آناهیتا حیدری

حل تمرینات سری پنجم مبانی ترکیبات

۱. $f(0)=f(1)=2$ $\qquad f(n+1)=f(n)\times f(n-1)$

پایه ۲ و توان ها دنباله فیبوناچی می‌سازند $\Leftarrow$ $\qquad f(n)=2^{\hat{F}(n)}$

$$\hat{F}(0)=\hat{F}(1)=1 \qquad \hat{F}(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

۲.

① $x^2=x+6 \Rightarrow \alpha_1=-2,\ \alpha_2=3 \Rightarrow a_n=A_1(-2)^n+A_2\,3^n$

a_1, a_0 جایگذاری $\Rightarrow A_1=\frac{3}{5},\ A_2=\frac{12}{5} \Rightarrow \boxed{a_n=\frac{3}{5}(-2)^n+\frac{12}{5}\,3^n}$

② $x^2=7x-10 \Rightarrow \alpha_1=2,\ \alpha_2=5 \xRightarrow{\text{جایگذاری}} \boxed{a_n=3(2)^n+(-1)(5)^n}$

③ $x^2=6x-8 \Rightarrow \alpha_1=2,\ \alpha_2=4 \Rightarrow \boxed{a_n=3(2)^n+4^n}$

④ $x^2=2x-1 \Rightarrow$ ریشه مکرر است $\alpha=1 \Rightarrow a_n=A_1(1)^n+A_2\,n(1)^n$

$A_1+A_2=4,\ A_1+2A_2=1 \Rightarrow \boxed{a_n=7-3n}$

---

۳. $\alpha_1=3 \quad \alpha_2=6 \Rightarrow (x-3)(x-6)=x^2-9x+18$

$\Rightarrow a_n=9a_{n-1}-18a_{n-2} \qquad a_0=k+l \qquad a_1=3k+6l$

۴.

$$\left.\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n - a_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} - b_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_n + a_{n-1}$$

چندجمله‌ای مشخصه: $x^2 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = -\sqrt{2} \qquad \alpha_2 = \sqrt{2}$

$$a_0 = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1 \qquad b_0 = a_1 - a_0 = \sqrt{2}(A_2 - A_1) - 1 = 2$$

$$\Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad 2A_2 = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} , A_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)(-\sqrt{2})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})^n$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

---

۵. ① شامل 1 باشد: 1 را حذف می‌کنیم $\Leftarrow$ $p(n-1, k-1)$

② شامل 1 نباشد: هر عدد حداقل 2 است. از همه 1 واحد کم می‌کنیم $\Leftarrow$ $p(n-k, k)$

---

۶. فرض کنید مجموعه‌ی شامل عضو آخر، $(n-k)+1$ عضوی باشد $0 \leq k \leq n$. پس باقی مجموعه‌ها B_k حالت دارند و برای $n-k$ عضوی که در این مجموعه با عضو آخر هستند، $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ حالت داریم. $\Leftarrow$ $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n$

۷. الف) جایگشت دوری $s(n,1) = (n-1)!$

چون دایره‌ها ناتهی هستند، دقیقا یکی از آن‌ها دوتایی و بقیه تک عضوی هستند. $s(n,n-1) = \binom{n}{2}$

ب) ① شیء اول (a_1) در یک دایره‌ی تنها قرار گیرد: $s(n-1,k-1)$

② " " " " نگیرد: ب $s(n-1,k)$ حالت باقی شیء‌ها را

در دایره‌ها قرار می‌دهیم. سپس a_1 را سمت راست یکی از a_i ها $(2 \leq i \leq n)$ قرار می‌دهیم

(در یکی از دایره‌ی متناظر با آن a_i) که $n-1$ حالت دارد.

$$\Longrightarrow \quad s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)\, s(n-1,k)$$