مسئله: اگر $l_1 \parallel l_2$ دو خط هذلولوی باشند، نشان دهید که

$d_{\mathbb{H}}(l_1, l_2) > 0 \iff$ l_1, l_2 فراموازی باشند.

---

① $d_{\mathbb{H}}(l_1, l_2) > 0 \Longrightarrow l_1, l_2$ فراموازی : عکس نقیض. فرض کنید $l_1 \parallel l_2$ اما فراموازی

نباشند. یعنی در یک نقطه روی $\hat{\mathbb{R}}$ مرز در بی‌نهایت مشترک داشته باشند ← x_0 و باقی ← x_1, x_2

چون $Möb(\mathbb{H})$ روی سه‌تایی‌های $\hat{\mathbb{R}}$ به صورت ترایا عمل می‌کند، پس می‌توانیم فرض کنیم

$x_0 = \infty$ ، $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$. معادلش یک مسیر متعامد بر l_1 و l_2:

$$f(t) = t + ai \qquad t \in [0,1] \qquad a > 0$$

$$\Rightarrow \text{length}_{\mathbb{H}}(f) = \int_0^1 \frac{1}{a} \cdot 1 \, dt = \frac{1}{a} t \Big|_0^1 = \frac{1}{a}$$

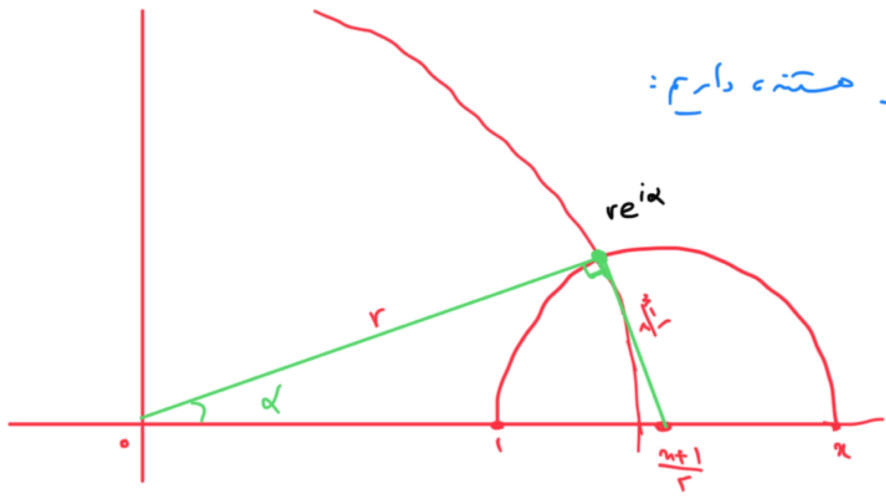
$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} = 0 \Longrightarrow d_{\mathbb{H}}(l_1, l_2) = 0 \quad \checkmark$$

② $d_{\mathbb{H}}(l_1, l_2) > 0 \Longleftarrow l_1, l_2$ فراموازی :

فرض کنید مرز در بی‌نهایت l_1 ، $0, \infty$ و l_2 ، اعدادا باشد. چون دقیقاً یک نقطه روی l_2 وجود

دایره کمترین فاصله را تا l_1 دارد، فقط فاصله بر l_1 و l_2 عمود است، همچنین تنها خطوط

عمود بر l_1، دایره‌ای به مرکز ۰ هستند، داریم:



$$r^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = x \Rightarrow r = \sqrt{x}$$

$$\frac{(x-1)/2}{(x+1)/2} = \sin\alpha \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad , \cos\alpha = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r\sin t} r\, dt = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt = \ln(\csc t - \cot t)\Big|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\ln\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)\right) = -\ln\left(\frac{x+1-2\sqrt{x}}{x-1}\right)$$

$$= -\ln\left[\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right] = -\ln\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right] = \ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \quad > 0 \checkmark$$

$x > 1$

آناهیتا حیدری