حل تمرین سری اول منطق

آناهیتا حیدری

۶ ـ نشان دهید که هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقا " هم‌ارز هستند .

آ) $(p \to q), ((\sim q) \to (\sim p))$

ب) $((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

پ) $(((\sim p) \wedge (\sim q)) \to (\sim r)), (r \to (q \vee p))$

ت) $(((\sim p) \vee q) \to r), ((p \wedge (\sim q)) \vee r)$

(آ)

p	$\to$	q	$\leftrightarrow$	$\sim q$	$\to$	$\sim p$
T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T

(ب)

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	r	$\leftrightarrow$	$(p \wedge r)$	$\vee$	$(q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T	T	T	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	F	T	F	F	F

(پ)

$(\sim p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$\sim r$	$\leftrightarrow$	r	$\rightarrow$	$(q \vee p)$
T	T	T	T	T	T	F	T	F
T	T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T	T

(ت)

$(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	r	$\leftrightarrow$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee\ r$
T	T	T	T	T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T	F	F	F	F
T	T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T	T	T

---

۱۱ ــ با استفاده از احکام ۱۴ و ۱۷ نشان دهید که صورت گزاره‌ای $((\sim(p \vee (\sim q))) \rightarrow (q \rightarrow r))$ منطقاً " هم‌ارز هر یک از صورتهای گزاره‌ای زیر است .

(آ) $((\sim(q \rightarrow p)) \rightarrow ((\sim q) \vee r))$

(ب) $(((\sim p) \wedge q) \rightarrow (\sim(q \wedge (\sim r))))$

(پ) $((\sim((\sim q) \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow p))$

(ت) $(q \rightarrow (p \vee r))$

(أ) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (\sim(p \vee \sim q)) \to (\sim q \vee r)$

$\equiv (\sim(\sim q \vee p))) \to (\sim q \vee r) \equiv \boxed{(\sim(q \to p)) \to (\sim q \vee r)}$

(ب) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (\sim p \wedge q) \to (q \to r)$

$\equiv (\sim p \wedge q) \to (\sim q \vee r) \equiv \boxed{(\sim p \wedge q) \to (\sim(q \wedge \sim r))}$

(ج) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (\sim(q \to r)) \to (\sim\sim(p \vee \sim q))$

علماً

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

$\equiv (\sim(\sim q \vee r)) \to (\sim\sim(p \vee \sim q)) \equiv (\sim(\sim q \vee r)) \to (p \vee \sim q)$

$\equiv (\sim(\sim q \vee r)) \to (\sim q \vee p) \equiv \boxed{(\sim(\sim q \vee r)) \to (q \to p)}$

(د) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (p \vee \sim q) \vee (q \to r)$

$\equiv (p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee r) \equiv p \vee \sim q \vee r \equiv \sim q \vee (p \vee r)$

$\equiv \boxed{q \to (p \vee r)}$

۱۳ ــ صورتهای گزاره‌ایی به‌صورت نرمال عطفی بیابید که منطقا" هم‌ارز ترکیبهای زیر باشند :

(آ) $(((\sim p)\vee q)\rightarrow r)$

(ب) $(p\leftrightarrow q)$

(پ) $(p\wedge q\wedge r)\vee((\sim p)\wedge(\sim q)\wedge r)$

(ت) $(((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow s)$

(آ) $(\sim p\vee q)\rightarrow r \equiv \sim(\sim p\vee q)\vee r \equiv (p\wedge\sim q)\vee r \equiv (r\vee p)\wedge(r\vee\sim q)$

(ب) $p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$

(پ)

$\sim$	$((p$	$\wedge$	$(q$	$\wedge$	$r))$	$\vee$	$(\sim p$	$\wedge$	$(\sim q$	$\wedge$	$r)))$
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

$\sim[(\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\sim q\wedge\sim r)$

$\vee(p\wedge\sim q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\sim r)]$

$\equiv(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\sim q\vee r)\wedge(p\vee\sim q\vee\sim r)\wedge(\sim p\vee q\vee r)$

$\wedge(\sim p\vee q\vee\sim r)\wedge(\sim p\vee\sim q\vee r)$

$\sim$	$((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$r)$	$\to$	s
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

$$\sim[(\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s)$$
$$\vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \sim s)]$$
$$\equiv (p \vee q \vee \sim r \vee s) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee q \vee r \vee s)$$
$$\wedge (\sim p \vee q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee s)$$

---

۱۶ ــ صورتهایی گزاره‌ای بیابیدکه درآنها فقط رابطهای $\sim$ و $\to$ ظاهر شوندوبا صورتهای گزاره‌ای زیر منطقاً " هم‌ارز باشند :

(آ) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$

(ب) $(p \leftrightarrow q)$

(پ) $(p \wedge q \wedge r)$

(آ) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(\sim r \vee \sim s)$

$\equiv \sim(p \to \sim q) \vee \sim(r \to \sim s) \equiv \boxed{(p \to q) \to \sim(r \to \sim s)}$

(ب) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv \sim(\sim(p \to q) \vee \sim(q \to p))$

$\equiv \boxed{\sim((p \to q) \to \sim(q \to p))}$

(پ) $p \wedge q \wedge r \equiv \sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \equiv \sim(\sim p \vee (q \to \sim r))$

$\equiv \boxed{\sim(p \to (q \to \sim r))}$

---

۱۸ ــ گزاره‌ای بیابیدکه درآن فقط رابط | ظاهر شود ، ومنطقا " هم‌ارز $(p \to q)$ باشد .

$p \to q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim(p \wedge (q|q)) \equiv p|(q|q)$

---

۱۹ ــ ثابت کنید که هیچ رابط دوتایی بجز $\downarrow$ و | وجودنداردکه به تنهایی بتواند یک مجموعهٔ کارساز از رابطها را بسازد (راهنمایی : جدول درستی چنین رابطی را در نظر بگیرید) .

p	$\star$	q
۰	۱	۰
۰		۱
۱		۰
۱	۰	۱

فرض کنید رابط مورد نظر $\star$ باشد. از آن جا که این رابط باید بتواند توتولوژی و تناقض بسازد، پس سطر اول و آخر جدول روبه‌رو، اجبارا به‌ترتیب ۱ و ۰ هستند. با توجه به اینکه $\star$، $\downarrow$ یا | نیست، پس تنها به بررسی ۲ حالت

باقی مانده می‌پردازم.

① $0 \star 1 = 0 \wedge 1 \star 0 = 1$:

از جدول آن می‌توان دید که $p \star q \equiv \sim(\sim p \star \sim q)$ و چنین رابطه هیچ گاه نمی‌تواند T یا ⊥ بسازد. [چون ارزش سطری که هر دو T هستند، مخالف ارزش سطری که هر دو F هستند است.]

② $0 \star 1 = 1 \wedge 1 \star 0 = 0$:

برای این رابطه می‌توان رابطه‌ی $p \star q \equiv \sim p$ نوشت و این رابطه نیز نمی‌تواند T یا ⊥ بسازد. [چون سطری که ارزش متغیر اول T است همواره مخالف ارزش سطری است که متغیر اول F است.]

۲۰ــ برای هر یک از استدلالهای زیر، صورت استدلالی متناظر را بنویسید، و معتبر بودن یا معتبر نبودن آن را مشخص کنید.

(آ) اگر تابع f پیوسته نباشد، آنگاه تابع g مشتق‌پذیر نیست. g مشتق‌پذیر است. پس f پیوسته است.

$(\sim p \to \sim q)\ ,\ q ;\ \therefore\ p$

$(p \vee \sim q) \wedge q \to p \equiv ((\overset{F}{\cancel{q \wedge \sim q}}) \vee (q \wedge p)) \to p \equiv \sim q \vee (\overset{T}{\cancel{\sim p \vee p}}) \equiv T$

(ب) اگر حسن حرارت‌مرکزی نصب‌کرده باشد، آنگاه یا اتومبیلش را فروخته‌است یا ازبانک وام‌گرفته است. حسن از بانک وام‌نگرفته است، پس اگر حسن اتومبیلش را نفروخته باشد، آنگاه حرارت‌مرکزی نصب نکرده است.

با فرض اینکه «یا»ی منطقی باشد و نه Xor :

$$\overbrace{\underset{T}{p} \to \overbrace{(\underset{F}{q} \vee \underset{F}{r})}^{F}}^{F},\ \underbrace{\sim r}_{T};\quad \therefore\ \overbrace{\underbrace{\sim q}_{T} \to \underbrace{\sim p}_{F}}^{F}$$

مطابق شکل، ارزش‌هایی وجود ندارد که نتیجه نادرست و مقدمات درست باشند ⟸ استدلال معتبر است.

(پ) اگر در پالیگونیا نفت باشد آنگاه یا متخصصین درست تشخیص داده‌اند یا دولت دروغ می‌گوید . در پالیگونیا نفت نیست یا در غیر این صورت متخصصین درست تشخیص نداده‌اند . پس دولت دروغ نمی‌گوید .

$$\underbrace{p \to \overbrace{(q \vee \underset{T}{r})}^{T}}_{T},\ \sim p \vee (p \to \sim q);\quad \therefore\ \underbrace{\sim r}_{F}$$

به ازای

p	q	r
F	T	T

$T \to F$ و در نتیجه استدلال معتبر نیست.

(ت) اگر U زیرفضائی از V باشد ، آنگاه U زیرمجموعه‌ای از V است ، U شامل بردار صفر است ، و U بسته است . U زیرمجموعه‌ای از V است و اگر U بسته باشد

آنگاه U شامل بردار صفر است . پس اگر U بسته باشد آنگاه U یک زیرفضای V است .

$$\overbrace{\underset{F}{p} \to (q \wedge r \wedge \underset{T}{s})}^{T},\ \underset{T}{q} \wedge (\underset{T}{s} \to \underset{T}{r});\quad \therefore\ \underset{T}{s} \to \underset{F}{p}$$

به ازای

p	q	r	s
F	T	T	T

$T \to F$ ، استدلال معتبر نیست.

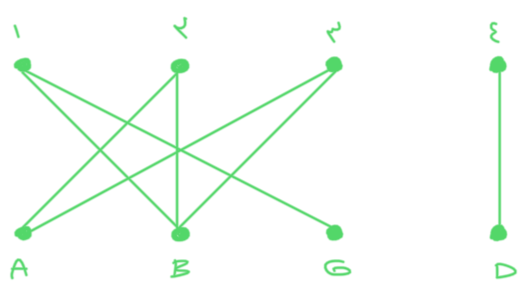
۲۱ ــ فرض کنیدکه $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n ; \therefore \mathscr{A}$ یک صورت استدلالی معتبر باشد . ثابت کنید که $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} ; \therefore (\mathscr{A}_n \rightarrow \mathscr{A})$ نیز یک صورت استدلالی معتبر است .

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow A \equiv \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \cdots \vee \sim A_n \vee A$$

$$\equiv \sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \vee (\sim A_n \vee A)$$

$$\equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \longrightarrow (A_n \rightarrow A)$$

پرسش ۳. چهار نفر الف، ب، ج و د در مسابقه‌ی اسب‌سواری شرکت می‌کنند و
الف ادعا می‌کند :« من نه اول بودم نه آخر.»
ب ادعا می‌کند :« من آخر نبودم.»
ج ادعا می‌کند :« من اول بودم.»
د ادعا می‌کند :«من آخر بودم.»
فرض کنید سه تا از این ادعاها راست و یکی غلط است. چه کسی دروغ می‌گوید و چه کسی اول شده است؟



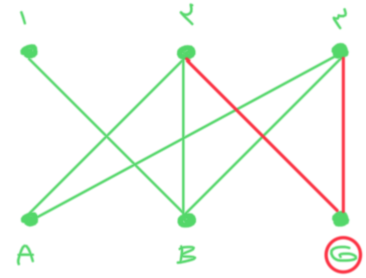
هدف رسم متمم این گراف به ازای تنها یک راس است به گونه‌ای که گراف حاصل دارای حداقل یک تطابق کامل باشد.

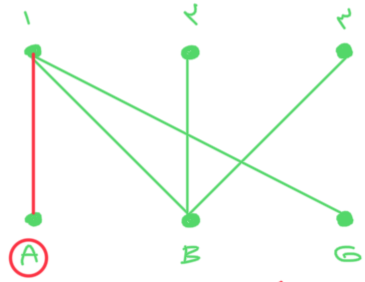
* از آن جا که راس (٤) درجه ۱ است و به D متصل است،

پس D نمی‌تواند دروغ گفته باشد. پس می‌توانیم دو راس (۴) و (D) را از گراف حذف کنیم.

⇐ B نیز نمی‌تواند دروغ گفته باشد چون در غیر این صورت دو جاسوس می‌شود.

* بررسی حالت‌های باقی مانده:





[این حالت ممکن نیست چون (۳)، (۲)
درجه ۱ هستند و هردو به B وصل هستند]

* پس تنها حالت ممکن، گراف سمت راست است ⇐ G دروغ گفته است و B نفر اول است.

پرسش ۴.

آ) نشان دهید که هیچ‌یک از ادوات $\bot$، $\neg$، $\to$، $\vee$، $\wedge$ به تنهایی، به طور تابعی کامل نیست.

ب) نشان دهید که مجموعه ادوات $\{\wedge, \vee\}$ به طور تابعی کامل نیست.

ج) چند ادات دو موضعی کامل وجود دارد؟ (راهنمایی: اگر $\circ$ ادات دو موضعی کامل باشد، چه چیزی درباره‌ی $\top \circ \top$ و $\bot \circ \bot$ می‌توان گفت؟)

ابتدا ب را اثبات می‌کنیم.

لم. به ازای هر جدول درستی [عبارات حداکثر ۲ متغیر دارد]، سطر متناظر با درستی تمام متغیرها، نمی‌تواند F باشد.

اثبات. استقرا روی تعداد رابط‌ها.

پایه: $n=1$ دو حالت داریم: $T \vee T \equiv T$ و $T \wedge T \equiv T$ که حکم برقرار است.

فرض کنید حکم برای n برقرار باشد. برای $n+1$ داریم:

* صورت گزاره ای مورد نظر به فرم $P \vee Q$ باشد:

طبق فرض استقرا خروجی جدول برای اینکه تمام گزاره‌های موجود در P ، T باشند ، T است.

مشابها برای Q نیز برقرار است. داریم: $P \vee Q \equiv T \vee T \equiv T$

* صورت به فرم $P \wedge Q$ باشد: مشابه قبل: $P \wedge Q \equiv T \wedge T \equiv T$

و حکم اثبات می‌شود $\Leftarrow$ جدولی وجود ندارد که سطری که تمام متغیرها T هستند ، F شود.

آ) * اگر مجموعه‌ای کامل نباشد ، هر زیرمجموعه از آن نیز کامل نیست $\Leftarrow$ $\{\wedge\}$ و $\{\vee\}$ کامل نیستند.

استدلالی مشابه قسمت قبل نیز برای $\rightarrow$ برقرار است. (خروجی همه T ، نمی‌تواند F باشد)

$\perp$ تنها یک جدول می‌سازد پس کامل نیست.

$\neg$ تک متغیره است و با توجه به جدول آن ، نمی‌تواند T یا $\perp$ را بسازد.

ج) پاسخ این سوال ، در پاسخ به سوال ۱۹ ، بررسی شد. تنها ۲ رابط ۲ متغیره نا هم‌ارز وجود دارد: $\downarrow$, $|$