Fundamentos Matemáticos

Grado de Nanociencia y Nanotecnología

Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Tema 1: Funciones. Continuidad. Derivación

1. **Funciones y gráficas. Continuidad.**
2. **La derivada. Recta tangente. Reglas de derivadas.**
3. **Aplicaciones de la derivada.**
4. **Método de Newton.**
5. **Problemas de optimización.**
6. **Polinomio de Taylor.**

Funciones y gráficas

Función real de variable real. Primeras definiciones

- Una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una regla que a cada número $x \in D$ le asigna un único número que llamaremos imagen de x por f y escribimos $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

- Al conjunto D se le llama dominio de f y se denota dom f:

$$dom f = D = \{x \in \mathbb{R} / \text{existe}\, f(x)\}.$$

El conjunto de valores que toma x se le llama imagen de f y se escribe Im f:

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) / x \in D\}.$$

- Por tanto una función da lugar a un subconjunto de pares ordenados en el plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, f(x))$ donde no hay dos pares distintos, con el mismo primer elemento. A este subconjunto se le llama gráfica o grafo de f y se escribe graf f y se puede dibujar en el plano cartesiano.

$$\text{graf } f = \{(x, f(x)),\ x \in D\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

En el plano cartesiano llamaremos eje de abscisas y escribimos eje OX al eje horizontal, y eje de ordenadas y escribimos eje OY al vertical.

Funciones y gráficas

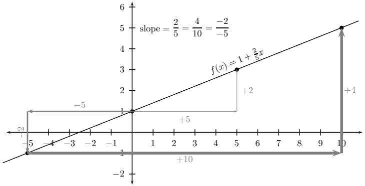
Funciones. Primeros ejemplos: rectas

Ecuación punto-pendiente. La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos, (x_0, y_0), x_1, y_1

$$y - y_0 = m\,(x - x_0), \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



Funciones y gráficas

Funciones. Primeros ejemplos: parábolas

Ecuación general de una parábola:

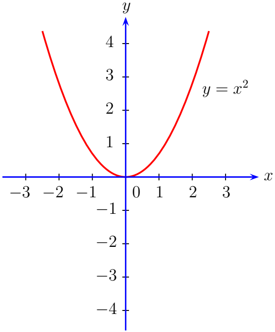
$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a indica el aplastamiento de la parábola.

Si $a > 0$ la gráfica "'se abra hacia arriba".

Si $a < 0$ sucede lo contrario.

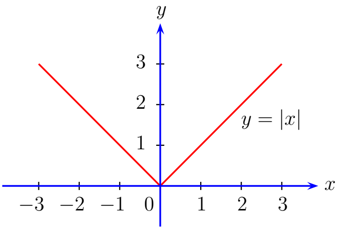
La parábola pasa por el punto $(0, c)$ y el vértice viene está en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.



Funciones y gráficas

Funciones. Primeros ejemplos: valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Funciones y gráficas

Traslación de gráficas de funciones

- En general si a una función le sumamos una constante $c > 0$

$$y = f(x) + c,$$

la gráfica se traslada hacia arriba. Si $c < 0$ trasladamos la gráfica hacia abajo.

- Si sumamos $c > 0$ a la variable

$$y = f(x + c),$$

la gráfica se desplaza hacia la izquierda. Si $c < 0$ la gráfica se desplaza hacia la izquierda.

Funciones y gráficas

Operaciones con funciones funciones

- Suma/resta de funciones.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

- Producto de funciones.

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x).$$

- Cociente de funciones.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Composición de funciones.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad f(x) \in \text{ dom } g.$$

La composición no es conmutativa. Ejemplo

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^2.$$

Funciones y gráficas

Propiedades de las funciones

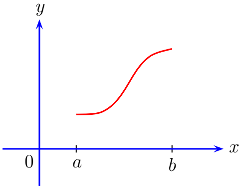
- Inyectividad e Inversa,
- Monotonía,
- Simetría,
- Acotación.

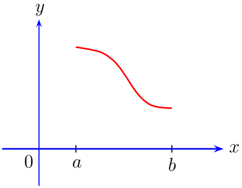
Funciones y gráficas

Monotonía

- Una función f se dice creciente si dados $x, y \in \operatorname{dom} f$, con $x < y$, es $f(x) \leq f(y)$.
- Una función f se dice decreciente si dados $x, y \in \operatorname{dom} f$, con $x < y$, es $f(x) \geq f(y)$.
- Una función f se dice estrictamente creciente si dados $x, y \in \operatorname{dom} f$, con $x < y$, es $f(x) < f(y)$.
- Una función f se dice estrictamente decreciente si dados $x, y \in \operatorname{dom} f$, con $x < y$, es $f(x) > f(y)$.

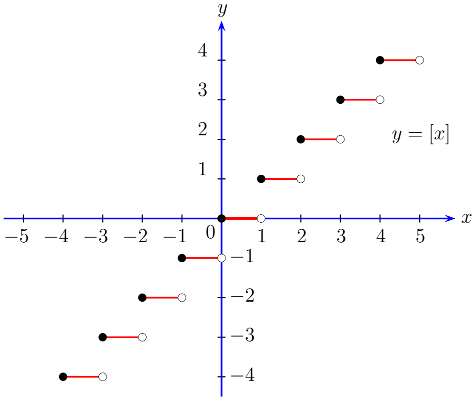
En todos los casos se dice que la función es monótona.
Si $D \subset \mathbb{R}$, se dice que f es monótona en D si su restricción $f|_D$ es monótona.





Funciones y gráficas

Ejemplo función creciente: parte entera



Funciones y gráficas

Acotación

Sea $f : D \to \mathbb{R}$:

- Se dice que f está acotada superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in D$.
- Se dice que f está acotada inferiormente si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$, para todo $x \in D$.
- Se dice que f está acotada (superior e inferiormente) si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in D$.

Funciones y gráficas

Simetría

Sea f una función definida en $\mathbb{R}$. Se dice que f es

- Par: si para todo $x \in \mathbb{R}$

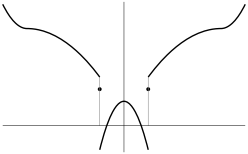
$$f(-x) = f(x).$$

  Su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas.

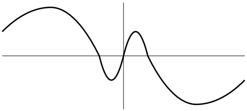
- Impar: si para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x).$$

  su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.



Función par



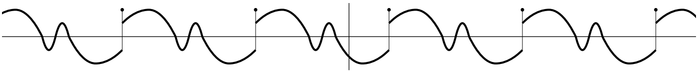
Función impar

Funciones y gráficas

Periodicidad

Una función f definida en $\mathbb{R}$ se dice que es periódica de período T ($T \in \mathbb{R} - \{0\}$) si se cumple

$$f(x+T) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$



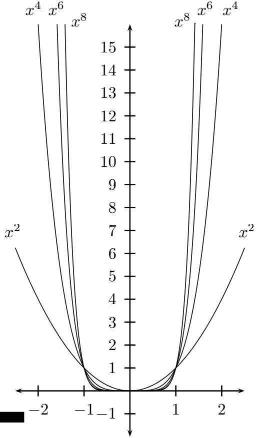
Función periódica

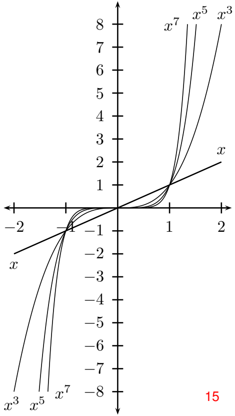
Funciones y gráficas

Primeros ejemplos

Potencias de exponente par e impar:

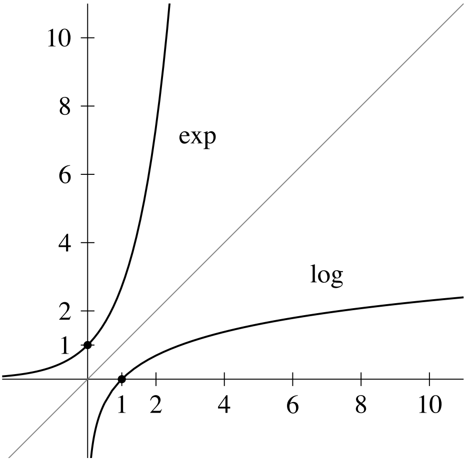
- $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathrm{N}$ es par.
- $f(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathrm{N}$ es impar.





Funciones y gráficas

Funciones exponencial y logarítmica



Las funciones exponencial y logaritmo

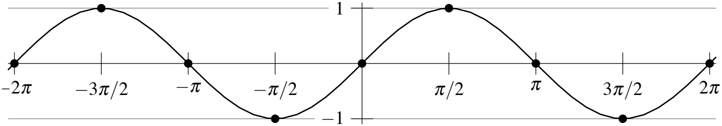
Funciones y gráficas

Propiedades de la función exponencial y logarítmica

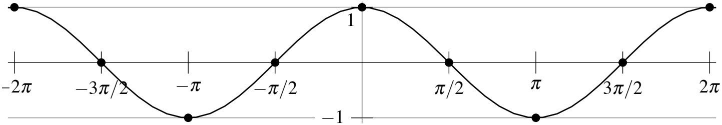
- $e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y$
- $e^{\log(x)} = x$
- $log(e^x) = x$
- $\log(1) = 0, \log(e) = 1$
- $\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^y) = y\log(x)$

Funciones y gráficas

Funciones trigonométricas



La función seno



La función coseno

Funciones y gráficas

Propiedades de las funciones seno y coseno

- La función seno es impar, mientras que el coseno es una función par
$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x.$$
- Identidad fundamental de la trigonometría
$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$
- Existe un número real π, tal que
$$\operatorname{sen} \pi = 0, \quad \cos \pi = -1.$$
- Las funciones seno y coseno son acotadas y tienen por conjunto imagen el $[-1, 1]$
- Dados $x, y \in \mathbb{R}$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$\cos \alpha = x, \quad \operatorname{sen} \alpha = y.$$
- Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

Funciones y gráficas

Propiedades de las funciones seno y coseno

- **Fórmulas de adición**

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y,\quad \operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y,\quad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y.$$

- En particular, para el ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x,\quad \cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x.$$

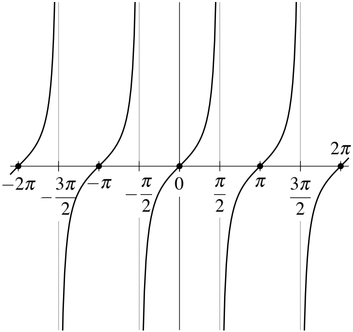
Funciones y gráficas

Funciones trigonométricas

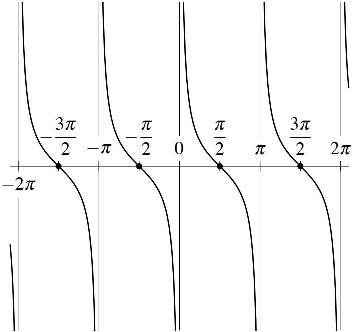
grados	x	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
0	0	0	1
15	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0

Funciones y gráficas

Funciones trigonométricas



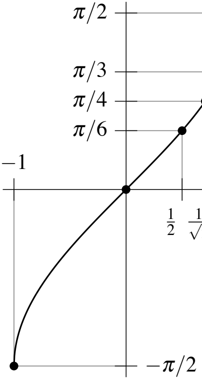
La función tangente



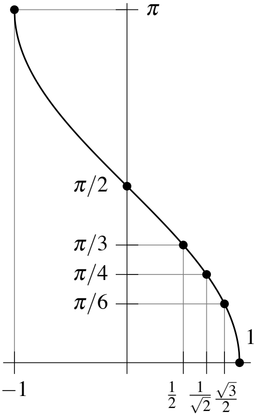
La función cotangente

Funciones y gráficas

Funciones trigonométricas inversas



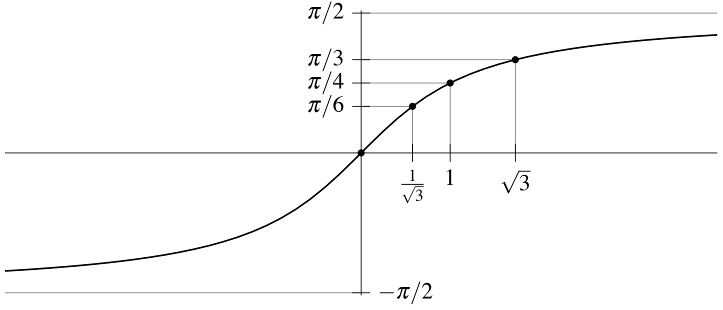
La función arco seno



La función arco coseno

Funciones y gráficas

Funciones trigonométricas inversas



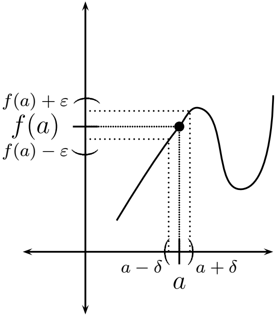
La función arco tangente

Continuidad y límites laterales

Definición: continuidad de una función en un punto

Dada una función $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es continua en un punto $a \in D$ si:

- $f(a)$ está definida
- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

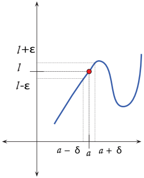


Continuidad y límites laterales

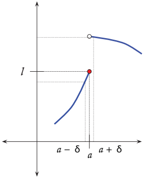
- **Propiedad** El límite de una función en un punto, si existe, es **único**
- **Operaciones con límites** Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$. Entonces:
  - $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
  - $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$
  - $\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$

Continuidad y límites laterales

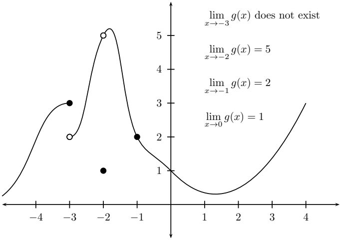
Límite de una función en un punto



El límite es l



El límite no existe



Continuidad y límites laterales

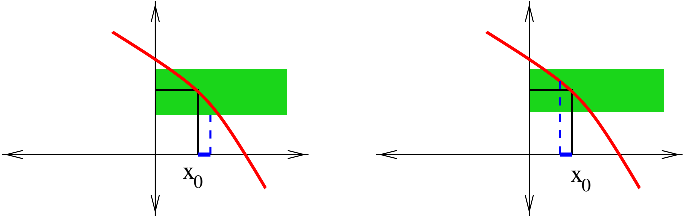
Límites laterales

- Diremos que el límite de f, cuando x se acerca a c por la derecha, es l si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = l \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que } 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$$

- Diremos que el límite de f, cuando x se acerca a c por la izquierda, es l si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = l \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que } 0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$$



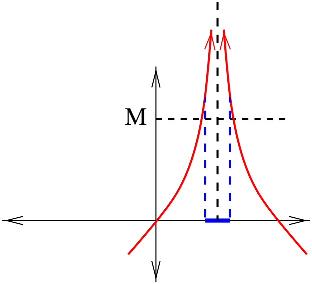
Límite por la derecha **Límite por la izquierda**

- **Propiedad**
  Existe $\lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow$ existen $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = l$ y son iguales.

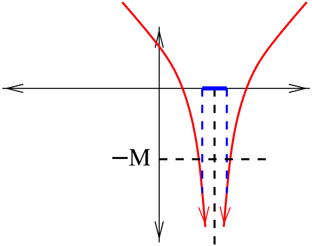
Continuidad y límites laterales

Límites infinitos

- $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > M]$
- $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -M]$



$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

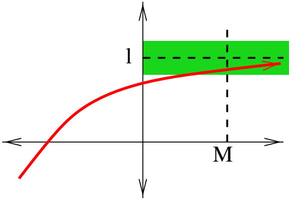


$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

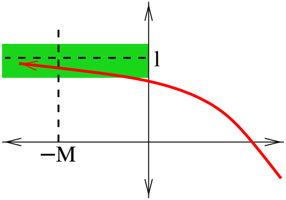
Continuidad y límites laterales

Límites en el infinito

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tal que } x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow [\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tal que } x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Continuidad y límites laterales

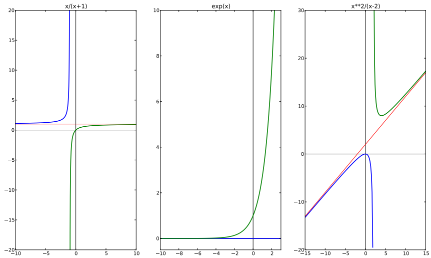
Asíntotas

Diremos que una función f tiene:

- una **asíntota horizontal** en $y = l$ si: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
- una **asíntota vertical** en $x = x_0$ si: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
- una **asíntota oblícuo** si $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$

  Para calcular m y n: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si $m \neq 0$ y $m \neq \pm\infty$, entonces calulamos $n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

  La ecuación de la asíntota es: $y = mx + n$



Continuidady límites laterales

- Se dice que f es continua por la derecha en un punto $a \in D$ si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- Se dice que f es continua por la izquierda en un punto $a \in D$ si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Propiedad: f continua en un punto $a \in D \Leftrightarrow f$ continua por la derecha y por la izquierda en a.

Continuidady límites laterales

Propiedad:

Si $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en $x_0 \in (a, b)$,

- λf es continua en x_0, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- $(f \pm g)$ y $(f \cdot g)$ son continuas en x_0
- si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0

Propiedad:

La composición de funciones continuas es una función continua. Además, si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ y g es continua en l, entonces

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)$$

Propiedad: El límite conmuta con las funciones continuas. Es decir, sean f y g funciones tales que existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y g es una función continua en l. Entonces

$$\lim_{x \to x_0} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(l).$$

Propiedad:

Si $f(x)$ es continua en un punto $x_0 \Rightarrow f$ está acotada en un entorno del punto x_0

Continuidady límites laterales

Continuidad en intervalos
Definición:
Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f **es continua en** (a, b) si es continua en todos los puntos de (a, b).

Definición:
Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f **es continua en** $[a, b]$ si

1. f es continua en (a, b),
2. f es continua en a por la derecha,
3. f es continua en b por la izquierda.

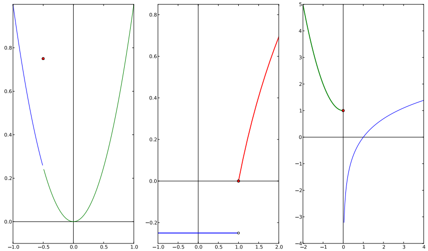
Continuidad y límites laterales

Discontinuidades

Definición: Se dice que una función f es **discontinua** en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Las discontinuidades pueden ser de varios tipos:

- **evitable o removible**: $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- **inevitable, esencial o no removible**: no existe el límite de f en x_0, porque:
  - $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$
  - alguno de los límites laterales no existe
  - ambos límites laterales no existen



Continuidad y límites laterales

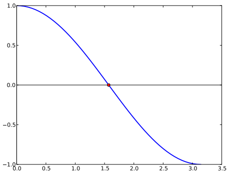
Resultados importantes para funciones continuas

Teorema de Bolzano:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

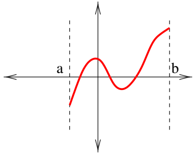
1) f es continua en $[a, b]$,
2) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

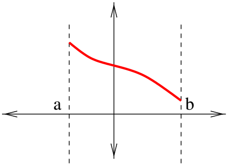


Comentarios sobre el Teorema de Bolzano:

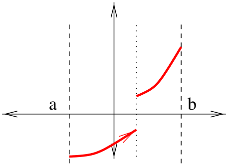
1. Pueden existir varias raíces



2. Si se suprime alguna hipótesis, el teorema no es aplicable



$f(a)f(b) > 0$

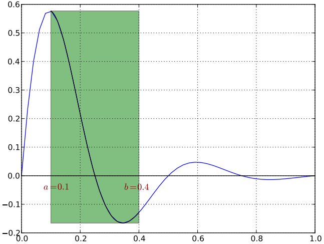


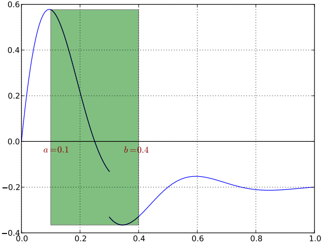
f no continua en $[a,b]$

Continuidad y límites laterales

Teorema de los valores intermedios

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f es continua en $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

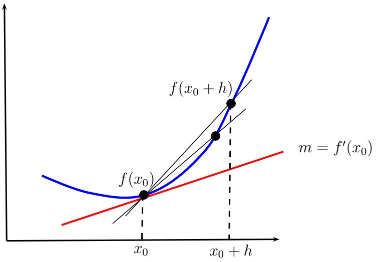




2.1: Derivada. Recta tangente

Motivación de la definición de derivada:

1) Derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función



2) Derivada como variación instantánea de una magnitud: posición, velocidad, temperatura, concentración de una sustancia en un fluido, etc

Derivada. Recta tangente

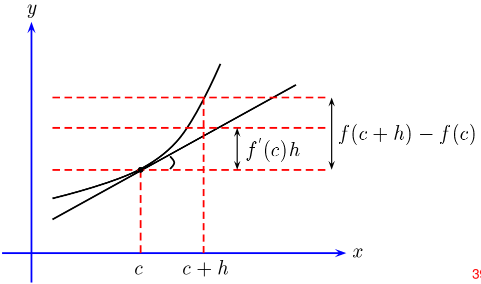
Definición formal de derivada

Definición

Dada una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que f es derivable en un punto $c \in D$, si existe el siguiente límite

$$f'(c) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Aproximación lineal



Derivada. Recta tangente

Derivadas laterales

Sea $f : D \subset\rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D$

1. Si existe $r > 0$ tal que $[a, a+r) \subset D$, se dice que f es derivable por la derecha en a si existe el límite:
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
En caso de que exista, se llama derivada lateral por la derecha de f en a y se escribe $f'_+(a)$.

2. Si existe $r > 0$ tal que $(a - r, a] \subset D$, se dice que f es derivable por la izquierda en a si existe el límite:
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
En caso de que exista, se llama derivada lateral por la izquierda de f en a y se escribe $f'_-(a)$.

Propiedad:
Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x0 \in (a, b)$. f es derivable en $x0 \Leftrightarrow$ si f es derivable por la izquierda y por la derecha en $x0$ y ambas derivadas coinciden.

Derivada. Recta tangente

- **Derivadas laterales. Ejemplos**

1. La función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, pero sin embargo sí existen las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

2. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0, \\ x & \text{si } x > 0, \end{cases}$$
$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = 1.$$

- **Derivabilidad $\Rightarrow$ continuidad**

  Si una función f es derivable en un punto $a \Rightarrow$ la función f es continua en ese punto, puesto que:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \to 0$$

- **Continuidad $\not\Rightarrow$ Derivabilidad**

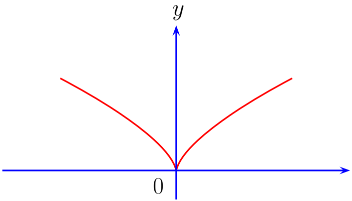
  Ej: $f(x) = |x|$, no es derivable en $x = 0$, aunque sí es continua en $x = 0$.

Derivada. Recta tangente

Ejemplos

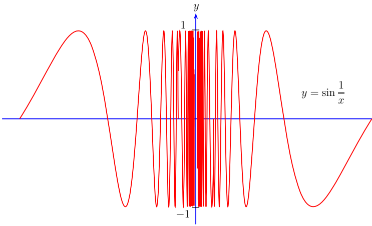
1 f puede ser continua en un punto y no existir las derivadas laterales:

$$f(x) = x^{2/3}$$



2 f no es continua en $x = 0$ y por tanto no es derivable.

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

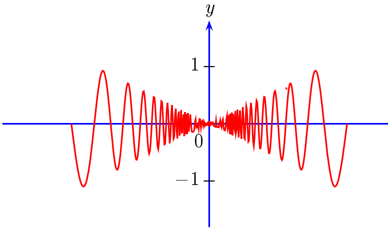


Derivada. Recta tangente

Ejemplos

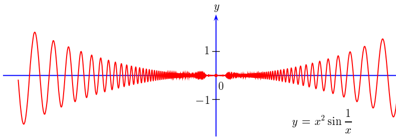
3 f es continua, pero no derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$



4 f es continua y derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$



Derivada. Recta tangente

Rectas tangentes y normales

Sea f función derivable y $(a, f(a))$ un punto de su gráfica.

La pendiente de la recta tangente es $f'(a)$ y por tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

La pendiente de la recta normal es $\dfrac{-1}{f'(a)}$ y por tanto la ecuación de la recta normal es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a), \text{ suponiendo que } f'(a) \neq 0.$$

2.2-2.6: Reglas de Derivación

Derivadas de funciones elementales

- $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
- $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}, \quad \dfrac{d}{dx}\log_a(x) = \dfrac{1}{x}\log_a(e)$
- $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = cos(x), \quad \dfrac{d}{dx}\cos(x) = -sin(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\tan(x) = \dfrac{1}{cos^2(x)}$
- $\dfrac{d}{dx}\arcsin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \dfrac{d}{dx}\arccos\,(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan\,(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

2.2-2.6: Reglas de Derivación

Técnicas de cálculo de derivadas

Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, dos funciones derivables en un punto $x_0 \in (a,b)$ y $l \in R$. Entonces

- Derivada de la suma de funciones $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- Derivada del producto por escalares: $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
- Derivada del producto de funciones $(f \cdot g)'$,
  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- Derivada del cociente de funciones $[\ (\frac{f}{g})'\ ]$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones tales que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces $(g \circ f)$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

2.2-2.6: Reglas de Derivación

Derivadas de funciones elementales

- $\dfrac{d}{dx}f(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\ln(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $\quad \dfrac{d}{dx}\log_a(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a(e)$
- $\dfrac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\sin(f(x)) = cos(f(x))f'(x)$, $\quad \dfrac{d}{dx}\cos(f(x)) = -sin(f(x))f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\tan(f(x)) = \dfrac{1}{cos^2(f(x))f'(x)}$
- $\dfrac{d}{dx}\arcsin(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}f'(x)$, $\quad \dfrac{d}{dx}\arccos\,(f(x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}}f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan\,(f(x)) = \dfrac{1}{1+f(x)^2}f'(x)$

2.2-2.6: Reglas de Derivación

Derivación Implícita
Una ecuación $F(x,y)=0$ define implícitamente una función f en un intervalo (a,b) si:

$$F(x,f(x))=0, \quad \forall x \in (a,b)$$

- Ej: La ecuación $x^2+y^2=2$ define la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}, \forall x \in (-2,2)$

Nota:

- Si f es derivable $\Rightarrow F$ también lo es
- Como consecuencia: podemos calcular f' a partir de F'
- *Procedimiento*: para calcular $F'=\dfrac{dF}{dx}$, derivamos los términos en los que aparezcan las expresiones de x de forma usual, mientras que para los términos con y tendremos en cuenta la regla de la cadena.

2.2-2.6: Reglas de Derivación

Derivación Logarítmica

- Derivada logarítmica $[(f(x)^{g(x)})']$,

  Teniendo en cuenta que, si hacemos $y = f(x)^{g(x)}$

$$\log y = \log[f(x)^{g(x)}] = g(x)\ \log f(x)$$

  derivando se deduce

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g' \log f + \frac{g}{f} f'\right].$$

2.2-2.6: Reglas de Derivación

Derivadas sucesivas

Definición:
Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable en todos los puntos de (a,b). Definimos la **función derivada** como:

$$\begin{array}{cccc} f': & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f'(x) \end{array}$$

- Dado $x_0\in(a,b)$ se define:

$$f''(x_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

  si este límite existe y es finito. En este caso, se dice que f es **derivable dos veces** en x_0
- En general, una vez que se tiene $f^{(n)}:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, se define:

$$f^{(n+1)}(x_0)=\left(f^{(n)}\right)'(x_0)$$

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Extremos relativos

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in D$ tal que existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset D$.

- Se dice que a es un **máximo local** de f si existe $r > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in (a-r, a+r)$.
- Se dice que a es un **mínimo local** de f si existe $r > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in (a-r, a+r)$.

Definición (punto crítico)

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y a un punto interior de D. Se dice que a es **punto crítico** de f si la función no es derivable en a, o bien, si $f'(a) = 0$.

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y c un punto interior de D. Si c es máximo o mínimo local de f y f es derivable en c $\Rightarrow f'(c) = 0$, i.e., c es punto crítico.

NOTA: El recíproco no es cierto: $f'(c) = 0 \not\Rightarrow c$ extremo relativo local.
Ejemplo: $f(x) = x^3$ y $a = 0$. $f'(0) = 0$ y f no tiene un extremo local en $x = 0$.

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Teorema (Monotonía)

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que f es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b), entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es estrictamente creciente en el intervalo $[a,b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es estrictamente decreciente en el intervalo $[a,b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es constante en el intervalo $[a,b]$.

Teorema (Criterio de la derivada primera)

Sea $f : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$, continua en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ y derivable en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, entonces:

1. Si $f'(x) < 0$ para todo $x < x_0$, y $f'(x) > 0$ para todo $x > x_0$, $\Rightarrow f$ tiene un mínimo local en x_0.
2. Si $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$, y $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, $\Rightarrow f$ tiene un máximo local en x_0.

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Determinación de extremos locales

Apoyándonos en el estudio de la derivada segunda podemos obtener una condición suficiente de extremo para los puntos críticos.

Teorema (Criterio de la derivada segunda)

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de del punto c, tal que $f'(c) = 0$. Entonces:

1. Si $f''(c) > 0$, f posee un mínimo local en c.
2. Si $f''(c) < 0$, f posee un máximo local en c.

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Extremos absolutos

Teorema de Weierstrass

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua $\quad \Rightarrow \quad$ f alcanza el máximo y el mínimo en el intervalo $[a, b]$, i.e., existen $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ tales que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall xin[a, b]$$

¿Dónde buscar los extremos absolutos?

- Puntos de (a, b) donde f es derivable y $f'(x) = 0$
- Puntos de (a, b) donde f no es derivable
- Los extremos del intervalo a y b

Finalmente calculamos las imágenes de los puntos obtenidos en los pasos anteriores y comparándolos obtenemos los extremos absolutos.

Aplicaciones de la derivada. Optimización

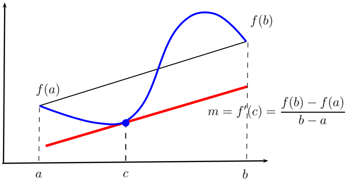
Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

1) f es continua en $[a, b]$,
2) f es derivable en (a, b).

Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Teorema:
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = cte$ en $[a, b]$

Aplicación:
Como aplicación de este resultado podemos comprobar que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

puesto que si definimos $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, $f(0) = 1$ y $f'(x) = 0$, por lo que $f(x) = 1$.

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Regla de L'Hôpital. Aplicación de la derivada al cálculo de límites

Su pongamos que

1) f, g derivables en $I - \{a\}$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I - \{a\}$
2) Se verifica alguna de las condiciones:

$$\lim_{x \to s} f(x) = \lim_{x \to s} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to s} f(x) = \lim_{x \to s} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to s} f(x) = \lim_{x \to s} g(x) = -\infty,$$

3) Existe

$$\lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Entonces:

$$\lim_{x \to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Regla de L'Hôpital. Ejemplos

1. Un infinitésimo ya conocido:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$
2. Uno del tipo $[0/0]$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = 0.$$
3. Uno en $+\infty$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$
4. Aunque no exista $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, puede que exista $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{2x + \cos x}$$

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Otras indeterminaciones transformable en de tipo L'Hôpital

1. $[0 \cdot \infty]$
   Si tenemos f, g tal que $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \pm\infty$ en $x = a$ y queremos calcular $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$ se puede transformar en una indeterminación de tipo L'Hôpital haciendo:
   $$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}.$$
   donde $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0$. Hemos transformado la indet. $0 \cdot \infty$ en otra de tipo $0/0$.
2. $[\infty - \infty]$
   En este caso basta multiplicar numerador y denominador por $\frac{1}{f(x)g(x)}$:
   $$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Aplicaciones de la derivada. Optimización

Otras indeterminaciones transformable en de tipo L'Hôpital

Ejemplos:

1. $[0 \cdot \infty]$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \log x = 0$$

2. $[\infty - \infty]$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

aplicando L'Hôpital a cada factor.

NOTA: También se pueden reducir a indeterminaciones de tipo L'Hôpital las indeterminaciones de tipo potencia 0^0, ∞^0, 1^∞.

Aplicaciones de la derivada. Optimización

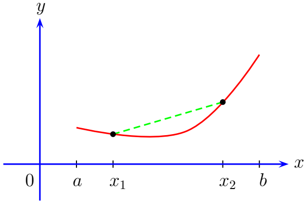
Convexidad

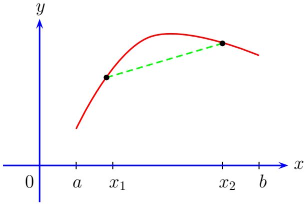
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$:

- f es convexa en $[a,b]$ si el segmento que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f,

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad \forall x \in [a,b]$$

- f es cóncava en $[a,b]$ si el segmento que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f.





Aplicaciones de la derivada. Optimización

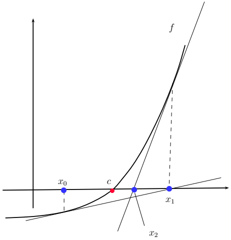
Convexidad

- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y sólo si f' es creciente en (a,b). Esto equivale a que $f'' \geq 0$, si f tiene derivada segunda.
- f es cóncava en $[a,b]$ si y sólo si f' es decreciente en (a,b); es decir, si existe derivada segunda, si y sólo si $f'' \leq 0$
- f tiene un **punto de inflexión** en $x0$ si cambia de cóncava a convexa (o viceversa) en $x0$. El punto de inflexión es $(x0,f(x0))$
- Si $(x0,f(x0))$ es un punto de inflexión de $f \Rightarrow f''(x0)=0$ o f'' no está definida en $x=x0$

3.8: Método de Newton-Raphson

- Sea $f(x) = 0$ una ecuación tal que la gráfica de f corta al eje en $x = c$ en un intervalo (a, b).
- **El método de Newton Permite**: aproximar la raíz de $f(x) = 0$ partiendo de un un valor $x = x_0$.
- **Procedimiento**:
  - Partimos de un valor $x = x_0$ dado
  - Se construye la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(x_0, f(x_0))$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
  - calculando x_1 como el punto de corte entre la tangente y el eje OX.

    $$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
  - Tomando ahora x_1 como punto repetimos el proceso. Así sucesivamente.



3.8: Método de Newton-Raphson (cont.)

- Para calcular la aproximación x_{n+1}, calculamos la tangente en x_n

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

y hallamos después x_{n+1} como la intersección entre la tangente y el eje OX:

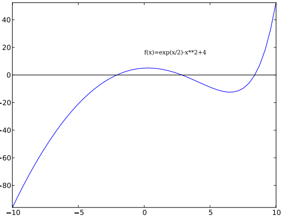
$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

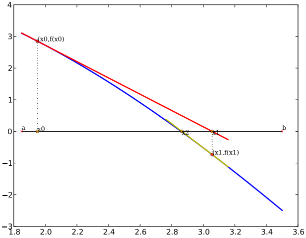
donde despejando,

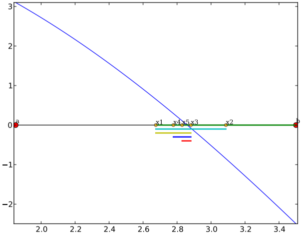
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3.8: Método de Newton-Raphson (cont.)

Ejemplo:







8.7: Polinomio de Taylor

Dada $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ con $f^{(n}$ derivable en (a,b) (i.e., admite derivada $(n+1)$-ésima continua).

Para $x_0 \in [a,b]$, se define el **polinomio de Taylor de grado n relativo a la función f en el punto** x_0 como:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Entonces, para todo $x \in (a,b)$ existe $\xi \in (a,x_0)$ (o $\xi \in (x,a)$ dependiendo de cuál de estos dos puntos sea mayor) tal que

$$f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = P_{n,f,x_0}(x) + R_n(\xi)$$

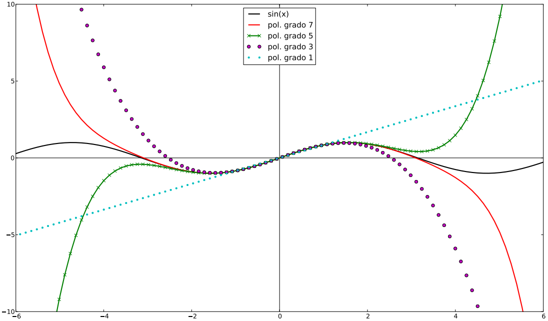
siendo $R_n(\xi)$ el **resto**, que mide la bondad de la aproximación.
Nota: Si $x_0 = 0$, el polinomio se denomina polinomio de **de McLaurin**

Nota: $P_{n,f,x_0}(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ tal que: $f(x_0) = p(x_0)$ y $f^{(k}(x_0) = p^{(k}(x_0)$ $k = 1, \ldots, n$.

8.7: Polinomio de Taylor

Ejemplo de desarrollos de Taylor

Ejemplo: Polinomios de Taylor de grado 2 a 7 centrado en $a = 0$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$.



$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5.040}x^7.$$