables en D y $f \leq g$
$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$

3. Si f es integrable en D, entonces $|f|$ es integrable en D y
$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

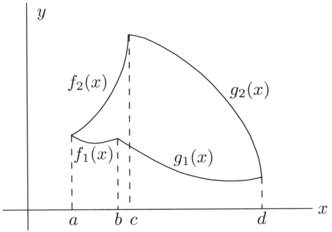
4. Aditividad respecto al soporte de integración. Si f integrable en D_1 y D_2, siendo $D = D_1 \cup D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Estas propiedades se deducen de las propiedades de las sumas de Riemann de la misma forma que para funciones reales de variable real.

Tema 4. Integral múltiple

Integral doble. Ejemplos

1. Región de tipo 1. Calcular la integral:
$$\iint_D (y-x)\,dxdy$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq x^3\}$$
2. Región de tipo 2. Calcular la integral:
$$\iint_D 3x\,dxdy$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 1 \leq y \leq 2, \quad y \leq x \leq 2y\}$$
3. Límites de integración. Ejercicios de determinación de límites de integración.



Tema 4. Integral múltiple

Teorema del valor medio para integrales dobles

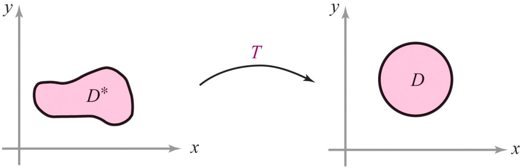
Supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y D es una región elemental. Entonces para algún punto $(x_0, y_0) \in D$

$$\iint_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0)A(D).$$

donde $A(D) =$ Área de D.

Tema 4. Integral múltiple

Integral doble. Aplicaciones de una región en otra



Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones inyectivas

Una aplicación es inyectiva en D^* si para (u,v) y $(u',v') \in D^*$

$$T(u,v) = T(u',v')\text{implica } u = u',\ v = v'.$$

Aplicaciones sobreyectivas

Una aplicación es inyectiva sobre D si para todo punto $(x,y) \in D$, existe al menos un punto $(u,v) \in D^*$ tal que $T(u,v) = (x,y)$.

Tema 4. Integral múltiple

Ejemplo: cambio a polares

Dado $D^* \subset \mathbb{R}^2$, $D^* = [0,1] \times [0, 2\pi]$, y la aplicación

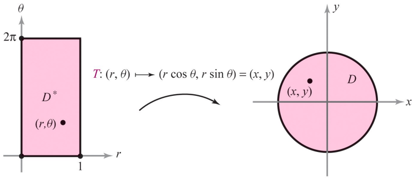
$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

Hallar $T(D)$.

Basta tener en cuenta que

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2 < 1$$

por tanto D está contenido en el disco unidad, y al inversa, todo punto del disco unidad es imagen por T de un punto de D^*.



Tema 4. Integral múltiple

Determinante jacobiano

Sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1, dada por

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

El determinante jacobiano de T, que se escribe $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ es el determinante de la matriz jacobiana de T.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Tema 4. Integral múltiple

El Teorema del cambio de variable

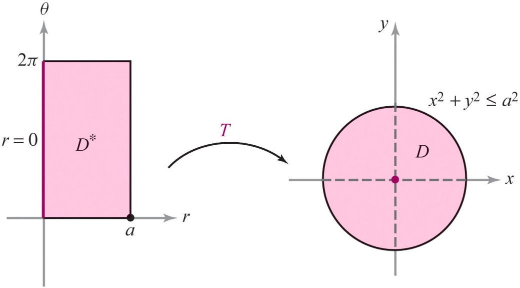
Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1. Supongamos que T es inyectiva y que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función $f : D \to \mathbb{R}$ integrable

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

Tema 4. Integral múltiple

Integrales en coordenadas polares

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\,\theta)r\; drd\theta.$$



Tema 4. Integral múltiple

Integral doble. Cambio de variable

Sea T' la jacobiana de T, entonces por el concepto de diferencial

$$T(u_0, v_0) + T'\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix},$$

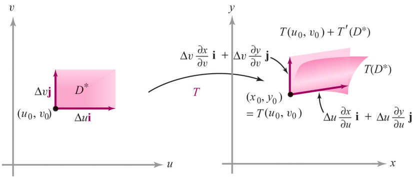
Esta aplicación transforma D^* en un paralelogramo con vértice $T(u_0, v_0)$ y lados adyacentes:

$$T'(\Delta u\,\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u \boldsymbol{T}_u,$$

y análogamente $T'(\Delta u\,\mathbf{i}) = \Delta v \boldsymbol{T}_v$.

Por tanto el área de $T(D^*)$ es

$$\left| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| \Delta u \Delta v$$



Tema 4. Integral múltiple

Definición de Integral Triple

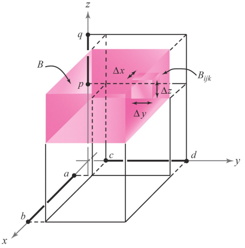
Nuestro objetivo es definir la integral de funciones acotadas de tres variables, $f(x,y,z)$, en cajas (paralelepípedos rectangulares) $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$. Como en la integral doble, dividimos los tres lados de B en partes iguales y definimos la suma parcial:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\boldsymbol{c}_{ijk})\, \Delta V,$$

donde $\boldsymbol{c}_{ijk} \in B_{ijk}$ y $\Delta V = \text{vol}\,(B_{ijk})$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existe y es independiente de la elección de $\boldsymbol{c}_{ijk}$ decimos que f es integrable y llamamos a S la integral triple de f en B y la denotamos:

$$\iiint_B f dV, \quad \iint_B f(x,y,z) dV, \quad \text{o} \quad \iiint_B f(x,y,z) dxdydz.$$



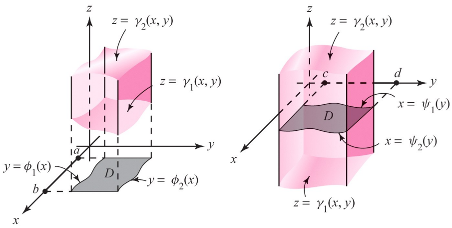
Tema 4. Integral múltiple

Regiones elementales

Una región elemental en el espacio tridimensional es aquella en la que una de las variables está entre dos funciones de las otras dos, siendo los dominios de estas funciones regiones simples del plano.

Por ejemplo, si D es una región elemental del plano y XY y $\gamma_1(x, y)$, $\gamma_2(x, y)$ son dos funciones tales que $\gamma_2(x, y) \geq \gamma_1(x, y)$, una región elemental es la formada por los puntos:

$$\{(x, y, z) \ : \ (x, y) \in D, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}.$$



Tema 4. Integral múltiple

Reducción a integrales iteradas.

$$
\begin{aligned}
\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz = & \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz \\
& \int \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\,dxdydz \\
& \int \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x,y,z)\,dxdydz.
\end{aligned}
$$

y así en el resto de los casos (Hay $3! = 6$ casos posibles).

Tema 4. Integral múltiple

Integrales sobre Regiones elementales. Integrales iteradas.

Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y. Entonces, obien

$$\iiint_W f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx,$$

o bien

$$\iiint_W f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy.$$

Tema 4. Integral múltiple

Fórmula del cambio de variable para integrales triples

$$\iiint_W f(x,y,z)dxdydz = \iiint_W f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

donde W^* es una región elemental en el espacio uvw que se corresponde con W en el espacio x,y,z por una aplicación

$$T: \ (u,v,w) \to (x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)),$$

supuesto que T es de clase C^1 y que es inyectiva, excepto a lo sumo en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables.

Tema 4. Integral múltiple

Cambio de variables. Coordenadas cilíndricas

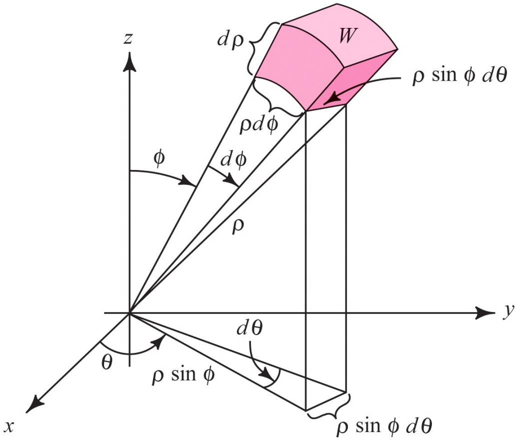
$$\iiint_W \mathbf{f}(x,y,z)dxdydz = \iiint_{W*} f(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\,\theta, z)r\,drd\theta dz.$$

Cambio de variables. Coordenadas esféricas

$$\iiint_W \mathbf{f}(x,y,z)dxdydz = \iiint_{W*} f(\rho\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\mathrm{sen}\,\phi\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\mathrm{sen}\,\phi\,drd\theta d\phi.$$

Tema 4. Integral múltiple

Cambio de variable a esféricas



Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones físicas

- Cálculo de áreas mediante integral doble.
- Cálculo de volúmenes mediante integral triple.
- Cálculo de centros de masa mediante integral triple.
- Cálculo de momentos de inercia.

Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones físicas. Centros de masas

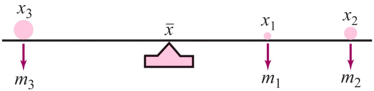
Si se sitúan n masas $m_1, \ldots, m_n$ en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ del eje X su centro de masas se define como:

$$\frac{\sum m_i\, x_i}{\sum m_i}.$$

Justificación: si se equilibran varias masas sobre una palanca, el punto de equilibrio $\bar{x}$ es el punto para el que el momento total (masa por distancia al punto de equilibrio) es cero, es decir:

$$\sum m_i (x_i - \bar{x}) = 0,$$

condición equivalente a que la palanca no tenga tendencia a rotar.

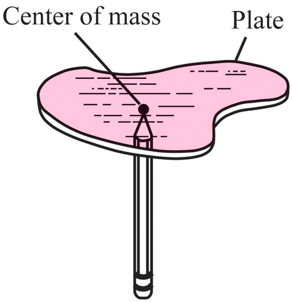


Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones físicas. Centros de masa de superficies planas

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)}{\iint_D \rho(x,y)\,dxdy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)}{\iint_D \rho(x,y)\,dxdy}$$

donde $\rho(x,y)$ es la densidad de masa en el punto (x,y).



Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones físicas. Momento de inercia de una lámina

1. Energía cinética y momento de inercia (sistema de partículas)

   Suponemos un cuerpo rígido formado por n masas puntuales m_i situadas a distancia r_i de una recta llamada eje de rotación con velocidad angular ω (la velocidad es por tanto $v = r\omega$). La energía cinética se obtiene sumando la energía cinética de todas las partículas:

   $$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i^2 \right) \omega^2 .$$

   La expresión entre paréntesis se llama momento de inercia (o inercia rotacional) del cuerpo y se designa por I:

   $$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i^2 .$$

2. Momento de inercia para una lámina (generalización a un cuerpo continuo)

   Supongamos una lámina con forma de región D que gira alrededor de un eje. El momento de inercia de la lámina respecto del eje viene dado por:

   $$I = \iint_D \rho(x,y)[r(x,y)]^2 \, dx \, dy$$

   donde $\rho(x,y)$ es la función de densidad y $r(x,y)$ es la distancia del punto (x,y) al eje de rotación.

Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones físicas. Centros de masa de sólidos

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_W \rho(x,y,z)\,dxdydz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_W y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_W \rho(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_W z\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_W \rho(x,y,z)\,dxdydz}.$$

donde $\rho(x,y)$ es la densidad de masa en el punto (x,y).

Tema 4. Integral múltiple

Aplicaciones físicas

Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados

$$I_x = \iiint_W (y^2 + z^2)\delta dxdydz \qquad I_y = \iiint_W (x^2 + z^2)\delta dxdydz$$

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\delta dxdydz$$

Tema 4. Integral múltiple

Momentos de inercia (Ejemplo)

1. Calcular el momento de inercia respecto al eje z del sólido de densidad constante, limitado por el plano XY, acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, con a constante

$$I_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} \rho\, r^2 \cdot r\, dz d\theta dr = \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3\, dz d\theta dr = \frac{\pi \rho a^6}{3}.$$