

۱ اگر $F(x)$ تابع مولد دنباله $\{f_n\}$ باشد، تابع مولد دنباله‌های زیر را بر حسب F به دست آورید:

(۱) $a_n : 0, 0, f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$

(۲) $b_n : 0, f_0, 0, f_1, 0, f_2, \dots$

(۳) $c_n : f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1 + f_2, \dots$

۲ به چند طریق می‌توانیم ۲۰ عدد نان تهیه کنیم به طوری که حداقل یک نان بربری و حداکثر ۳ نان سنگک خریده باشیم و تعداد نان‌های لواش مضرب ۴ باشد؟ فرض کنید تعداد انواع دیگر نان صفر باشد.

۳ تابع مولد دنباله‌ای برابر $F(x) = \frac{5-13x}{1-5x+6x^2}$ است. جمله عمومی دنباله را بیابید.

۴ فرض کنید $F(x)$ تابع مولد دنباله $\{f_n\}$ باشد. برای هر $n \geq 0$ تعریف می‌کنیم $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ را مجموع جزیی دنباله $\{f_n\}$ می‌نامیم. ثابت کنید تابع مولد $\{S_n\}$ برابر است با $S(x) = \frac{F(x)}{1-x}$.

۵ ثابت کنید تعداد افرازهای عدد طبیعی n به اعدادی که هر کدام حداکثر چهار بار ظاهر شده است با تعداد افرازهایی از n به اعدادی که هیچ کدام مضرب ۵ نیستند برابر است.

۶ فرض کنید b_n تعداد افرازهای n به توان‌های ۲ یعنی $\{1, 2, 4, \dots\}$ باشد به طوری که هر عدد حداکثر ۳ بار تکرار شود.

(۱) ثابت کنید تابع مولد $\{b_n\}$ برابر است با:

$$B(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

(۲) مقادیر a, b و c را بیابد به طوری که:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1+x}$$

(۳) ثابت کنید:

$$b_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$

۷ دنباله $\{a_n\}$ در رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 2^n + 3^n$ با جمله اولیه $a_0 = 1$ صدق می‌کند. تابع مولد دنباله را پیدا کنید و به کمک آن جمله عمومی را به دست آورید.