

# Árvore Binária de Busca Balanceada (AVL)

Prof. Flavio B. Gonzaga  
[flavio.gonzaga@unifal-mg.edu.br](mailto:flavio.gonzaga@unifal-mg.edu.br)  
Universidade Federal de Alfenas  
UNIFAL-MG

# Sumário

- Árvore AVL;
  - Definição;
  - Fator de balanceamento;
  - Rotações:
    - Simples à direita;
    - Simples à esquerda;
    - Dupla à direita;
    - Dupla à esquerda;
  - Inserindo nós...;

# Definição

- Árvore AVL é uma árvore binária de busca balanceada;
  - Uma árvore balanceada (árvore completa) são as árvores que minimizam o número de comparações efetuadas no pior caso para uma busca com chaves de probabilidades de ocorrências idênticas;
- Para garantir essa propriedade em aplicações dinâmicas, é preciso reconstruir a árvore para seu estado ideal a cada operação sobre seus nós (inclusão ou exclusão), para ser alcançado um custo de algoritmo com o tempo de pesquisa tendendo a  $O(\log n)$ ;
- As operações de busca, inserção e remoção de elementos possuem complexidade  $O(\log n)$ , no qual  $n$  é o número de elementos da árvore.
- O nome AVL vem de seus criadores soviéticos Adelson-Velsky e Landis (1962);

Wikipedia, 2018.

# Definição

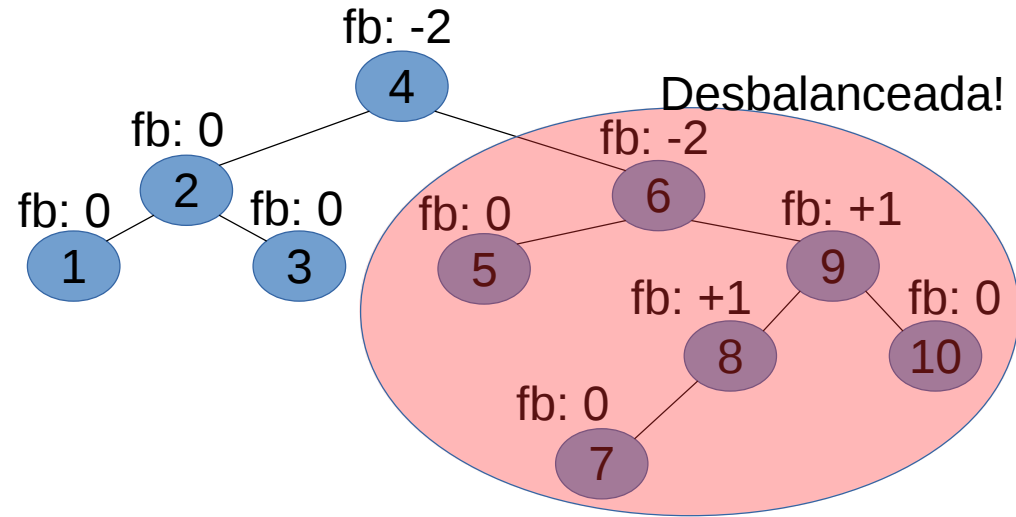
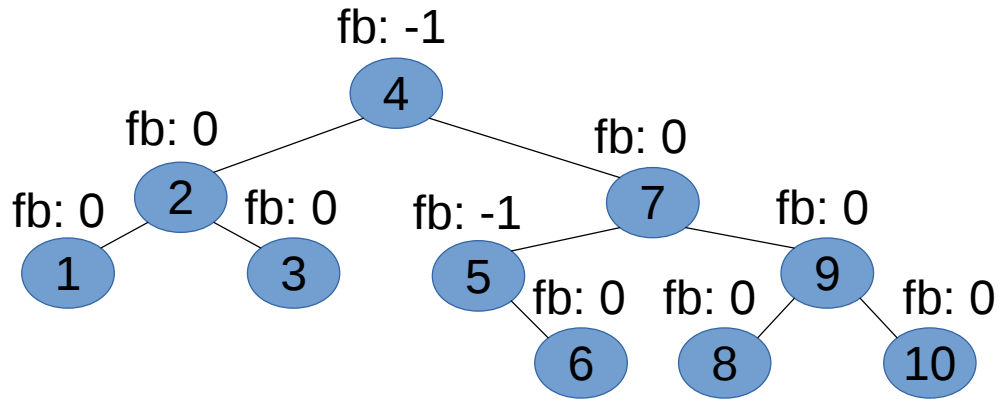
- Árvore que permite o rebalanceamento local;
  - Apenas a parte afetada pela inserção ou remoção é rebalanceada;
  - Uso de rotações simples ou duplas na etapa de rebalanceamento;
- Introduz uma variável, chamada de fator de balanceamento;
  - **Diferença** entre a quantidade de níveis da **subárvore esquerda** e da **subárvore direita**;

# Definição

- Com exceção das funções de inserção e remoção, as demais funções da árvore AVL são idênticas às da árvore binária de busca;

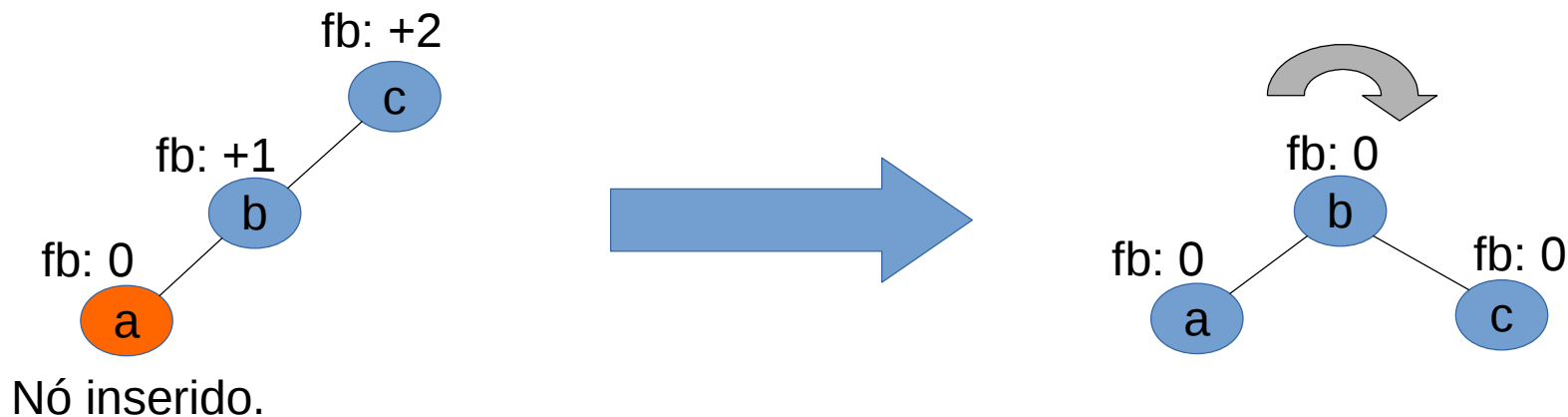
# Fator de Balanceamento

- Fator de balanceamento:
  - fb deve ser sempre: -1, 0 ou 1;



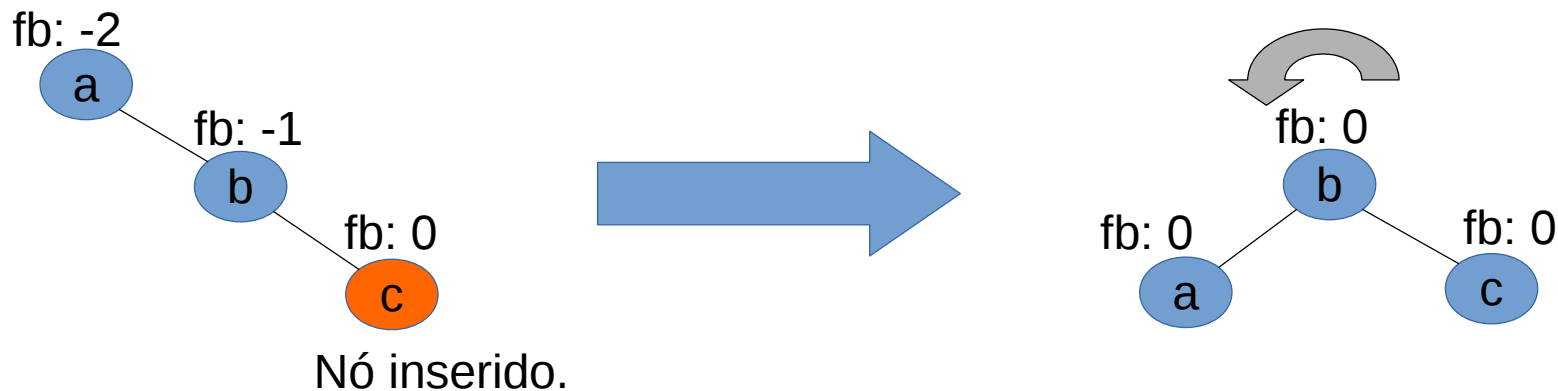
# Rotações – simples à direita

- Se faz necessária quando o desbalanceamento ocorreu em função de inserções feitas à esquerda:



# Rotações – simples à esquerda

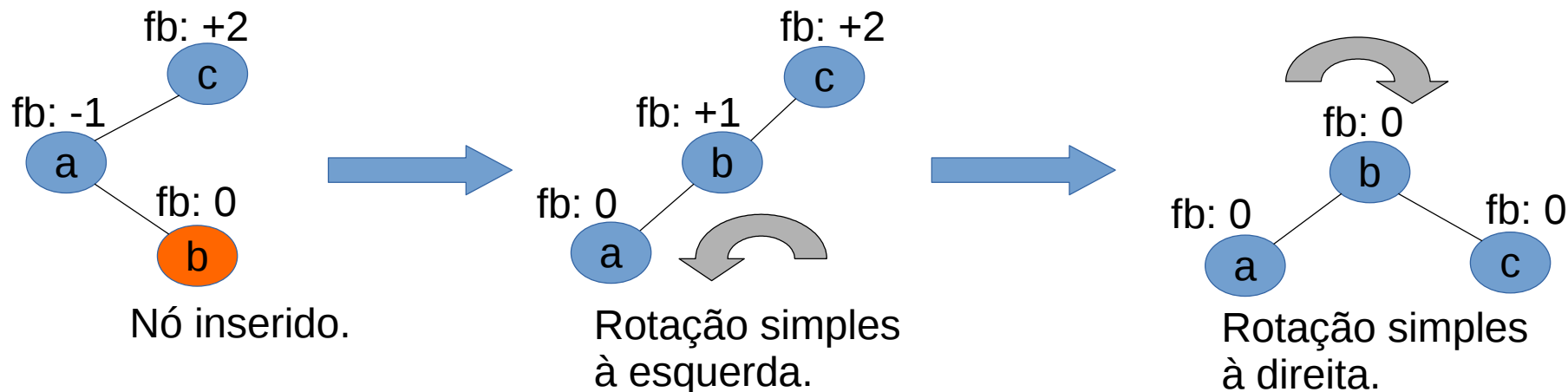
- Se faz necessária quando o desbalanceamento ocorreu em função de inserções feitas à direita:





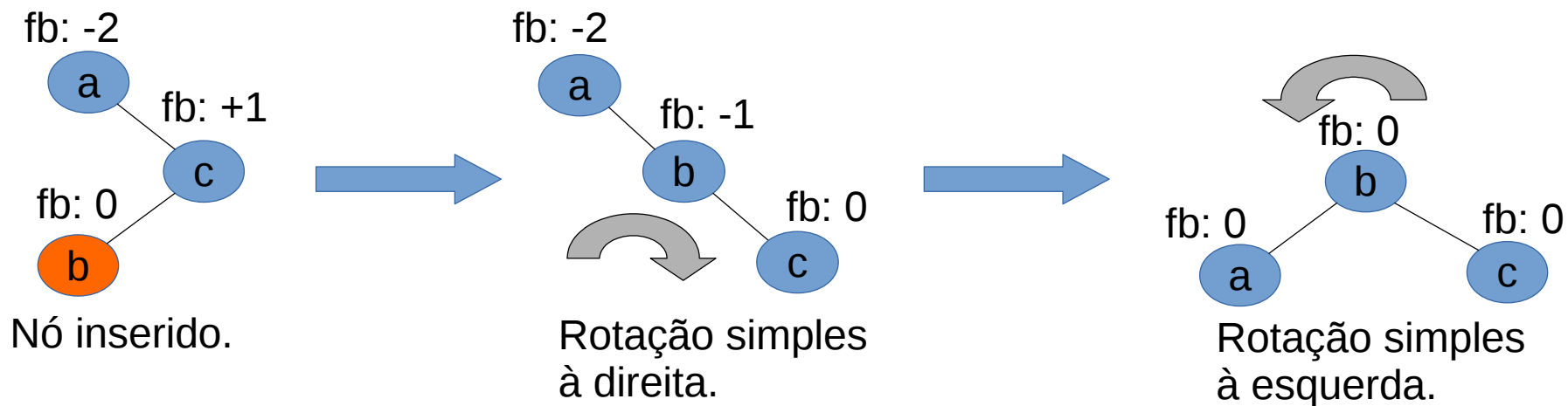
# Rotações – dupla à direita

- Se faz necessária quando o desbalanceamento ocorreu em função de inserção feita à direita na subárvore esquerda:



# Rotações – dupla à esquerda

- Se faz necessária quando o desbalanceamento ocorreu em função de inserção feita à esquerda na subárvore direita:



# Inserindo nós...

15 – 27 – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14

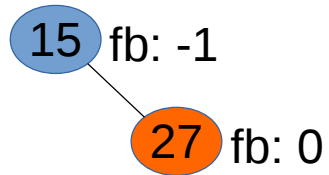
# Inserindo nós...

~~15~~ – 27 – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14

15 fb: 0

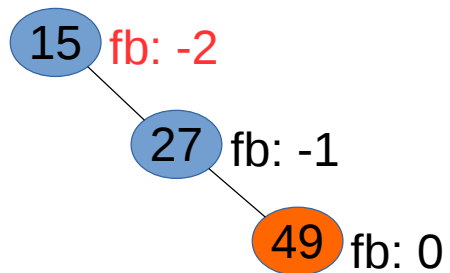
# Inserindo nós...

~~15~~ – ~~27~~ – 49 – 10 – 8 – 67 – 59 – 9 – 13 – 20 – 14



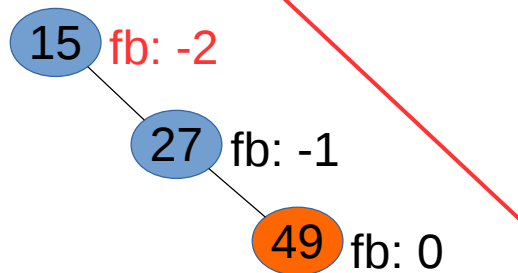
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - 10 - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



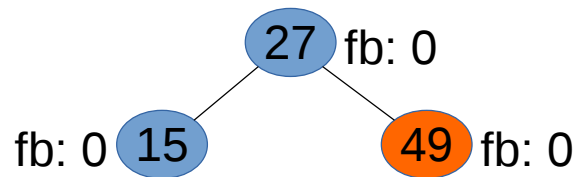
# Inserindo nós...


~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - 10 - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - 10 - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14

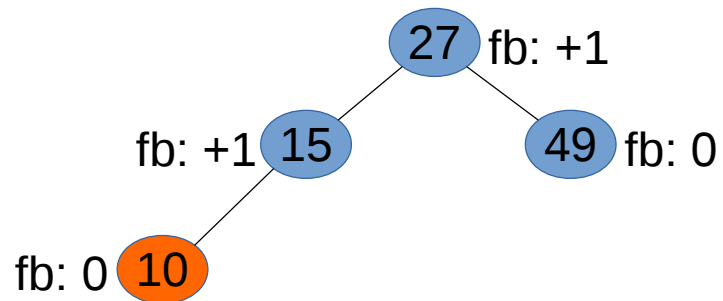


RSE(15, 27)  




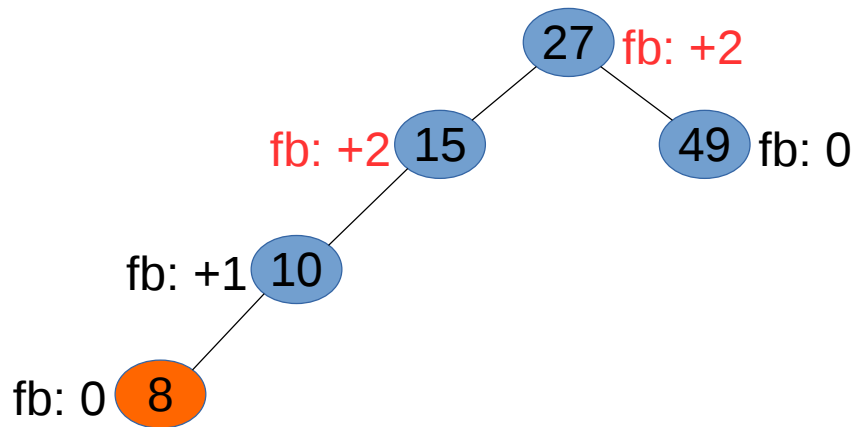
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - 8 - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



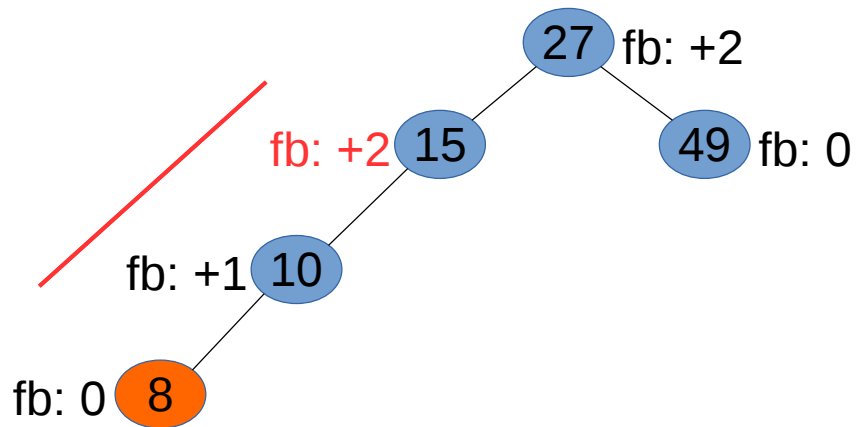
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



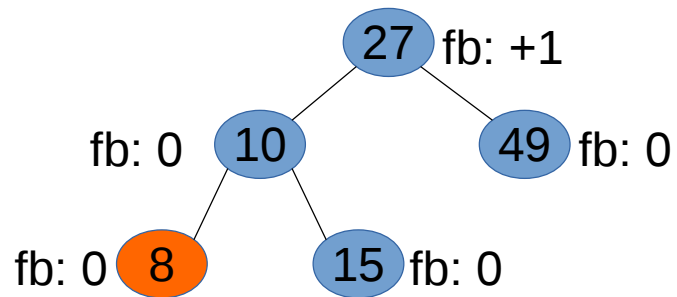
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - 67 - 59 - 9 - 13 - 20 - 14

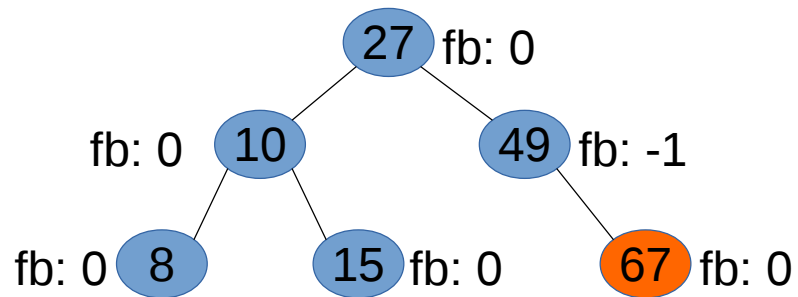


RSD(15, 10)



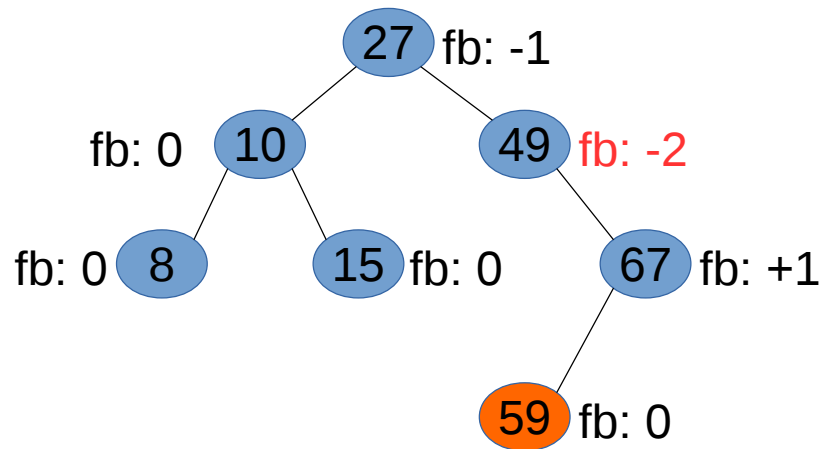
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - 59 - 9 - 13 - 20 - 14



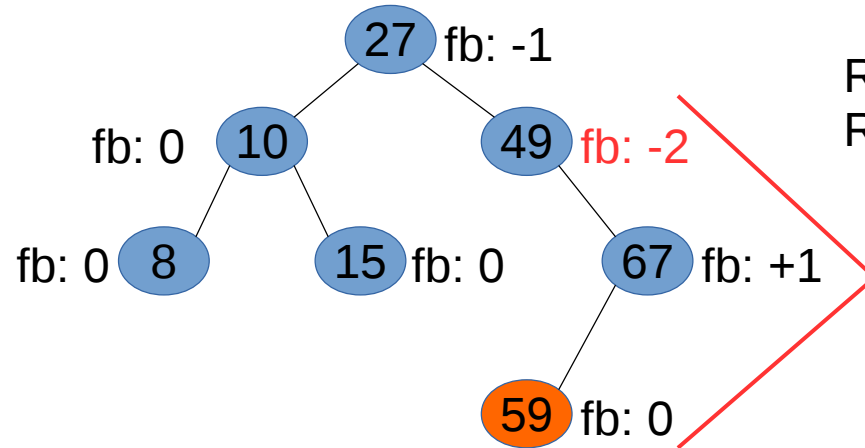
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



# Inserindo nós...

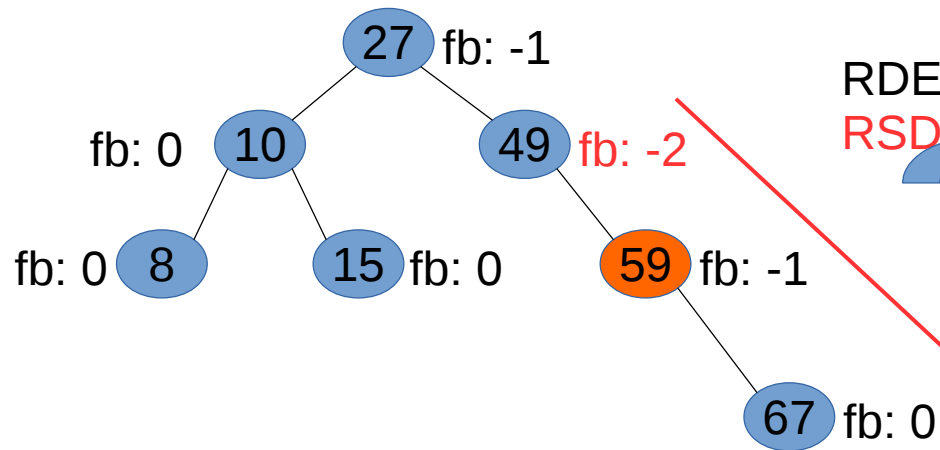
~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



$$\text{RDE} = \text{RSD}(59, 67) + \text{RSE}(49, 59)$$

# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14

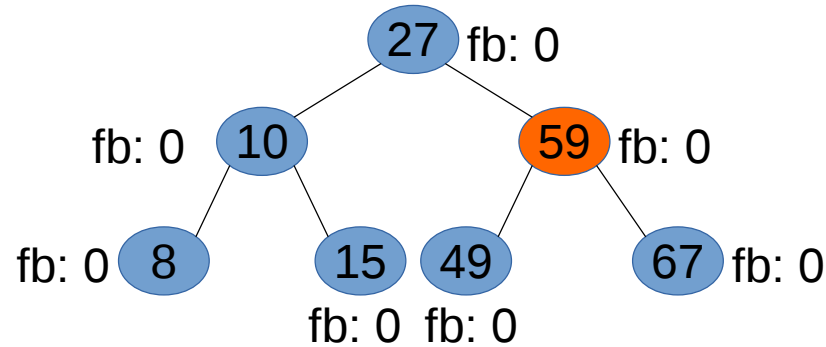



$$\text{RDE} = \text{RSD}(59, 67) + \text{RSE}(49, 59)$$



# Inserindo nós...

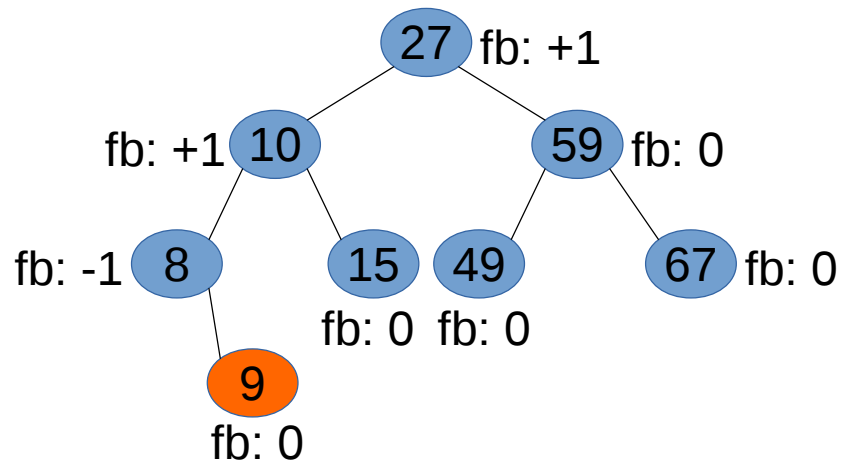
~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - 9 - 13 - 20 - 14



$$\text{RDE} = \text{RSD}(59, 67) + \text{RSE}(49, 59)$$


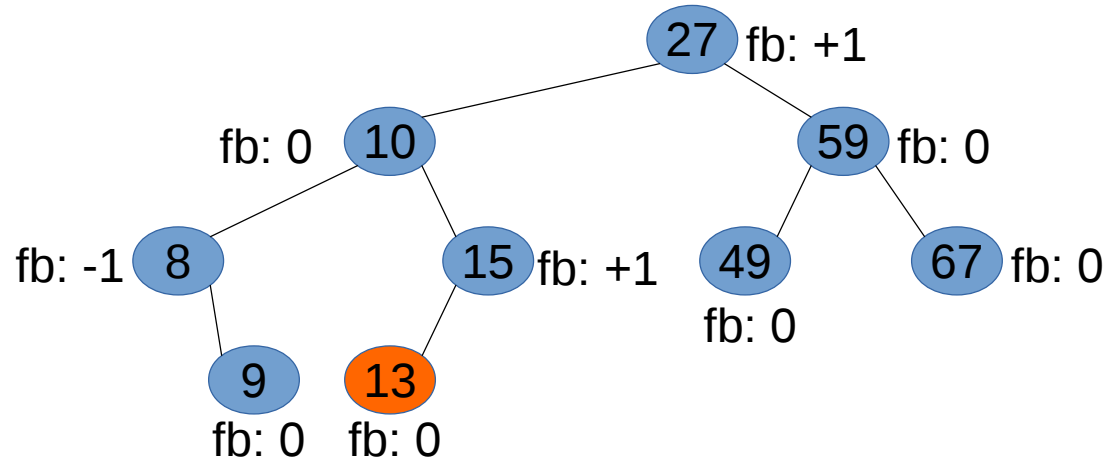
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - 13 - 20 - 14



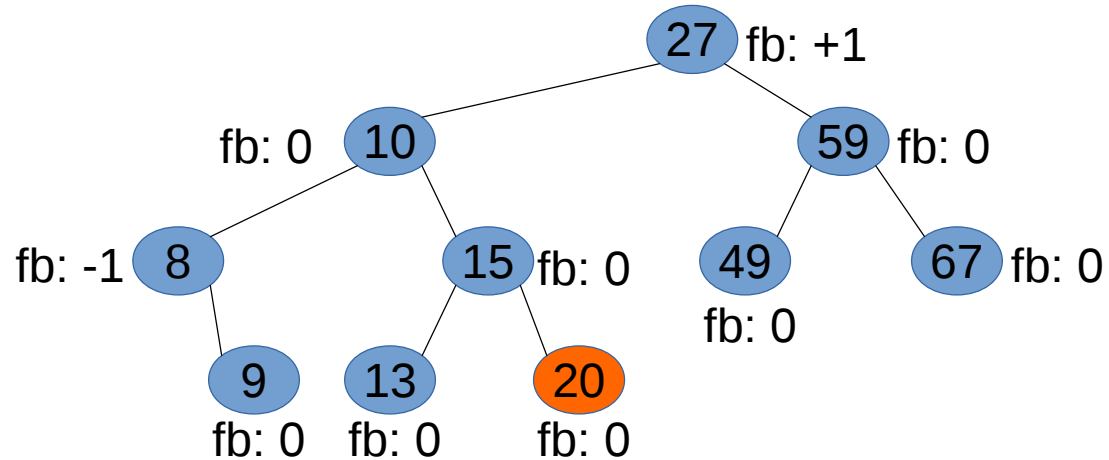
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - 20 - 14



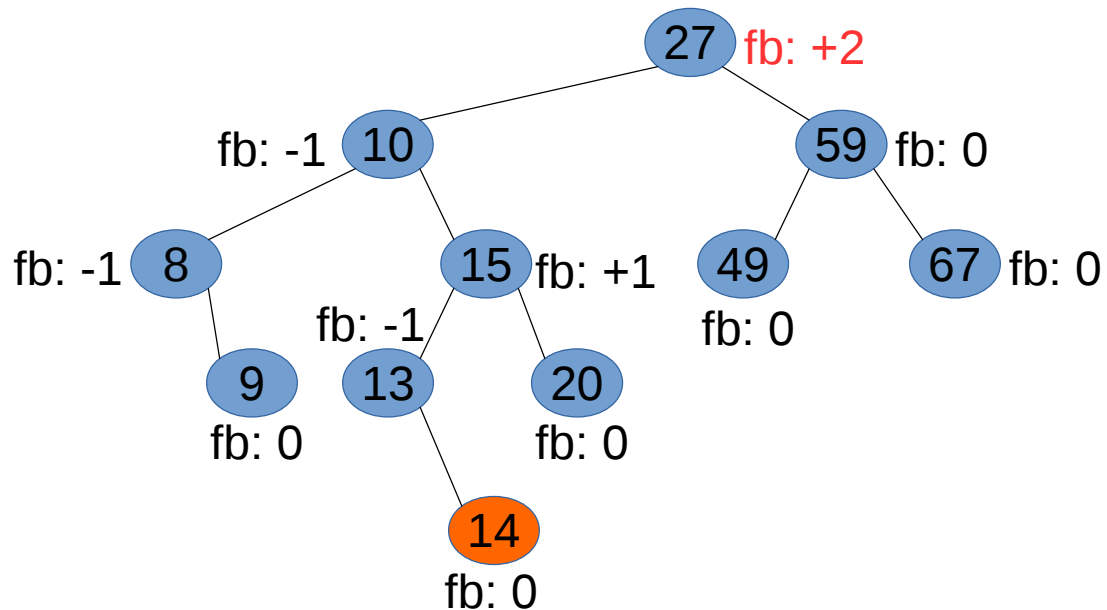
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - 14



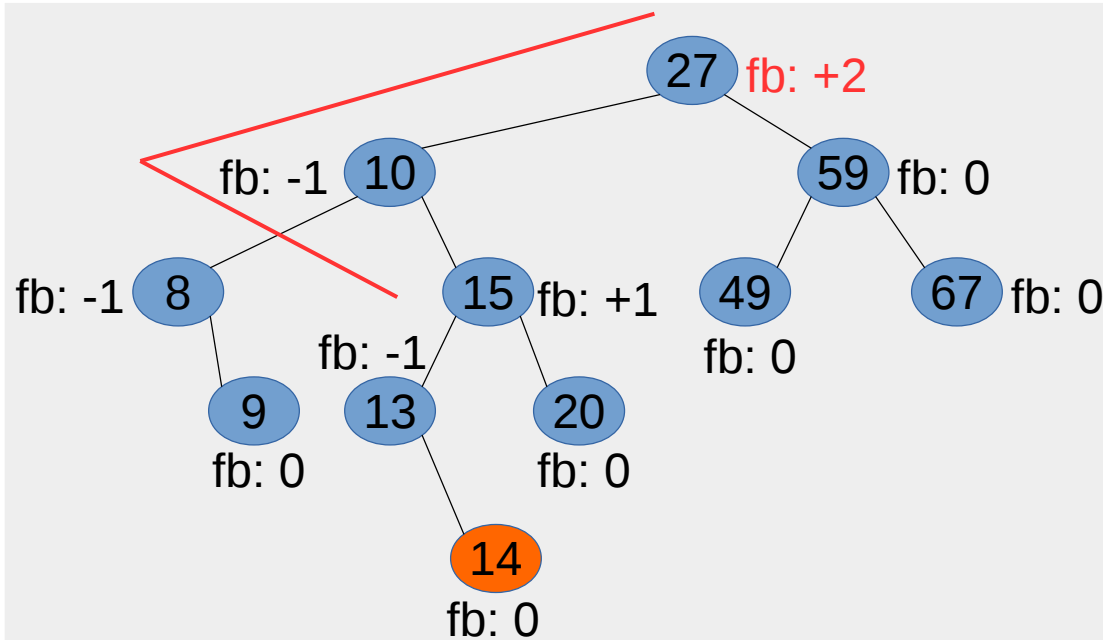
# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - ~~14~~



# Inserindo nós...

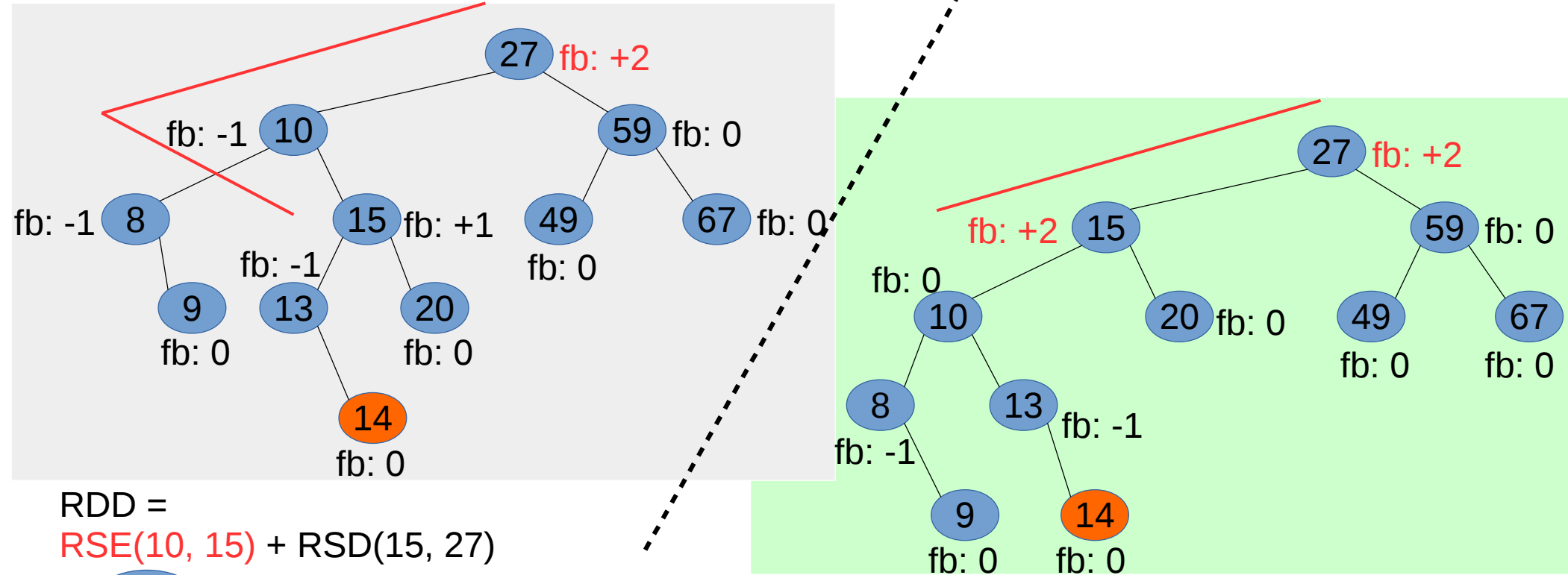
~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - ~~14~~



RDD =  
RSE(15, 10) + RSD(27, 15)

# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - ~~14~~

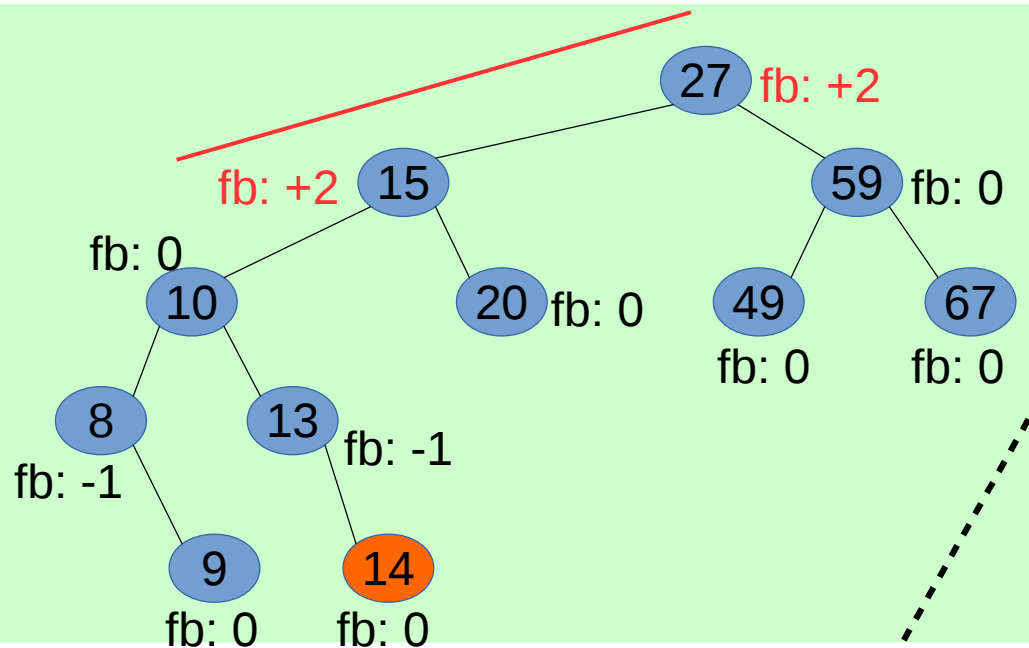


RDD =  
 $RSE(10, 15) + RSD(15, 27)$

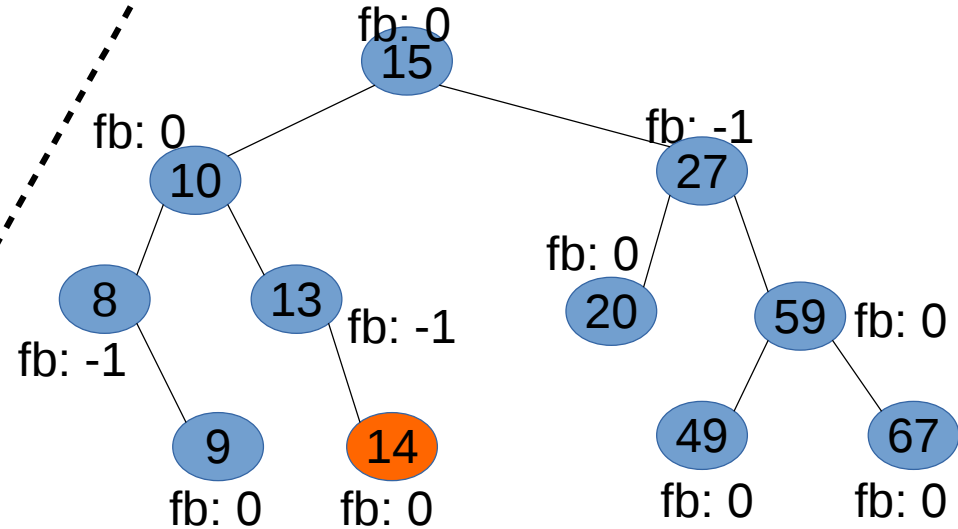


# Inserindo nós...

~~15~~ - ~~27~~ - ~~49~~ - ~~10~~ - ~~8~~ - ~~67~~ - ~~59~~ - ~~9~~ - ~~13~~ - ~~20~~ - ~~14~~



RDD =  
RSE(10, 15) + RSD(15, 27)





# Referências Bibliográficas

- Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Szwarcfiter J. L.; Markenzon L.. 3a Edição. Editora LTC. 2010.
- Estruturas De Dados Usando C. Tenenbaum A. M.; Langsam Y.; Augenstein M. J.. 1a Edição. Editora Pearson. 1995.
- Introdução a Estruturas de Dados: Com Técnicas de Programação em C. Celes W.; Cerqueira R.; Rangel J.. 2a Edição. Editora Elsevier. 2017.
- <https://www.youtube.com/watch?v=JAeQuNsKQWk> , acesso em 24/10/2019.