Fundamentos Matemáticos

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 2: Integración

Tema 2. Integración

Motivación del concepto de integral definida

Cálculo de áreas de figuras sencillas:

- Área del cuadrado la lado l: $A = l^2$
- Área del rectángulo de lados $b, \ h$, $A = b \times h$
- Área del círculo de radio r, $A = \pi r^2$

Sin embargo, hay figuras sencillas para las que no tenemos una fórmula sencilla para el cálculo del área. Por ejemplo, calcular el área encerrada bajo la gráfica de la parábola $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Tema 2. Integración

Integral definida

Introducimos formalmente el concepto de integral definida como área encerrada bajo la gráfica de una función.

Sumas de Riemann

Sea f función acotada en un intervalo $[a, b]$ y P una partición del intervalo $[a, b]$,

$$P = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = b\}$$

Suma superior de Riemann f asociada a P, $U(f, P)$

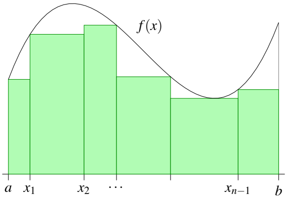
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad M_i = sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

Suma inferior de Riemann de f asociada a P, $L(f, P)$

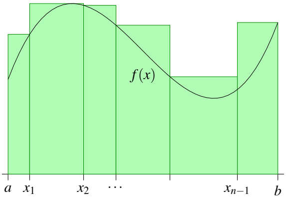
$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad m_i = inf\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Tema 2. Integración

Integral definida



Suma inferior asociada a una partición



Suma superior asociada a una partición

Tema 2. Integración

Definición

Dada f acotada en $[a, b]$ se define la integral inferior de f en $[a, b]$ como

$$\underline{\int_a^b} f = sup\{L(f, P) \ : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

y la integral superior de f en $[a, b]$ como

$$\overline{\int_a^b} f = inf\{U(f, P) \ : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

Definición

Se dice que la función f acotada en $[a, b]$ es integrable Riemann en $[a, b]$ o simplemente integrable si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

En tal caso al valor común se le llama integral de Riemann de f en $[a, b]$ y se denota $\int_a^b f$

Observación

La integral coincide con el área encerrada bajo la gráfica de la función, A, en caso de que f tome valores positivos en el intervalo $[a, b]$.

Tema 2. Integración

Integrabilidad de las funciones monótonas

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces f es integrable.

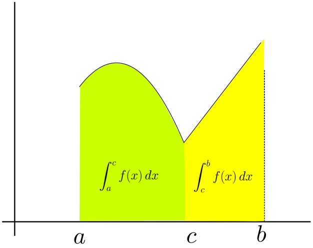
Integrabilidad de las funciones continuas

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es integrable.

Tema 2. Integración

Propiedades de las funciones integrables

1. Si f, g integrables en $[a, b]$
   - αf integrable y $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$
   - $f + g$ integrable y $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. Aditividad respecto a intervalos:
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



Tema 2. Integración

Propiedades de las funciones integrables

3 Integral definida y desigualdades. Si f, g integrables en a, b con $f \leq g$:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

en particular si $h \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b h \geq 0$

4 Integral definida y valor absoluto

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Tema 2. Integración

Teoremas del valor medio del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, función continua en $[a,b]$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt}{b-a}.$$

Valor medio de una función en un intervalo

Si f es integrable se define el valor medio de f en el intervalo $[a,b]$ como

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Tema 2. Integración

Teoremas fundamentales del cálculo integral

- **Primer Teorema Fundamental del Cálculo**

  Si f es una función continua entonces la función definida por

  $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

  es derivable y su derivada viene dada por $F'(x) = f(x)$.

  Definición (Primitiva de una función)

  A una función F, tal que $F'(x) = f(x)$ la llamaremos Primitiva de f.

  Observación

  Si F, G son primitivas de f, entonces F y G difieren en una constante, es decir:

  $$G(x) = F(x) + C.$$

Tema 2. Integración

Teoremas fundamentales del cálculo integral

- Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left. F(x) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Muy importante: enlaza el concepto de área (integral definida) con el de primitiva de una función.

Tema 2. Integración

Integrales inmediatas

- $\displaystyle\int f(x)^m f'(x)dx = \frac{1}{m+1}f(x)^{m+1} + C, \quad m \neq 1$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$
- $\displaystyle\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
- $\displaystyle\int a^{f(x)}f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$
- $\displaystyle\int \sin(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$
- $\displaystyle\int \cos(f(x))f'(x)dx = \sin(f(x)) + C$

Tema 2. Integración

Integrales inmediatas (cont.)

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan\,(f(x)) + C,$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \arcsin(f(x)) + C$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}dx = \tan(f(x)) + C$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}dx = -ctan(f(x)) + C$
- $\displaystyle\int \tan(f(x))f'(x)dx = -\ln|\cos(f(x))| + C$
- $\displaystyle\int ctan(f(x))f'(x)dx = -\ln|\sin(f(x))| + C$

Tema 2. Integración

Técnicas de cálculo de primitivas:

- Integración por partes,
- Integración por cambio de variable,
- Integración de funciones racionales,
- Integración de funciones trigonométricas,
- Integración de funciones irracionales.

Tema 2. Integración

Integración por partes

Deduciremos la fórmula de la integración por partes, que se obtiene de forma directa a partir de la fórmula de la derivada de un producto, sin más que integrar en dicha expresión:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du,$$

y su versión con la integral definida:

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Ejemplo:

Aplicación reiterada de integración por partes:

$$I = \int \cos 2x\, e^x dx = [u = \cos 2x,\ dv = e^x] = \cos 2xe^x + 2\int \operatorname{sen} 2xe^x\, dx =$$
$$[u = \operatorname{sen} 2x, dv = e^x] = e^x(\cos 2x + 2\operatorname{sen}(2x)) - 4\int cos2xe^x dx =$$
$$e^x(\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x) - 4I$$

Despejando I:

$$I = \int cos2xe^x dx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x)$$

Tema 2. Integración

Integración por cambio de variable

Sean f, g funciones, G primitiva de g, entonces por la regla de la cadena

$$(G \circ f)'(x) = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x).$$

Por lo tanto si llamamos $u = f(x),\ du = f'(x)dx$ obtenemos una nueva integral

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)du = G(u) + C = G(f(x)) + C,$$

que es más sencilla de calcular. En el caso de la integral definida escribiríamos:

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du.$$

Tema 2. Integración

Integración de funciones racionales

Un primer método para el cálculo de primitivas de funciones racionales es emplear su ***descomposición en suma de fracciones simples***.

Dada una función racional propia, es decir,

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

con m, n los grados de los polinomios y $n < m$ y tal que el polinomio del denominador admite la siguiente factorización:

$$Q_m(x) = (x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_p)^{n_p} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k},$$

y donde:

- $x_1, \dots, x_p$ son las raíces reales del polinomio $Q_m(x)$,
- y los factores $x^2 + p_k x + q_k, \; i = 1, \dots, k$ no tienen raíces reales.

Entonces la función racional $R(x)$ se puede descomponer en suma de fracciones simples, cuyas integrales son ya fáciles de calcular.

Tema 2. Integración

Integración de funciones racionales

Descomposición en fracciones simples

$$
\begin{aligned}
R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad = \quad & \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \\
& \frac{B_{n_p}}{(x-x_p)^{n_p}} + \ldots + \frac{B_1}{x-x_p} + \ldots + \\
& \quad \vdots \\
& \frac{M_{m_1}x + N_{m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \ldots \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \\
& \\
& \frac{L_{m_k}x + K_{m_k}}{(x^2+p_kx+q_k)^{m_k}} + \ldots \frac{L_kx+K_k}{(x^2+p_kx+q_k)},
\end{aligned}
$$

donde $A_i, \; B_i, \; M_i, \; N_i, \; L_i, \; K_i$, son constantes reales.

Tema 2. Integración

Integración de funciones racionales

Primitivas de las fracciones simples:

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$

2) $\displaystyle\int \frac{B}{(x-a)^k}\,dx = \frac{B}{1-k}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k>1,$

3) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$

4) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$. Mediante una fórmula de reducción se puede reducir al cálculo de una integral del tipo 3) (ver ejemplo).

Tema 2. Integración

Integración de funciones racionales

Ejemplos:

1. Calcular:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

Haciendo el cambio $(x+1)/2 = t$ transformamos la integral en:

$$\begin{aligned} \frac{2}{4t^2+4}^{2} dt &= \frac{2}{4^2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{8} I_2(t) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{t}{2(2-1)(t^2+1)^{2-1}} + \frac{4-3}{4-2} I_1(t)\right) \end{aligned}$$

Tema 2. Integración

Integración de funciones trigonométricas

1. Por lo general todas las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ se pueden convertir en integrales racionales mediante el cambio de variable $t = \tan\frac{x}{2}$,

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = \left\{ \begin{array}{cc} t = \tan\frac{x}{2} & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int f(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2dt}{1+t^2}\, dt$$

2. Algunas integrales trigonométricas admiten cambios más sencillos:
   - Si $f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \cos x$,
   - Si $f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \operatorname{sen} x$,
   - Si $f(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \tan x$.

Tema 2. Integración

Integración de funciones trigonométricas

Ejemplos:

1. Impar en $\operatorname{sen} x$,
   $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\cos^2 x}\, dx$$
   Hacemos el cambio $t=\cos x$
   $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$
   $$= \frac{-2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}+C$$

2. Cambio $t=\tan\dfrac{x}{2}$
   $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = [t=\tan\frac{x}{2}] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \log(\tan\frac{x}{2})$$

Tema 2. Integración

Integración de funciones trigonométricas

1. Otro caso importante es el de aquellas funciones que son potencias de senos o de cosenos:

$$\int \operatorname{sen}^m x \; \cos^n x \, dx$$

Distinguimos los siguientes casos

- **Si m o n son impares**

$$\operatorname{sen}^{2k+1} x = \operatorname{sen} x \, (1 - \cos^2 x)^k, \text{ y hacemos el cambio } u = \cos x,$$

$$\cos^{2k+1} x = \cos x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k, \text{ y hacemos el cambio } u = \operatorname{sen} x.$$

- **Si m y n son pares** se escriben en función del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Tema 2. Integración

Integración de funciones trigonométricas

Ejemplos:

1. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x (1 - \operatorname{sen} x^2) \, dx = [\text{cambio } u = \operatorname{sen} x] = \int u^2 - u^4 \, du = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$

2. $\int \cos^4 x \, dx = \dfrac{1}{4} \int (1 + \cos(2x))^2 \, dx = \dfrac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$

   Como aparece un $\cos^2 2x$, aplicamos de nuevo lo anterior:

   $= \dfrac{1}{4} x + \dfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$

Tema 2. Integración

Integración de funciones irracionales

Las integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})$ e $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ se pueden convertir en trigonométricas mediante los cambios

1. $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$, cambio $x = \dfrac{a}{\operatorname{sen} t}$,
2. $\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})$, cambio $x = a \tan t$,
3. $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, cambio $x = a \operatorname{sen} t$.

Tema 2. Integración

Integración de funciones irracionales

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dx}}{(9-x^2)^{3/2}}$

   En esta integral aparece una expresión del tipo $\sqrt{9-x^2}$. Por tanto hacemos el cambio $3\mathrm{sen}\, t = x, \quad 3\cos t\, dt = \mathrm{dx}$

   Luego

   $$\int \frac{\mathrm{dx}}{(9-x^2)^{3/2}} = \int \frac{3\cos t\, dt}{(3\cos t)^3} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9}\tan t + C = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$$

Tema 2. Integración

Aplicaciones de la integral al cálculo de áreas y volúmenes

- Cálculo de áreas encerradas entre la gráfica de funciones,
- Cálculo de volúmenes de revolución,
- Cálculo de longitudes de curvas,
- Cálculo de áreas de superficies de revolución.

Tema 2. Integración

Cálculo del área encerrada bajo la gráfica de una función

Ejemplos:

1. Calcular el área encerrada dentro de la elipse de semiejes a y b

   La ecuación cartesiana de la elipse viene dada por:

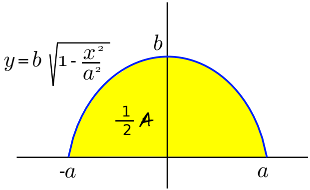
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Podemos calcular el área como

$$A = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})}\,\mathrm{dx} = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}\,\mathrm{dx}$$

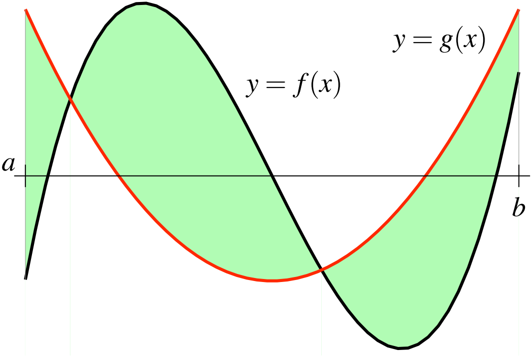
Hacemos el cambio $a\mathrm{sen}\, t = x, \quad a\cos t\, dt = \mathrm{dx}$

$$= 2\frac{b}{a}a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2ba\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = ab\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab$$



Tema 2. Integración

Cálculo del área encerrada entre la gráfica de dos funciones



El área de la figura es $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

Tema 2. Integración

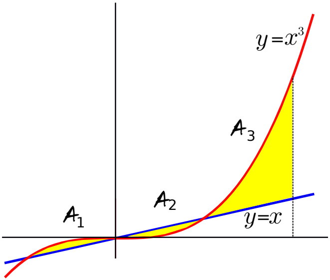
Cálculo del área encerrada entre la gráfica de dos funciones

Ejemplos:

1. Área comprendida entre las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ entre $x = -1$ y $x = 2$
   Buscamos los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$:

$$x = -1, \; x = 0, \; x = 1.$$

$$A = \int |f(x) - g(x)| \, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x) \, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3) \, dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x) \, dx$$

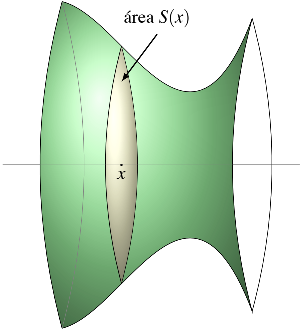


Tema 2. Integración

Principio de Cavalieri

Sin tenemos un sólido cuyas secciones en cada punto x tiene una sección de área $S(x)$, entonces el volumen se puede calcular como:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Tema 2. Integración

El método de las secciones. Principio de Cavalieri

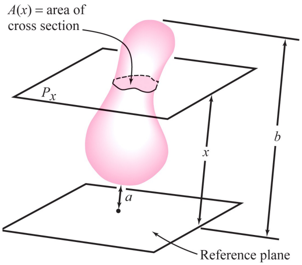
Sea S un sólido y P_x, con $a \leq x \leq b$ una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.

2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)dx.$$



Tema 2. Integración

El método de las secciones. Principio de Cavalieri

Ejemplos:

1. Calcular el volumen de un sólido cuya base es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2 y cuyas secciones por planos perpendiculares al plano XY para cada valor de x son triángulos equiláteros cuya base es el diámetro de la circunferencia.

   Para cada x, la base mide:
   $$b(x) = 2\sqrt{2 - x^2}$$

   La altura se calcula empleando el teorema de Pitágoras:
   $$h(x) = \sqrt{4(2 - x^2) - (2 - x^2)} = \sqrt{3}(2 - x^2)$$

   Por tanto el área de cada sección es:
   $$A(x) = \frac{b(x)h(x)}{2} = \sqrt{3}(2 - x^2)$$

   y finalmente:
   $$V = \int_{-2}^{2} \sqrt{3}(2 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}\sqrt{3}$$

Tema 2. Integración

Cálculo de volúmenes de revolución

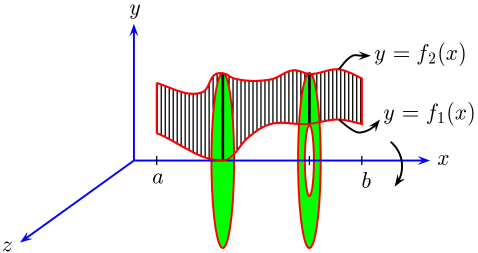
- Integración por discos

-Revolución en torno al eje X

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx,$$

-Revolución en torno al eje Y

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy.$$



Tema 2. Integración

Cálculo del área encerrada entre la gráfica de dos funciones

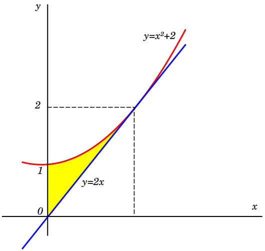
Ejemplos:

1. Calcular el volumen del sólido del sólido generado al girar alrededor dell eje OX el recinto limitado por las curvas $y = 0$, $y = x^2 + 1$ y la tangente a esta última en el punto $x = 1$.

   La recta tangente a la curva en $x = 1$ es $y = 2x$

   Por tanto, en este ejemplo $f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = 2x$

$$V = \pi \int_0^1 [(x^2+1)^2 - (2x)^2]\, \mathrm{dx} = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\, \mathrm{dx} = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

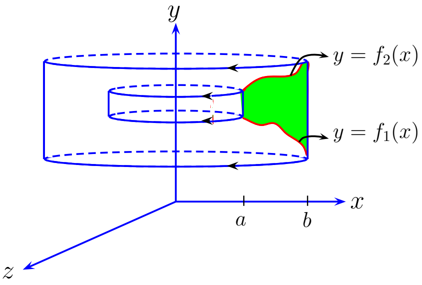


Tema 2. Integración

Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

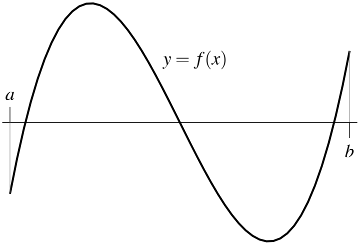
- Integración por capas

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$

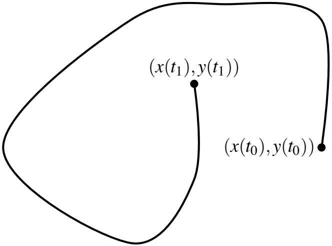


Tema 2. Integración

Cálculo de longitudes de curvas



La longitud de la curva es $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$



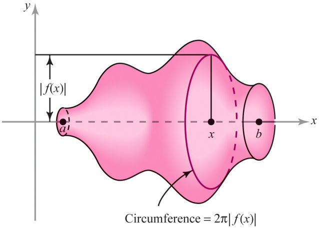
La longitud de la curva es $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

Tema 2. Integración

Cálculo de áreas de superficies de revolución

El área de una superficie de revolución engendrada por un arco de curva, dado por la gráfica de una función entre los puntos a y b viene dada por:

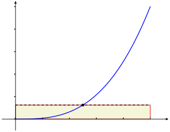
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$



Tema 2. Integración

Integración numérica. Fórmulas simples

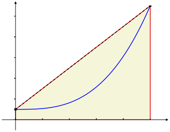
- Fórmula del rectángulo



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(x_0), \quad x_0 \in [a,b]$$

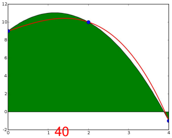
Si $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, se conoce como fórmula de punto medio o fórmula de Poncelet

- Fórmula del trapecio



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

- Fórmula de Simpson



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

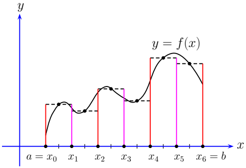
Tema 2. Integración

Integración numérica. Fórmulas Compuestas

Fórmula del punto medio compuesta: Dividimos el intervalo de integración en n subintervalos:

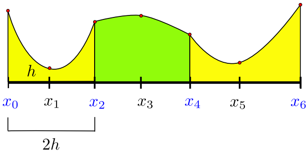
$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$



Fórmula de Simpson compuesta: Dividimos el intervalo de integración en $2n$ subintervalos más pequeños: $x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n, \quad h = \dfrac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right]$$



Tema 2. Integración

La integral impropia

Extensión del concepto de integral al caso en que, o bien la función, o bien el intervalo de integración (o ambos) son no acotados.

- Tipos de integrales impropias
  - Primera especie: intervalo no acotado. Por ejemplo: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
  - Segunda especie: función no acotada. Por ejemplo: $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
  - Tercera especie: mezcla de ambos casos.

Tema 2. Integración

Integral impropia de primera especie (intervalo de integración no acotado)

Sea f continua en el intervalo $[a, +\infty)$. Para cada $b > a$ podemos construir la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Si existe

$$\lim_{b \to \infty} f(x)dx = l,$$

entonces escribiremos

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = l$$

y diremos que la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge a l.

Tema 2. Integración

Ejemplo integral de primera especie

Teorema

La integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ converge para $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

La comprobación es directa puesto que:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

Para $p = 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b \to \infty} \log b = \infty.$$

Tema 2. Integración

Criterios de convergencia para int. de 1ª especie para funciones positivas

Criterio de comparación por desigualdades

Supongamos f, g continuas en $[a, +\infty)$ tales que

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{para todo } x \in (a, +\infty),$$

entonces:

1. Si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge,
2. Si $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge,

Tema 2. Integración

Criterio de comparación por cocientes

Supongamos f, g continuas en $[a, +\infty)$ tales que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad c < \infty.$$

entonces:

1. Si $c > 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si y sólo si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge,
2. Si $c = 0$, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ converge implica $\int_a^\infty f(x)dx$ converge,

Tema 2. Integración

Integral de segunda especie (función no acotada)

Sea f continua en el intervalo $(a,b]$. Para cada $t<b$ podemos construir la integral

$$\int_t^b f(x)\,dx.$$

Si existe

$$\lim_{t\to a}\int_a^b f(x)dx = l,$$

entonces escribiremos

$$\int_{a^+}^b f(x)dx = l$$

y diremos que la integral impropia $\displaystyle\int_{a^+}^b f(x)dx$ converge a l.

Tema 2. Integración

Ejemplos: integral de segunda especie (función no acotada)

1. Divergente:

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

2. Convergente:

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Teorema

En general, es fácil comprobar que:

$$\int_{a+}^{b} \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \qquad \int_{c}^{a^-} \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$$

convergen si $p < 1$ y divergen si $p \geq 1$.