Omejeno gručenje z diagrami in njihova uporaba pri oblikovanju volilnih okrajev

Avtorja: Ana Golob in Primož Durcik

1. Uvod

Gručenje že dolgo predstavlja enega temeljnih delov kombinatorične optimizacije in analize podatkov. V pričujoči projektni nalogi se bomo najprej seznanili z osnovnim teoretičnim ozadjem omejenega grozdenja. Le-to bo v drugem delu predstavljalo osnovo za pisanje algoritma in reševanje problema oblikovanja volilnih okrajev. V grobem si pri omejenem gručenju želimo dano množico obteženih točk množice X v določenem prostoru $\mathcal{X}$ razdeliti na dano število k gruč z vnaprej določeno težo. V primeru oblikovanja volilnih okrajev, ki ga bomo reševali s to metodo, se sprašujemo, kako razčleniti notranje območje države na posamezne volilne okraje. Pri tem zahtevamo, da okraji pokrivajo skoraj enake populacije volivcev in imajo »razumno« obliko. Ključni problem pri tem nastane zaradi večjega števila delno nasprotujočih si optimizacijskih kriterijev, kot sta velikost populacije in želja, da se okraji s časom ne spreminjajo preveč. Sledeči model tistemu, ki se odloča, omogoča primerjavo večih modelov z različnimi optimizacijskimi poudarki.

2. Teoretični opis omejenega gručenja

2.1. **Definicije.** Naj bosta $k, n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{X}$ poljuben prostor. Z $X = \{x_1, \dots x_m\} \subset \mathcal{X}$ označimo množico s pripadajočimi utežmi $\Omega = (\omega_1, \dots \omega_m) \in \mathbb{R}^m_{>0}$. Nadalje, naj bo $\mathcal{K} = (\kappa_1, \dots, \kappa_k) \in \mathbb{R}^k_{>0}$, tako da $\sum_{i=1}^k \kappa_i = \sum_{j=1}^m \omega_j$. $\mathcal{K}$ je vektor željenih "velikosti"gruč. Naš cilj je poiskati take particije množice X, da bo skupna teža gruče C_i, v prej določeni normi "čim bližje"prepisanemu κ_i.

Uporabljali bomo spodnjo predpostavko, ki problem nekoliko poenostavi:

Naj bo

$$C = (\xi_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,m}} \in [0,1]^{k \times m},$$

tako da je vsota $\sum_{i=1}^k \xi_{i,j} = 1$ za vsak j. C imenujemo delno gručenje množice X in $\xi_{i,j}$ je del enote j predpisane gruči i. Tako definirane $C_i = (\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,m})$ imenujemo gruča i. Nadalje označimo še množico $supp(C_i) = \{x_j \in X : \xi_{i,j} > 0\}$ tistih elementov iz X, ki imajo pri i pozitiven delež. Če je $C \in \{0,1\}^{k \times m}$, imenujemo gručenje celoštevilsko.

Teža gruče je podana z $\omega(C_i) = \sum_{j=1}^m \xi_{i,j}\omega_j$. Gručenje C je močno uravnoteženo, če je $\omega(C_i) = \kappa_i$ za vsak i. Če so za teže grozdov dane zgornje in spodnje meje κ_i^-, κ_i^+ in velja: $\kappa_i^- < \sum_{j=1}^m \xi_{i,j}\omega_j < \kappa_i^+$ za vsak i, potem pravimo, da je gručenje C šibko uravnoteženo. V posebnem primeru vzamemo $\kappa_i^- = (1-\epsilon)\kappa_i$ in $\kappa_i^+ = (1+\epsilon)\kappa_i$ za vsak i in dan $\epsilon > 0$ in tako gručenje imenujemo ϵ-gručenje. Z BC in BC^ϵ označujemo množici vseh močno uravnoteženih in ϵ-uravnoteženih delnih gručenj.

2.2. **Omejeno gručenje s posplošenimi Voronojevimi diagrami.** Posplošeni Varonojev Diagram za dane funkcije $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, i =1,. . .,k določi C_i, ki je podmnožica od $\mathcal{X}$ tako, da za vsak $x \in \mathcal{X}$ velja: če $f_i(x)$ je minimalen, potem $x \in C_i$.

Če želimo dobiti ustrezne diagrame je ključnega pomena, da dobro definiramo funkcije f_i. Za nabor parametrov $(\mathcal{D}, h, \mathcal{S}, \mathcal{M})$ tako definiramo k-terico funkcij $\mathcal{F}(\mathcal{D}, h, \mathcal{S}, \mathcal{M}) = (f_i, \ldots, f_k)$ s predpisom:

$$f_i(x) = h(d_i(s_i, x)) + \mu_i,$$

kjer je:

- $\mathcal{D} = (d_1, \ldots, d_k)$ k-terica metrik, oziroma predpisov za merjenje razdalj na prostoru $\mathcal{X}$,
- $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monotono naraščajoča funkcija,
- $\mathcal{S} = (s_1, \ldots, s_k)$ k-terica točk iz $\mathcal{X}$,
- $\mathcal{M} = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$.

Če metrike d_i niso identične, pravimo končnemu diagramu anizotropen.

Primeri diagramov dobljenih z izbiro posameznih prostorov in na njih podanih metrik:

1. Za Evklidski prostor nam izbira $f_i = \|x - s_i\|_2^2 + \mu_i$ porodi *power diagrams.*
2. Za izbiro $f_i = \|x - s_i\|_2 + \mu_i$ dobimo *additively weighted Varonoi diagrams*
3. V diskretnem primeru, kjer velja $\mathcal{X} = X$, je dan povezan graf $G = (X, E, \delta)$; kjer $\delta : E \to \mathbb{R}_{>0}$ priredi vsaki povezavi neko pozitivno vrednost. Če je $d_G(x, y)$ definitana kot najkrajša pot od x do y, to inducira metriko na $\mathcal{X}$. Torej dobimo funkcije f_i oblike: $f_i = d_G(s_i, x) + \mu_i$. S tem dobimo *diagram najkrajših poti (angl. shotrest-path diagram)*

Videli bomo, da parametra $\mathcal{D}$ in h v glavnem določata karakteristike končnih diagramov. Točke si služijo kot referenčne točke za določanje gruč.

Da se pokazati, da za vsako izbiro $\mathcal{D}$, h in $\mathcal{S}$, obstaja izbira dodatnih parametrov $\mathcal{M}$ takšna, da so porojene gruče tako predpisanih tež kot tudi optimalno porazdeljene.

Parametre $\mathcal{D}$, h in $\mathcal{S}$ imenujemo strukturni parametri, $\mathcal{M}$ pa izbirni parameter. Za vsako izbiro strukturnih parametrov izbirni parameter $\mathcal{M}$ dobimo z rešitvijo linearnega programa.