

Question

For each $\alpha < 1$, there is an open and dense subset in $[0, 1]$ such that its length is smaller than α .

با توجه به اینکه Q شمار است، به ازای عضو n ام $Q \cap [0, 1]$ که 2^{-n} اندازه دارد، به ازای 2^{-n} تقریب می‌کنیم:

$$U_n = \text{Ball}(x_n, 2^{-(n+1)}) \cap [0, 1]$$

آنچه داریم ① چون هرکدام در \mathbb{R} باز است، با توجه به خواص توپولوژی زیرمجموعه، اشتراک آن با $[0, 1]$

در $[0, 1]$ باز است $\Leftarrow U_n$ باز است $\forall n$

② چون هرکدام به مرکزیت عدد گویاست $\Leftarrow [0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq A = Q \cap [0, 1]$

$$\Rightarrow \bar{A} = [0, 1] \subseteq \overline{\bigcup U_n} \subseteq [0, 1] \xrightarrow{\text{طبق قضیه فشردگی}} \overline{\bigcup U_n} = [0, 1]$$

لح U_n در $[0, 1]$ چگال است.

$$\mu[\bigcup U_n] \leq \mu[\bigcup \text{Ball}(x_n, 2^{-(n+1)})] \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \alpha$$

اندازه می‌گنجد

کاملاً صحیح