حل تمرین سری اول منطق

آناهیتا صدری

۹۸۲۲۲۵۳۳

۶ ــ نشان دهید که هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقا " هم‌ارز هستند .

آ) $(p \to q), ((\sim q) \to (\sim p))$

ب) $((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

پ) $(((\sim p) \wedge (\sim q)) \to (\sim r)), (r \to (q \vee p))$

ت) $(((\sim p) \vee q) \to r), ((p \wedge (\sim q)) \vee r)$

(آ)

p	$\to$	q	$\leftrightarrow$	$\sim q$	$\to$	$\sim p$
T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T

(ب)

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	r	$\leftrightarrow$	$(p \wedge r)$	$\vee$	$(q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T	T	T	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	F	T	F	F	F

(پ)

$(\sim p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$\sim r$	$\leftrightarrow$	r	$\rightarrow$	$(q \vee p)$
T	T	T	T	T	T	F	T	F
T	T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T	T

(ت)

$(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	r	$\leftrightarrow$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee\ r$
T	T	T	T	T	T	F	F	F	T
T	T	T	F	F	T	F	F	F	F
T	T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T	T	T

---

۱۱ ــ با استفاده از احکام ۱ : ۱۴ و ۱ : ۱۷ نشان دهید که صورت گزاره‌ای $((\sim(p \vee (\sim q))) \rightarrow (q \rightarrow r))$ منطقاً " هم‌ارز هر یک از صورتهای گزاره‌ای زیر است .

(آ) $((\sim(q \rightarrow p)) \rightarrow ((\sim q) \vee r))$

(ب) $(((\sim p) \wedge q) \rightarrow (\sim(q \wedge (\sim r))))$

(پ) $((\sim((\sim q) \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow p))$

(ت) $(q \rightarrow (p \vee r))$

(أ) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (\sim(p \vee \sim q)) \to (\sim q \vee r)$

$\equiv (\sim(\sim q \vee p)) \to (\sim q \vee r) \equiv \boxed{(\sim(q \to p)) \to (\sim q \vee r)}$

(ب) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (\sim p \wedge q) \to (q \to r)$

$\equiv (\sim p \wedge q) \to (\sim q \vee r) \equiv \boxed{(\sim p \wedge q) \to (\sim(q \wedge \sim r))}$

(ج) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (\sim(q \to r)) \to (\sim\sim(p \vee \sim q))$

عكس

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

$\equiv (\sim(\sim q \vee r)) \to (\sim\sim(p \vee \sim q)) \equiv (\sim(\sim q \vee r)) \to (p \vee \sim q)$

$\equiv (\sim(\sim q \vee r)) \to (\sim q \vee p) \equiv \boxed{(\sim(\sim q \vee r)) \to (q \to p)}$

(د) $(\sim(p \vee \sim q)) \to (q \to r) \equiv (p \vee \sim q) \vee (q \to r)$

$\equiv (p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee r) \equiv p \vee \sim q \vee r \equiv \sim q \vee (p \vee r)$

$\equiv \boxed{q \to (p \vee r)}$

۱۳ ــ صورتهای گزاره‌ای به صورت نرمال عطفی بیابید که منطقا" هم‌ارز ترکیبهای زیر باشند :

(آ) $(((\sim p) \vee q) \rightarrow r)$

(ب) $(p \leftrightarrow q)$

(پ) $(p \wedge q \wedge r) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r)$

(ت) $(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s)$

(آ) $(\sim p \vee q) \rightarrow r \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \sim q) \vee r \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee \sim q)$

(ب) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

(پ)

$\sim$	$((p$	$\wedge$	$(q$	$\wedge$	$r))$	$\vee$	$(\sim p$	$\wedge$	$(\sim q$	$\wedge$	$r)))$
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

$\sim[(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

$\vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)]$

$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee r)$

$\wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r)$

$\sim$	$((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$r)$	$\to$	s
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

$$\sim[(\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s)$$
$$\vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \sim s)]$$

$$\equiv (p \vee q \vee \sim r \vee s) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee q \vee r \vee s)$$
$$\wedge (\sim p \vee q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee s)$$

---

۱۶ ــ صورتهایی گزاره‌ای بیابیدکه درآنها فقط رابطهای $\sim$ و $\to$ ظاهر شوندوبا صورتهای گزاره‌ای زیر منطقاً " هم‌ارز باشند :

(آ) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$

(ب) $(p \leftrightarrow q)$

(پ) $(p \wedge q \wedge r)$

(آ) $(p\wedge q)\vee(r\wedge s)\equiv \sim(\sim p\vee\sim q)\vee\sim(\sim r\vee\sim s)$

$\equiv \sim(p\to\sim q)\vee\sim(r\to\sim s)\equiv \boxed{(p\to\sim q)\to\sim(r\to\sim s)}$

(ب) $p\leftrightarrow q\equiv (p\to q)\wedge(q\to p)\equiv \sim(\sim(p\to q)\vee\sim(q\to p))$

$\equiv \boxed{\sim((p\to q)\to\sim(q\to p))}$

(پ) $p\wedge q\wedge r\equiv \sim(\sim p\vee\sim q\vee\sim r)\equiv \sim(\sim p\vee(q\to\sim r))$

$\equiv \boxed{\sim(p\to(q\to\sim r))}$

---

۱۸ ـ گزاره‌ای بیابیدکه درآن فقط رابط | ظاهر شود ، ومنطقا " هم‌ارز $(p\to q)$ باشد .

$$p\to q\equiv \sim p\vee q\equiv \sim(p\wedge\sim q)\equiv \sim(p\wedge(q|q))\equiv p|(q|q)$$

---

۱۹ ـ ثابت کنید که هیچ رابط دوتایی بجز ↓ و | وجودنداردکه به تنهایی بتواند یک مجموعهٔ کارساز از رابطها را بسازد (راهنمایی: جدول درستی چنین رابطی را در نظر بگیرید) .

p	★	q
۰	۱	۰
۰		۱
۱		۰
۱	۰	۱

فرض کنید رابط مورد نظر ★ باشد. از آن جا که این رابط باید بتواند توتولوژی و تناقض بسازد، پس سطر اول و آخر جدول رو به رو، اجبارا به ترتیب ۱ و ۰ هستند. با توجه به اینکه ★، ↓ یا | نیست، پس تنها به بررسی ۲ حالت

باقی مانده می‌پردازم.

① $0 \star 1 = 0 \wedge 1 \star 0 = 1$:

از جدول آن می‌توان دید که $p \star q \equiv \sim(\sim p \star \sim q)$ ، چنین رابطه هیچ گاه نمی‌تواند T یا $\perp$ بسازد. [چون ارزش سطری که هر دو T هستند، مخالف ارزش سطری که هر دو F هستند است.]

② $0 \star 1 = 1 \wedge 1 \star 0 = 0$:

برای این رابطه می‌توان رابطه‌ی $p \star q \equiv \sim p$ نوشت و این رابطه نیز نمی‌تواند T یا $\perp$ بسازد. [چون سطری که ارزش متغیر اول T است همواره مخالف ارزش سطری است که متغیر اول F است.]

---

۲۰ ــ برای هر یک از استدلالهای زیر ، صورت استدلالی متناظر را بنویسید ، و معتبر بودن یا معتبر نبودن آن را مشخص کنید .

(آ) اگر تابع f پیوسته نباشد ، آنگاه تابع g مشتق‌پذیر نیست . g مشتق‌پذیر است . پس f پیوسته است .

$(\sim p \to \sim q) , q ; \therefore p$

$(p \vee \sim q) \wedge q \to p \equiv ((\overset{F}{\cancel{q \wedge \sim q}}) \vee (q \wedge p)) \to p \equiv \sim q \vee (\overset{T}{\cancel{\sim p \vee p}}) \equiv T$

(ب) اگر حسن حرارت‌مرکزی نصب‌کرده باشد ، آنگاه یا اتومبیلش را فروخته‌است یا ازبانک وام‌گرفته است . حسن از بانک وام نگرفته است ،پس اگر حسن اتومبیلش را نفروخته باشد ، آنگاه حرارت‌مرکزی نصب نکرده است .

با فرض اینکه یای منطقی باشد و نه Xor :

$$\overbrace{\underset{T}{p} \to \overbrace{(\underset{F}{q} \vee \underset{F}{r})}^{F}}^{F} \ , \ \underbrace{\sim r}_{T}\ ; \qquad \therefore \ \overbrace{\underbrace{\sim q}_{T} \to \underbrace{\sim p}_{F}}^{F}$$

مطابق شکل، ارزشی وجود ندارد که نتیجه نادرست

و مقدمات درست باشند ⇐ استدلال معتبر است.

(پ) اگر در پالیگونیا نفت باشد آنگاه یا متخصصین درست تشخیص داده‌اند یا دولت دروغ می‌گوید . در پالیگونیا نفت نیست یا درغیر این صورت متخصصین درست تشخیص نداده‌اند . پس دولت دروغ نمی‌گوید .

$$\underbrace{p \to \overbrace{(q \vee \underset{T}{r})}^{T}}_{T} \ , \ \sim p \vee (p \to \sim q)\ ; \qquad \therefore \ \underbrace{\sim r}_{F}$$

به ازای

p	q	r
F	T	T

T → F و در نتیجه استدلال معتبر نیست.

(ت) اگر U زیرفضائی از V باشد ، آنگاه U زیرمجموعه‌ای از V است ، U شامل بردار صفر است ،و U بسته است . U زیرمجموعه‌ای از V است و اگر U بسته باشد آنگاه U شامل بردار صفر است . پس اگر U بسته باشد آنگاه U یک زیرفضای V است .

$$\overbrace{\underset{F}{p} \to (q \wedge r \wedge \underset{T}{s})}^{T} \ , \ \underset{T}{q} \wedge (\underset{T}{s} \to \underset{T}{r})\ ; \qquad \therefore \ \underset{T}{s} \to \underset{F}{p}$$

به ازای

p	q	r	s
F	T	T	T

T → F , استدلال معتبر نیست.

۲۱ ــ فرض کنیدکه $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n ; \therefore \mathscr{A}$ یک صورت استدلالی معتبر باشد . ثابت کنید که $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} ; \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ نیز یک صورت استدلالی معتبر است .

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to A \equiv \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \cdots \vee \sim A_n \vee A$$

$$\equiv \sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \vee (\sim A_n \vee A)$$

$$\equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \longrightarrow (A_n \to A)$$

پرسش ۱. ساکنین جزیره‌ای از دو گروه دروغگوها و راستگوها تشکیل شده‌اند. راستگوها همواره راست می‌گویند و دروغگوها همواره دروغ می‌گویند.
(الف) شخصی برای مسافرت به این جزیره سفر کرده است و به دو نفر از اهالی برمی‌خورد. اولی می‌گوید: «ما هردو راستگو هستیم» (p) ولی دومی بلافاصله می‌گوید :«نه یکی از ما دروغگوست!» (q). مشخص کنید که هر یک از دو نفر راستگو هستند یا دروغگو.
(ب) اگر به یکی از اهالی برخورد کنیم که بگوید :« من از گروه دروغگوها هستم.» (s) به نظر شما او در واقع به کدام گروه تعلق دارد؟

الف) طبق جملات گفته شده داریم: $p \to q \quad , \quad q \to \sim p$

حالت اول : p درست باشد.

$$\left.\begin{array}{l} p , (p \to q) ; \therefore q \\ q , (q \to \sim p) ; \therefore \sim p \end{array}\right\} \Rightarrow p , (p \to q) , (q \to \sim p) ; \therefore \sim p$$

که با فرض درست بودن p در تناقض است. پس این حالت ممکن نیست و $p \equiv F$.

حالت دوم : q درست باشد.

$$q , q \to \sim p ; \therefore \sim p$$

این حالت ممکن است .

حالت سوم: q نادرست باشد. $\sim q \,,\; \sim q \to \sim p \;;\; \therefore \sim p$

این حالت نیز ممکن است. [البته برای خواننده "صرفاً" تنها ازما دروغگو است.]

⇐ یعنی هم p و هم q نادرست هستند.

ب) اگر فرض کنیم از ساکنین جزیره باشد: $S \to \sim S$ چون راستگو است، $\sim S \to S$ چون دروغگو است

که تناقض هستند.

پس فرض سوال نادرست است.

پرسش ۲. آقایان الف و ب دو منطق‌دان زیرک و آگاه هستند، همراه با دوست مشترک خویش دور میزی نشسته اند. دوست مشترک دو منطق‌دان می‌خواهد میزان زیرکی آنان را بسنجد، به هریک از آنان درگوشی یک عدد صحیح مثبت می‌گوید. سپس با صدای بلند به حطاب به آن‌ها می‌گوید که حاصل‌ضرب آن دو عدد تنها می‌تواند ۸ یا ۱۶ باشد. نخستین منطق‌دانی که بتواند عدد نفر دیگر را تغیین کند، برنده بازی خواهد بود. با توجه به گفت‌وگویی که پس از طرح این پرسش میان آن دو صورت می‌گیرد، عدد آقای ب را مشخص کنید.

- A الف: «من هم هیچ اطلاعی از عدد شما ندارم.»
- B ب:«من هم هیچ چیز درباره‌ی عدد شما نمی‌دانم.»
- C الف: «شما باید دست‌کم یک اشاره یا سرنخی در این زمینه به من بدهید.»
- D ب: «باورکنید، من هم چنین انتظاری از شما دارم و شما هم هیچ اشاره‌ای به این موضوع نمی‌کنید.»

* چون هیچ کدام برنده نشده ⇐ عدد دیگری را به قطع نمی‌دانند. پس هر حالتی که به قطعیت برسد رد است.

① ۱۶ باشد: تنها حالت ۱ است. α

② ۱ باشد: طبق حالت قبل، عدد دیگر ۱۶ نمی‌تواند باشد ⇐ ۸ است. α

③ ۸ باشد: 〃 〃 عدد دیگر ۱ نمی‌تواند باشد پس ۲ است. α

④ ۲ باشد: 〃 〃 عدد دیگر نمی‌تواند ۸ باشد ⇐ ۴ است. α

⑤ ۴ باشد: 〃 〃 عدد دیگر نمی‌تواند ۲ باشد ⇐ ۴ است. α

هیچ حالتی قابل قبول نیست ⇐ مفروضات سوال نادرست هستند.

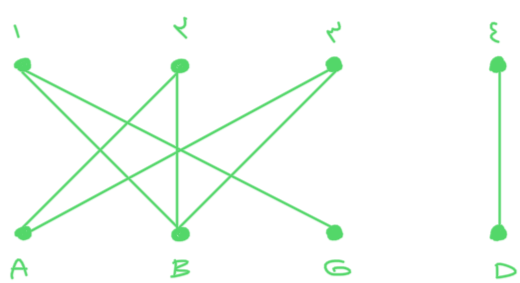
راه حل با فرض اینکه دو منطق دان باهوش نباشند و صرفاً هربار قطعی‌ترین حالت‌ها را حذف کنند:

	ب	الف	
A ⇒	۱	۱۶	
B ⇒	۱۶	۱	
B ⇒	۱	۸	← تنها حالت باقی مانده برای
C ⇒	۸	۱	اینکه ب ۱ باشد
C ⇒	۲	۸	← تنها حالت باقی مانده برای
D ⇒	۸	۲	اینکه الف ۸ باشد
D ⇒	۲	۴	← تنها حالت باقی مانده برای
			اینکه ب ۲ باشد

⇐ پس تنها عددی که برای ب می‌ماند، ۴ است و عدد الف، می‌تواند ۲ یا ۴ باشد.

⇐ الف برنده است.

پرسش ۳. چهار نفر الف، ب، ج و د در مسابقه‌ی اسب‌سواری شرکت می‌کنند و
الف ادعا می‌کند :« من نه اول بودم نه آخر.»
ب ادعا می‌کند :« من آخر نبودم.»
ج ادعا می‌کند :« من اول بودم.»
د ادعا می‌کند :«من آخر بودم.»
فرض کنید سه تا از این ادعاها راست و یکی غلط است. چه کسی دروغ می‌گوید و چه کسی اول شده است؟



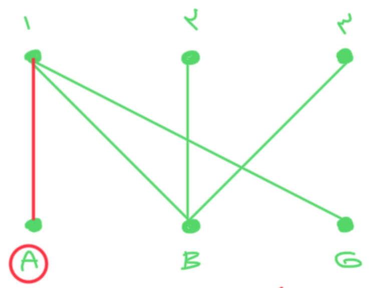
هدف رسم متمم این گراف به ازای تنها یک راس است به گونه‌ای که گراف حاصل دارای حداقل یک تطابق کامل باشد.

* از آن‌جا که راس (۴) درجه ۱ است و به D متصل است،

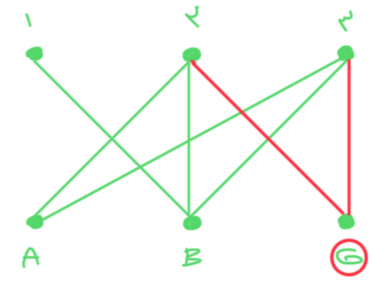
پس D نمی‌تواند دروغ گفته باشد. پس می‌توانیم دو راس (۴) و (D) را از گراف حذف کنیم.

⇐ B نیز نمی‌تواند دروغ گفته باشد چون در غیر این صورت درجه‌اش ۵ می‌شود.

* بررسی حالت‌های باقی مانده:



[این حالت ممکن نیست چون (۳),(۲)
در جواب ۱ هستند و هردو به B وصل هستند]



* پس تنها حالت ممکن، گراف سمت راست است ⇐ G دروغ گفته است و B نفر اول است.

پرسش ۴.

آ) نشان دهید که هیچ‌یک از ادوات ⊥، ¬، →، ∨، ∧ به تنهایی، به طور تابعی کامل نیست.

ب) نشان دهید که مجموعه ادوات $\{\wedge, \vee\}$ به طور تابعی کامل نیست.

ج) چند ادات دو موضعی کامل وجود دارد؟ (راهنمایی: اگر ∘ ادات دو موضعی کامل باشد، چه چیزی درباره‌ی $\top \circ \top$ و $\bot \circ \bot$ می‌توان گفت؟)

ابتدا ب را اثبات می‌کنم.

لم. به ازای هر جدول درستی [به بیان حداکثر ۲ متغیر دارد]، سطر متناظر با درستی تمام متغیرها، نمی‌تواند F باشد.

اثبات. استقرا روی تعداد رابط‌ها.

پایه: $n=1$ دو حالت داریم: $T \vee T \equiv T$ و $T \wedge T \equiv T$ که حکم برقرار است.

فرض کنید حکم برای n برقرار باشد. برای $n+1$ داریم:

* صورت گزاره‌ای مورد نظر به فرم $P \vee Q$ باشد:

طبق فرض استقرا خروجی جدول برای اینکه تمام گزاره‌های موجود در P ، T باشند ، T است.

مشابها برای Q نیز برقرار است. داریم: $P \vee Q \equiv T \vee T \equiv T$

* صورت به فرم $P \wedge Q$ باشد: مشابه قبل: $P \wedge Q \equiv T \wedge T \equiv T$

و حکم اثبات می‌شود ⇐ جدولی وجود ندارد که سطری که تمام متغیرها T هستند ، F شود.

آ) * اگر مجموعه‌ای کامل نباشد ، هر زیرمجموعه از آن نیز کامل نیست ⇐ $\{\wedge\}$ و $\{\vee\}$ کامل نیستند.

استدلالی مشابه قسمت قبل نیز برای $\rightarrow$ برقرار است. (خروجی همه T ، نمی‌تواند F باشد)

$\bot$ تنها یک جدول می‌سازد پس کامل نیست.

$\neg$ تک عملگره است و با توجه به جدول آن ، نمی‌تواند T یا $\bot$ را بسازد.

ج) پاسخ این سوال ، در پاسخ به سوال ۱۹ ، بررسی شد. تنها ۲ رابط ۲ عملگره ناهم‌ارز وجود دارد: $\downarrow$, $|$