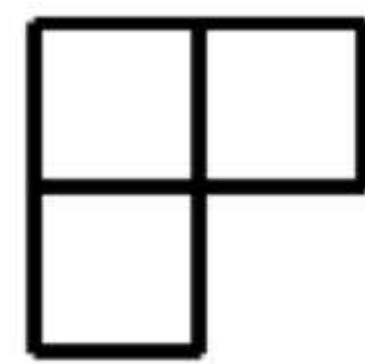


①* هر کدام از n خبرنگار، از خبری آگاه هستند ($n \geq 4$). در هر تماس تلفنی بین دو خبرنگار، تمام اخباری که دارند ردوبدل می‌کنند. ثابت کنید با حداکثر $2n - 4$ تماس می‌توانند همه آنها از همه اخبار آگاه شوند.

② یک خانه واحد از یک مربع $2^n \times 2^n$ که به مربعات واحد افراز شده است را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید بقیه خانه‌ها را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل زیر موزاییک کرد.



③ برابری‌های زیر را درباره دنباله فیبوناچی به کمک استقراء ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2} \\ \textcircled{2} \quad & \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 \\ \textcircled{3} \quad & \sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

④ جمله عمومی دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی را تعیین کنید به طوری که

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

⑤ برای هر کدام از نابرابری‌های زیر مشخص کنید از کدام عدد طبیعی به بعد برقرار است و با استقراء ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 2^{\frac{n}{2}} \geq n^2 \\ \textcircled{2} \quad & 2^n \geq n^3 \\ \textcircled{3} \quad & 2^n \leq n! \end{aligned}$$

⑥ عددی که اول باشد یا برابر ۱ باشد شبه اول می‌نامیم. همچنین می‌دانیم برای هر عدد طبیعی $n > 1$ ، بین n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد. ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد شبه اول متمایز نوشت. به عنوان مثال $126 = 113 + 13$.

⑦ فرض کنید A_1 تا A_m زیرمجموعه‌هایی از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشند که شامل هیچ دو عدد متوالی نیستند. برای هر زیرمجموعه A ، حاصلضرب اعضاء را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم ($P(\emptyset) = 1$). ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^m P(A_i)^2 = (n+1)!$$

⑧ می‌خواهیم مجموعه $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ را به دو مجموعه A و B افراز کنیم به طوری که مجموع اعضاء A و مجموع اعضاء B دو عدد متوالی باشند. برای چه مقادیری از n ، این کار امکانپذیر است؟

⑨ ثابت کنید عدد ۱ را می‌توان به صورت مجموع $n \leq 3$ کسر نوشت به طوری که صورت همه کسرها ۱ باشند و مخرج کسرها دو به دو متمایز.

⑩ n خط راست در صفحه رسم کرده‌ایم و صفحه به ناحیه‌هایی تقسیم شده است. ثابت کنید می‌توان هر ناحیه را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد به طوری که ناحیه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند و دو ناحیه را مجاور می‌نامیم هرگاه در یک پاره خط یا نیم خط مرز مشترک داشته باشند.

*** تمرین ۱ حذف اسه و بازی به حل آن نیست.