تمرینات سری دوم مبانی ترکیبیات

آناهیتا حیدری

۱. n زوج باشد:

$$\frac{n}{\frac{n}{2}} = 2 \qquad deg(v_i) \in \{0, \underbrace{2, \dots, n-2}_{\frac{n}{2}}\}$$

اگر ۲ راس درجه‌شان صفر باشد، برای n-2 راس باقی مانده $\Delta = n-3$ است و مشابها برای درجه n-2.

⇐ حکم برقرار است.

n فرد باشد:

$$deg(v_i) \in \{0, \underbrace{2, \dots, n-1}_{\frac{n+1}{2}}\}$$

اگر درجه‌ی راسی صفر باشد، برای n-1 راس باقی مانده، $\Delta = n-3$ و اگر درجه راسی n-1 باشد، پس به

تمام رئوس وصل است و درجه‌ی هیچ کدام صفر نیست. ⇐ $\frac{n-1}{2}$ لانه داریم.

$$\left\lceil \frac{n}{\frac{n-1}{2}} \right\rceil = 2 + \left\lceil \frac{2}{n-1} \right\rceil = 3 \quad (n \geq 3)$$

---

۲. برای تفاضل: $0 \leq r < \overbrace{k}^{k\ \text{حالت}}$ ⇐ $n = k+1$

برای مجموع:

$$\underbrace{\{0, k\} \quad \{1, k-1\} \quad \dots \{\lfloor \tfrac{k}{2} \rfloor,}_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\ \text{حالت}} \ \lceil \tfrac{k}{2} \rceil \}$$

$\Longrightarrow n = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$

$\Longrightarrow n_{min} = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$ (اگر دومی هم نوع اول باشد، تفاضلشان بر k بخش‌پذیر است.)

---

۳. فرض کنید $S(A)$ مجموع اعضای A باشد $2^{35}-1$ تا زیرمجموعه های ناتهی

$$\forall A \subset X \ ; \quad S(A) \leq S(X) \leq (10^{7}-1)\,35$$

$$\left\lceil \frac{2^{35}-1}{(10^{7}-1)\,35} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{10^{9}-1}{(10^{7}-1)\,100} \right\rceil = \left\lceil \frac{10^{9}-1}{10^{9}-100} \right\rceil = 2$$

---

۴. چون n کران ندارد و باقی‌مانده بر ۹، ۹ حالت دارد و محدود است، حداقل ۲ عضو دنباله، نسبت به ۹ هم باقی‌مانده هستند.

$$2^{n_1}-1 \overset{9}{\equiv} 2^{n_2}-1 \qquad n_1 < n_2$$

$$\Rightarrow 2^{n_2}-2^{n_1} \overset{9}{\equiv} 0 \quad \Rightarrow 2^{n_1}\left(2^{n_2-n_1}-1\right) \overset{9}{\equiv} 0$$

تمام عامل های 2^{n_1}، توان از ۲ هستند و ۹ فرد است $\Leftarrow$

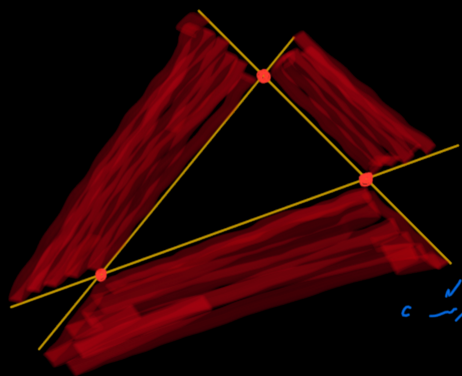
$$\underbrace{2^{n_2-n_1}-1}_{2^{m}-1 = a_m} \overset{9}{\equiv} 0$$

---

۸. ۴ نقطه‌ی دلخواه در نظر بگیرید. اگر چهارضلعی حاصل، محدب باشد ✓ اگر نه، پس یکی درون مثلث حاصل از ۳ نقطه‌ی دیگر قرار دارد. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید نقطه‌ی پنجم خارج از این مثلث باشد. (اگر نبود، ۲ نقطه‌ی درون و ۲ نقطه از رئوس مثلث انتخاب می‌کنیم.)

لم. در تقاطع ۳ خط که در ۳ نقطه‌ی متمایز متقاطع هستند، هر نقطه‌ای درونی در ناحیه‌ای خارج از مثلث

که با هر ۳ خط مرز دارد، با ۳ نقطه‌ی مثلث، تشکیل چهارضلعی محدب می‌دهند.

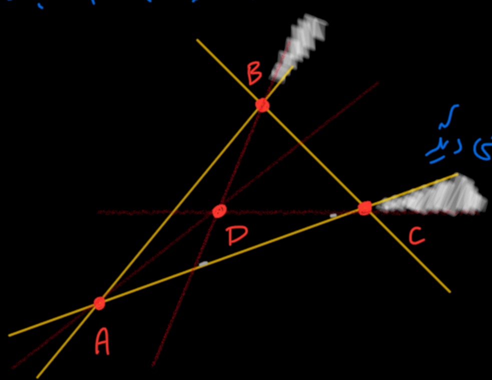


اثبات: با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است.

با توجه به اینکه نقطه‌ی پنجم در خارج از $\hat{ABC}$ قرار دارد و برای نواحی قرمز رنگ،

حکم برای

حکم برقرار است، پس فرض کنید در ناحیه‌ای مانند شکل زیر (سفید رنگ) باشد. این ناحیه نیز طبق لم، برای



مثلث $B\hat{D}C$ برقرار است و طبق تقارن، باقی مثلث‌ها نیز، نواحی دیگر

را پوشش می‌دهند.

---

۹. فرض کنید c_i ، $1 \le i \le rst+1$ تعداد اعداد برابر با a_i در زیردنباله‌ی $\{a_n\}$ ، $r \le n \le i$

باشد. اگر به‌ازای j ، $c_j \geq r+1$ که حکم برقرار است. اگرنه $\Leftarrow$ $c_i \le r \quad \forall i$

مراتب $st+1$ تا c_i با هم برابرند. $\Leftarrow \quad \left\lceil \frac{rst+1}{r} \right\rceil = st+1$

چون اگر برابر باشند، $c_j > c_i$ $\quad \forall j > i \quad c_j = c_i \Rightarrow a_i \neq a_j$

درنتیجه یک زیر دنباله با حداقل $st+1$ عدد متمایز داریم. طبق قضیه اردوش-زکرس یا

زیردنباله‌ای صعودی به طول حداقل $t+1$ و یا نزولی به طول حداقل $s+1$ وجود دارد. (اثبات مشابه)

۱۵.۱. X، 2^n زیر مجموعه دارد. آن‌ها را به دسته‌های ۲تایی طوری افراز می‌کنیم که هر زیرمجموعه با مکملش

در یک دسته باشد ← 2^{n-1} دسته که از هر دسته حداکثر یک زیرمجموعه می‌توان انتخاب کرد.

$$\Rightarrow m \le 2^{n-1}$$

۱۵.۲. مشابه قبل، به دسته‌های ۲تایی که مکمل هم باشند افراز می‌کنیم.

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2} = \frac{(2n)!}{n!\times n!\times 2} = \frac{(2n-1)!\times \cancel{2n}}{(n-1)!\times n!\times \cancel{2n}} = \binom{2n-1}{n-1} \Rightarrow m \le \binom{2n-1}{n-1}$$