Exercícios Propostos[1]

⚠ *Cálculo de determinantes*

1. Calcule os determinantes abaixo usando o método de Laplace.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} \pi & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 10 & -3 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 8 & 12 & -3 \end{pmatrix}$ calcule os seguintes determinantes:

(a) $\det(A+B)$

(b) $\det(AB)$

(c) $\det(B^tA^t)$

(d) $\det(2A-3C+B)$

(e) $\det(AC^t)$

⚠ *Propriedades dos determinantes*

3. Sabendo que $\det(A) = -2$, onde A é uma matriz de ordem 4, encontre os determinantes:

(a) $\det(A^t)$ (b) $\det(5A)$ (c) $\det(A^6)$ (d) $\det(A^{-1})$

4. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$, calcule:

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & -2c \\ 3d & 3e & -6f \\ g & h & -2i \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ g & h & i \\ -d & -e & -f \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} ka+a & kb+b & ck+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

5. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 20 & 1 \\ 4 & 6 & 20 & -4 \\ -5 & -7 & -30 & 9 \\ 3 & -6 & -30 & 12 \end{bmatrix}$. Não faça o cálculo diretamente; use as *propriedades do determinante* para simplificar a resolução.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 20/03/2024 até 14:00 horas**

6. Encontre o(s) valor(es) de x.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 7 & 4 & 2x \\ 5 & 2 & -x \end{vmatrix} = -128$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 39$

(c) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$

(d) $\begin{pmatrix} x & x+2 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ é singular

(e) $\begin{pmatrix} x-4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x-9 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ é inversível

⚠ *Matriz inversa via cofatores*

7. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com entradas a, b, c e d reais.

(a) Encontre uma fórmula para A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2, e indique a condição de existência da matriz inversa.

(b) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, use a fórmula obtida no item anterior para calcular A^{-1}, B^{-1} e $(AB)^{-1}$.

8. Calcule a matriz dos cofatores.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9. Use a *matriz adjunta* para encontrar a inversa das matrizes abaixo.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

10. Considere a equação matricial

$$A^t - BX = 2C$$

onde todas as matrizes são *quadradas* e de mesma ordem 3×3.

(a) Determine X em função das matrizes A, B e C e comente se é necessária alguma imposição à matriz B.

(b) Sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X.