Exercise 2.23

Show that $\tau(m \circ n) = \tau(n \circ m)$.

* راه حل با استفاده از جبر خطی:

$$\tau(m \circ n) = \tau(\underbrace{mn}_{\text{ضرب ماتریسی}}) = \frac{\mathrm{trace}^2(mn)}{\det(mn)} = \frac{\mathrm{trace}^2(nm)}{\det(nm)} = \tau(n \circ m)$$

Exercise 1.3

Let p and q be distinct points in $\mathbb{C}$ with nonequal real parts, and let A be the Euclidean circle centred on $\mathbb{R}$ and passing through p and q. Express the Euclidean centre c and the Euclidean radius r of A in terms of $\mathrm{Re}(p)$, $\mathrm{Im}(p)$, $\mathrm{Re}(q)$, and $\mathrm{Im}(q)$.

راه حل کتاب طولانی است. کافی است $|c-p|=|c-q|$ با $c=(c,0)$ حل شود.

$$\Rightarrow (c-x_p)^2 + y_p^2 = (c-x_q)^2 + y_q^2 \Rightarrow c = \frac{|q|^2-|p|^2}{2(x_q-x_p)}$$

$q : \mathbb{R} \to A$

$e^{i\theta} z + \alpha_0$

$C_A = q \circ C \circ q^{-1}(z) = ?$

$$q = e^{i\theta} z + \alpha_0 \implies z = e^{i\theta} q^{-1} + \alpha_0 \implies q^{-1} = \frac{z - \alpha_0}{e^{i\theta}}$$

$$q \circ C \circ q^{-1}(z) = q \circ C \circ \left(\frac{z - \alpha_0}{e^{i\theta}} \right) = q \circ \left(\frac{\overline{z - \alpha_0}}{e^{-i\theta}} \right) = e^{i\theta} \left(\frac{\bar{z} - \bar{\alpha}_0}{e^{-i\theta}} \right) + \alpha_0$$

$$= e^{2i\theta} (\bar{z} - \bar{\alpha}_0) + \alpha_0$$

سوال: چرا نرمال نمی‌کنی؟ چرا توان دوم نوشتم؟ $Tr(m) := (a+d)^2$ ← چرا با نرمال کردن مشکل خوش‌تعریفی حل میشه؟!

علت نرمال کردن ماتریس ضرایب، خوش تعریف شدن T است. داریم:

$$T(m) = (a+d)^2 = \alpha^2 \, trace^2(m)$$

مثلا برای $m_1 = \frac{z+1}{z+2} = m_2 = \frac{-z-1}{-z-2}$، اگر توان ۱ باشد با اینکه $det(m_2) = det(m_1) = 1$

اما $\alpha = \pm 1$ و $T(m_1) = 3 \neq T(m_2) = -3$.

آناهیتا صدری