Exercícios Propostos[1]

⚠ *Integral indefinida*

1. Encontre a primitiva mais geral da função, isto é, a *integral indefinida* de $f(x)$ com respeito a x: $\int f(x)dx = F(x) + C$, onde $F'(x) = f(x)$.

(a) $f(x) = 9x^2 + 5x + 2$

(b) $f(x) = x^{3/4} + \left(\frac{3}{4}\right)^x$

(c) $f(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$

(d) $f(x) = e^{4x} + 3\cos x$

(e) $f(x) = 7x^4 - \sec^2 x$

(f) $f(x) = 3e^x + \frac{1}{4x} - \operatorname{sen} x$

2. Resolva os *problemas de valor inicial* (PVI) abaixo.

(a) $\frac{dy}{dx} = 2x - 5, \quad y(2) = 0$

(b) $y' = x^{-1}, \quad y(\pi) = -3$

(c) $y' = \frac{1}{x^2} + x,\ x > 0; \quad y(2) = 1$

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$
(sugestão: defina $u = y'(x)$ e $u' = y''(x)$)

(e) $y'' = x + \sqrt{x}; \quad y'(1) = 2, \quad y(1) = 1$

⚠ *Teorema Fundamental do Cálculo*

3. Determine o valor das integrais abaixo usando o teorema da variação total.

(a) $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\, dx$

(b) $\int_{-2}^{0} \left(x^2 + x\right) dx$

(c) $\int_{0}^{1} \left(x^3 - 3x^2 + 8\right) dx$

(d) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + x\right) dx$

(e) $\int_{0}^{\pi/2} (x + \cos x)\, dx$

(f) $\int_{0}^{\pi} (2\operatorname{sen} x - 5^x)\, dx$

(g) $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$

(h) $\int_{0}^{2} (e^x + x^e) dx$

(i) $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

4. Calcule as integrais definidas usando a propriedade $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

(a) $\int_0^4 f(x)dx$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 2x, & \text{se } 2 < x \le 4 \end{cases}$

(b) $\int_0^3 f(x)dx$, onde $f(x) = \begin{cases} 7 - x, & \text{se } x < 2 \\ x + 3, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

(c) $\int_{-4}^4 f(x)dx$, onde $f(x) = |x - 1|$

5. Use o teorema fundamental do cálculo para encontrar a derivada da função g.

(a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \sec^2 t}\, dt$

(b) $g(x) = \int_1^x \ln u\; du$

(c) $g(x) = \int_x^2 \frac{u^3}{1 + u^2} du$

(d) $g(x) = \int_1^{\cos x} t^2 \operatorname{sen} t\; dt$

(e) $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \tan(t^2) dt$

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 27/03/2025 até 14:00 horas**

⚠ *Valor médio de uma função*

6. O valor médio M_f de uma função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é definido como $M_f = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Calcule o valor médio das funções no intervalo dado.

(a) $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad [1, 4]$

(c) $g(x) = \cos x, \quad [0, \pi/2]$

(d) $g(x) = \sqrt{x}, \quad [1, 4]$

(e) $f(t) = e^{-t}, \quad [0, 5]$

(f) $f(\theta) = \sec\theta\tan\theta, \quad [0, \pi/4]$

7. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com posição $s(t)$ e velocidade instantânea $v(t) = s'(t)$. Seja $a(t) = v'(t) = 2t - 1$ sua aceleração instantânea e $v(0) = -6$ m/s sua velocidade inicial.

(a) Encontre $v(t)$ e estude seu sinal para $t \geq 0$.

(b) Determine o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 4$ usando o teorema da variação total, isto é, $\Delta s = s(4) - s(1) = \displaystyle\int_1^4 v(t)dt$, e calcule a velocidade média $v_{\mathrm{m}} = \Delta s/\Delta t$ da partícula nesse período de tempo.

(c) Determine a distância percorrida pela partícula nesse mesmo período de tempo, isto é, calcule $\displaystyle\int_1^4 |v(t)|dt$. (O módulo de $v(t)$ é necessário para incluir no cálculo as distâncias percorridas com velocidade negativa que foram subtraídas no cálculo do deslocamento.)

⚠ *Área entre gráficos*

8. Determine a área da região delimitada por:

(a) $y = f(x) = x$ e $y = g(x) = x^2 - x$.

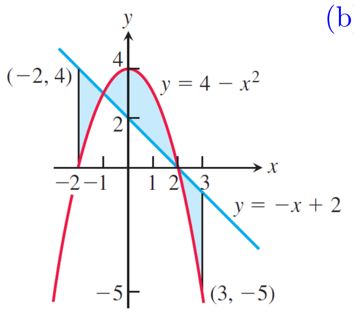
(b) $y = f(x) = -x + 1$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 0$.

(c) $y = f(x) = x^2$ e $y = g(x) = -x^2 + 4x$.

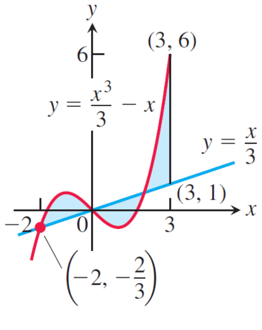
(d) $y = f(x) = 7 - 2x^2$ e $y = g(x) = x^2 + 4$.

9. Calcule a área assinalada nas figuras a seguir.

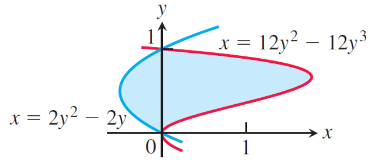
(a)



(b)



(c)



(d)