$$X ::= \{ z \in \mathbb{H} \ , \ d_{\mathbb{H}}(z, I) = \varepsilon \}$$

نشان دهید که به θ بستگی

$$= \{ \rho e^{i\theta} \ , \ \underbrace{d_{\mathbb{H}}(\rho e^{i\theta}, \rho i)}_{\text{ثابت است!}} = \varepsilon \}$$

ابتدا نیم‌صفحه‌ای از $\mathbb{H}$ (با مرز I) را در نظر بگیرید که $Re(z)>0$. فرض کنید $z=re^{i\theta}$ نقطه‌ای

از این نیم‌صفحه باشد که $d_{\mathbb{H}}(z, I)=\varepsilon$. از آن جا که $\underbrace{\text{نقطه‌ای}}_{z_0}$ که خط واصل z و I در آن نقطه

عمود بر I باشد کمترین فاصله هذلولوی را با z دارد $\Longleftarrow$ $z_0 = re^{i\frac{\pi}{2}}$.

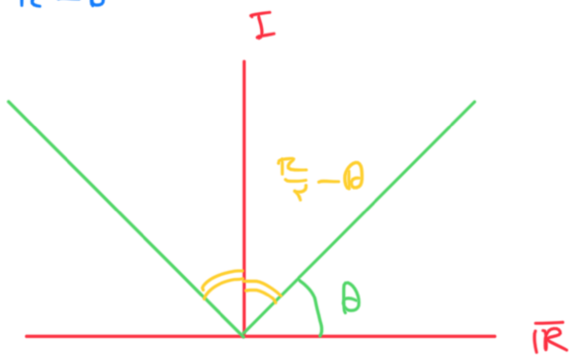
اکنون داریم:

$$d_{\mathbb{H}}(re^{i\frac{\pi}{2}}, re^{i\theta}) = \ln \left| \frac{r\sin\theta\,(0-0-r)}{r(r\cos\theta - 0 - r)} \right| = \underbrace{\ln \left| \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1} \right|}_{\text{مستقل از } r \text{ است و فقط به } \theta \text{ بستگی دارد}} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow e^{z} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1} \Rightarrow$$ θ به صورت یکتا از این معادله بدست می‌آید

چون برای $Re(z) < 0$ این رابطه معکوس می‌شود، زاویه‌ی دوم، قرینه‌ی θ نسبت به I است.

$$\Rightarrow \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{\pi}{2} = \pi - \theta$$



آناهیتا صیدری