

## حل تمرین سری سوم منطق

### گنایتی صورت

- 8 Let  $\mathcal{A}(x_i)$  be a wf. of  $\mathcal{L}$  in which  $x_i$  occurs free, and let  $x_j$  be a variable which does not occur free in  $\mathcal{A}(x_i)$ . Show that if  $x_j$  is free for  $x_i$  in  $\mathcal{A}(x_i)$  then  $x_i$  is free for  $x_j$  in  $\mathcal{A}(x_j)$ .  $\mathcal{A}(x_j)$  is the result of substituting  $x_j$  for every free occurrence of  $x_i$  in  $\mathcal{A}(x_i)$ .

برهان فلت. پس وجود دارد  $\vdash$   $A(x_j) \rightarrow (\forall x_i) B(x_j)$  subformula به صورت

از طرفه چون  $x_j$  در  $(\forall x_i) B(x_i)$  آزاد نیست پس این subformula در  $A(x_i) \rightarrow B(x_i)$  به صورت

برده است. اما در این فرمول آزاد نیست پس باید با  $x_i$  در  $B$  عوض می شود و این تفاوت

است.

- 10 Repeat Exercise 6 for the following terms  $t$ .

- (a)  $x_2$ .
- (b)  $x_3$ .
- (c)  $f_1^2(a_1, x_1)$ .
- (d)  $f_1^3(x_1, x_2, x_3)$ .

$$((\underline{\forall x_2}) A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1(x_1))$$

با متغیر  $x_2$  موجود در طرف راست اگرچه

ندارد  $\Leftarrow$  با طرف اگرچه داشته است.

همه آزاد هسته جن ایجاد نمایند

$$(\forall x_1)(\forall x_3)(A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))$$

$\vdash$  f  
ایجاد  $c, a$ !

$$(\forall x_2)A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$$

$\vdash$  f     $\vdash$  f     $\vdash$  f  
ایجاد  $c$ !

---

12 Is there an interpretation (of an appropriate language  $\mathcal{L}$ ) in which the wf.

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

is interpreted by a statement which is false? If so, describe one in detail. If not, explain why not.

$$\mathcal{I} = (\Delta_{\mathcal{I}} = \mathbb{N}, \bar{a}_1, \bar{f}_1^1 : \bar{a}_1, A_1^1 : \langle a_1 \rangle)$$

: جمله برقرار

$\vdash$  f

$\vdash$  f     $(\forall x_1)(x_1 < a_1 \rightarrow a_1 < a_1)$

---

15 In the interpretation described in Exercise 11, find valuations which satisfy and do not satisfy each of the following wfs.

- (a)  $A_2^2(x_1, a_1)$ . صحت
- (b)  $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow A_2^2(a_1, f_1^2(x_1, x_2))$ . صحت
- (c)  $\sim A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$ . صحت
- (d)  $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$ . صحت
- (e)  $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2)$ .

$$(a) \quad x_1 < 0 \quad v(x_1) = -1 \quad v'(x_1) = 2$$

$$(b) \quad x_1 - x_r < x_1 \rightarrow 0 < x_1 - x_r$$

$$-x_r < 0 \rightarrow x_r < x_1 \quad v(x_1) = 2 \quad v(x_r) = 2$$

$$v'(x_1) = 1 \quad v'(x_r) = 2$$

$$(c) \quad n_1 > (n_1 - (n_1 - n_r)) \quad v(n_1) = 2 \quad v(n_r) = 2$$

$$n_1 > n_r \quad v'(n_1) = 2 \quad v'(n_r) = 2$$

$$(d) \quad \forall x_1 \quad ((x_1 - x_r) < x_r) \quad v'(n_1) = 2 \quad v'(n_r) = 1 \quad v'(x_r) = 2$$

$$\forall x_1 \quad (x_1 < n_r + x_r)$$

۳ ای دلخواه مدار که در این wf صدق کند. علاوه بر "۲" و "۱" هم از زیر باشند

$$v''(n_1) = v(x_r) + v(n_r) \Rightarrow \text{در } d \text{ صدق نمایند}$$

$$(e) \quad (\forall x_1 \quad (x_1 - 0) < x_1) \rightarrow x_1 < x_r \quad v(x_1) = 1 \quad v(n_r) = 2$$

۴ ای دلخواه مدار که در این wf صدق نکند. چون به دفعه هر ۲ در  $n_1 < x_1$  صدق نمایند.

17 Which of the following closed wfs. are true in the interpretation of Exercise 11, and which are false?

- (a)  $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$ .
- (b)  $(\forall x_1)(\forall x_2)(\sim A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1))$ .
- (c)  $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_2^2(x_1, x_2) \rightarrow A_2^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$ .
- (d)  $(\forall x_1)(\exists x_2)A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2), x_2))$ .

(a)  $\forall x_1 \quad (a - x_1) < 0 \quad \nu(n_1) = -1 \quad \text{نامنفی است. برازش}$

(b)  $\forall n_1 \quad \forall n_2 \quad (n_1 - x_2) > n_1 \quad n_2 < 0 \quad \nu(n_2) = 1 \quad \text{نامنفی است. برازش}$

(c)  $\forall n_1 \quad \forall n_2 \quad \forall n_3 \quad (n_1 < n_2 \rightarrow (n_1 - x_3) < (n_2 - x_3))$   
 $n_1 < n_2 \quad A \rightarrow A \quad \text{برهان است. برهان}$

(d)  $\forall x_1 \quad \exists x_2 \quad x_1 < (x_1 - x_2) - x_2 \quad 0 < -2x_2 \quad \nu(n_2) = -1 \quad \text{نامنفی است. برهان}$

---

19 Show that each of the following wfs. is logically valid.

- (a)  $((\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2))$ .

فرض کنیم I نامنفی است و هر دلخواه از آن باشد. تابعی که در آن صدق می‌کند.

برهان خلف. فرض کنیم  $\neg \forall x_1 \exists x_2 A_1^2(x_1, x_2)$  در عین این صدق نکند. ایس فحبی اول دلخواه:

وجود دارد  $v_1$  که  $\neg$ -همایز باشد و در  $A_i^1(n_1, n_2)$  صدق نماید. سپس هر  $v_2$

که  $\neg$ -همایز باشد و در  $A_i^1(n_1, n_2)$  صدق نماید.

از طرفی چون  $v_2$  در نسبت دوم صدق نماید لذا:

وجود دارد  $v'_1$  که  $\neg$ -همایز باشد و در  $A_i^1(n_1, n_2)$  صدق نماید. سپس وجود شرط  $v'_2$  که

$\neg v_2(n_1) = v'_1(n_1)$  که  $A_i^1(n_1, n_2)$  صدق نماید. اما طبق قبل وجود دارد

و تواریخ دو  $v'_2(n_2) = v'_1(x_2)$  و  $v'_2$  در  $A_i^1(n_1, n_2)$  صدق نماید و این تناقض است.

$$(b) \quad (\forall x_1) A_i^1(x_1) \rightarrow ((\forall x_1) A_i^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2) A_i^1(x_2)).$$

B

برهان ظلت. فرض کنیم  $v$  در  $\forall x_1 A_i^1(x_1)$  صدق نماید هر  $v'$  که  $\neg$ -همایز باشد و در

در  $B$  صدق نماید. سپس  $v$  متنه  $\forall x_2 A_i^1(x_2)$  را در  $v''$  که  $\neg$ -همایز باشد و وجود دارد

$(\neg \forall x_2 A_i^1(v''(x_2)))$  صدق نماید. سپس  $v''$  که  $\neg$ -همایز باشد و در

الآن تواریخ دو  $v'(n_1) = v''(n_2)$  و  $v'$  که  $\neg$ -همایز باشد و طبق قبل،

$A_i^1(v'(n_1)) = A_i^1(v''(n_2))$  برقرار است و این تناقض است.

(c)  $(\forall x_1)(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\forall x_1)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_1)\mathcal{B})$ , for any wfs.  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ .

برهان فلت. فرض کنیم  $\exists$  در  $\forall x_1 \mathcal{A} \text{ صدق کند}$ . یعنی هر  $\tau$  که  $\neg\text{-همارز}\tau$  باشد، در

$\forall x_1 \mathcal{A} \text{ صدق کند}$ . هر  $\tau$  که  $\neg\text{-همارز}\tau$  باشد  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  صدق کند.

$\exists$  در  $\forall x_1 \mathcal{B} \text{ صدق کند}$ . یعنی وجود دارد  $\tau''$  که  $\neg\text{-همارز}\tau''$  باشد

و  $\tau''$  در  $\mathcal{B}$  صدق نکند. اما چون  $\tau'' \neg\text{-همارز}\tau''$  باشد، در  $\mathcal{A}$  صدق نکند سی طبق

$\forall x_1 \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  بینز صدق می‌کند و این تناقض است.

(d)  $((\forall x_1)(\forall x_2)\mathcal{A} \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A})$ , for any wf.  $\mathcal{A}$ .

برهان فلت. فرض کنیم  $\exists$  در  $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \text{ صدق کند}$ . سی هر  $\tau$  که  $\neg\text{-همارز}\tau$  باشد، در

$\forall x_2 \mathcal{A} \text{ صدق کند}$ . یعنی هر  $\tau$  که  $\neg\text{-همارز}\tau$  باشد، در  $\mathcal{A}$  صدق کند.

آنکنون فرض کنیم  $\exists$  در  $\forall x_1 \forall x_2 \mathcal{A} \text{ صدق نکند}$ . یعنی وجود دارد  $\tau_1$  که  $\neg\text{-همارز}\tau_1$  باشد

و  $\tau_1$  در  $\mathcal{A}$  صدق نمی‌کند. یعنی وجود دارد  $\tau_2$  که  $\neg\text{-همارز}\tau_2$  باشد، در  $\mathcal{A}$  صدق نمی‌کند.

$v'' \not\models v''(n_2) = v_1(n_2)$ ,  $\vdash v' \wedge v'(n_1) = v_2(n_1)$  هم ارز باشد.

- هم ارز باشد. طبق قبل،  $v'' \models A$  صدق می‌کند و این تناقض است.

---

- 21 Show that, if  $t$  is a term which is free for  $x_i$  in the wf.  $\mathcal{A}(x_i)$ , then the wf.  $(\mathcal{A}(t) \rightarrow (\exists x_i)\mathcal{A}(x_i))$  is a logically valid wf.

برهان خلاصه. فرض کنیم  $t$  در  $A(n_i)$  صدق نکند. آن‌ها وجود ندارد.

که ن-هم ارز باشد و در  $A(n_i)$  صدق کند. آن‌ها مقادیری ن-هم ارز باشند.

در  $v' \models (\mathcal{A}(t) \rightarrow (\exists x_i)\mathcal{A}(x_i))$  است تعریف می‌شود. با معرفت سوال، طبق قضیه ۳.۲۳،

$A(n_i)$  صدق می‌کند و این تناقض است.

---

- 22 Show that none of the following wfs. is logically valid.

- (a)  $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ .
- (b)  $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, x_1))$ .
- (c)  $(\forall x_1)((\sim A_1^1(x_1)) \rightarrow (\sim A_1^1(a_1)))$ .
- (d)  $((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1) \rightarrow (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2))$ .

(a)  $I = (\Delta = \mathbb{N}, A_i^r : <)$  تالی بازای هیچ ۲ بجزءی نیست حوت

$v(n_2) + 1 \not\leq v(n_1) \Leftrightarrow v'(n_1) = v(n_r) + 1 \leq v(n_s)$  هم ارز باشد.

(b)  $I = (\Delta = \mathbb{N}, A_i^r : <)$   $v(n_1) = 1$   $v(n_r) = 2$

$$(c) \quad I = (\Delta = \mathbb{N}, A_1^i(n) : n = a_1, a_1 = \circ) \quad v(n_1) = 1$$

$$(d) \quad I = (\Delta = \mathbb{N}, A_1^i : = ) \quad \text{کسی - ای ای ای همچو ۳ برقرار نیست چون هواره مقدار رم} \\ v(n_1) \neq v(n_2) \quad \text{ا - هماره بی ۳ صورت نباشد}$$

- 23 Let  $\mathcal{A}(x_i)$  be a wf. of  $\mathcal{L}$  in which  $x_i$  appears free and let  $t$  be a term which is free for  $x_i$  in  $\mathcal{A}(x_i)$ . Suppose that  $v$  is a valuation such that  $v(t) = v(x_i)$ . Show that  $v$  satisfies  $\mathcal{A}(t)$  if and only if  $v$  satisfies  $\mathcal{A}(x_i)$ .

پون  $v$   $i$ -هماره با خودش است،  $v(+)=v(x_i)$  با صورت سوال، طبق قضیه  $v$

$$\frac{\forall n \ A(n_i)}{\forall n \ A(t)} \Leftrightarrow \frac{\forall n \ \text{میشه}}{\forall n \ A(+)} \quad \text{۳.۲۳}$$

پرسش ۱. آیا دو گواهی  $(\forall x(G(x)) \vee \forall x(F(x)))$  و  $\forall x(G(x) \vee F(x))$  با هم معادل هستند؟ برای پاسخ خود یک مثال در زبان فارسی بیاورید.

$$\forall n \ G(n) \vee \forall n F(n) \rightarrow \forall n (G(n) \vee F(n)) \quad \text{ب طور که}$$

است ای عکس آن ضیر.

مثلاً اگر کسی بر از  $\omega$  ای سفید بایم، داشت بایم،  $\omega$  را "اگر  $\omega$  سفید بایم،  
که از هر دو زیر خداکل کسی  $\omega$  موجود است  
" میگوییم" و  $F$  مباراً سفید توانست  $\omega$  نادرست است و

$$\text{مثلاً } \forall n (\ F(n) \vee G(n)) \quad \text{نادرست} \quad \forall n F(n)$$


---

**پرسش ۲.** فرض کنید  $\mathcal{L}$  زبان مرتبه‌ی اولی است که شامل متغیر، رابطه‌ها، سورها، ثابت  $c_1$ ، تابع  $f_1^2$  و محمول  $A_1^2$  است. فرمول زیر در این زبان را درنظر بگیرید.

$$\forall x \forall y (A_1^2(f_1^2(x, y), c_1) \rightarrow A_1^2(x, y))$$

تعابرهای  $I$  و  $I'$  از زبان  $\mathcal{L}$  را چنان تعریف کنید که تعابیر فرمول فوق در  $I$  درست و در  $I'$  نادرست باشد.

$$I = (D = \mathbb{Z}, A_i^r = , f_i^r = -, c_1 = 0)$$

$$\forall n \forall y (n - y = 0 \rightarrow n = y)$$

$$I' = (D = \mathbb{Z}, A_i^r = , f_i^r = +, c_1 = 0)$$

$$\text{مثلاً: از ای } \forall n \forall y (n + y = 0 \rightarrow n = y) \text{ برقرار نیست.}$$


---

**پرسش ۳.** فرض کنید که  $v$  یک تابع مقداردهی و  $I$  یک تعابیر دلخواه برای زبان  $\mathcal{L}$  است. بررسی کنید که  $v$  در فرمول زیر صدق می‌کند یا خیر.

$$\forall x (A_1^2(x, y) \rightarrow A_1^2(x, y))$$

این فرمول ه منطقاً معبر است.

برهان خلف. فرض کنیم مکعب  $I$  و ۳ از آن مربجود باشند که در نرسول بالا صدق نکنند. بنابراین دو بوردارد

۲ - همان راسته دو در  $A_1^3(n, y) \rightarrow A_1^3(n, y)$  صدق نخواهد. اما مقدم در تالی هر دو تریک

هستند و حملن نیستند در که صدق نکنند.