حل تمرین سری چهارم منطق

آناهیتا حیدری

2 Prove that the following are theorems of $K_{\mathscr{L}}$.

(*a*) $(\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$,

(*b*) $((\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$, provided that x_i does not occur free in $\mathscr{B}$.

(*c*) $(\sim(\forall x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\sim\mathscr{A})$.

(a) $\{\sim B,\ \forall x_i A\} \vdash_K \forall x_i \sim(A \to B)$:

۱ $\sim B$

۲ $\forall x_i A$

۳ A

۴ $(\underset{T}{A} \overset{F}{\to} \underset{F}{B}) \overset{T}{\to} \underset{F}{B}$ — با ۱ و ۳ ، چون ارزش آن T می‌شود ، پس با L U ۳ قابل اثبات است.

۵ $\sim B \to \sim(A \to B)$ — K۳

۶ $\sim(A \to B)$ — ۱ و ۵

۷ $\forall x_i \sim(A \to B)$ — G

چون x_i در $\forall x_i A$ آزاد نیست ، طبق قضیه استنتاج داریم: $\{\sim B\} \vdash_K \forall x_i A \to \forall x_i \sim(A \to B)$

$\{\sim B\} \vdash_K \exists x_i (A \to B) \to \sim \forall x_i A$ — K۳

$\{\sim B,\ \exists x_i (A \to B)\} \vdash_K \sim \forall x_i A$ — عکس استنتاج

$\{\exists x_i (A \to B)\} \vdash_K \sim B \to \sim \forall x_i A$ — استنتاج (به شرط اینکه x_i در B آزاد نباشد)

$\{\exists x_i (A \to B)\} \vdash_K (\forall x_i A \to B)$ K۳

$\vdash_K \exists x_i (A \to B) \to (\forall x_i A \to B)$ استنتاج

(b) $\{\underbrace{\sim B, (\exists x_i A \to B)}_{\Gamma}\} \vdash_K \sim A$:

$\exists x_i A \to B$ $\in \Gamma$

$\sim B \to \sim(\exists x_i A) \equiv \forall x_i \sim A$ K3

$\forall x_i \sim A$ MP

$\sim A$ K4 or K5

$\{\exists x_i A \to B\} \vdash_K \sim B \to \sim A$ (عکس استنتاج (شرط برقرار است

$\{\exists x_i A \to B\} \vdash_K A \to B$ K3

$\{\exists x_i A \to B\} \vdash_K \forall x_i (A \to B)$ G

$\vdash_K (\exists x_i A \to B) \to (A \to B)$ (عکس استنتاج (شرط برقرار است

(c) $\{\exists x_i \sim A\} \vdash_K \exists x_i \sim A$ $\in \Gamma$

$\exists x_i \sim A \to \exists x_i \sim A$ (عکس استنتاج (شرط برقرار است چون x_i در $\sim A$ پابند است

3(*a*) What is wrong with the following?

(1)	$(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$	assumption
(2)	$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$	(1), Generalisation
(3)	$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$	($K5$)
(4)	$(\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$	(2), (3), *MP*.

Therefore, $(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$, and hence by the Deduction Theorem,

$$\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2).$$

x_2 با $\exists x_2$ تداخل دارد پس جایگزینی x_1 با x_2 در (4) مجاز نیست .

(*b*) Show, by finding a suitable interpretation, that the formula $((\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2))$ is not logically valid, and is therefore not a theorem of K.

$I = \langle D = \mathbb{N} ,\ A_1^2 = < \ \rangle$

$\exists x_2 \ (x_1 < x_2) \not\to \exists x_2 \ (x_2 < x_2)$

---

8 For each of the following formulas, find a formula in prenex form which is provably equivalent to it.

(*a*) $(\forall \underset{x_3}{\cancel{x_1}})A_1^1(\underset{x_3}{\cancel{x_1}}) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

$\exists x_3 \left[A_1^1(x_3) \to \forall x_2 \, A_1^2(x_1, x_2)\right]$

$\exists x_3 \forall x_2 \left[A_1^1(x_3) \to A_1^2(x_1, x_2)\right]$

(*b*) $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall \underset{x_3}{\cancel{x_2}})A_1^2(x_1, \underset{x_3}{\cancel{x_2}}))$

$\forall x_1 \forall x_3 \left[A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_3)\right]$

(*c*) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to ((\exists \underset{x_4}{\cancel{x_2}})A_1^1(\underset{x_4}{\cancel{x_2}}) \to (\exists x_3)A_1^2(\underset{x_4}{\cancel{x_2}}, x_3))$

$\exists x_1 \left[(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to \forall x_4 \exists x_3 (A_1^1(x_4) \to A_1^2(x_4, x_3))\right]$

$\exists x_1 \forall x_4 \exists x_3 \left[(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to (A_1^1(x_4) \to A_1^2(x_4, x_3))\right]$

(d) $\qquad (\exists \cancel{x_1})A_1^2(\cancel{x_1}, x_2) \to (A_1^1(x_1) \to \sim(\cancel{\exists x_3})A_1^2(x_1, x_3))$

$\qquad\qquad x_4 \qquad x_4 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall x_3 \sim$

$\forall x_4 [A_1^2(x_4, x_2) \to \forall x_3 (A_1^1(x_1) \to \sim A_1^2(x_1, x_3))]$

$\forall x_4 \forall x_3 [A_1^2(x_4, x_2) \to (A_1^1(x_1) \to \sim A_1^2(x_1, x_3))]$

---

9 Let $\mathscr{A}(x_1)$ be a *wf*. in which x_2 does not occur, and let $\mathscr{B}(x_2)$ be a *wf*. in which x_1 does not occur. Show that the formula

$$((\exists x_1)\mathscr{A}(x_1) \to (\exists x_2)\mathscr{B}(x_2))$$

is provably equivalent to formulas in prenex form of both Π_2 and Σ_2 forms.

$\Pi_2 : \quad \forall x_1 [A(x_1) \to \exists x_2 B(x_2)]$

$\qquad \forall x_1 \exists x_2 [A(x_1) \to B(x_2)]$

$\Sigma_2 : \quad \exists x_2 [\exists x_1 A(x_1) \to B(x_2)]$

$\qquad \exists x_2 \forall x_1 [A(x_1) \to B(x_2)]$

---

10 Find a formula in Π_3 form which is provably equivalent to a formula in Σ_2 form.

$\exists x_1 A_1^1(x_1) \to \exists x_2 \forall x_3 A_1^2(x_2, x_3)$

$\Pi_3 : \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$

$\Sigma_2 : \exists x_2 \forall x_3 \forall x_1$

---

11 Show that an extension S of $K_{\mathscr{L}}$ is inconsistent if and only if every *wf.* of $\mathscr{L}$ is a theorem of S.

یک طرف واضح است. اگر هر wf قضیه‌ای از S باشد، پس وجود دارد حداقل یک wf (مانند $\forall x A(x)$)

که هم A و هم $\sim A$، قضایای S هستند و در نتیجه، S ناسازگار است.

طرف دیگر: فرض کنید S ناسازگار باشد. پس وجود دارد A که ② $\vdash_S A$ و ① $\vdash_S \sim A$.

فرض کنید B یک wf دلخواه از $\mathscr{L}$ باشد. $\vdash_{\mathscr{L}} \sim A \to (A \to B) \Rightarrow \vdash_S \sim A \to (A \to B)$

① با MP: $\vdash_S A \to B$ ② با MP: $\vdash_S B$

چون B دلخواه بود، حکم اثبات می‌شود.

---

12 Let S be a consistent first order system such that, for every closed *wf.* $\mathscr{A}$ of S, if the system obtained by including $\mathscr{A}$ as an additional axiom is consistent then $\mathscr{A}$ is a theorem of S. Prove that S is complete.

برهان خلف. پس وجود دارد فرمول بسته‌ی A که نه $\vdash_S A$ و نه $\vdash_S \sim A$. چون S سازگار

است و A بسته و قضیه‌ای از S نیست، پس طبق قضیه، با افزودن $\sim A$ به عنوان اصل در S،

S^* یک سیستم سازگار می‌شود. پس طبق فرض سوال، $\sim A$ قضیه‌ای از S است و این تناقض است.

16 Let S be a consistent complete extension of $K_{\mathscr{L}}$. Prove that any two models of S are elementarily equivalent, i.e. every closed *wf.* which is true in one model is true in the other.

برهان خلف. پس A وجود دارد که در $I_1 \models A$ اما $I_2 \not\models A$. چون S کامل است

پس $I_2 \models \sim A$. از طرفی چون سازگار است پس $I_1 \not\models \sim A$. پس طبق تعریف مدل، نه A قضیه‌ای از

S است و نه $\sim A$ که با کامل بودن S در تناقض است.

---

17 Let S be a consistent extension of $K_{\mathscr{L}}$, and let M be a model of S. Define an extension S^+ of S as follows: include as additional axioms all atomic formulas of $\mathscr{L}$ which are true in M. Prove that S^+ is consistent. Is S^+ necessarily complete?

برهان خلف. فرض کنید سازگار نباشد. پس وجود دارد A که $\vdash_{S^+} A$ و $\vdash_{S^+} \sim A$. پس ارزش M

به یکی از آن‌ها false است. از آن جا که اصول S^+ در M، true هستند، پس با شروع از

B بنامیم

اولین عضو دنباله برهان B، اولین عضوی که در دنباله برهان B در S^+ در M ارزش false

می‌گیرد، یا نتیجه‌ی MP است یا G. نتیجه‌ی MP نمی‌تواند باشد چون می‌دانیم اگر $M \models C$

و $M \models C \to D$ درنتیجه $M \models D$. از طرفی نتیجه‌ی G نیز نمی‌تواند باشد چون

$M \models E$ اگر و تنها اگر $M \models \forall x E$ و این تناقض است.

S^+ لزوما کامل نیست. مثلا اگر S را $K_{\mathscr{L}}$ بگیریم و R_1^1 یک رابطه‌ی دلخواه از $\mathscr{L}$ باشد،

که true و یا false نباشد. در این صورت

$\forall x\, R_1^1(x)$ نه منطقا معتبر است و نه اتمش درست و نه نقیض آن منطقا معتبر است.

---

18 Let S be a consistent extension of $K_{\mathscr{L}}$, and let M be a model of S. Define an extension $\hat{S}$ of S as follows: include as additional axioms all *closed* atomic formulas of $\mathscr{L}$ which are true in M and the negations of all *closed* atomic formulas of $\mathscr{L}$ which are not true in M. Prove that $\hat{S}$ is consistent. Is $\hat{S}$ necessarily complete?

برهان خلف. کافی است نشان دهیم که $\hat{S}$ مدل دارد. اصول S در M، true هستند و اصول دیگر

نیز مطابق سوال، true هستند پس M یک مدل برای $\hat{S}$ نیز هست. $\Rightarrow$ $\hat{S}$ سازگار است.

$\hat{S}$ لزوما کامل نیست.

---

19 Let S be a consistent extension of $K_{\mathscr{L}}$, where $\mathscr{L}$ is the first order language containing variables, individual constants $a_1, a_2, \ldots,$ only one predicate letter A_1^1, and no function letters. An interpretation I of $\mathscr{L}$ can be thought of as a set D_I with a distinguished subset A_I consisting of all those $x \in D_I$ such that $\bar{A}_1^1(x)$ holds in I. Suppose that for each $n \geq 1$ there is a model M_n of S in which $\bar{a}_i \in A_{M_n}$ for $1 \leq i \leq n$. Prove that there is a model M of S in which $\bar{a}_i \in A_M$ for every i.

Γ را مجموعه‌ی شامل تمام $A_1^1(a_i)$ $\quad i \geq 1$ بگیرید. فرض کنید Δ زیر مجموعه‌ی متناهی دلخواهی از Γ باشد.

چون متناهی است، پس عضوی از ۲ وجود دارد که اندیس آن max است. طبق فرض سوال، M_m

آن را m بنامیم

مدلی برای ۲ است. پس طبق قضیه‌ی فشردگی، S نیز مدل دارد.