Fundamentos de Matemáticas

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Diagonalización

1. **Matrices y Determinantes.**
2. **Espacios vectoriales.**
3. **Vectores y valores propios.**
4. **Diagonalización.**

Matrices y determinantes

Matriz

Se llama matriz de tamaño $m \times n$, constituida por escalares de un cuerpo $\mathbb{K}$, a cualquier tabla rectangular A formada por $m \cdot n$ escalares, dispuestos en m filas y n columnas. Se llama elemento (i, j) o ij de A al escalar que está situado en la intersección de la i-ésima fila, $i = 1, 2, \ldots, m$, y la columna j-ésima, $j = 1, 2, \ldots, n$; si a este elemento de le llama a_{ij} la matriz se escriben en forma de *cuadrado rectangular*, encerrado entre paréntesis o corchetes,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Columnas de A: $\boldsymbol{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Filas: $\boldsymbol{F}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots, a_{in} \end{pmatrix}$

Matrices y determinantes

Tipos particulares de matrices

Matrices que reciben nombre propio:

- Matrices columna $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$
- Matrices fila $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- Matrices cuadradas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Matrices diagonales.

  En una matriz cuadrada llamamos diagonal al vector

$$(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{K}^n.$$

  Una matriz se dice diagonal si todos los elementos que no pertenecen a su diagonal son nulos:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}\,(a_1, \ldots, a_n).$$

Matrices y determinantes

- Matriz identidad.

$$I = \text{diag}\,(1, \ldots, 1).$$

- Matrices triangulares

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Submatriz

  Dada una matriz A se llama **submatriz** de A que definen los índices de filas $i_1, i_2, \ldots, i_p$ y los índices de columnas $j_1, j_2, \ldots, j_q$ a la matriz, de tamaño $p \times q$ cuyo elemento de lugar (h, k) es el elemento del lugar (i_h, j_k) de A. Los elementos de la submatriz son aquellos en los que se cruzan las filas y las columnas elegidas.

  Si los índices (de filas y columnas) son consecutivos, la submatriz se llama bloque o caja.

Rango de una matriz

- Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama rango por columnas de A al n^o de vectores columnas linealmente independientes.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama rango por filas de A al n^o de los vectores filas linealmente independientes.
- A cualquiera de estos rangos, iguales entres sí, se llama rango de la matriz A, y lo denotamos por *rang A*.

Matrices y determinantes

► **Traza**: la traza de una matriz cuadrada A se define como la suma de los términos de la diagonal

$$traza(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

► **Operaciones con matrices**

Suma de matrices

La suma de matrices se realiza componente a componente. Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $i = 1\ldots,m$, $j = 1\ldots,n$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), i = 1\ldots,m,\ j = 1\ldots,n.$$

Propiedades:

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- Elemento neutro: $A+0 = A$, donde $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es la matriz nula.
- Elemento simétrico: $A+(-A) = (-A)+A = 0$
- Conmutativa: $A+B = B+A$.

Matrices y determinantes

Operaciones con matrices

Producto por escalares

Definimos:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}),\ i = 1 \ldots, m,\ j = 1 \ldots, n.$$

Propiedades:

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
- $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$.
- $1 \cdot A = A$.

Matrices y determinantes

Producto de matrices

Dadas dos matrices:

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}), \quad B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$$

se define el producto matricial de A y B, y se denota $A \cdot B$ o $A \times B$, a la matriz $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Nótese que para que exista la matriz $A \cdot B$ es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B:

$$\begin{array}{cccc} A & B & = & C \\ m\times p & p\times n & & m\times n \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 4 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrices y determinantes

Producto de matrices

Propiedades del producto de matrices:

- Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- Distributiva:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

- $A \cdot I = I \cdot A = A$.
- El producto de matrices no es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$\left(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ es un anillo no conmutativo.

Matrices y determinantes

- Matriz traspuesta:
  Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama matriz traspuesta de A, a la matriz $A^t = (a_{ji})$, a la matriz cuyo elemento (i, j) es el (j, i) de A
- **Propiedades**:
  - $(A + B)^t = A^t + B^t, \forall A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
  - $(AB)^t = B^t A^t, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$
  - $(A^t)^t = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
  - $(\alpha A)^t = \alpha A^t, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
- Matriz simétrica:
  Se dice que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es simétrica si $A^t = A$, i.e., $a_{ij} = a_{ji}$
  En este caso la matriz es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matriz antisimétrica:
  Se dice que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es antisimétrica si $A^t = -A$, i.e., $a_{ij} = -a_{ji}$

Matrices y determinantes

►Matrices cuadradas regulares

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se dice regular (o invertible) si existe una matriz de igual tamaño, denominada matriz inversa de A, que denotamos por A^{-1}, tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

En caso contrario se dice que A es singular o no invertible.

► Propiedades:

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se verifica:

- Si A es invertible, entonces la inversa es única.
- Si A, B son invertibles, entonces $A\cdot B$ es invertible y: $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En general si $A_1,\dots,A_r$ son regulares, $A_1,\dots,A_r$ es regular y

$$(A_1\dots A_r)^{-1} = A_r^{-1}\dots A_1^{-1}.$$

- Si A es regular, lo es su transpuesta también y: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- Si A tiene una fila o una columna nula, entonces A es singular.

Matrices y determinantes

►Operaciones elementales en una matriz

Las operaciones elementales sobre las columnas o filas de una matriz son:

- $i \to j$: intercambiar los vectores i-ésimo y el j-ésimo.
- $i \to \lambda i$: consiste en multiplicar el vector i-ésimo por el escalar $\lambda \neq 0$.
- $i \to i + \lambda j$: consiste en sumar el vector j-ésimo al vector i-ésimo multiplicado por λ.

Las operaciones elementales no modifican el rango ni el orden de la matriz.

(matriz elemental)
Una **matriz elemental** es toda matriz que resulta de aplicar una transformación elemental a la matriz unidad.

$$
\begin{array}{c}
i \to j \\
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & & 0 & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
i \to \lambda i \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & \lambda & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
i \to i + \lambda j \\
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & & 0 & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & & \lambda & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matrices y determinantes

▶ Cálculo de la inversa de una matriz

Si A es una matriz invertible, existe una sucesión de *operaciones fila elementales* que transforman A en la matriz identidad, I. Esta misma serie de operaciones de filas transforman I en A^{-1}. Se resume:

$$[A|I] \to [I|A^{-1}]$$

donde las operaciones de fila sobre A e I se llevan a cabo simultáneamente.

▶Ejemplo:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - 3F_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{F_1 \leftrightarrow F_1 + 2F_2 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{F_1 \leftrightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_2 - F_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow_{F_2 \leftrightarrow (-1)F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Matrices y determinantes

Determinantes

► Hasta el orden 3 existen reglas sencillas para el cálculo del determinante de una matriz:

$$\det(a_{11}) = a_{11},$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

Regla de Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23})$$

$$- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23}).$$

Matrices y determinantes

Propiedades del determinante

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Denotamos por F_i la i-ésima fila de A y por C_i la i-ésima columna de A, de manera que escribimos $A = (F_1 \dots F_n) = (C_1 \dots C_n)$

- $\det(A) = \det(A^t)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Una matriz cuadrada es regular $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- Si A es invertible: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- Si se intercambian dos filas o dos columnas de A, entonces su determinante cambia de signo.
- Si A tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces su determinante es cero.
- El determinante de una matriz diagonal es el producto de sus coeficientes diagonales:

$$\det(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdots a_n.$$

Matrices y determinantes

Propiedades del determinante

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Denotamos por F_i la i-ésima fila de A y por C_i la i-ésima columna de A, de manera que escribimos $A = (F_1 \dots F_n) = (C_1 \dots C_n)$

- Si se multiplica una fila o una columna de A por un escalar k, entonces su determinante queda multiplicado por k.

$$\begin{aligned} |F_1 \dots kF_i \dots F_n| &= k|F_1 \dots F_i \dots F_n| \\ |C_1 \dots kC_i \dots C_n| &= k|C_1 \dots C_i \dots C_n| \end{aligned}$$

- Dada cualquier fila Z_i o cualquier columna $\widetilde{Z}_i$ de orden n se verifica:

$$\begin{aligned} |F_1 \dots F_i + Z_i \dots F_n| &= |F_1 \dots F_i \dots F_n| + |F_1 \dots Z_i \dots F_n| \\ |C_1 \dots C_i + \widetilde{Z}_i \dots C_n| &= |C_1 \dots C_i \dots C_n| + |C_1 \dots \widetilde{Z}_i \dots C_n| \end{aligned}$$

Matrices y determinantes

Desarrollo de un determinante por filas

- Sea $A = (a_{ij})$ matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Para cada elemento de a_{ij} se define:
  - menor de a_{ij} es el escalar $m_{ij} = det(A_{ij})$, donde A_{ij} es la submatriz que resulta de suprimir de A la i-ésima fila y la j-ésima columna.
  - Adjunto o cofactor de a_{ij} es el escalar $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$
- Cálculo del determinante mediante adjuntos:
  - Desarrollo por elementos de la i-ésima fila:

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in}$$

  - Desarrollo por elementos de la i-esima columna:

$$\det(A) = a_{1i}\alpha_{1i} + a_{2i}\alpha_{2i} + \ldots + a_{ni}\alpha_{in}$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrices y determinantes

Rango de una matriz

- El rango de una matriz A es el máximo de los órdenes de los menores de A con no nulos.
- Se verifica que $rango(A) = rango(A^t)$

Cálculo de la inversa mediante adjuntos

- Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Se llama matriz adjunta (o de cofactores) de A a la matriz $A^* = (\alpha_{ij})$, esto es, la matriz que en cada posición tiene el correspondiente adjunto de A.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es regular, se tiene:

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{\det(A)}.$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

- **Idea**: transformar el sistema de ecuaciones lineales original en un sistema de matriz triangular superior con las mismas soluciones.
- El método de **eliminación gaussiana** está basado en las siguientes operaciones elementales sobre las ecuaciones del sistema:

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

- **Idea**: transformar el sistema de ecuaciones lineales original en un sistema de matriz triangular superior con las mismas soluciones.
- El método de **eliminación gaussiana** está basado en las siguientes operaciones elementales sobre las ecuaciones del sistema:
  - la ecuación (i) puede ser multiplicada por un valor $\lambda \neq 0$, y la ecuación resultante utilizarse en lugar de la ecuación (i)
    $i \to \lambda i$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

- **Idea**: transformar el sistema de ecuaciones lineales original en un sistema de matriz triangular superior con las mismas soluciones.
- El método de **eliminación gaussiana** está basado en las siguientes operaciones elementales sobre las ecuaciones del sistema:
  - la ecuación (i) puede ser multiplicada por un valor $\lambda \neq 0$, y la ecuación resultante utilizarse en lugar de la ecuación (i)
    $i \to \lambda i$
  - la ecuación (j) puede ser multiplicada por un valor $\lambda \neq 0$, sumarse a la ecuación (i), y utilizar el resultado en lugar de las ecuaciones (i) o (j)
    $i \to i + \lambda j$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

- **Idea**: transformar el sistema de ecuaciones lineales original en un sistema de matriz triangular superior con las mismas soluciones.
- El método de **eliminación gaussiana** está basado en las siguientes operaciones elementales sobre las ecuaciones del sistema:
  - la ecuación (i) puede ser multiplicada por un valor $\lambda \neq 0$, y la ecuación resultante utilizarse en lugar de la ecuación (i)
    $i \to \lambda i$
  - la ecuación (j) puede ser multiplicada por un valor $\lambda \neq 0$, sumarse a la ecuación (i), y utilizar el resultado en lugar de las ecuaciones (i) o (j)
    $i \to i + \lambda j$
  - las ecuaciones (i) y (j) pueden intercambiarse entre sí.
    $i \leftrightarrow j$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

Sea el sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.):

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \qquad \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

Sea el sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.):

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \qquad \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (**pivote**), hacemos:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_i^{(1)} a_{1j}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)} \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_i^{(1)} b_1^{(1)}$$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

Sea el sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.):

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \qquad \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (**pivote**), hacemos:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_i^{(1)}a_{1j}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}a_{1j}^{(1)} \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_i^{(1)}b_1^{(1)}$$

y obtenemos el sistema equivalente:

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \qquad \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{n2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

Resolución de S. E. L.

Método de (eliminación de) Gauss

- Si $a_{22}^{(2)} \neq 0$, lo tomamos como nuevo pivote y transformamos el sistema en otro equivalente con $a_{j2}^{(3)} = 0$, para $j > 2$.
- Al cabo de $(n-1)$ pasos, habremos obtenido un sistema triangular equivalente al original:

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

- Resolución del sistema triangular superior por **sustitución hacia atrás**, o **remonte**:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}^{(i)}\, x_j}{a_{ii}^{(i)}}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss. Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 19 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Primer pivote: $a_{11} = 1 \neq 0$

$$m_2^{(1)} = a_{21}/a_{11} = 2 \quad m_3^{(1)} = a_{31}/a_{11} = 4 \quad m_4^{(1)} = a_{41}/a_{11} = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -10 & -17 \\ 0 & -14 & -26 & -31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -41 \\ -112 \\ -230 \end{pmatrix}$$

Segundo pivote: $a_{22} = -2 \neq 0$

$$m_3^{(2)} = a_{32}/a_{22} = 7/2 \quad m_4^{(2)} = a_{42}/a_{22} = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 \\ 0 & 0 & 23 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -41 \\ 63/2 \\ 57 \end{pmatrix}$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss. Ejemplo (cont.)

Resolución del sistema triangular superior:

$$x_4 = \frac{204/29}{51/29} = 4$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss. Ejemplo (cont.)

Tercer pivote: $a_{33} = 29/2 \neq 0, \quad m_4^{(3)} = 46/29$

Resolución del sistema triangular superior:

$$x_4 = \frac{204/29}{51/29} = 4$$

$$x_3 = \frac{63/2 + 3 \times 4}{29/2} = 3$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss. Ejemplo (cont.)

Tercer pivote: $a_{33} = 29/2 \neq 0, \quad m_4^{(3)} = 46/29$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -41 \\ 63/2 \\ 204/29 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema triangular superior:

$$x_4 = \frac{204/29}{51/29} = 4$$

$$x_3 = \frac{63/2 + 3 \times 4}{29/2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-41 + 7 \times 3 + 4 \times 4}{-2} = 2$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss. Ejemplo (cont.)

Tercer pivote: $a_{33} = 29/2 \neq 0, \quad m_4^{(3)} = 46/29$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -41 \\ 63/2 \\ 204/29 \end{pmatrix}$$

Resolución del sistema triangular superior:

$$x_4 = \frac{204/29}{51/29} = 4$$

$$x_3 = \frac{63/2 + 3 \times 4}{29/2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-41 + 7 \times 3 + 4 \times 4}{-2} = 2$$

$$x_1 = \frac{30 - 2 \times 2 - 3 \times 3 - 4 \times 4}{1} = 1$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss-Jordan

Es similar al método de Gauss, pero haciendo las transformaciones necesarias para obtener la matriz identidad.

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss-Jordan

Es similar al método de Gauss, pero haciendo las transformaciones necesarias para obtener la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & -41 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 & 53/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{51/29} & 204/29 \end{array}\right)$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss-Jordan

Es similar al método de Gauss, pero haciendo las transformaciones necesarias para obtener la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & -41 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 & 53/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{51/29} & 204/29 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & \mathbf{29/2} & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss-Jordan

Es similar al método de Gauss, pero haciendo las transformaciones necesarias para obtener la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & -41 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 & 53/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{51/29} & 204/29 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & \mathbf{29/2} & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss-Jordan

Es similar al método de Gauss, pero haciendo las transformaciones necesarias para obtener la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & -41 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 & 53/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{51/29} & 204/29 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & \mathbf{29/2} & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

Resolución de S. E. L.

Método de Gauss-Jordan

Es similar al método de Gauss, pero haciendo las transformaciones necesarias para obtener la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & -2 & -7 & -4 & -41 \\ 0 & 0 & 29/2 & -3 & 53/2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{51/29} & 204/29 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & \mathbf{29/2} & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

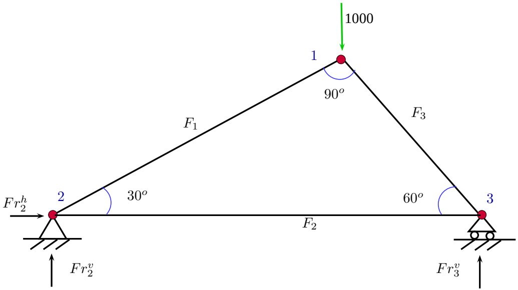
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 29/2 & 0 & 87/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/29 & 204/29 \end{array}\right)$$

Una aplicación interesante de este método es el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de dimensión n, resolviendo simultáneamente n sistemas de ecuaciones

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Análisis de una armadura estáticamente determinada

- Una armadura es una estructura que se usa para soportar cargas como en puentes o edificios.
- Un problema importante en la ingeniería estructural es encontrar las fuerzas y reacciones asociadas con una armadura estáticamente determinada.
- Las fuerzas F, representas ya sea la tensión o la comprensión sobre los nodos de la armadura.
- Las reacciones externas (FR) son fuerzas que caracterizan cómo interactúa dicha estructura con la superficie de soporte.
- La suma de las fuerzas en ambas direcciones, vertical y horizontal, deben ser cero en cada nodo, ya que el sistema está en reposo.



Espacios Vectoriales

- Son muchas las magnitudes físicas, que se representan mediante vectores o campos vectoriales. Por ejemplo:
  - Desplazamiento de un sólido sometido a a fuerzas.
  - Campos eléctricos.
  - Velocidades de un fluido.

Espacios Vectoriales

Definición *(Grupo)*

Un conjunto G y una operación definida en él $*$ se dice que forman un **grupo** $(G,*)$ si se verifican:

1. Asociativa: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a,b,c \in G$
2. Existe $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$, $\forall a \in G$. (e se llama elemento neutro).
3. Para cada $a \in G$ existe un $a' \in G$ tal que $a*a' = a'*a = e$ (a' se llama elemento simétrico de a)

Definición *(Grupo abeliano)*

Se dice que $(G,*)$ es un grupo abeliano o conmutativo si verifica la propiedad:

4. Conmutativa: $a*b = b*a$, $\forall a,b \in G$

   Ejemplos de grupos abelianos, con la operación $+$: conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).

Espacios Vectoriales

Definición *(Anillo)*

Un conjunto A junto con dos operaciones definidas sobre él a las que llamaremos suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, se dice que forman un anillo, $(A, +, \cdot)$, si verifica:

1. $(A, +)$ es grupo abeliano:
   - Asociativa para la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   - Elemento neutro para la suma: $a + 0 = 0 + a,\ \forall a \in A$.
   - Elemento opuesto de la suma: existe $-a \in A\,|a + (-a) = (-a) + a = 0$
   - La suma es conmutativa: $a + b = b + a,\ \forall a, b \in A$
2. El producto, $(\cdot)$ es asociativo.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in A.$$

3. Distributiva del producto respecto de la suma:

$$\begin{array}{l} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a, b, c \in A. \end{array}$$

Definición *(Cuerpo)*

Un anillo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se dice que es un **cuerpo** si $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ es un grupo abeliano respecto al producto $(\cdot)$. Por tanto $\forall a \in \mathbb{K}^*$ existe $a^{-1} \in \mathbb{K}^*\,|a \cdot a^{-1} = u$ siendo u el elemento unitario del cuerpo.

Ejemplos de cuerpos: conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).

Espacios Vectoriales

Definición de espacio vectorial

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un conjunto no vacío V junto con dos operaciones, denotamos $(V, +, \cdot)$: una interna $(+)$ (suma de vectores) y una externa $(\cdot)$ (producto por escalares) que satisfacen las propiedades:

$$+ \ : V \times V \to V, \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V,$$

A) **Suma**. $(V, +)$ es grupo abeliano o conmutativo

1. Asociativa: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$
2. Elemento Neutro. Existe $\mathbf{0} \in V$, tal que $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$.
3. Elemento opuesto. Para cada $\boldsymbol{u} \in V$ existe $-\boldsymbol{v} \in V$ tal que
$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$$
4. Conmutativa $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$

B) **Producto por escalares**. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$

1. $\lambda \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}$.
2. $(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{u} + \mu \cdot \boldsymbol{u}$.
3. $(\lambda \cdot \mu) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{u})$
4. $1_K \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ ($1_{\mathbb{K}}$ es la unidad del cuerpo $\mathbb{K}$)

Observación:

Los elementos del conjunto V los llamaremos vectores y a los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$, escalares.

Denotaremos como sigue: $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$

Espacios Vectoriales

Consecuencias de la definición de espacio vectorial

1. $0 \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in V.$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{u} = (\lambda + 0) \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{u} + 0 \cdot \boldsymbol{u} \Rightarrow 0 \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

2. Opuesto de $\boldsymbol{u}$, $-\boldsymbol{u} = (-1) \cdot \boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{u} + (-1) \cdot \boldsymbol{u} = 1 \cdot \boldsymbol{u} + (-1) \cdot \boldsymbol{u} = (1 + (-1)) \cdot \boldsymbol{u} = 0 \cdot u = 0.$$

3. $\forall \lambda \in K$, $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$$\lambda(\mathbf{0} + \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} = \lambda \mathbf{0} + \lambda \boldsymbol{u} \Rightarrow \lambda \mathbf{0} = \lambda \boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Espacios Vectoriales

Ejemplos de espacios vectoriales

1. $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo (tomando $(+)$ como operación interna y $(\cdot)$ como operación externa).

2. Espacio de polinomios.

   El conjunto de polinomios de una variable con coeficientes en K, siendo $(+)$ la suma de polinomios y $(\cdot)$ el producto de polinomios por escalares de K. Denotamos este conjunto como $K[x]$.

Espacios Vectoriales

Producto cartesiano de espacios vectoriales

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Se define el producto cartesiano de V y W como el conjunto $V \times W = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) / \boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W\}$.

- La conjunto $V \times W$ dotado de la operaciones:
  - suma $(+)$ definida por:
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}').$$
  - producto por un escalar $(\cdot)$, definida por:
$$\lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\lambda \boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v}).$$

tiene estructura de espacio vectorial, $(V \times W, +, \cdot_{\mathbb{K}})$, y se denomina espacio vectorial producto $V \times W$.

- Del mismo modo se define el producto cartesiano de n espacios vectoriales $V_1, \ldots, V_n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

•Ejemplo

1. Para $n \geq 1$, sea $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i \in K\}$ (conjunto de n-tuplas de elementos de $\mathbb{K}$).
   Operaciones:
   - Suma: $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.
   - Producto: $\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) + (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda \cdot a_1, \ldots, \lambda \cdot a_n)$.
2. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ obtenemos los espacio vectoriales habituales: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$.

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Definición *(Subespacio vectorial)*

Sea V subespacio vectorial sobre K y U. Se dice que U es subespacio vectorial de V si con las operaciones de V, U es espacio vectorial sobre K.

∘ En la práctica no es necesario comprobar todas las propiedades de subespacio

Teorema

Sea V un espacio vectorial. U es subespacio vectorial de V si y sólo si:

1. Para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, entonces $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$. ($U$ es subgrupo aditivo de V)
2. Para todo $\lambda \in K, \boldsymbol{u} \in U$, entonces $\lambda \boldsymbol{u} \in U$.

Observación *(Caracterización)*

Las condiciones anteriores se pueden sustituir por la condición:

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U,\ \lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in U.$$

Espacios Vectoriales

Ejemplos de subespacios vectoriales

1. $\mathbf{0}_V$ y V son subespacios vectoriales de V.

2. El conjunto $U = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

3. Dado $\boldsymbol{u} \in V$:
$$U = \{\lambda \boldsymbol{u} | \lambda \in \mathbb{K}\}$$
es el subespacio vectorial llamado recta vectorial en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

4. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}/x - y = 1\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Espacios Vectoriales

Combinación lineal. Clausura lineal

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre K. Sea $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$ un conjunto finito de vectores de V o familia de vectores de V.

Definición

Se llama combinación lineal de los vectores $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}$ a cualquier vector

$$\boldsymbol{u}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_p\boldsymbol{u}_p,\quad \lambda_i\in K,\ \forall i\in\{1,\ldots,p\}.$$

Los escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.
También se dice que el vector $\boldsymbol{u}$ depende linealmente de los vectores $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_p$.

Proposición

El conjunto de las combinaciones lineales de los vectores $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_p$,

$$S=\{\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}=\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_p\boldsymbol{u}_p,\quad \lambda_i\in K,\ \forall i=1,\ldots,p\}$$

es un subespacio vectorial de V, que recibe el nombre de clausura lineal de la familia $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_p$.
También se dice que S está engendrado por la familia $\{\boldsymbol{u}_i\}$, y que ésta es un sistema de generadores de S. Se denota por:

$$<\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_p\}>.$$

Espacios Vectoriales

Ejemplos de subespacio generado por un conjunto

Ejemplos:

1. La solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=0\\ y-z&=0 \end{aligned}\right\}.$$

   Resolviendo el sistema:

$$U=\{(0,a,a)\,|\,a\in\mathbb{R}\}=<\{(0,1,1)\}>.$$

2. La solución de la ecuación lineal $x-y-z-t=0$ en $\mathbb{R}^4$ es

$$\begin{aligned} W&=\{(a+b+c,a,b,c),\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}\\ &=a(1,1,0,0)+b(1,0,1,0)+c(1,0,0,1)\\ &=<\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}>. \end{aligned}$$

Espacios Vectoriales

Definición

Un conjunto de vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ se dicen linealmente independientes si para todos los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

entonces $\lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$. También se dice que la familia de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una familia libre.

En caso contrario se dice que $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son linealmente dependientes. También se dice que la familia de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una familia ligada.

Ejemplo

- $(1, 0, -2), (0, -2, 1)$ son vectores linealmente independientes.
- $(x, y, 0), (x, \lambda y, 0)$ son linealmente dependientes

Espacios Vectoriales

Bases

Consecuencias de la definición:

1. Sea $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una familia de vectores linealmente dependientes. Cada $\boldsymbol{v}_j$, cuyo coeficiente $\lambda_j \neq 0$, es combinación lineal de los demás.
2. Una familia con un vector repetido es un sistema ligado.
3. Una familia que contenga el vector nulo $\mathbf{0}$ es ligada.
4. Si una familia contiene una subfamilia ligada, es ligada.

Definición *(Rango)*

El rango de una familia de vectores $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es el número de vectores linealmente independientes.

Espacios Vectoriales

Bases

Definición

Un espacio vectorial V se dice de tipo finito si admite un sistema generador finito, esto es, si existe un sistema de vectores $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ tal que $V =< \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p\} >$

Definición

Si V es de tipo finito, se dice que un sistema de vectores $B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ es una base de V si se verifica B es un sistema generador de V, que además, es un sistema linealmente independiente.

Espacios Vectoriales

Bases

Teorema

Sea V un espacio vectorial generado por n vectores. Para cualquier conjunto de m vectores de V es linealmente independiente, se verifica $m \leq n$.

Teorema

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita:

1. Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de V entonces todo vector $\boldsymbol{v} \in V$ se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de la base.
2. Todas las bases de V tienen el mismo número de elementos. A este número se le llama dimensión del espacio V y se denota por $\dim(V)$.

   Nota: Se conviene que el espacio $V = \{\mathbf{0}\}$ tiene dimensión 0.

Espacios Vectoriales

Bases

Ejemplos:

1. Base del espacio de polinomios de grado n, $\mathbb{K}_n[x]$: $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
2. El espacio $\mathbb{R}^n$. Una base viene dada por la familia de vectores:

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 1)\}.$$

   Esta base recibe el nombre de base canónica de $\mathbb{R}^n$.
3. Espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Como base de este espacio podemos tomar:

$$A = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

   donde $\boldsymbol{E}_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$(\boldsymbol{E}_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Por tanto la dimensión de este espacio es $m \times n$

Espacios Vectoriales

Bases

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea U y W dos subespacios de V. Entonces:

1. U es de dimensión finita y $\dim U \leq n$.
2. Cualquier base de U es un subconjunto de una base de V.
3. Si $U \subseteq W$ y $\dim U = \dim W$, entonces $U = W$.

Teorema (de completar base)

En un espacio vectorial V de dimensión finita, todo sistema de vectores linealmente independientes puede completarse hasta obtener una base.

Espacios Vectoriales

Definición *(Coordenadas)*

Si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ es una base de V y

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n,\ x_i \in \mathbb{K},$$

diremos que $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de $\boldsymbol{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

- $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
- $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$
$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$$

Proposición

Las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ respecto de una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ son únicas.

Espacios Vectoriales

Cambios de base

Supongamos que en un espacio vectorial V de dimensión finita n tenemos las bases:

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\},\ \mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}.$$

Dado un vector $\boldsymbol{v}$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{B}$ y $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en $\mathcal{B}'$. Deseamos obtener una relación que nos permita obtener las coordenadas de cualquier vector en la base $\mathcal{B}'$ respecto de las coordenadas en la base $\mathcal{B}$.
Suponemos conocidas las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_1 & = & a_{11}\boldsymbol{e}'_1 + a_{21}\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}'_n \\ \boldsymbol{e}_2 & = & a_{12}\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}'_n \\ & \ldots & \\ \boldsymbol{e}_n & = & a_{1n}\boldsymbol{e}'_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}'_n \end{array}\right.$$

Espacios Vectoriales

Cambios de base

Por tanto

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \boldsymbol{e}'_j$$

Por tanto

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} \right) \boldsymbol{e}'_j.$$

Como la expresión en la base es única:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x'_2 & = & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \\ & \ldots & \\ x'_n & = & a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array} \right.$$

Espacios Vectoriales

Cambios de base: ejemplo

1. En $\mathbb{R}^3$. Sean $(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ las coordenadas de un vector $\boldsymbol{u}$ respecto de la base canónica. Hallar las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ respecto de la base $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ donde:

$$\boldsymbol{e}'_1 = (1, 2, 0), \quad \boldsymbol{e}'_2 = (-3, -7, 1), \quad \boldsymbol{e}'_3 = (0, -2, 1)$$

Las coordenadas de $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ respecto de la base canónica son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= -3\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 &= -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

Sea $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ las coordenadas de $\boldsymbol{u}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{aligned} x &= x_1 - 3x_2 \\ y &= 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ z &= x_2 + x_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Espacios Vectoriales

Ecuaciones paramétricas de un subespacio

Sea V espacio vectorial de dimensión n, y $U \subset V$ subespacio vectorial de V de dimensión r con $r \leq n$. Consideramos una base de V y una base de U

$$\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}, \quad B_U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$$

Supongamos que conocemos las coordenadas de cada uno de los vectores de la base de U en la base $\mathcal{B}_V$:

$$\boldsymbol{u}_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni}), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Cualquier vector $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ se expresa como combinación lineal de elementos de la base $\mathcal{B}_U$:

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \lambda_r \boldsymbol{u}_r,$$

y si lo escribimos en coordenadas se obtienen las llamadas ecuaciones paramétricas de U (en las que aparecen r parámetros):

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} \right. .$$

Espacios Vectoriales

Ecuaciones paramétricas de un subespacio

Ejemplo

Supongamos el subespacio $W =< \{(1,0,1,0),(0,1,1,0)\} >$ de $\mathbb{R}^4$. Determinar las ecuaciones paramétricas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(1,0,1,0) + \mu(0,1,1,0).$$

o bien

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda + \mu \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Espacios Vectoriales

Ecuaciones cartesianas (o implícitas) de un subespacio

Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión n y U un subespacio de V de dimensión r. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_U$ bases de V y de U respectivamente.

Las ecuaciones paramétricas de U son:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_r a_{1r} \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{n1} + \ldots + \lambda_r a_{nr} \end{array}\right\}$$

Para obtener las ecuaciones cartesianas (o implícitas) de U es necesario eliminar los parámetros λ_i, lo que equivale a resolver el sistema para las incógnitas λ_i.

- Número de ecuaciones cartesianas $=$ dim $V -$ dim U

Espacios Vectoriales

Ecuaciones cartesianas de un subespacio

Ejemplo

Sea $U =< \{(1,0,1,1),(0,1,1,0)\} >$

- Ecuaciones paramétricas: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(1,0,1,1) + \nu(0,1,1,0)$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \nu \\ x_3 = \lambda + \nu \\ x_4 = \lambda \end{array}\right.$$

- Obtenemos las ecuaciones cartesianas de U por eliminación de parámetros.
  - Eliminando λ:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = \nu \\ x_3 - x_1 = \nu \\ x_4 - x_1 = 0 \end{array}\right.$$

  - Eliminando ν:

$$\left\{\begin{array}{l} x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 = 0 \end{array}\right.$$

- Hemos obtenido las ecuaciones cartesianas de U

$$U \equiv \left\{\begin{array}{l} x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 = 0 \end{array}\right.$$

Espacios Vectoriales

Intersección de subespacios

Definición

Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial V, la intersección de subespacios intersección de U y W, $U \cap W$, se define como:

$$U \cap W = \{\boldsymbol{u} / \boldsymbol{u} \in U \text{ y } \boldsymbol{u} \in W\}$$

En general, dada una familia de subespacios $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de V, se define la intersección como

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \{\boldsymbol{u} / \boldsymbol{u} \in U_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$$

Proposición

La intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales de V es un subespacio vectorial de V.

Ecuaciones de la intersección de subespacios

En la práctica para calcular las ecuaciones de la intersección de subespacios basta con reunir todas las ecuaciones cartesianas: de esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones que han de cumplir los vectores que pertenecen a la intersección.

Espacios Vectoriales

Ejemplo

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$W =< \{(1,1,0),(0,0,1)\} > .$$

Para calcular su intersección basta calcular las ecuaciones cartesianas de W.

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \end{array} \right.$$

Eliminando parámetros obtenemos las ecuaciones cartesianas de W que son $x_1 - x_2 = 0$. Por tanto, unas ecuaciones cartesianas de $V \cap W$ son:

$$V \cap W \equiv \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Como ninguna ecuación puede eliminarse mediante transformaciones elementales, $\dim\,(V \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios

La unión de subespacios vectoriales U y W de V no es un subespacio vectorial.
Ejemplo: Consideramos $U = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, y)/y \in \mathbb{R}\}$ subespacios de $\mathbb{R}^2$.

$$(1, 0) \text{ y } (0, 1) \in U \cup W, \text{pero } (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W$$

Definición

Se define la suma de subespacios U y W, y lo denotamos por $U + W$, al conjunto

$$U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} | \boldsymbol{u} \in U, \, \boldsymbol{w} \in W\}$$

En general, sea $\{U_i | i = 1, \ldots, n\}$ una familia de subespacios, se define la suma de subespacios como:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \{\boldsymbol{u} \in V | \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_n, \, \boldsymbol{u}_i \in U_i\}.$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios

Proposición

La suma de subespacios, $U + W$, es el menor subespacio que contiene a la unión, $U \cup W$

Teorema

La suma de subespacios U_i de V, $S = U_1 + \ldots + U_n$, es un subespacio de V.

***Teorema* (Fórmula de Grassman o fórmula de las dimensiones)**

Si U, W son dos subespacios vectoriales de V espacio vectorial de dimensión finita, se verifica:

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W).$$

Sistema de generadores de la suma de subespacios

Para construir un sistema de generadores del espacio suma bastará reunir las bases de todos los subespacios.
Así, dados dos subespacios U y W con bases

$$\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\} \text{ y } \mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\},$$

entonces un sistema de generadores de $U + W$ viene dado por:

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}.$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios

Ejemplo

Dados los subespacios

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

y

$$W =< \{(1,1,1),(0,0,1)\} >$$

Para calcular $U + W$ necesitamos una base de U. Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = & \lambda & \\ x_2 = & & \mu \\ x_3 = & -\lambda & -\mu \end{cases}$$

Por tanto un sistema de generadores de $V + W$ viene dado por:

$$\{(1,1,1),(0,0,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$

y a partir de ellos se puede calcular una base de $V + W$:

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios

Ejemplo

1. Si dos subespacios están generados por sendos conjuntos de vectores, su suma está generada por la unión de los mismos. Por ejemplo:

$$U =< \{(-1,2,1),(3,-1,0)\} >, \quad W =< \{(8,0,0)\} > .$$

Entonces:

$$U + W =< \{(-1,2,1),(3,-1,0),(8,0,0)\} > .$$

En este caso además la suma es directa.

Espacios Vectoriales

Suma directa de subespacios

Definición *(Suma directa)*

Sean U y W dos subespacios de V. Si $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ diremos que la suma $U + W$ es suma directa, y lo denotamos por $U \oplus W$

Proposición

La suma $U + W$ es directa si y sólo si la expresión de un vector $U + W$ como suma de un vector de U y un vector de W es única.

Proposición

La suma $U + W$ de dos subespacios es directa si y sólo si:

$$\dim U + \dim W = \dim\,(U + W).$$

Definición *(Suplementario)*

Dos subespacios U y W se dicen suplementarios respecto de V, si $V = U \oplus W$. También se dice que U es el suplementario de W, y viceversa.

Ejemplo

$\mathbb{R}^2 = \{(x, 0)\,|\,x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, x)\,|\,x \in \mathbb{R}\,\}.$

Proposición

Los subespacios U y W son suplementarios de V, $V = U \oplus W$, si y sólo si, $V = U + W$ y $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$

Espacios Vectoriales

Suma directa de subespacios

Definición

Sean $U_1, \ldots, U_n$ subespacios de V. Si $U_j \cap \left(\sum_{j \neq i} U_i \right) = \mathbf{0}$ para todo $j = 1 \ldots, n$, se dice que la suma de los subespacios es directa y se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i.$$

Teorema

La suma es directa si y sólo si la igualdad: $\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_n = 0$, implica que $\boldsymbol{u}_1 = 0, \ldots, \boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$.

Proposición
Entonces todo vector $\boldsymbol{u} \in \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ se expresa de forma única como suma de elementos de cada subespacio:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \ldots \boldsymbol{u}_n, \; \boldsymbol{u}_i \in U_i$$

Espacios Vectoriales

Aplicaciones: Vector Fuerza

- La *segunda Ley de Newton*, dice que la fuerza que actúa sobre una partícula acelerada es el producto de su masa (magnitud escalar) por el vector aceleración (magnitud vectorial)

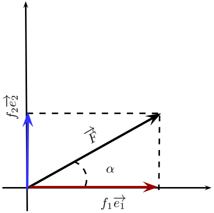
$$\sum(\overrightarrow{F}) = m\overrightarrow{a}$$

siendo por tanto una magnitud vectorial, y para su estudio podemos utilizar las propiedades del álgebra vectorial.

- El vector fuerza, $\overrightarrow{F}$ (o la fuerza), se puede descomponer en sus componentes (f_1, f_2) en el sistema de referencia establecido:

$$\overrightarrow{F} = f_1\overrightarrow{e}_1 + f_2\overrightarrow{e}_2$$

donde $f_1 = cos(\alpha)F$ y $f_2 = \text{sen}\,(\alpha)F$



Vectores y valores propios

Definición:

Sea $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor (o valor propio) de $\mathbf{A}$ si existe algún vector $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, que se llama autovector.

▷ Se llama espectro de $\mathbf{A}$, que se representa por $\sigma(\mathbf{A})$, al conjunto de todos sus autovalores.

▷ El conjunto de todos los autovectores asociados al autovalor λ es:

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in V / \mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

1. Si λ_1, λ_2 son dos valores propios distintos de $\mathbf{A}$, entonces $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$.

2. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son valores propios distintos de f y $\boldsymbol{v}_i \in V_{\lambda_i} - \{\mathbf{0}\}$, $i = 1, \ldots, s$, entonces: $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ son linealmente independientes.

Vectores y valores propios

▷ Sea vector $\boldsymbol{v}$ un autovector de $\mathbf{A}$ de coordenadas X.

$$\mathbf{A}X = \lambda X \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda I)X = 0$$

Desarrollando la ecuación obtenemos un sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tiene una solución distinta de la trivial $\Leftrightarrow rango(A - \lambda I) < n$

▷ Los autovalores de $\mathbf{A}$ son los escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$, esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Vectores y valores propios

▷ *(Polinomio característico)*
Sea $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$. Se llama polinomio característico de $\mathbf{A}$ al polinomio

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda I\right)$$

▷ Sea $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lambda \text{ es un valor propio de } \mathbf{A} \Leftrightarrow p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda I\right) = 0 \text{ (ecuación característica)}$$

▷ La dimensión V_λ asociado a λ es:

$$\dim V_\lambda = n - rango(A - \lambda I)$$

Vectores y valores propios

Ejemplo

Hallar los valores y vectores propios de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$det(A - \lambda_I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$$

Las raíces de la ecuación característica son: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$ (multiplicidad dos).

El subespacio propio correspondiente a $\lambda = 3$, V_3, tiene por ecuación $(A - 3I)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ 4 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces $V_3 = \{(\alpha, \alpha, 4\alpha)/\alpha \in \mathbb{R}\} =< \{(1,1,4)\} >$

El subespacio propio correspondiente a $\lambda = 2$, V_2, tiene por ecuación $(A - 2I)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ 4 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces $V_3 = \{(0, \alpha, \beta)/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =< \{(0,1,0), (0,0,1)\} >$

Vectores y valores propios

Sea $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ una matriz, cuyos autovalores distintos son $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Para cada autovalor λ_i, llamamos:

- Multiplicidad algebraica de λ_i es el orden de multiplicidad, m_i, de λ_i como raíz de la ecuación característica de A (o f).

- Multiplicidad geométrica de λ_i es la dimensión, d_i, del subespacio propio de $\mathbf{A}$ asociado a λ_i, V_{λ_i}, esto es:

$$d_i = \dim\left(V_{\lambda_i}\right) = n - rang\left(\mathbf{A} - \lambda_i I\right)$$

▷ Si λ_i es un autovalor de $\mathbf{A}$ (o f), entonces su multiplicidad algebraica m_i y su multiplicidad geométrica d_i verifica la relación:

$$1 \leq d_i \leq m_i$$

Multiplicidad algebraica y geométrica

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Su polinomio característico es: $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$, luego A tiene un único autovalor $\lambda_1 = -2$ de multiplicidad algebraica $m_1 = 3$.

$$d_1 = 3 - rango(A - 2I) = 3 - rango \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Diagonalización

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ su matriz asociada a f. Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable por semejanza, entonces:

▶ La matriz $\mathbf{A}$ es **diagonalizable** si existe un conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ vectores propios de $\mathbf{A}$. Por tanto, $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $\mathbf{A}$, cada uno de ellos repetido tantas veces como indique su multiplicidad algebraica.

Dicha matriz diagonal es

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

▶ $\mathbf{A}$ es semejante con $\mathbf{D}$, por tanto, existe $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ (o $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$), donde las columnas de $\mathbf{P}$ son las coordenadas de los autovectores de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \ldots & v_1^n \\ v_2^1 & v_2^2 & \ldots & v_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n^1 & v_n^2 & \ldots & v_n^n \end{pmatrix}$$

donde la j-ésima columna de $\mathbf{P}$ son las componentes del autovector, $\boldsymbol{v}_j = (v_1^j, v_2^j, \ldots, v_n^j)^t$, asociado al autovector λ_j

Diagonalización (por semejanza)

Ejemplo: Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

▷ Su polinomio característico es: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)) = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$.

▷ Autovalores: $\lambda_1 = 2$ (multiplicidad algebraica $m_1 = 2$) y $\lambda_2 = 5$ (multiplicidad algebraica $m_1 = 1$)

▷ Autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$:

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base del subespacio propio V_{λ_1}: $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$, por tanto, $d_1 = 2$ (la multiplicidad geométrica también se puede calcular como $d_1 = 3 - rango(A-2I))$

Diagonalización (por semejanza)

Ejemplo(cont.)

▷ De igual forma se calcula el autovector asociado a $\lambda_2 = 5$:

$$(A-5I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base del subespacio propio V_{λ_2}: $\{(1,1,1)\}$, por tanto, $d_1 = 1$.

▷ La base de vectores propios es:

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$$

La matriz diagonal, y la matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$