Exercises

1 Write out proofs in L for the following *wf*s.

(*a*) $(p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$;

(*b*) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$;

(*c*) $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$;

(*d*) $(p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2)))$.

2 Show that the following hold for any *wf*s. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ of L.

(*a*) $\{(\sim \mathscr{A})\} \underset{L}{\vdash} (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$;

(*b*) $\{(\sim(\sim \mathscr{A}))\} \underset{L}{\vdash} \mathscr{A}$;

(*c*) $\{(\mathscr{A} \to \mathscr{B}), (\sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to (\sim \mathscr{A}))\} \underset{L}{\vdash} (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$;

(*d*) $\{(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))\} \underset{L}{\vdash} (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$.

3 Using the Deduction Theorem for L, show that the following *wf*s. are theorems of L, where $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ are any *wf*s. of L.

(*a*) $(\mathscr{A} \to (\sim(\sim \mathscr{A})))$;

(*b*) $((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to ((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{B})))$;

(*c*) $(((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$;

(*d*) $(\sim(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$.

* لم ۱. اگر A یک فرض دلخواه از L و T یک قضیه از L باشد، $\vdash_L (A \to T)$.

اثبات.

T	(قضیه از L)
$T \to (A \to T)$	(تعویض از L1)
$A \to T$	(MP)

جایگذاری $p_2 \to p_1$ به جای A و $(\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to p_1)$ که تعویض L3 است به جای T در لم بالا. (۹-۱)

---

* لم ۲. $\vdash_L (A \to A)$ که A یک فرض دلخواه از L است.

اثبات.

$(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$	(L2)
$A \to ((B \to A) \to A)$	(L1)
$(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$	(MP)
$A \to (B \to A)$	(L1)
$A \to A$	(MP)

(۱-ج)

در قسمت ط به جای p_2، p_1 و به جای p_3، p_2 قرار دهید. داریم:

$$\underbrace{((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1))}_{*} \to \underbrace{((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))}_{\text{حکم سوال}}$$

پس کافی است ثابت کنیم * یک قضیه از L است و در برهان از MP استفاده کنیم.

طبق لم ۲، $\vdash_L (p_1 \to p_1)$. پس با جایگذاری $p_1 \to p_1$ به جای T و $p_1 \to (p_1 \to p_2)$ به جای A در لم ۱، حکم اثبات می‌شود.

(۹-۲)

فرض	$\neg A$	
قضیه	$\neg A \to (A \to B)$	۲.۱۱
MP	$A \to B$	

(۲-ج)

فرض	$A \to B$
فرض	$\neg(B \to C) \to \neg A$
L3	$(\neg(B \to C) \to \neg A) \to (A \to (B \to C))$
MP	$A \to (B \to C)$
L2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

MP $(A \to B) \to (A \to C)$

MP با فرض اول $A \to C$

۳-a

L3 $(\sim\sim\sim A \to \sim A) \to (A \to \sim\sim A)$

2.b از $\sim\sim(\sim A) \to (\sim A)$

MP $A \to \sim\sim A$

فرض A

MP $\sim\sim A$

۳-c

۲.۱۱ قضیه $\sim A \to (A \to B)$

فرض $(A \to B) \to A$

HS $\sim A \to A$

۲.۱۱ قضیه $(\sim A \to A) \to A$

MP A