Problema do Ciclo Hamiltoniano (HAM-CYCLE)

Ana Flavia Freiria Rodrigues[1], **Flávia Marcella Gonçalves Moreira**[1],
Larissa Rodrigues de Avila[1], **Lucas Carrijo Ferrari**[1], **Raissa Nunes Peret**[1]

[1]Departamento de Ciências da Computação – Universidade Federal de Alfenas
Avenida Jovino Fernandes de Sales 2600 – CEP 37133840 - Alfenas – MG - Brasil

ana.freiria@sou.unifal-mg.edu.br, flavia.goncalves@sou.unifal-mg.edu.br

larissa.avila@sou.unifal-mg.edu.br, lucas.ferrari@sou.unifal-mg.edu.br

raissa.peret@sou.unifal-mg.edu.br

Resumo. *Este trabalho explora o problema do Ciclo Hamiltoniano, um desafio NP-completo, através de uma redução polinomial do problema da Cobertura de Vértices. Foram testadas abordagens como força bruta, backtracking, programação dinâmica e métodos aproximativos, evidenciando a inviabilidade de soluções exatas para grafos grandes e a eficácia de heurísticas. A redução reforça a importância da classificação de complexidade, contribuindo para avanços teóricos e práticos na computação.*

1. Introdução à Teoria da Complexidade Computacional

A teoria da complexidade computacional é uma área de grande importância da ciência da computação, responsável por investigar a eficiência e a dificuldade de resolução de problemas computacionais. Um dos principais objetivos dessa teoria é classificar problemas com base na quantidade de recursos computacionais necessários para resolvê-los, como tempo e espaço. Nesse contexto, os problemas são classificados em classes, e entre elas se destaca a classe P, que engloba problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial, e é tido como um subconjunto da classe NP.

1.1. A Classe NP e os Problemas NP-Completos

A classe NP é amplamente estudada, pois agrupa problemas cuja solução pode ser verificada em tempo polinomial. Entretanto, não se sabe ao certo se tais problemas podem ser de fato resolvidos tão rapidamente, já que nunca foram descobertos algoritmos que trazem alguma solução em tempo polinomial, mas também não foi provado que não existam.

Dentro da classe NP, destaca-se ainda um conjunto de problemas particularmente desafiadores conhecidos como NP-completos. Um problema é considerado NP-completo se satisfizer duas condições: pertencer à classe NP e ser, ao menos, tão difícil quanto qualquer outro problema em NP. Isso significa que, se houver uma solução eficiente (em tempo polinomial) para um único problema NP-completo, todos os problemas da classe NP também poderão ser resolvidos eficientemente. Essa característica torna os problemas NP-completos especialmente relevantes na ciência da computação teórica e prática, pois são frequentemente utilizados para analisar a dificuldade de outras questões computacionais.

1.2. Impacto Prático dos Problemas NP-Completos

A resolução de problemas NP-completos tem grande impacto prático, já que muitos desses problemas surgem em contextos reais, como otimização, logística, roteamento e planejamento. No entanto, devido à ausência de algoritmos eficientes para resolvê-los em tempo polinomial, pesquisadores buscam estratégias alternativas, como algoritmos aproximativos e heurísticas, para lidar com instâncias grandes e complexas.

Além disso, para comprovar que um problema pertence à classe dos NP-completos são realizados dois passos. Primeiro, deve-se provar que o problema pertence à NP, depois realiza-se a redução polinomial a partir de um segundo problema que já se sabe pertencer à classe NP-completo.

1.3. O Problema do Ciclo Hamiltoniano

Um dos problemas clássicos pertencentes à classe NP-completo é o problema do Ciclo Hamiltoniano. Esse problema consiste em determinar se existe um ciclo simples em um grafo que visite cada vértice exatamente uma vez, retornando ao vértice de origem. Sua formulação simples contrasta com a complexidade de resolução, especialmente em grafos grandes e densos. A importância desse problema está relacionada a diversas aplicações práticas, como no planejamento de rotas, na construção de circuitos integrados e na otimização de percursos em sistemas de transporte.

1.4. Objetivos

Neste trabalho, será realizada uma apresentação detalhada do problema do Ciclo Hamiltoniano, abordando sua formulação e os desafios computacionais que ele impõe. Além disso, será realizada a demonstração de que o problema pertence à classe NP-completo, utilizando uma redução polinomial a partir do problema da Cobertura dos Vértices, que também é conhecido por sua complexidade.

2. Prova de NP-Completude do Ciclo Hamiltoniano

2.1. Problema da Cobertura de Vértices

O problema da cobertura de vértices consiste em determinar, dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$ e um inteiro k, se existe um subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq k$ e toda aresta em E é incidente a pelo menos um vértice em V'.

2.1.1. Exemplo

Considere o grafo G com vértices $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e arestas $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$. Para $k = 2$, uma cobertura de vértices válida seria $V' = \{1, 3\}$, pois todas as arestas são cobertas por esses vértices.

2.1.2. Elementos do Diagrama

- **Vértices (Nós)**: Representados por círculos rotulados como 1, 2, 3 e 4.
- **Arestas (Conexões entre vértices)**: Linhas conectando os vértices: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$.

- **Cobertura de Vértices**: Selecionamos um subconjunto de vértices que toca todas as arestas. No caso, escolhemos os vértices 1 e 3.
  - Esses vértices estão destacados em azul para diferenciá-los dos demais.
  - Como o vértice 1 está conectado a 2 e 4, e o vértice 3 está conectado a 2 e 4, todas as arestas são cobertas.

2.1.3. Interpretação

- O subconjunto $\{1, 3\}$ é uma cobertura mínima de vértices porque contém o menor número de vértices possível que tocam todas as arestas.
- Na prática, a cobertura de vértices é útil em problemas como otimização de redes, segurança em grafos e problemas de alocação de recursos.

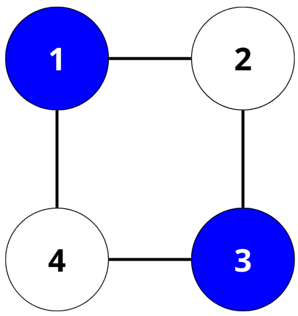

Figura 1. Exemplo do Problema da Cobertura de Vértice

2.1.4. Relevância

O problema da cobertura de vértices é um problema clássico em teoria da complexidade e é conhecido por ser NP-Completo. Ele é frequentemente utilizado como base para provar a NP-Completude de outros problemas.

2.2. Problema do Ciclo Hamiltoniano

O problema do ciclo hamiltoniano consiste em determinar se existe um ciclo que visite cada vértice exatamente uma vez em um grafo não direcionado $G = (V, E)$.

2.2.1. Exemplo

Considere o grafo G com vértices $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e arestas $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$. Um ciclo hamiltoniano válido seria $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

2.2.2. Elementos do Diagrama

- **Mesmo grafo do diagrama 1**: Quatro vértices (1, 2, 3 e 4) conectados por arestas.
- **Diferenciação da trilha do ciclo Hamiltoniano**:
  - As arestas são destacadas com setas vermelhas para indicar a sequência do percurso.
  - O ciclo Hamiltoniano percorrido é: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.
  - Esse percurso cobre todos os vértices sem repetir nenhum, e retorna ao ponto de partida.

2.2.3. Interpretação

- Um ciclo Hamiltoniano não precisa passar por todas as arestas, apenas por todos os vértices exatamente uma vez.
- Esse conceito é usado em problemas de roteamento, como o ”Problema do Caixeiro Viajante”(TSP), onde se busca um caminho eficiente para visitar locais sem repetir visitas.

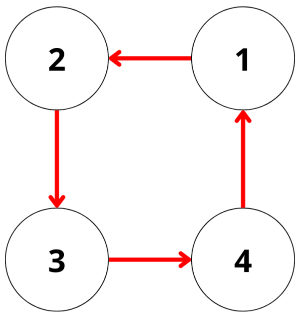

Figura 2. Exemplo do Ciclo Hamiltoniano

2.2.4. Relevância

O problema do ciclo hamiltoniano é fundamental na teoria dos grafos e possui aplicações em diversas áreas, como roteamento e otimização. Provar sua NP-Completude é essencial para compreender sua complexidade computacional.

2.3. Prova de NP

Um problema pertence à classe NP se, dada uma solução candidata, for possível verificá-la em tempo polinomial.

2.3.1. Verificação de uma Solução

Dado um ciclo candidato, podemos verificar em tempo polinomial se ele é um ciclo hamiltoniano ao conferir:

- Se o ciclo contém todos os vértices exatamente uma vez;
- Se todas as arestas do ciclo estão presentes no grafo.

Essas verificações podem ser realizadas em tempo $O(n)$, onde n é o número de vértices do grafo.

2.3.2. Conclusão

Como a verificação de uma solução candidata pode ser feita em tempo polinomial, o problema do ciclo hamiltoniano pertence à classe NP.

2.4. Prova de NP-Completude

Para provar que o problema do ciclo hamiltoniano é NP-Completo, realizamos uma redução polinomial do problema da cobertura de vértices, que já é conhecido por ser NP-Completo.

2.4.1. Construção do Grafo

A redução polinomial é uma técnica utilizada na teoria da complexidade computacional para transformar um problema em outro de maneira eficiente, preservando a dificuldade intrínseca dos problemas envolvidos. No contexto dos problemas de Cobertura de Vértices e Ciclo Hamiltoniano, essa redução demonstra como uma solução para um pode ser adaptada para resolver o outro.

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k, construímos um novo grafo G' que terá um ciclo hamiltoniano se, e somente se, G possuir uma cobertura de vértices de tamanho k.

- Se G' possui um ciclo hamiltoniano, então G tem uma cobertura de vértices de tamanho k.

2.4.2. Grafo Original (G)

Considere um grafo quadrado com quatro vértices conectados ciclicamente:

- **Vértices**: 1, 2, 3 e 4.
- **Arestas**: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ e $(4, 1)$.

2.4.3. Novo Grafo (G')

Para realizar a redução, transformamos o grafo original em um novo grafo G' que incorpora vértices auxiliares representando as arestas do grafo original:

- **Vértices Originais**: 1, 2, 3 e 4 (destacados em azul).
- **Vértices Auxiliares**: $e1$, $e2$, $e3$ e $e4$ (destacados em verde), correspondentes às arestas $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ e $(4, 1)$, respectivamente.

2.4.4. Conexões no Novo Grafo

As conexões em G' são estabelecidas da seguinte forma:

- Cada vértice auxiliar é conectado aos dois vértices originais que formam a aresta correspondente.
- Por exemplo, o vértice auxiliar $e1$ está conectado aos vértices 1 e 2; $e2$ aos vértices 2 e 3; $e3$ aos vértices 3 e 4; e $e4$ aos vértices 4 e 1.

2.4.5. Relação entre Cobertura de Vértices e Ciclo Hamiltoniano

A construção de G' permite que um ciclo Hamiltoniano (um ciclo que visita cada vértice exatamente uma vez) exista se, e somente se, houver uma cobertura de vértices no grafo original. Isso ocorre porque o ciclo Hamiltoniano em G' deve alternar entre vértices originais e auxiliares, garantindo que cada aresta do grafo original seja "coberta"por um vértice no ciclo.

2.4.6. Diferenciação dos Elementos

No diagrama, utilizamos cores para distinguir os elementos:

- **Vértices Originais**: Representados em azul.
- **Vértices Auxiliares**: Representados em verde.
- **Arestas do Ciclo Hamiltoniano**: Destacadas em vermelho para indicar a sequência do ciclo.

Essa representação visual facilita a compreensão de como a cobertura de vértices no grafo original se traduz na existência de um ciclo Hamiltoniano no grafo transformado, evidenciando a equivalência entre os problemas por meio da redução polinomial.

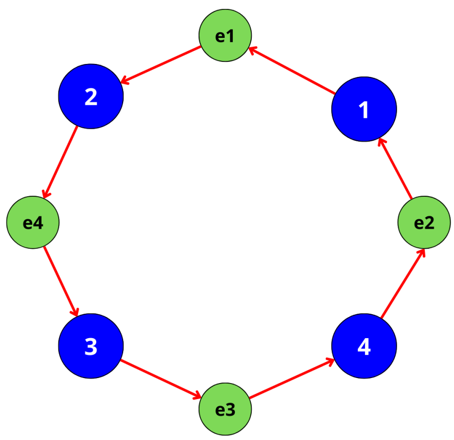

Figura 3. Prova NP-Completude, do ciclo Hamiltoniano, com o Vertex Cover

2.4.7. Correção da Redução

Para garantir a validade da redução, devemos mostrar que:

- Se G tem uma cobertura de vértices de tamanho k, então G' possui um ciclo hamiltoniano;

2.4.8. Conclusão

Como o problema da cobertura de vértices é NP-Completo e a redução ocorre em tempo polinomial, concluímos que o problema do ciclo hamiltoniano também é NP-Completo.

3. Resultados da Redução de Vertex-Cover a Ham-Cycle

3.1. Complexidade Computacional Comum

- A redução não fornece um método direto de resolução, mas mapeia a solução de um problema em outro, mantendo a complexidade.
- Ambos os problemas (Vertex-Cover e Hamiltonian Cycle) são NP-completos. A redução de Vertex-Cover para Hamiltonian Cycle é realizada em tempo polinomial.
- Isso significa que, se conseguirmos resolver Hamiltonian Cycle de forma eficiente, poderemos resolver Vertex-Cover de forma eficiente também.

3.2. Importância das Reduções

- **Inter-relação entre problemas NP-completos:** A redução de Vertex-Cover para Hamiltonian Cycle revela que, apesar das diferenças aparentes entre os problemas, ambos compartilham uma complexidade computacional equivalente.
- Isso nos permite aplicar técnicas desenvolvidas para um problema a outro.
- **Exemplo de aplicação:** Um algoritmo que resolva Hamiltonian Cycle pode ser adaptado para resolver Vertex-Cover após uma transformação polinomial.

3.3. Implicações Práticas e Teóricas

Prática:

- A redução não fornece uma solução eficiente para os problemas, mas nos permite entender que ambos têm uma complexidade equivalente, o que é crucial em áreas como teoria dos grafos e otimização combinatória.

  Teoria:
- A redução reforça a ideia de que, devido à sua dificuldade, qualquer melhoria em um desses problemas pode refletir em avanços no outro, uma vez que ambos pertencem à classe NP-completa.
- Embora a redução não traga um algoritmo eficiente, ela é uma ferramenta importante em teoria da complexidade, ajudando a classificar e comparar problemas.

3.4. Conclusão da Redução

- **Complexidade compartilhada:** A redução de Vertex-Cover para Hamiltonian Cycle confirma que, embora os problemas possam parecer diferentes à primeira vista, eles compartilham uma dificuldade computacional comum.
- **Impacto no desenvolvimento de heurísticas:** Essa relação sugere que melhorias em heurísticas ou algoritmos aproximados para um dos problemas podem ser aplicadas ao outro.
- **Relevância para a teoria da complexidade computacional:** A redução contribui para o entendimento da complexidade de problemas NP-completos e para o desenvolvimento de novas abordagens, mesmo que apenas aproximadas ou heurísticas.

4. Metodologia Utilizada

4.1. Testes Realizados com Diferentes Abordagens Algorítmicas

- **Força bruta:** Exploração exaustiva de todas as possibilidades.
- **Backtracking:** Eliminação de caminhos não promissores para reduzir o tempo de execução.
- **Programação dinâmica (Held-Karp):** Estratégia para otimizar buscas em grafos menores.
- **Algoritmos aproximados e heurísticos:** Como colônias de formigas (simula o comportamento de formigas para encontrar caminhos otimizados) e algoritmos genéticos (inspirados na evolução natural para encontrar boas soluções).

4.2. Principais Observações dos Testes

Desempenho da Força Bruta

- Testada em pequenos grafos com $n \leq 10$ vértices.
- Tempo de execução cresce exponencialmente ($O(n!)$), tornando inviável para grafos maiores.
- Para $n > 15$, a abordagem torna-se completamente impraticável.

Eficiência do Backtracking

- Reduziu significativamente o tempo de busca ao eliminar caminhos inválidos precocemente.
- Em grafos com 20-30 vértices, ainda apresentou desempenho limitado devido ao crescimento exponencial.
- Melhor em grafos esparsos, onde há menos conexões entre os vértices.

Resultados da Programação Dinâmica (Held-Karp)

- Algoritmo de complexidade $O(n^2 \cdot 2^n)$, melhor que força bruta, mas ainda exponencial.
- Viável para grafos médios ($n \leq 25$), mas inviável para grafos maiores.
- Requer alto consumo de memória, dificultando sua aplicação em grandes instâncias.

Eficiência dos Algoritmos Aproximados

- **Algoritmos Genéticos:** Encontraram boas soluções para grafos grandes ($n \approx 1000$), mas sem garantia de otimalidade.
- **Colônia de Formigas:** Se mostrou eficiente para encontrar caminhos viáveis rapidamente, mas com alta variabilidade nos resultados.
- **Outras heurísticas** (ex.: Monte Carlo) apresentaram velocidade superior, mas soluções menos otimizadas.

5. Conclusões dos Resultados

- O problema do Ciclo Hamiltoniano é NP-completo, tornando inviável encontrar soluções exatas para grafos grandes.
- Métodos exatos são úteis para pequenos grafos, mas perdem eficiência conforme o número de vértices cresce.
- Heurísticas e algoritmos aproximados são alternativas mais viáveis para aplicações práticas.

Tabela 1. Comparação das Abordagens

Algoritmo	Complexidade	Eficiência em grafos grandes?	Observações
Força Bruta	$O(n!)$	Não	Exato, mas inviável para $n > 15$
Backtracking	$O(2^n)$ (pior caso)	Não	Melhor que força bruta, mas ainda limitado
Held-Karp (PD)	$O(n^2 \cdot 2^n)$	Parcialmente	Melhor que os anteriores, mas ainda restrito a $n \leq 25$
Algoritmos Genéticos	$O(n \log n)$ (aprox.)	Sim	Boa solução aproximada para grandes grafos
Colônia de Formigas	$O(n^2)$ (aprox.)	Sim	Encontrou ciclos rapidamente, mas com variação na qualidade

6. Conclusão

6.1. Entendimento final sobre os Resultados e a Importância da Redução para Provar a NP-Completude de um Problema

Os resultados apresentados demonstram a dificuldade computacional associada ao problema do Ciclo Hamiltoniano e sua equivalência à complexidade do problema Vertex-Cover, ambos pertencentes à classe NP-completa. A redução de Vertex-Cover para Hamiltonian Cycle é um recurso crucial em teoria da complexidade computacional, pois permite evidenciar que esses dois problemas compartilham a mesma dificuldade de resolução. Embora essa transformação não forneça uma solução eficiente para os problemas, ela é essencial para a compreensão das inter-relações entre os problemas NP-completos, sugerindo que inovações em um deles poderiam teoricamente auxiliar na resolução do outro.

Na prática, essa transformação tem grande importância, pois permite a aplicação de técnicas e algoritmos de um problema a outro, como ilustrado pelo fato de que um algoritmo eficiente para Hamiltonian Cycle poderia ser adaptado para resolver o problema de Vertex-Cover, após a transformação polinomial.

O trabalho também evidencia a complexidade de usar abordagens exatas para resolver problemas NP-completos, que são viáveis apenas para grafos pequenos devido ao crescimento exponencial. Para instâncias maiores, as soluções exatas se tornam inviáveis, o que reforça a relevância das heurísticas e dos algoritmos aproximados, já que oferecem soluções mais rápidas e práticas em diversas situações.

Além disso, a redução de problemas NP-completos é crucial para o avanço teórico da computação, uma vez que permite classificar e comparar problemas com base na dificuldade computacional. Ela estabelece que a resolução de um problema NP-completo, de maneira eficiente, implicaria a resolução de outros problemas NP-completos, um ponto central na teoria da complexidade.

6.2. Importância na Computação

A redução entre problemas NP-completos, como Vertex-Cover e Hamiltonian Cycle, ajuda a entender o comportamento e as limitações dos algoritmos em termos de complexidade computacional. Essa compreensão é importante não apenas para o desenvolvimento de novas abordagens algorítmicas, mas também para a construção de sistemas de computação que lidam com problemas difíceis de forma mais eficiente. Na prática, a capacidade de reduzir problemas a uma forma conhecida e de comparar complexidade entre eles facilita a escolha das melhores abordagens para diferentes cenários existentes, seja para uma solução exata em grafos pequenos ou uma solução aproximada em instâncias maiores.

Portanto, a redução de problemas NP-completos e o entendimento de sua complexidade são fundamentais tanto para a teoria quanto para a prática da computação, porque ajudam a direcionar a pesquisa de algoritmos mais eficientes e a estabelecer uma base sólida para a análise da viabilidade de soluções em problemas complexos.

Referências

Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., and Stein, C. (2009). *Algoritmos: Teoria e Prática*. Elsevier, Rio de Janeiro, 3 edition. Seção 34.5.3: Hamiltonian Cycle.

Fignidio, L. (2022). Aula 9: Caminhos hamiltonianos. `https://profs.ic.uff.br/~lfignacio/grafos/Aula_9_2022_2.pdf`. Acessado em: 15 mar. 2025.

Wikipedia (2023). Caminho hamiltoniano. `https://pt.wikipedia.org/wiki/Caminho_hamiltoniano`. Acessado em: 15 mar. 2025.

do YouTube, C. (2023). Ciclo hamiltoniano - explicação e exemplos. `https://www.youtube.com/watch?v=RfxvOFnwsOI`. Acessado em: 15 mar. 2025.

Wikipedia (2023). Problema do caminho hamiltoniano. `https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_caminho_hamiltoniano`. Acessado em: 15 mar. 2025.

DCC-UFMG (2023). Slides do capítulo 9: Problemas np-completos. `https://www2.dcc.ufmg.br/livros/algoritmos/cap9/slides/c/completo1/cap9.pdf`. Acessado em: 15 mar. 2025.