حل تمرین سری دوم منطق

آناهیتا حیدری

4 Let L' be the formal deductive system which differs from L only in having the axiom scheme ($L'3$) $((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}))$ in place of ($L3$). Show that, for any *wfs.* $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ of L (and so of L'):

(i) $\vdash_L ((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}))$,

and

(ii) $\vdash_{L'} ((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$.

Deduce that a *wf.* is a theorem of L if and only if it is a theorem of L'.

(i) $\vdash_L ((\sim A\to\sim B)\to((\sim A\to B)\to A)) \iff \{(\sim A\to\sim B)\}\vdash_L ((\sim A\to B)\to A)$

$\iff \{(\sim A\to\sim B),(\sim A\to B)\}\vdash_L A$

فرض	$\sim A\to B$ *		
فرض	$\sim A\to\sim B$	$\to$ $B\to A$ **	L3
$*, **$, HS	$\sim A\to A$		
	A	$(\sim A\to A)\to A$	طبق قضیه :

(ii) $\vdash_{L'} ((\sim A\to\sim B)\to(B\to A)) \iff \{(\sim A\to\sim B)\}\vdash_{L'} (B\to A)$

$\iff \{(\sim A\to\sim B), B\}\vdash_{L'} A$

فرض	B ^{*1}
فرض	$\sim A\to\sim B$
L'3	$(\sim A\to B)\to A$ ^{*4}
L1	$B\to(\sim A\to B)$ ^{*2}
$*^1, *^2$, MP	$\sim A\to B$ ^{*3}
$*^3, *^4$, MP	A

$\Leftarrow$ i در L و ii در L′ metatheorem هستند و درنتیجه هر theorem در

L، در L′ با ii و هر theorem در L′، در L با i قابل اثبات است.

---

5 The rule *HS* is an example of a legitimate additional rule of deduction for L. Is the following rule legitimate in the same sense: from the *wf*s. $\mathscr{B}$ and $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$, deduce $(\mathscr{A} \to \mathscr{C})$?

فرض	B	$*$
فرض	$A \to (B \to C)$	
L2	$(A \to B) \to (A \to C)$	$**$
L1	$B \to (A \to B)$	$*$
MP, $*$	$A \to B$	$**$
MP, $**$	$A \to C$	

$$\therefore \quad \{B,\ A \to (B \to C)\} \vdash_L (A \to C)$$

---

7 Let $\mathscr{A}$ be a *wf*. of L and let L^+ be the extension of L obtained by including $\mathscr{A}$ as a new axiom. Prove that the set of theorems of L^+ is different from the set of theorems of L if and only if $\mathscr{A}$ is not a theorem of L.

$\Rightarrow$: اثبات عکس نقیض . از آن جا که اصول L با L^+ تنها در A تفاوت دارد، و A فرضاً
یک theorem است، پس مجموعه قضایای آن با L^+ تفاوتی ندارد.

$\Leftarrow$: از آن جا که A یک قضیه از L نیست یعنی L آن را اثبات نمی‌کند. پس با افزودن آن
به اصول L، حداقل یک قضیه جدید (A) در L^+ وجود دارد که در L قضیه نیست. (چون
هر یک از اصول، یک قضیه به طول اثبات 1 است.)

---

8 Let $\mathscr{A}$ be the *wf.* $((\sim p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow \sim p_2))$. Show that L^+, obtained by including this $\mathscr{A}$ as a new axiom, has a larger set of theorems than L. Is L^+ a consistent extension of L?

$\sim p_1$	$\rightarrow$	p_2	$\rightarrow$	p_1	$\rightarrow$	$\sim p_2$
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0

از آن جا که A توتولوژی نیست، پس L^+ یک توسیع اکید از L است و از آن جا که A تناقض
نیست (طبق قضیه) L^+ یک توسیع سازگار از L است. پس L^+ یک توسیع اکید و سازگار از L
است.

---

9 Prove that if $\mathscr{B}$ is a contradiction then $\mathscr{B}$ cannot be a theorem of any consistent extension of L.

برهان خلف. فرض کنید L^* یک توسیع سازگار از L باشد که $\vdash_{L^*} B$ ①. چون $\sim B$،

توتولوژی است، پس طبق قضیه Adequacy، $\vdash_{L^*} \sim B$ ②.

① و ② ← تناقض با فرض سازگار بودن L^*.

---

10 Let L^{++} be the extension of L obtained by including as a fourth axiom *scheme*:

$$((\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B})).$$

Show that L^{++} is inconsistent. (Hint: see Chapter 1 exercise 7.)

چون axiom scheme است و مطابق سوال ۸، فرم گزاره ای آن توتولوژی نیست،

کافی است یک نمونه از آن بسازیم که تناقض باشد.

$A \equiv p_1 \vee \sim p_1 \qquad B \equiv p_2 \vee \sim p_2$

$$\Rightarrow (\sim(p_1 \vee \sim p_1) \to (p_2 \vee \sim p_2)) \to ((p_1 \vee \sim p_1) \to \sim(p_2 \vee \sim p_2)) \equiv F$$

پس نقیض آن توتولوژی است و در L، theorem است ⇐ در L^{**} نیز theorem است

⇐ هم این اصل و هم نقیض آن در L^{**}، theorem هستند ⇐ L^{**} ناسازگار است.

---

11 Let J be a consistent complete extension of L, and let $\mathscr{A}$ be a *wf.* of L. Show that the extension of J obtained by including $\mathscr{A}$ as an additional axiom is consistent if and only if $\mathscr{A}$ is a theorem of J.

چون J کامل است و A قضیه‌ای از آن، پس ~A قضیه‌ای از J نیست و این ⇐ :

توسیع سازگار است. (مطابق سوال ۷، قضایای J با این توسیع‌ها تفاوت نیست چون A یک

قضیه از J است.)

عکس نقیض. فرض کنید A قضیه‌ای از J نباشد. چون J کامل است پس ~A ⇒ :

یک قضیه از J و در نتیجه، یک قضیه از توسیع J است. هم A و هم ~A در این توسیع

قضیه هستند. پس این توسیع ناسازگار است.

---

12 Let $\mathscr{A}$ be a *wf*. of L in which the statement letters $p_1, \ldots, p_n$ occur, and let $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ be any *wfs*. of L. Let $\mathscr{B}$ be the *wf*. of L obtained by substituting $\mathscr{A}_i$ for each occurrence of p_i in $\mathscr{A}$ $(1 \leq i \leq n)$. Prove that if $\mathscr{A}$ is a theorem of L then $\mathscr{B}$ is a theorem of L.

می‌دانیم اگر صورت گزاره‌ای حاصل از جایگذاری متغیرهای گزاره‌ای، توتولوژی باشد، آنگاه صورت

اصلی نیز توتولوژی است (طبق قضیه) و از آن جا که یک فرمول خوش ساخت از L،

در L قضیه است ⟺ توتولوژی باشد، پس حکم اثبات می‌شود.

پرسش ۱. مجموعه Γ از فرمول های L سازگار است اگر هیچ فرمولی مانند A وجود نداشته باشد که $\Gamma \vdash_L A$ و $\Gamma \vdash_L \neg A$. فرض کنید Γ مجموعه ای از فرمول ها باشد، تابع ارزش دهی v را مدلی از Γ مینامیم، اگر برای هر $B \in \Gamma$، $v(B) = T$. نشان دهید اگر Γ سازگار باشد، آنگاه مدل دارد. (لم وجود مدل)

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots$ $(i \in I)$ فرمول‌های Γ باشند. از آن جا که $\Gamma \vdash_L A_i$ ، $\forall i \in I$

و چون Γ سازگار است ⇐ $\Gamma \vdash_L \sim A_i$ $\nexists i \in I$

پس نگاشت $v(A_i) = T$ ، $\forall i \in I$ یک نگاشت خوش تعریف و در نتیجه

یک تابع است. ⇐ Γ مدل دارد.

پرسش ۲. نشان دهید دو گزاره ی زیر برای مجموعه ای از فرمول ها مانند Γ معادل اند: (قضیه فشردگی)

۱. Γ مدل دارد.

۲. هر زیرمجموعه ی متناهی Γ مدل دارد.

$1 \Leftarrow 2$: فرض کنید v مدل Γ باشد. بدیهی است v برای برای هر زیرمجموعه (چه متناهی و چه نامتناهی) از Γ نیز مدل است.

$2 \Leftarrow 1$: عکس نقیض. فرض کنید Γ مدل نداشته باشد. پس Γ ناسازگار است (طبق سوال قبل).

یعنی $\Gamma \vdash_L \sim A$ ** و $\Gamma \vdash_L A$ * . $\exists A$

* $\Leftarrow$ وجود دارد دنباله $A_1 A_2 \dots A_n$ که اثبات A باشد.

** $\Leftarrow$ وجود دارد دنباله $A'_1 A'_2 \dots A'_{n'}$ که اثبات $\sim A$ باشد.

تعریف می کنم: $\Gamma' = \Gamma \cap \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n'} A'_j\right)\right]$

$\Rightarrow |\Gamma'| \leq n+n' \to$ متناهی است و $\Gamma' \vdash_L A \,,\, \Gamma' \vdash_L \sim A$

پس Γ' نیز ناسازگار است و طبق قضیه درستی قوی، $\Gamma' \models_L A$ و $\Gamma' \models_L \sim A$.

پس Γ' نمی‌تواند مدل داشته باشد.

پرسش ۳. فرمول A را مستقل از مجموعه ای از فرمول ها مانند Γ می نامیم اگر $\Gamma \nvdash A$ و $\Gamma \nvdash \neg A$. نشان دهید $p_1 \to p_2$ مستقل از $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0\}$ است. توجه کنید که اگر A و B فرمول L باشند، $A \leftrightarrow B$، $A \wedge B$ و $A \vee B$ فرمول نیستند، زیرا مجموعه ی نماد های استفاده شده در آن ها زیر مجموعه $\{(,), \neg, \to, p_0, p_1, p_2, \dots\}$ نیست. برای رفع این مشکل، $A \leftrightarrow B$ مختصری برای فرمول $\neg((A \to B) \to \neg(B \to A))$، $A \wedge B$ مختصری برای فرمول $\neg(A \to \neg B)$ و $A \vee B$ رامختصری برای فرمول $\neg A \to B$ در نظر بگیرید.

$$\left\{\sim\left[\left[\sim((p_1 \to p_0) \to \sim(p_0 \to p_1))\right] \to p_2\right], p_2 \to p_0\right\} \overset{?}{\vdash_L} p_1 \to p_2 \iff$$

$$\overset{?}{\underset{L}{\vdash}} \sim\Big[\big[\sim((p_1 \to p_0) \to \sim(p_0 \to p_1))\big] \to p_2\Big] \to \Big[(p_2 \to p_0) \to (p_1 \to p_2)\Big]$$

به ازای $(p_0 , p_1 , p_2) \equiv (T, T, F)$ ارزش wf نهایی F می‌شود ⇐ توتولوژی نیست

⇐ در L اثبات نمی‌شود.

$$\overset{?}{\underset{L}{\vdash}} \sim\Big[\big[\sim((p_1 \to p_0) \to \sim(p_0 \to p_1))\big] \to p_2\Big] \to \Big[(p_2 \to p_0) \to \sim(p_1 \to p_2)\Big]$$

به ازای $(p_0 , p_1 , p_2) \equiv (F, F, F)$ ارزش wf نهایی F می‌شود ⇐ توتولوژی نیست

⇐ در L اثبات نمی‌شود.

پرسش ۴. فرض کنید $\Gamma \cup \{A, B\}$ مجموعه ای از فرمول ها باشد. نشان دهید اگر $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ و $\Gamma \cup \{\neg A\} \vDash B$، آنگاه $\Gamma \vDash B$.
نماد $\Gamma \vDash_L A$ یعنی اگر v مدلی از Γ باشد، آنگاه $v(A) = T$.

فرض کنید v مدلی از Γ باشد. ثابت می‌کنیم $v(B) = T$.

برهان خلف. فرض کنید $v(B) = F$. برای A داریم:

① اگر $v(A) = T$ ⇐ v از $\Gamma \cup \{A\}$ است ⇐ طبق فرض باید $v(B) = T$ ✗

② اگر $v(A) = F$ ⇐ v مدلی از $\Gamma \cup \{\sim A\}$ است ⇐ طبق فرض باید $v(B) = T$ ✗

① و ② ⇐ فرض خلف نادرست است ⇐ $v(B) = T$.

پرسش ۵. فرمول A را نامتناقض می نامیم اگر $A \leftrightarrow \perp \nvdash$ و دو فرمول A و B را ناسازگار می نامیم اگر $\vdash A \wedge B \leftrightarrow \perp$. از دو متغیر p_0 و p_1، حداکثر چند فرمول متناقض دو به دو ناسازگار می توان ساخت؟ این فرمول ها را مشخص کنید.

نا

تعداد کل فرمول‌ها، $۱۶ = ۲^{۲^{۲}}$ است که فقط یک حالت تناقض است. یک فرمول نامتناقض است اگر و تنها اگر حداقل یک سطر از جدول درستی آن، T باشد.

مطابق تعریف، دو فرمول ناسازگار هستند اگر و تنها اگر به ازای هیچ سطری، هر دو T نشوند.

لم. حداکثر ۴ فرمول نامتناقض دو به دو ناسازگار می‌توان ساخت.

اثبات. از آن جا که هر فرمول حداقل یک سطر T دارد و تعداد کل سطرها ۴ است و در هر کدام هر سطری که T باشد، باقی فرمول‌ها در آن سطر F هستند، پس این تعداد از ۴ نمی‌تواند بیشتر باشد.

با توجه به مثال زیر، این کران tight است.

p_0	p_1	A_1	A_2	A_3	A_4
۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱