Fundamentos de Matemáticas

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

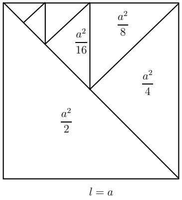
Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 3. Series numéricas

Motivación. La paradoja de Zenón

Los griegos no entendían el concepto de suma infinita.
Para ellos la suma de infinitos números positivos necesariamente tenía que dar como resultado ∞.

Motivación. Suma de una serie geométrica



Continuando el proceso indefinidamente se obtiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{2^n} = a^2$$

Para $a = 1$ suma de la serie geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$

Tema 3::. Series numéricas

Series de números reales

Dada una sucesión (a_n) de términos positivos, podemos construir la sucesión de sumas parciales:

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N.$$

Llamaremos serie de término general (a_n) a la sucesión de sumas parciales (S_N).

La serie convergen si lo hace la sucesión de sumas parciales. Si la serie es convergente denotaremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Se suele denotar por

$$\sum a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum (a_n),$$

que se emplea tanto para denotar la serie infinita generada por (a_n) como su límite, en caso de que la serie sea convergente.

Tema 3::. Series numéricas

Series de números reales

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ dos series convergentes y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) La serie suma $\sum(a_n + b_n)$ es convergente y

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

2) La serie $\sum ca_n$ es convergente y

$$\sum(ca_n) = c\sum a_n.$$

Teorema (Condición necesaria de convergencia de series)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Tema 3. Series numéricas

Teorema Criterio de Cauchy

La serie $\sum a_n$ converge si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq \varepsilon$

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Tema 3. Series numéricas

Series de términos positivos

- En general el problema de calcular el valor de la suma de una serie, no es "sencillo".
- Por ejemplo, un resultado debido a Euler es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- En el curso nos limitamos a dar criterios que nos permitan decidir si una serie es convergente o no.
- Sin embargo, hay algunas series para las cuales es sencillo estudiar su convergencia y calcular el valor de su suma cuando proceda:
  - series geométricas,
  - series telescópicas,
  - series aritmético-geométricas.

Tema 3. Series numéricas

Ejemplos importantes de series sumables

Serie Geométrica

Un primer tipo importante de series que veremos son las geométricas, cuyo término general es

$$a_n = a \cdot r^n, \quad a, r \in \mathbb{R}, \quad a > 0, r > 0,$$

El primer término es $a_0 = a$. A r se le llama la razón de la serie geométrica.

Se puede determinar para qué valores de r la serie es convergente y calcular su suma. Recordemos la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r y primer término a:

$$S_N = a\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

(**Nota:** *es fácil de comprobar porque* $rS_N = S_N - a + ar^{N+1}$.)
Entonces, para que exista $\lim S_N$ necesariamente $r < 1$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \lim S_n = a \cdot \frac{1}{1 - r}, \quad \text{si } r < 1.$$

Uno de los hechos que confiere mayor importancia a las series geométricas es la conexión que guardan con las series de potencias.

Tema 3. Series numéricas

Ejemplos importantes de series sumables

Serie Telescópica

- La propiedad telescópica de las sumas finitas permitirá clasificar cierto tipo de series que por eso mismo se denominarán telescópicas.
- El término general de una serie telescópica es la diferencia de dos términos consecutivos de una sucesión, por tanto es convergente si y sólo si lo es dicha sucesión.
- Además la suma coincide con el límite de la sucesión:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_n a_n \text{ converge} \Longleftrightarrow a_n \text{ converge}$$

Tema 3. Series numéricas

Ejemplos importantes de series sumables

Aritmético-geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+nb)r^n = \frac{a(1-r)+br}{(1-r)^2},\ a,r \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Longleftrightarrow |r|<1.$$

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia para series de términos positivos

- Criterio de la integral.
- Criterios de comparación (por desigualdades y por el cociente).
- Criterio del cociente de D'Alembert.
- Criterio de la raíz n-ésima.
- Criterio de Raabe.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de la integral

Sea $f(x)$ una función positiva y decreciente para $x \geq 1$. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

converge si y sólo si la integral impropia (de primera especie) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ es convergente. Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge la serie también diverge.

Además, en este caso, el error está acotado por:

$$\int_{k+1}^{+\infty} f(x)dx \leq S - S_k \leq \int_{k}^{+\infty} f(x)dx.$$

Tema 3. Series numéricas

Series armónicas generalizadas

- Estudiar la convergencia de las series armónicas generalizadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

  Basta aplicar el criterio de la integral:

  - la serie converge si $s > 1$,

  - la serie diverge si $s \leq 1$

- Además, como consecuencia, la serie $\sum \frac{1}{n}$ es un ejemplo de serie cuyo término general tiene límite cero y sin embargo la serie no es convergente.
- Las series armónicas van a jugar un papel destacado en este tema, puesto que se emplearán en muchos problemas para comprobar la convergencia de series empleando el criterio de comparación por el cociente.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia

Criterio de comparación por desigualdades

Sean $0 \leq a_n \leq b_n$. Entonces

1) si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia

Criterio de comparación por el cociente

Sean $a_n, b_n \geq 0$ tales que
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}.$$
Entonces:

1) si $c > 0$, $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge.

2) Si $c = 0$, si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de comparación

Ejemplos:

1. $\sum \frac{\operatorname{sen}\ n+1}{n^3+n}$ converge puesto que

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}\ n+1}{n^3+n} \leq \frac{2}{n^3}$$

y sabemos que $\sum \frac{2}{n^3} = 2\sum \frac{1}{n^3}$ converge por ser armónica de grado mayor que uno.

En este caso no es adecuado emplear el criterio del cociente, puesto que si comparamos con $\sum \frac{1}{n^3}$

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} = \frac{\operatorname{sen}\ n+1}{1+1/n^2},$$

que no tiene límite.

2. $\sum \frac{n-1}{n^2}$, $a_n = \frac{n-1}{n^2}$ diverge puesto que si comparamos con $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n-1}{n} = 1 > 0.$$

Por tanto, como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, también lo hace $\sum a_n$

Aquí no es adecuado usar desigualdades puesto que la acotación sencilla $a_n \leq \frac{1}{n}$ no dice nada.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio del cociente (o de D'Alambert)

Sea $a_n > 0$ tal que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Entonces:

1) Si $r < 1$, la serie $\sum a_n$ converge.

2) Si $r > 1$ o $r = +\infty$, la serie $\sum a_n$ diverge.

2) Si $r = 1$ el criterio no decide.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio del cociente (o de D'Alambert) Ejemplos

1. $\sum \frac{n!}{n^n}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \frac{1}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

   por tanto es convergente.

2. $\sum \frac{3^n}{3+n!}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!}\,\frac{3+n!}{3^n} = \lim 3\,\frac{3/n!+1}{3/n!+n+1} = 0$$

   por tanto es convergente.

3. Ejemplo en que el criterio no decide. Si consideramos la serie armónica $\sum \frac{1}{n^s}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n^s}{(n+1)^s} = 1$$

Tema 3: Series numéricas

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de la raíz (o de Cauchy)

Sea $a_n > 0$ y tal que existe $\lim \sqrt[n]{a_n} = r$. Entonces:

1) Si $r < 1$, la serie $\sum a_n$ converge.

2) Si $r > 1$ la serie $\sum a_n$ diverge.

3) Si $r = 1$ el criterio no decide.

Tema 3. Series numéricas

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Criterio de la raíz (o de Cauchy) Ejemplos:

1. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0 < 1.$$

por tanto es convergente.

2. $\sum [\frac{n}{n+2}]^{n^2}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim[1 - \frac{2}{n+2}]^n = \lim\left(\left[1 - \frac{2}{n+2}\right]^{-(n+2)/2}\right)^{-2n/(n+2)} = e^{-2} < 1,$$

por tanto es convergente.

3. Ejemplo en que el criterio de la raíz no decide. Si consideramos la serie armónica $\sum \frac{1}{n^s}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{(n^{1/n})^s} = 1$$

Tema 3: Series numéricas

Criterios de convergencia

- Pringsheim

$$\text{Si existe } \alpha \text{ tal que } \lim_n n^\alpha x_n = l \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1,\ l \neq \infty \Rightarrow \sum x_n \text{ converge} \\ \alpha < 1,\ l \neq 0 \Rightarrow \sum x_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Aunque estos criterios tienen un rango de aplicación muy amplio, es posible encontrar series en las cuales estos criterios no deciden, por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}$$

Cuando los criterios del cociente y de la raíz no deciden, puede resultar adecuado emplear el llamado criterio de Raabe.

- Raabe

$$\lim_n n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \begin{cases} > 1 \Rightarrow \sum x_n \text{ converge,} \\ < 1 \Rightarrow \sum x_n \text{ diverge,} \\ = 1 \Rightarrow \sum x_n \text{ no decide.} \end{cases}$$

Tema 3: Series numéricas

Series de términos cualesquiera

Series alternadas

Un caso particular de series de términos positivos y negativos son las series alternadas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0.$$

Criterio de Leibniz

Si a_n decreciente con límite cero, la serie alternada converge.
Además si denotamos por s la suma de la serie:

$$|s_n - s| \leq |a_{n+1}|,$$

es decir, el error absoluto cometido al aproximar la suma de la serie s por la suma parcial n-ésima, s_n, está acotada por el primer término a_{n+1} que se omite.

Tema 3: Series numéricas

Definición (Convergencia absoluta)

Diremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie de los valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + \ldots + |a_n|,$$

es convergente.

NOTA:

La serie de valores absolutos es una serie de términos positivos y por tanto podemos aplicarle todos los criterios de convergencia de series de números positivos vistos antes.

Tema 3: Series numéricas

Teorema (Convergencia absoluta implica convergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Prueba

Como $\sum a_n$ converge por el criterio de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$

$$|a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

entonces tomando este N por la desigualdad triangular

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| < |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

luego $\sum a_n$ converge.

Tema 3: Series numéricas

Convergencia no implica conv. absoluta

EJEMPLO:

El recíproco no es cierto. Tomamos como ejemplo la serie de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n};$$

esta serie es convergente por el criterio de Leibniz, y sin embargo no es absolutamente convergente. La serie valor absoluto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

es la serie armónica que sabemos que diverge.

Definición (Convergencia condicional)

Diremos que una serie en condicionalmente convergente, si es convergente pero no absolutamente convergente.

Tema 3: Series numéricas

Proyecto

Dada la serie convergente:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+4n}}$$

Escribir un programa en Python que calcule la suma de la serie con error menor que un parámetro dado, ε.

Emplear la cota de error que proporciona el criterio de Leibniz.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Sucesiones funcionales

Dado $A \subset \mathbb{R}$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe la función:

$$f_n : A \to \mathbb{R},$$

La aplicación

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \\ n & \to & f_n \end{array}$$

recibe el nombre de sucesión de funciones y se denota (f_n).

La función f_n recibe el nombre de término n-ésimo de la sucesión.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Convergencia de sucesiones funcionales

Definición (convergencia puntual)

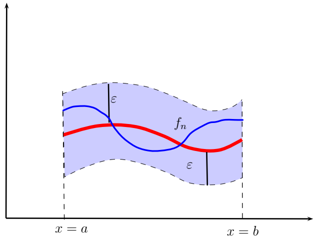
Diremos que la sucesión funcional (f_n) converge puntualmente a f en A si para cada $x \in A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

Definición (convergencia uniforme)

Diremos que la sucesión funcional (f_n) converge puntualmente a f en A si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$



Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Teorema

Convergencia uniforme implica convergencia puntual.

Nota:

El recíproco no es cierto. Ejemplo:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{, converge puntualmente a } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

Estudiar la convergencia uniforme y puntual de

$$f_n(x) = \frac{n+x}{n+2}$$

- En $D = [-2, 2]$,
- En $D = \mathbb{R}$.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Comportamiento de sucesiones funcionales unif. convergentes

- **Continuidad**
  Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente, entonces f es continua.

- **Integración**
  Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables y $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente, entonces la función f es integrable y además *"podemos intercambiar límite e integral"*, formalmente:

$$F_n(x) = \int_a^x f_n \xrightarrow{n} \int_a^x f = F(x), \quad \text{uniformemente.}$$

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Series funcionales

Si (f_n) es una sucesión funcional definida en $D \subset \mathbb{R}$, la sucesión de sumas parciales viene dada por:

$$\begin{gathered} s_1(x) = f_1(x), \\ s_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \\ \vdots \\ s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x), \end{gathered}$$

Llamamos serie funcional de término general (f_n) a esta sucesión de sumas parciales. Si existe el límite de $s_n(x)$ se dice que la serie es convergente y se escribe

$$\sum f_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Si la serie $\sum |f_n|$ converge, se dice que la serie es absolutamente convergente.

Si la sucesión de sumas parciales $(s_n(x))$ converge uniformemente se dice que $\sum f_n$ es uniformemente convergente o que converge uniformemente en D

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Continuidad

Si (f_n) continuas en $D \subset \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si $\sum f_n$ converge uniformemente a f en D, entonces f es continua en D.

Integración

Supongamos (f_n) tales que:

1) f_n integrables en $[a, b]$,

2) $\sum f_n$ converge uniformemente a f.

Entonces

1) f es integrable en $[a, b]$,

2) $\displaystyle \int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f$

Derivación

Si $\sum f_n$ converge puntualmente hacia f en $[a, b]$ y $\sum f_n'$ converge uniformemente hacia una función continua entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Criterio de la mayorante de Weierstrass para la convergencia uniforme

Sea (f_n) una sucesión funcional definidas en A y supongamos que (M_n) sucesión numérica tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para todo } x \in A$$

Supongamos que $\sum M_n$ es convergente, entonces $\sum f_n(x)$ converge (de hecho absolutamente) para todo $x \in A$ y además $\sum f_n$ converge uniformemente sobre A.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Criterio de la mayorante de Weierstrass. Ejemplos

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, en $\mathbb{R}$

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

   por tanto converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$ por el criterio M de Weierstrass.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3}}$, en $[-1,1]$

$$\left|\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Análogo.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Series de potencias

Una serie de potencias es una serie funcional de la forma $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = a_n(x-a)^n.$$

$a_n, a \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$

Al número real a_n se le llama coeficiente $n-$ésimo de la serie de potencias.
Se dice que la serie de potencias está centrada en $x = a$.
En adelante presentaremos los resultados para series de potencias centradas en cero, para más claridad de notación. Lo resultados son análogos para series de potencias centradas en $x = a \neq 0$.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Teorema de Abel

Sean $x_0, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces, si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_0^n$ converge

- $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente para todo $|x| < |x_0|$ y en particular $\sum a_n x^n$ es convergente.
- La serie converge uniformemente para todo x tal que

$$|x| < h < |x_0|$$

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Teorema (consecuencia del Teorema de Abel)

Dada la serie de potencias $\sum a_n x^n$ hay tres posibilidades:

1. La serie sólo converge en $x = 0$.
2. La serie converge absolutamente en todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Existe un número real $R \in \mathbb{R}$ tal que la serie converge absolutamente si $|x| < r$ y diverge si $|x| > r$.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Definición: Radio de Convergencia

1. Diremos que el radio de convergencia de una serie de potencias es $+\infty$ si la serie converge absolutamente en todo $x \in \mathbb{R}$

2. En otro caso se define como el único número real no negativo R tal que la serie de potencias es absolutamente convergente en todo x tal que $|x-a| < R$ y diverge para todo x tal que $|x-a| > R$.

3. Si R es el radio de convergencia de una serie de potencias, entonces el intervalo abierto

$$(a-R, a+R) = \{x \in \mathbb{R} / \; |x-a| < R\}$$

se llama intervalo de convergencia de la serie de potencias.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Cálculo del Radio de Convergencia

Basándonos el Criterio del Cociente o el Criterio de la Raíz, estableceremos la fórmula del radio de convergencia de la serie R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Éste radio determinará el mayor intervalo abierto donde la serie converge $(x_0 - R, x_0 + R)$. Un problema más complicado es decidir qué sucede con la serie en los extremos del intervalo. Normalmente estudiaremos la convergencia en los extremos aparte.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Ejemplos: cálculo del Radio de Convergencia

(G-L 377)

Calcular el radio e intervalo de convergencia:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

$$R = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} = 0.$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$R = \frac{1}{\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}} = \lim_n (n+1) = +\infty$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

es la serie geométrica que converge sii $|x| < 1$. Por tanto $r = 1$ y el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Ejemplos: cálculo del Radio de Convergencia
(G-L 377)

Calcular el radio e intervalo de convergencia:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

$$R = \lim_n \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = 1$$

- En $x = -1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge por Leibniz
- En $x = 1$, $\frac{1}{n^2}$ converge (armónica $1/n^p$, con $p = 2 > 1$).

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
Radio $R = 1$ y diverge en $x = 1$ y converge en $x = -1$.

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Diferenciación e integración de serie de potencias

Si la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ tiene un radio de convergencia R, entonces la diferenciación término a término da lugar a la serie de potencias de la derivada de f:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na(x-x_0)^{n-1} \quad \forall\, |x-x_0| < R$$

y la integración término a término proporciona la serie de potencias de la integral de f:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C \quad \forall\, |x-x_0| < R$$

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Funciones analíticas

- Se dice que una función f es analítica en x_0 si en un intervalo abierto en torno a x_0, esta función es la suma de una serie de pontencias $\sum_{n}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ que tiene un radio de convergencia R.

Ejemplos:

Tema 8. Sucesiones y series funcionales

Series de Taylor y de McLaurin

- Si f es analítica en x_0, entonces la representación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

  es válida en cierto intervalo abierto con centro en x_0.
- Esta serie se llama **serie de Taylor** de f en torno a x_0. Cuando $x_0 = 0$, también se conoce como **serie de McLaurin** de f.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \ x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \ x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \ x \in \mathbb{R} \\
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}(x^3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \ |x| < 1 \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1
\end{aligned}$$

Tema 3. Series de Fourier

Series de Fourier

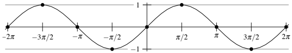
- Una función $f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$.

  Desde un punto de vista geométrico, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y, lo que quiere decir que su gráfica no se altera luego de una reflexión sobre el eje y.

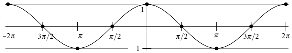
- Una función $f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

  Desde un punto de vista geométrico, una función impar posee una simetría rotacional con respecto al origen de coordenadas, lo que quiere decir que su gráfica no se altera luego de una rotación de 180 grados alrededor del origen

- Ejemplos:
  - La suma de potencias impares es impar: $5x^3 + 3x$
  - La suma de potencias pares es par: $-x^6 + 4x^4 + x^2 - 3$
  - $\sin(x)$ es par, y $\cos(x)$ es impar



La función seno



La función coseno

- El producto de dos funciones pares es impar: $x\sin(x)$ es impar

Tema 3. Series de Fourier

Series de Fourier

- Una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **periódica** (o **señal**) si existe un número $T \geq 0$ tal que

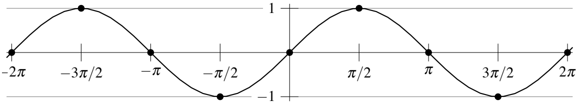
$$g(x) = g(x+\tau),\ \forall\, x \in \mathbb{R}(*)$$

- Si $g(x+\tau) = g(x)$ entonces $g(x+k\tau) = g(x)\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$
- Al menor valor que verifica la ecuación (*) se llama **período fundamental** o **período mínimo** de f, y se representa mediante la letra T.
- La periodicidad implica que los valores de g se repiten a intervalos regulares. Su gráfica puede dividirse en segmentos verticales de anchura T que son idénticos.

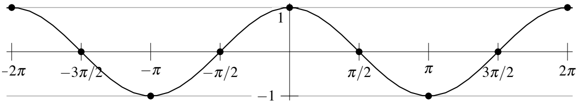
Tema 3. Series de Fourier
Series de Fourier

Ejemplos:

- $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son periódicas con periodo 2π



La función seno



La función coseno

- $\sin(\pi x)$ y $\cos(\pi x)$ son periódicas con periodo 2π
- Sea L un número real, entonces $\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ y $\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ tienen periodo L.

Tema 3. Series de Fourier

La **serie de Fourier** de una función periódica $f(x)$ de período T, $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, también conocida como señal, definida en un intervalo de longitud T está dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

donde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ Frecuencia fundamental, que se mide en ciclos por segundo o hertzios}$$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx \quad n = 1, 2, \ldots$$

Los números a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ son los coeficientes de Fourier de la función f.

Tema 3. Series de Fourier

- Las series trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier.
- La idea que subyace en las series de Fourier es la descomposición de una señal periódica en términos de señales periódicas básicas (senos y cosenos) cuyas frecuentas son múltiplos de la señal original.
- Típicamente, $f(x)$ será una función definida a trozos.
- Una ventaja que tienen las series de Fourier frente a las series de Taylor: la función $f(x)$ puede tener discontinuidades

Tema 3. Series de Fourier

Coeficientes de Fourier de una función impar

Si $f(x)$ es una función **impar**, entonces los coeficientes de Fourier se simplifican.

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(x)}_{impar}\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{impar}\, \underbrace{\sin(n\omega x)}_{par}}_{impar}\, dx = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto, para funciones impares, que tiene que los coeficientes a_n son todos 0.

Tema 3. Series de Fourier

Coeficientes de Fourier de una función par

Si $f(x)$ es una función **par**, entonces los coeficientes de Fourier se simplifican.

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{par}\,\underbrace{\sin(n\omega x)}_{impar}}_{impar}\, dx = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto, para funciones pares, que tiene que los coeficientes b_n son todos 0.

Tema 3. Series de Fourier

Aplicaciones de las Series de Fourier

- Resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Solución analítica de la ecuación de ondas y del calor
- Transformada de Fourier
- Teoría de la señal
- Circuitos electrónicos