Exercícios Propostos[1]

⚠ *Integrais trigonométricas*

1. Calcule as integrais das *potências de seno e cosseno* abaixo.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos^3 x \, dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \, dx$

(f) $\displaystyle\int 16 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$

(h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x} \, dx$

2. Calcule as integrais das *potências de secante e tangente* abaixo.

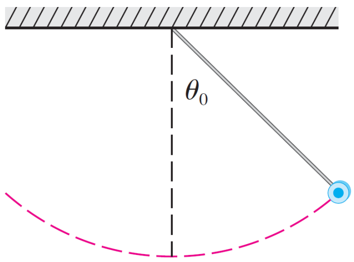
(a) $\displaystyle\int \sec^2 x \tan x \, dx$

(b) $\displaystyle\int \sec^3 x \tan x \, dx$

(c) $\displaystyle\int \sec^4 x \, dx$

(d) $\displaystyle\int \tan^4 x \, dx$

3. Um pêndulo com comprimento L forma um ângulo máximo de θ_0 com a vertical. Usando a *Segunda Lei de Newton*, pode ser mostrado que o período T (o tempo para um ciclo completo) é dado por



$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}},$$

onde $a = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$ e g é a aceleração da gravidade. Considerando a aproximação $(1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x)^{-1/2} \approx 1 + \dfrac{a^2 \operatorname{sen}^2 x}{2}$, mostre que

$$g \approx L \left[\omega \left(1 + \frac{a^2}{4}\right)\right]^2,$$

onde $\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular do movimento e $a^2/4$ é o primeiro termo de correção no cálculo de g para oscilações ligeiramente maiores do que as consideradas em um *pêndulo simples* ($\theta_0 \approx 0$).

4. Seja $A(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$ a função que descreve a posição x no instante t de uma onda com amplitude máxima A_0, número de onda k e frequência angular ω. Mostre que a *média temporal* de $|A(x,t)|^2$ (intensidade) dentro de um período de oscilação $T = 2\pi/\omega$ é igual a $\frac{1}{2}A_0^2$, isto é, $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T |A(x,t)|^2 dt = \frac{1}{2}A_0^2$. (Dica: considere kx constante em relação a t.)

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 24/04/2025 até 14:00 horas**

5. Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ por quatro métodos:

(a) a substiuição $u = \cos x$;
(b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$;
(c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$;
(d) integração por partes.

Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

6. Calcule as integrais de produtos de funções trigonométricas com *arcos diferentes*.

(a) $\int \operatorname{sen} 8x \; \cos 5x \; dx$
(b) $\int \operatorname{sen} 2x \; \cos 3x \; dx$
(c) $\int \operatorname{sen} 5x \; \operatorname{sen} x \; dx$
(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x \; \operatorname{sen} 3x \; dx$
(e) $\int \cos \pi x \; \cos 4\pi x \; dx$
(f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \; \cos 7x \; dx$

⚠ *Substituição trigonométrica*

7. Calcule a integral usando a *substituição trigonométrica* indicada. Esboce o triângulo retângulo associado, indicando o ângulo θ e os comprimentos dos lados.

(a) $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$ $(x = 3\operatorname{sen}\theta)$
(b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$ $(x = 3\sec\theta)$
(c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$ $(x = 3\tan\theta)$

8. Calcule a integral usando *substituição trigonométrica*.

(a) $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
(b) $\int_0^{3} \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}dx$
(c) $\int_0^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx$
(d) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}dt$
(e) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$
(f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx$
(g) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}dx$
(h) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$
(i) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$ [Dica: $x^2+4x-5 = (x+2)^2-9$]
(j) $\int \sqrt{x^2+2x}\;dx$
(k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$
(l) $\int \sqrt{8-2x-x^2}\;dx$

9. Uma circunferência de raio R centrada na origem do plano cartesiano tem equação $x^2+y^2=R^2$. Mostre que a área da região delimitada pela circunferência é πR^2.

10. Resolva a integral $\int \frac{\tan\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]}{\sqrt{1+x^2}}dx$.