در این سوال، درایه‌های ماتریس $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ ثابت هستند.

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. در این صورت خواهیم داشت:

$$AB=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}, \quad BA=\begin{bmatrix} ae+cf & eb+fd \\ ag+hc & bg+hd \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB-BA=\begin{bmatrix} bg-cf & f(a-d)+b(h-e) \\ c(e-h)+g(d-a) & cf-bg \end{bmatrix}$$ رابطه‌ی ۱

① $\exists\, A,B;\ AB-BA=C \Rightarrow c_{11}+c_{22}=0$

اثبات: طبق فرض داریم $AB-BA=C$ $\Leftarrow$ طبق رابطه‌ی ۱ خواهیم داشت:

$$c_{11}=bg-cf, \quad c_{22}=cf-bg=-c_{11} \Rightarrow c_{11}+c_{22}=0 \ \checkmark$$

② $c_{11}+c_{22}=0 \Rightarrow \exists\, A,B;\ AB-BA=C$

اثبات: کافی است متغیرهای a,b,c,d,e,f,g,h را برحسب درایه‌های C و یا cها مستقلا مقدار دهی کنیم.

در رابطه‌ی ۱ قرار می‌دهیم $h=d=g=b=0 \Rightarrow$

$$AB-BA=\begin{bmatrix} -cf & af \\ ce & cf \end{bmatrix}$$

اکنون قرار می‌دهیم $c=f=\sqrt{c_{22}}$ $\Leftarrow$ $ce=c_{21} \Rightarrow e=\dfrac{c_{21}}{\sqrt{c_{22}}}$ ، $af=c_{12} \Rightarrow a=\dfrac{c_{12}}{\sqrt{c_{22}}}$

(درحالتی که c_{22} منفی باشد، $c=f=\sqrt{-c_{22}}$ قرار می‌دهیم و نتیجه‌ی مشابهی خواهیم گرفت)

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{c_{12}}{\sqrt{c_{22}}} & 0 \\ \sqrt{c_{22}} & 0 \end{bmatrix} , \quad B=\begin{bmatrix} \dfrac{c_{21}}{\sqrt{c_{22}}} & \sqrt{c_{22}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در $AB-BA=C$ صدق می‌کنند.

اگر $c_{22}=0$ باشد یعنی $C=\begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$ ، قرار می‌دهیم: $b=f=1 \Leftarrow g=c$ و $a=h=d=0$

که نتیجه می‌دهد $bg=cf \Leftarrow c=\dfrac{bg}{f}$

$$\Rightarrow AB-BA=\begin{bmatrix} 0 & -e \\ ge & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow g=\frac{c_{21}}{-c_{12}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c_{21}}{-c_{12}} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -c_{12} & 1 \\ \frac{c_{21}}{-c_{12}} & 0 \end{bmatrix}$$

که در $AB - BA = C$ صدق می‌کنند.

در نهایت در حالتی که $c_{22} = c_{12} = 0$ خواهیم داشت:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم $e = 1$ و $c = c_{21}$ و $a = f = h = d = g = b = 0$ یعنی

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در رابطه $AB - BA = C$ صدق می‌کنند.