

۱۷- (ب) (مشکلتر) ثابت کنید که $\{\sim, \leftrightarrow\}$ یک مجموعه کارساز از رابطها نیست.

لم. به ازای هر تابع درستی f با حداقل ۲ متغیر، تعداد T ها (و طبعا F ها) در ستون آخر، زوج است.

اثبات. استقرا روی تعداد رابطها.

پایه: $n=1$. تنها حالت $p \leftrightarrow q$ که دقیقاً ۲ T دارد.

لگام: فرض کنید حکم برای n برقرار باشد. برای $n+1$ دو حالت داریم:

(۱) $P \sim$: طبق فرض برای P حکم برقرار است و با نفی کردن، صرفاً تعداد T ها با

F ها عوض میشود.

(۲) $P \leftrightarrow Q$: فرض کنید جدول درستی P m_1 سطر با خردی T و m_2

سطر با خردی F داشته باشد. مطابق شکل زیر داریم:

		$P \leftrightarrow Q$		
m_1	T	T	T	b_1
	T	F	F	$m_1 - b_1$
m_2	F	F	T	b_2
	F	T	F	$m_2 - b_2$

تعداد T های $P \leftrightarrow Q$: $b_1 + m_2 - b_2$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \mid b_1 + b_2 \\ 2 \mid m_2 \\ 2 \mid -2b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \mid b_1 + m_2 - b_2$$

\Leftarrow هیچگاه نمیتوان جدولی با تعداد T فرد ساخت.