Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Disciplina: Matemática Discreta   Período: 2025/1
Professor: Anderson José de Oliveira

Lista de Exercícios 5 - Princípio da Indução Finita

1. Sabendo que $\log(A.B) = \log A + \log B$, $A \in \mathbb{R}_+^*$ e $B \in \mathbb{R}_+^*$, prove pelo PIF que $\log A^n = n.\log A$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Prove por indução sobre n que $(a^m)^n = a^{m.n}$, para quaisquer $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$.

3. Prove por indução que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja, que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

4. Prove por indução que o produto de três naturais consecutivos é divisível por 6.

5. Prove por indução que $n^3 - n$ é divisível por 3, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Prove por indução que $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, n \geq 1$.

7. Prove por indução que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1$.

8. Prove por indução que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n \geq 1$.

9. Seja a sequência a_1, a_2, a_3, ... definida como:

$$a_1 = 3$$

$$a_k = 7a_{k-1}, \forall k \geq 2$$

Prove por indução matemática que $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

10. Prove que todo número natural maior ou igual a 2 é primo ou produto de primos.

11. Prove por indução que $2^n < 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

12. Demonstre por indução que:

(a) $7|(2^{3n} - 1)(n \geq 0)$

(b) $8|(3^{2n} + 7)(n \geq 0)$

(c) $7|(3^{2n+1} + 2^{n+2})(n \geq 1)$

13. Sejam $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ e $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

(a) Prove, por indução em n, que $S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

(b) Prove, por indução em n, que $C_n = S_n^2$.

14. Prove, usando indução, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

15. Um progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde r é um número real fixo chamado razão.

(a) Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$;

(b) Se $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, mostre que:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Bom trabalho!! Estou à disposição para o que precisarem!!