* تبدیلات به فرم $T^n = e^{in2\pi\alpha} z$ که $|z|=1$ و $\alpha \in [0,1)$ و $\alpha \in \mathbb{Q}^c$

در S^1 چگال هستند.

یعنی هر بار به اندازه‌ی $2\pi\alpha$ به زاویه اضافه می‌کنه و

برحسب زاویه خطی است.

لم. T^n غیر پریودی است.

اثبات. $e^{in_1 2\pi\alpha} z = e^{in_2 2\pi\alpha} z \qquad |z| \neq 0 \Rightarrow n_1 2\pi\alpha \overset{2\pi}{\equiv} n_2 2\pi\alpha$

$$\Rightarrow n_1\alpha \overset{1}{\equiv} n_2\alpha \Rightarrow \alpha(n_1-n_2) \overset{1}{\equiv} 0 \Rightarrow \alpha(n_1-n_2) \in \mathbb{Z}$$

ضرب گنگ در صحیح ناصفر گنگ است پس تنها حالت $n_1=n_2$ است ✓

اثبات *: فرض کنید $z_0 \in S^1$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند. S^1 را به بازه‌ای به طول ε تقسیم می‌کنیم. چون

دنباله‌ی T^n نامتناهی و غیر پریودی است، طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل ۲ جمله از آن وجود دارند که در

یک لانه باشند. یعنی

$$\exists\, n_2 > n_1 \qquad d(T^{n_1}(z_0), T^{n_2}(z_0)) < \varepsilon$$

$$d(T^{n_1}, T^{n_2}) = \left|e^{in_1 2\pi\alpha} z_0 - e^{in_2 2\pi\alpha} z_0\right| = \Big|\underbrace{e^{in_1 2\pi\alpha}}_{\text{اندازه ۱ است}} (z_0 - e^{i(n_2-n_1)2\pi\alpha} z_0)\Big| =$$

$$d(T^0, T^{\overbrace{(n_2-n_1)}^{k}}) \Rightarrow d(T^0(z_0), T^{(n_2-n_1)}(z_0)) < \varepsilon$$

چون T نسبت به زاویه قطعه است، در دنباله‌ی جملات T^{nk} فاصله‌ی مرتب هر دو جمله‌ی متوالی ε است و تعداد

متناهی از جملات با شروع از $z = T^0$، کافی است تا کل S^1 را پوشش دهند. $\Leftarrow$ به ازای هر نقطه

روی S^1 حداقل یک جمله از T^{nk} وجود دارد که فاصله‌ی مرتب آن از آن نقطه کمتر از ε شود.

چون ε و z_0 دلخواه بودند، چگال بودن نتیجه می‌شود.

آناهیتا صدری