حل تمرینات ریاضی عمومی - آناهیتا حیدری

۱. $\lim_{n\to\infty}\prod_{r=0}^{n-1}\left(\frac{n-r}{n+r}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n+1}\times\cdots\times\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}} = L$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!\,(n)!}{(2n+1)!}} \xrightarrow[\text{به توان}]{n(n+1)} \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n!)^{n+1}}\cancel{((n-1)!)^{n+1}}}{\cancel{((2n-1)!)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{((n+1)!)^{n}}\,\cancel{(n!)^{n}}}{\cancel{((2n+1)!)^{n}}}$$

$((n-1)!)^n\times n^n\times(n+1)^n$

$((2n-1)!)^n\times(2n)^n\times(2n+1)^n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n\times(n+1)^n}{(2n)^n\,(2n+1)^n} \xrightarrow{\text{رادیکال با فرجه } n} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}}}_{L} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n\times(n+1)^n}{(2n)^n\times(2n+1)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\times(n+1)}{2n\times(2n+1)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4} = L}$$

* صورت دیگر سوال می‌تواند معادلاً $\lim_{n\to\infty}\binom{2n-1}{n}^{-\frac{1}{n}}$ باشد.

---

۲. $A=\{1,2,\dots,n\}$ $\quad B=\{2^1,2^2,\dots,2^n\}$ $\quad C=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in A, b\in B\right\}$

$e =$ میانگین اعضای C $\qquad \lim_{n\to\infty} e = ?$

$C=\Big\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \dots,\ \frac{1}{2^n},$ $\qquad s_1 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\cancel{\frac{1}{2}}}\right) = 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$

$\frac{2}{2},\ \frac{2}{2^2},\ \dots,\ \frac{2}{2^n},$ $\qquad s_2 = 2\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\frac{n}{2},\ \frac{n}{2^2},\ \dots,\ \frac{n}{2^n}\Big\}$ $\qquad s_n = n\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)$

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{\underbrace{n\times n}_{\text{تعداد اعضای } C}} = \frac{n(n+1)\times\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)}{2\times n\times n} \iff \lim_{n\to\infty} e = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(\cancel{n+1})\times\left(1-(\frac{1}{2})^{n}\right)}{2\times \cancel{n^2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

---

۳. $\lim_{n\to\infty}(\sin^n x+\cos^n x)^{\frac{1}{n}} = L$ $\qquad M = \mathrm{Max}\{\sin x,\cos x\}$

$\sqrt[n]{2}=1$

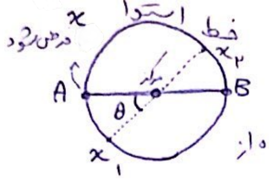
$$\lim_{n\to\infty}(\sin^n x+\cos^n x)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\lim_{n\to\infty}(M^n+M^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(2M^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}M = M\right)$$

$\iff L \leqslant M$ ①

$$\lim_{n\to\infty}(\sin^n x+\cos^n x)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\lim_{n\to\infty}(M^n)^{\frac{1}{n}} = M\right) \iff L \geqslant M \text{ ②}$$

①,② $\longrightarrow \boxed{L = \mathrm{Max}\{\sin x,\cos x\}}$

۴. روی خط استوا، دو نقطه متقاطع وجود دارد که دمای آن یکسان است.



تابع $f(\theta)$ را به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم: $f(\theta)=Tx_1-Tx_2$ که x_1 (دمای نقطه‌ی x_1) اولین نقطه‌ی خط گذرنده از مرکز به صورت پادساعت‌گرد با شروع از x_0 و x_2 نقطه‌ی (تقاطع) امتداد آن با دایره است.

بدیهی است $f(\theta)$ پیوسته است.

$f(0)=T_A-T_B$

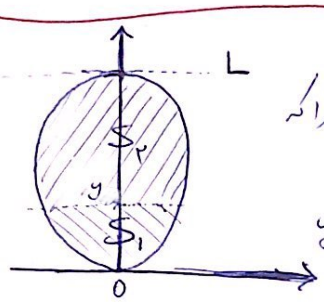
$f(\pi)=T_B-T_A=-f(0)$

طبق قضیه مقدار میانی نقطه‌ای وجود دارد که

$f(\theta_1)=0 \Rightarrow Tx_1=Tx_2$ ✓

---

۵. هر کلوچه‌ای در صفحه را می‌توان با چاقو در هر جهت از پیش معین نصف کرد.



بدون کم شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد جهت تعیین شده، هم‌جهت محور x ها باشد (چراکه در غیر این صورت می‌توان با تغییر محور (چرخش) جهت مورد نظر را ایجاد کرد).

اکنون، بدون در نظر گرفتن شکل دقیق کلوچه، آن را بر روی محور x ها مماس می‌کنیم. خط $y=L$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که بر بالاترین نقطه‌ی کلوچه مماس شود.

اکنون تابع $f(y)$ را به صورت $f(y)=S_2-S_1$ تعریف می‌کنیم که S_1، زیر خط y و S_2 بالای آن است. بدیهی است $f(y)$ پیوسته است.

$f(0)=S-0$ (S مساحت کل کلوچه)

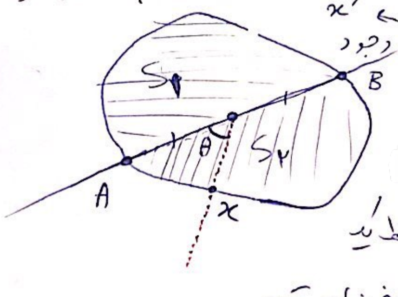
$f(L)=0-S=-f(0)$

طبق قضیه مقدار میانی نقطه‌ای وجود دارد که

$f(y_1)=0 \Rightarrow S_1=S_2$ ✓

---

۶. اگر منحنی محدبی در صفحه داده شده باشد، خطی هست که همزمان محیط و مساحت محصور به منحنی را نصف کند.



لم ۱: به ازای هر نقطه‌ی دلخواه روی این منحنی، یک و فقط یک نقطه وجود دارد که خط گذرنده از این دو نقطه، محیط منحنی را نصف می‌کند.

اثبات: منحنی را از نقطه‌ی دلخواه مذکور، بریده و به صورت یک پاره‌خط به طول L (متناهی) می‌سازیم. بدیهتاً این پاره‌خط دارای یک و فقط یک نقطه‌ی وسط است. این نقطه همان نقطه‌ی نصف کننده‌ی محیط منحنی است.

اکنون تابع $f(\theta)=S_2-S_1$، θ با مرکز AB و شروع از A، S_2 و S_1 مساحت‌های ایجاد شده بر اثر خط گذرنده از x و x' (که لزوماً از مرکز AB هم گذرنده هستند) به گونه‌ای که در همسایگی پادساعت‌گرد x، S_2 و در همسایگی ساعت‌گرد x، S_1 قرار دارد. (x ضلع دیگر زاویه θ با منحنی است) (نقطه‌ی تقاطع)

$f(0)=S_2-S_1$

$f(\pi)=S_1-S_2=-f(0)$

f پیوسته، طبق قضیه مقدار میانی نقطه‌ای وجود دارد که

$\Rightarrow f(x_1)=0$

$\Rightarrow S_1=S_2$ ✓

x_1 و x_1' محیط را نصف می‌کنند طبق لم ۱ ✓