VREDNOTENJE EKSOTIČNIH OPCIJ

Privzemimo, da finančni trg lahko modeliramo z večobdobnim binomskim modelom. Naj S_t označuje ceno delnice v trenutku t. Definirajmo slučajne spremenljivke

$$Z_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

za $t = 1, \ldots, T$. Temeljna predpostavka[1] binomskega modela je neodvisnost porazdelitve spremenljivk Z_t od časa t ter od preostalih vrednosti $Z_{t'}$ za $t \neq t'$.

Slučajne spremenljivke Z_t so zato neodvisne in enako porazdeljene z verjetnostno funkcijo

$$Z_t \sim \begin{pmatrix} u & d \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Naj bo izplačilo finančnega instrumenta v času T slučajna spremenljivka X. Izplačila *enostavnih (plain-vanilla)* instrumentov so odvisna le od cene delnice S_T ob zapadlosti, izplačila *eksotičnih (exotic)* instrumentov pa so odvisna od celotne poti cene delnice $S_0, S_1, \ldots, S_T$.

Z vpeljavo do tveganja nevtralne verjetnosti Q namesto naravne verjetnosti P lahko začetno ceno instrumenta izračunamo z diskontiranjem njegovega pričakovanega izplačila

$$c = \frac{E_Q(X_T)}{(1+R)^T}.$$

Pričakovano vrednost $E_Q(X_T)$ izračunamo z *analizo polnega binomskega drevesa*, lahko pa jo ocenimo z *Monte Carlo simulacijami*. Če simuliramo vrednosti $x_1, \ldots, x_N$ slučajne spremenljivke X (t.j. slučajno izberemo N vrednosti iz porazdelitve X), potem je

$$E_Q(X) \approx \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Opcije s povprečno izvršilno ceno

Finančni instrumenti, pri katerih so izplačila odvisna od povprečne cene delnice v nekem časovnem obdobju, so *azijski instrumenti*. Privzemimo, da ceno delnice modeliramo z binomskim modelom s parametri S_0, u, d, T, R in W. Določiti želimo premiji *nakupne* in *prodajne opcije s povprečno izvšilno ceno (average strike call and put)* z zapadlostjo T in utežjo W.

Nakupni tip opcije ob zapadlosti T imetniku izplača pozitivni del razlike med končno ceno delnice in uteženim povprečjem cene delnice v obdobju $[0, T]$, prodajni tip opcije pa pozitivni del razlike med uteženim povprečjem cen delnice v obdobju $[0, T]$ in končno ceno delnice.

Naloga 1

(a) Naj bo $S_0 = 50, u = 1.05, d = 0.95, T = 5, R = 3\%$ in $W = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Spodnje vrstice prikazujejo 5 možnih poti cene delnice. K vsaki poti pripišite kolikšno izplačilo ob

[1] Predpostavka je ključna pri vpeljavi binomskega modela kot diskretne aproksimacije zveznega Black-Scholesovega modela. Za vrednotenje v binomskem modelu je dovolj konstantnost parametrov u, d in R.

zapadlosti pripada imetniku opcije s povprečno izvršilno ceno nakupnega (X) oziroma prodajnega (Y) tipa.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Izplačilo X	Izplačilo Y
50.00	52.50	49.88	47.38	45.01	47.26		
50.00	52.50	55.12	57.88	60.78	63.81		
50.00	47.50	49.88	47.38	45.01	42.76		
50.00	47.50	45.12	47.38	45.01	47.26		
50.00	52.50	49.88	52.37	54.99	52.24		

(b) Pripravite funkcijo `izplacilo(vrsta, W, type)`, ki določi izplačilo opcije ob zapadlosti, če vrsta (vektor) predstavlja zaporedne cene delnice. Vhodni podatek `type` ima lahko vrednosti ‘‘`call`’’ in ‘‘`put`’’.

Pozor: Funkcija mora delati pri poljubnih parametrih. Pred oddajo naloge jo testirajte na podatkih, ki so objavljeni v spletni učilnici.

Naloga 2

(a) Pripravite funkcijo `binomski(S0,u,d,R,T,W,type)`, ki določi premijo opcije s povprečno izvršilno ceno ustreznega tipa z analizo polnega binomskega drevesa. Uporabite funkcijo pri parametrih iz naloge (1a).

(b) Pripravite funkcijo `monte(S0,u,d,R,T,W,type,N)`, ki oceni premijo nakupne oziroma prodajne opcije s povprečno izvršilno ceno z metodo Monte Carlo. Pri tem simulira N poti cene delnice. Funkcijo uporabite pri vrednostih parametrov $S_0 = 60, u = 1.05, d = 0.95, R = 1\%, T = 15, W = \texttt{rep}(1, 16)$, $\texttt{type} =$ ‘‘`put`’’ ter $N_1 = 10$, $N_2 = 100$ in $N_3 = 1000$.

Pozor: Funkciji morata delati pri poljubnih parametrih.

Naloga 3

(a) Natančnost metode Monte Carlo določamo z večkratnim ocenjevanjem ob nespremenjenih pogojih. Nalogo (2b) ponovite $M = 100$-krat. Pri vsakem N_i narišite histogram, ki prikazuje porazdelitev ocen premije (to je *vzorčna porazdelitev* ocen). Za boljšo primerjavo naj bo razpon na osi x v vseh histogramih enak.

(b) Na vsakem histogramu z navpično premico prikažite povprečno oceno, izračunano iz M ponovitev. Primerjajte izračunano povprečje z vrednostjo dobljeno s funkcijo binomski. Z vodoravnima puščicama, položenima na abscisno os in izhodiščem v povprečni oceni, prikažite še standardni odklon vzorčne porazdelitve. To je *standardna napaka* ocene z metodo Monte Carlo.

Primer histogramov najdete v spletni učilnici. Zaradi slučajnosti so možna manjša odstopanja od vaših rešitev.