حل تمرینات سری سوم مبانی ترکیبیات

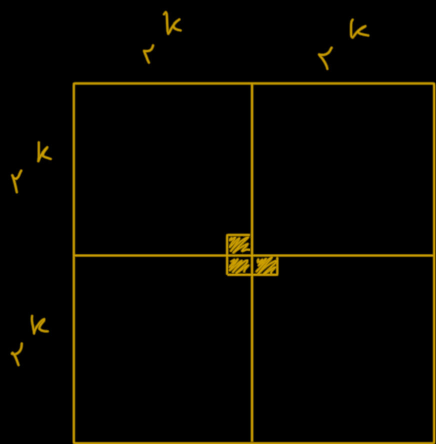
آناهیتا حیدری

۲. پایه: 2×2

✓ ۴ حالت مشابه

فرض: $2^k \times 2^k$

گام: $k \to k+1$



فرض کنید یکی از خانه‌های مربع بالا-راست رنگی شده باشد. مطابق شکل روبه‌رو، طبق فرض، حکم برای هر چهار ربع برقرار است.

۳.۱. پایه ← $F_2 = \binom{1}{0} = 1$ $\qquad$ $F_3 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2$

گام: $n \to n+1$

$$F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2} = \sum_{0}^{n-1} \binom{n-k}{k} + \sum_{0}^{n} \binom{n-k+1}{k}$$

$$= \sum_{1}^{n} \binom{n-(k-1)}{k-1} + \sum_{1}^{n} \binom{n-k+1}{k} + 1 \underset{\text{طبق پاسکال}}{=} \sum_{1}^{n} \binom{n-k+2}{k} + \underbrace{1}_{\binom{n+2}{0}}$$

$$\Longrightarrow F_{n+3} = \sum_{0}^{n+1} \binom{n-k+2}{k}$$

جمله‌ی آخر صفر است.

۳.۲. پایه: $F_2 - 1 = F_0 = 0$ $\qquad$ $F_3 - 1 = F_0 + F_1 = 1$

گام ۲: $n \to n+1$

$$\sum_{0}^{n+1} F_k = \sum_{0}^{n} F_k + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$$

۳.۳. پایه:

$$F_2 = F_3 - 1 = 1 \qquad F_2 + F_4 = F_5 - 1 = 4$$

گام ۲: $n \to n+1$

$$\sum_{1}^{n+1} F_{2k} = \sum_{1}^{n} F_{2k} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 = F_{2n+3} - 1$$

۴.

$$\sum_{1}^{n} a_i^3$$

$$\sum_{1}^{n+1} a_i^3 = \left(\sum_{1}^{n+1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{1}^{n} a_i$$

$$\iff a_{n+1}^3 = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{1}^{n} a_i \overset{a_{n+1} \neq 0}{\iff} a_{n+1}^2 - a_{n+1} - 2S_n = 0$$

چون a_{n+1} طبیعی است $\Longrightarrow a_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{1+8S_n}}{2}$

که $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ در این رابطه صدق می‌کند. یعنی $\{a_n = n\}$

۵.

① $\forall n \geq 16 \qquad \sqrt{2^n} \geq n^2$

$$\Longrightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{2^n} \geq \sqrt{2}\, n^2 \underbrace{\geq (n+1)^2}_{\text{برای } n\geq 6 \text{ برقرار است}}$$

② $\forall n \geq 10 \qquad 2^n \geq n^3$

$$\underbrace{2 \times 2^n \geq 2n^3 \geq (n+1)^3}_{\text{برای } n\geq 4 \text{ برقرار است}}$$

۳) $\forall n \geq 4 \qquad n! \geq 2^n$

$$(n+1)! \geq \underbrace{(n+1)\,2^n \geq 2 \times 2^n}_{\text{برای } n\geq 1 \text{ برقرار است}} = 2^{n+1}$$

---

۶. استقرای قوی.

پایه $\leftarrow$ $1+2$ و ۲

گام: $n \to n+1$

$$\exists p \qquad \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor < p < 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

طبق فرض استقراء، حکم برای هر $1<k\leq n$ برقرار است و چون $n+1-p$ اکیداً از p کمتر است،

p در تجزیه‌ی آن نیست.

$\Longrightarrow n+1 = p + (n+1-p$ تجزیه‌ی $)$

---

۷. پایه $\leftarrow$ $n=1$ $\qquad A_1=\{\} \qquad A_2=\{1\} \qquad 1+1=2!$

گام: $n \to n+1$

زیرمجموعه‌ها را به ۲ دسته افراز می‌کنیم: $\qquad \{1,2,\dots,n-2\}$

① n داخل $\to$ تعمیم $n-1$ $\Longrightarrow \sum P(A_i)^2 = (n-1)! \times n^2$

② n ندارد $\to \{1,2,\dots,n-1\} \Longrightarrow \sum P(A_j)^2 = n!$

$n^2(n-1)! + n! = n!(n+1) = (n+1)!$ ✓

---

۸. حکم به ازای هر $n = 4k+2$ ، $k \geq 0$ برقرار است.

پایه ← $n=2$ $A_2 = \{1\}$ $B_2 = \{2\}$

گام: $n \to n+4$ $(n \overset{4}{\equiv} 2)$

طبق فرض حکم برای n برقرار است یعنی $S(B_n) = S(A_n)+1$ $A_n \cap B_n = \phi$ $A_n \cup B_n = \{\overset{n}{\underset{i=1}{i}}\}$

قرار می‌دهیم:

$A_{n+4} = A_n \cup \{n+1, n+4\}$

$B_{n+4} = B_n \cup \{n+2, n+3\}$

---

۹. پایه: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

گام: $n \to n+1$

برای n، مخرج تمام کسرها را دو برابر می‌کنیم ⟸ $sum = \frac{1}{2}$ ، چون هر کدام کمتر از $\frac{1}{2}$ است، مخرج هیچ کدام ۲ نیست ← $\frac{1}{2}$ را اضافه می‌کنیم.

---

۱۰. پایه: $n=1$ یک طرف قرمز و یک طرف آبی

بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید هیچ دو خطی منطبق نیستند. اکنون یکی از $n+1$ خط را به دلخواه برمی‌داریم. طبق فرض استقرا، حکم برای n برقرار است. با اضافه کردن خط برداشته شده، یک طرف خط را برعکس رنگ می‌کنیم.