مسئله ۳: فرض کنید l , l' دو خط فراموازی باشند، نشان دهید که

$l' \langle z'_0, z'_1$

و در l مشابه

$$Tgh^2\left[\tfrac{1}{2} d_{IH}(l_0, l_1)\right] = \frac{1}{1-[z_0, z'_0, z_1, z'_1]}$$

l_1: $z_0 \to 0$, $z_1 \to \infty$

l_2: $z_2 \to 1$, $z_3 \to x > 1$

طبق مسئله‌ی قبل :

$$d_{IH}(l_1, l_2) = \ln\Big(\overbrace{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}^{\gamma}\Big)$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow \tanh \frac{d_{IH}}{2} = \frac{\sqrt{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1)} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}} = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \tanh^2\left(\frac{d_{IH}}{2}\right) = \frac{1}{x}$$

$$* [0, 1, x, \infty] = \frac{\cancel{\infty}(x-1)}{-1\,\cancel{(x-\infty)}} = 1-x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-[0, 1, x, \infty]} = \frac{1}{x} \quad \checkmark$$

آناهیتا حیدری