20 . 05 . 25

Lista 07 - Matemática Discreta

1 - Prove por indução sobre n que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, para quaisquer $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$

(i) caso base $(n=0)$

$$(a^m)^0 = a^{m \cdot 0} = a^0 = 1$$

$\therefore$ caso base provado

(ii) passo indutivo

H.I $n=K$ $\{ (a^m)^K = a^{m \cdot K}$

Tese $n=K+1$ $\{ (a^m)^{K+1} = a^{m(K+1)}$

$$(a^m)^{K+1} = \underbrace{(a^m)^K}_{H.I} \cdot a^m$$

$$= a^{mK} \cdot a^m = a^{mK+m} = a^{m(K+1)}$$

$\therefore$ temos que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ $\square$

2 - Prove por indução que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \quad n \geq 2$$

(i) passo base $(n=2)$

$$\frac{2(2-1)(2+1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

(ii) passo indutivo

H.I. $n=K$ $\left\{ \sum_{i=1}^{K-1} i(i+1) = \frac{K(K-1)(K+1)}{3} \right.$

Tese $n=K+1$ $\left\{ \sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \frac{(K+1)(K)(K+2)}{3} \right.$

---•---•---

$$\sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \left(\sum_{i=1}^{K-1} i(i+1)\right) + K(K+1)$$

$$= \frac{K(K-1)(K+1)}{3} + K(K+1)$$

$$= \frac{K(K-1)(K+1) + 3K(K+1)}{3}$$

$$= \frac{K(K+1)\left[(K-1)+3\right]}{3} = \frac{K(K+1)(K+2)}{3}$$

$\therefore \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$, para todo $n \geq 2$ □

3 Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \dots$ definida como: $a_1 = 3$, $a_K = 7a_{K-1}$, $\forall K \geq 2$. Prove por indução matemática que $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$

(i) passo base ($n = 1$)

$a_1 = 3 = 3 \cdot 7^{1-1} = 3 \cdot 7^0 = 3$

$\therefore$ caso base provado

(ii) passo indutivo

H.I $\left\{ a_K = 3 \cdot 7^{K-1} \right.$
$n = K$

Tese $\left\{ a_{K+1} = 3 \cdot 7^{K} \right.$
$n = K+1$

Sabemos que $a_{K+1} = 7a_K$

$a_{K+1} = 7a_K = 7(3 \cdot 7^{K-1}) = 3 \cdot 7^{K-1+1} = 3 \cdot 7^K$ // □

$\therefore$ pela indução finita $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ é válida para todos inteiros $n \geq 1$

□

4. Prove por indução que $7^n + 2$ é divisível por 3, $n \in \mathbb{N}$

(i) passo base ($n=0$)

$7^0 + 2 = 1 + 2 = 3$

3 é divisível por 3

$\therefore$ A base é provada

(ii) passo indutivo

H.I $\left\{ 7^k + 2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 7^k \equiv -2 \pmod 3 \right.$
$n=k$

Tese $\left\{ 7^{k+1} + 2 \equiv 0 \pmod 3 \right.$
$n=k+1$

$7^{k+1} + 2 = 7^k \cdot \underbrace{7}_{6+1} + 2 = 7^k \cdot (6+1) + 2 = 7^k \cdot 6 + \underbrace{7^k \cdot 1 + 2}_{\text{H.I (divisível por 3)}}$

$\Rightarrow 7^k \cdot 6$ (é divisível por 6, quer dizer que também é por 3).

Então:

$7^k \cdot 6 + 7^k + 2 \equiv 0 \pmod 3$

$\therefore 7^n + 2$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\square$

5. a) Mostrar que $a_n = a_1 + (n-1)r$

(i) base ($n=1$)

$a_1 + (1-1)r = a_1 + 0 = a_1$

$\therefore$ base provada

(ii) passo indutivo

H.I $\left\{ a_k = a_1 + (k-1)r \right.$
$n=k$

Tese $\left\{ a_{k+1} = a_1 + kr \right.$
$n=k+1$

pela def. $a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\text{H.I}} + r \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr$

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\square$

b) Mostrar que a soma dos n primeiros termos é

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

É válido que $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1)$

pará cada par soma $(a_1 + a_n)$, temos n termos

Então:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

6. $\square$

a) Prove que sendo R uma relação em A, R é transitiva se, e ~~some~~ somente se, R^{-1} é transitiva

Vamos provar indo e voltando

$\Rightarrow$ Suponha R transitiva, mostre que R^{-1} é também

se $(a,b) \in R$, $(b,a) \in R^{-1}$

R transitiva: $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, $(a,c) \in R$

Suponha que (x,y) e $(y,z) \in R^{-1}$

então:

$(y,x) \in R$ e $(z,y) \in R$ e $(z,x) \in R$ (porque é transitiva)

se $(z,x) \in R$, então $(x,z) \in R^{-1}$.

$\therefore R^{-1}$ é transitiva

$\Leftarrow$ Suponha R^{-1} transitiva, mostre que R é também

R^{-1} transitiva: $(a,b) \in R^{-1}$ e $(b,c) \in R^{-1}$, $(a,c) \in R^{-1}$

Suponha que (x,y) e $(y,z) \in R$

Então:

$(y,x) \in R^{-1}$ e $(z,y) \in R^{-1}$ e $(z,x) \in R^{-1}$ (porque é transitiva)

se $(z,x) \in R^{-1}$, então $(x,z) \in R$. $\therefore$ R é transitiva

$\therefore$ R é transitiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ é transitiva. $\square$

b) Prove que R é simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

$\Rightarrow$ Suponha R simétrica, mostre que $R = R^{-1}$

. se $(a,b) \in R$, então $(b,a) \in R$

Isso significa que $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}$

Então: $R \subset R^{-1}$

Pelo mesmo argumento ao contrário, $R^{-1} \subset R$

Logo: $R = R^{-1}$

$\Leftarrow$ suponha $R = R^{-1}$, mostre que R é simétrica

se $(a,b) \in R$, então $(b,a) \in R^{-1}$

Mas se $R = R^{-1}$, $(b,a) \in R$, implica que R é simétrica

$\therefore$ R é simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ $\square$

7. a) Prove que a relação de congruência modulo n (n é um inteiro positivo qualquer) é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$

congruência: $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n \mid (a-b)$

- reflexiva: suponha $a \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a - a = 0 \Rightarrow n \mid 0$$

Então $a \equiv a \pmod{n}$ é válida.

$\therefore$ é reflexiva

- simétrica: suponha $a \equiv b \pmod{n}$

Então $n \mid a-b = a-b = K \cdot n$, para algum $K \in \mathbb{Z}$

Logo

$b - a = -Kn \Rightarrow n \mid (b-a) \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$

$\therefore$ é simétrica

FORONI

• Transitiva: suponha $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a-b = Kn$ e $b \equiv c \pmod{n}$
$\Rightarrow b-c = p.n$ $(p, K \in \mathbb{Z})$

$$(a-b)+(b-c) = a-c = Kn + pn = a-c = n(K+p)$$
$$\Rightarrow n \mid (a-c) \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$$

$\therefore$ é transitiva

$\therefore$ A congruência modulo n é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

b) Considere a relação de equivalência mod 2 em $\mathbb{Z}$. Explicite as classes de equivalência de 0 e 1

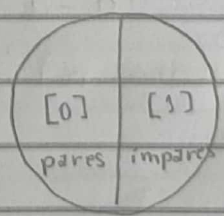
forma geral: $[a]_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{2}\}$

$[0]_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{2}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \mid x\}$ = todos os pares
$[1]_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{2}\}$ = todos os números ímpares

c) Apresente a partição de $\mathbb{Z}$ nas classes de equivalência do item anterior e explique as propriedades dessa partição

A relação divide $\mathbb{Z}$ nas seguintes classes de equivalência

$$\mathbb{Z} = \underbrace{[0]_2}_{\text{pares}} \cup \underbrace{[1]_2}_{\text{ímpares}}$$



$[0]_2 \cap [1]_2 = \emptyset$
$[0]_2 \cup [1]_2 = \mathbb{Z}$

propriedades:

1- exaustividade: todo número inteiro está em alguma das classes

2- disjunção: nenhum número pertence a mais de uma classe

3- cobertura = A união das classes cobre todo o $\mathbb{Z}$

8- Seja R uma relação definida por: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$

a) Prove que é de ordem.

- reflexiva = (x,x), $x \leq x$ é verdade

$\therefore$ é reflexiva

- antissimétrica: suponha (x,y) e (y,x) pertencentes a R, $x \leq y$ e $y \leq x$ só é verdade se $x = y$, portanto é antissimétrica

- transitiva: suponha (a,b), (b,c), se $a \leq b$ e $b \leq c$ isso implica diretamente que $a \leq c$.

$\therefore$ é transitiva

$\therefore$ R é uma relação de ordem $\square$

b) Essa relação é de ordem Total?

Para quaisquer $x, y \in R$, ou $x \leq y$ ou $y \leq x$ $\rightarrow$ verdadeiro

$\therefore$ É de ordem total

c) Represente parcialmente o diagrama de Hasse dessa relação

suponha $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

4
|
3
|
2
|
1

diagrama

Lembrar:

- reflexão é omita
- Transitividade é subentendida
- orientado de baixo para cima
- sem setas

9. (a) Seja A um conjunto ordenado segundo a relação "$\leq$" e $B \subset A$ um subconjunto não-vazio. Apresente a definição de máximo e mínimo de B.

máximo (M)

$\forall b \in B, \ b \leq M$

mínimo (m)

$\forall b \in B, \ m \leq b$

b) Prove que o máximo e o mínimo são únicos

Suponha que existe dois máximos m_1 e m_2

$\forall b \in B, \ b \leq m_1$ e $b \leq m_2$

como $m_2 \in B$, então $m_2 \leq m_1$

como $m_1 \in B$, então $m_1 \leq m_2$

Logo,

$m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$

pela antissimetria, $m_1 = m_2$.

$\therefore$ o máximo é único $\square$

Mesmo raciocínio para o mínimo

$\forall b \in B, \ m_1 \leq b$ e $m_2 \leq b$

$m_1 \leq b$ e $m_2 \leq b$

pela antissimétrica $m_1 = m_2$

$\therefore$ o mínimo é único

10. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = \{$números pares$\}$, obtenha: limitante superior, máximo, mínimo, limitante inferior, supremo e ínfimo.

A: • • • • • • • • • ... $+\infty$

B: • (0) • • • ... $+\infty$

$\min(B) = 0$ $\quad$ $L.I_A(B) = \{0\}$ $\quad$ $\inf^A(B) = 0$

$\max(B) = \nexists$ $\quad$ $L.S_A(B) = \emptyset$ $\quad$ $\sup_A(B) = \nexists$