حل تمرینات سری ششم مبانی ترکیبیات

آناهیتا حیدری

۱.

① $A(x) = x^2 F(x)$

$$x^2 F(x) = f_0 x^2 + f_1 x^3 + \cdots \Rightarrow a_0 = a_1 = 0$$

② $B(x) = \sum_{0}^{\infty} f_n x^{2n+1}$

③ $C(x) = \dfrac{F(x)}{1-x}$

$$\frac{F(x)}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots)(f_0 + f_1 x + \cdots) = f_0 + (f_0+f_1)x + \cdots$$

۲.

$$(x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots)$$

$$= x(1+x^2+\cdots)\left(\frac{\cancel{1-x^4}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{\cancel{1-x^4}}\right) = x\frac{1}{(1-x)^2} = x\sum_{0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$$

⇐ ضریب x^{20} ، ۲۰ است.

۳.

$$\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x} = \frac{5-13x}{1-5x+6x^2} \Rightarrow (1-3x)A + (1-2x)B = 5-13x$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad \frac{-1}{2}A = -\frac{3}{2} \Rightarrow A = 3$$

$$x = \frac{1}{3}: \quad \frac{1}{3}B = \frac{2}{3} \Rightarrow B = 2$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{0}^{\infty} 3\,(2x)^n + \sum_{0}^{\infty} 2\,(3x)^n \qquad \Rightarrow a_n = 3\times 2^n + 2\times 3^n$$

---

۴. سوال تکراری . مشابه ۱ قسمت ③

---

۵. $$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)\cdots(1+x^r+\cdots+x^{4r})\cdots$$

$$=\left(\frac{\cancel{1-x^5}}{1-x}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{10}}}{1-x^2}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{15}}}{1-x^3}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{20}}}{1-x^4}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{25}}}{\cancel{1-x^5}}\right)\cdots$$

هر کدام از عوامل در مخرج ، به صورت $1-x^{5r}$ که $r\in\mathbb{N}$ است در صورت خط می‌خورد.

هر کدام از $\frac{1}{1-x^r}$ ، که $5\nmid r$ ، به صورت $(1+x^r+x^{2r}+\cdots)$ است یعنی

تعداد افرازهای n به اجزایی که مضرب ۵ نیستند.

---

۶. ① $$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)\cdots(1+x^{2^r}+\cdots+x^{3\times 2^r})\cdots$$

$$=\left(\frac{\cancel{1-x^4}}{1-x}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^8}}{1-x^2}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{16}}}{\cancel{1-x^4}}\right)\cdots\left(\frac{\cancel{1-x^{4\times 2^r}}}{\cancel{1-x^{2^r}}}\right)\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$

② $$(1+x)(1-x)a+(1+x)b+(1-x)^2c=1$$

$$x=1:\ 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$x=-1:\ 4c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{4}$$

$$a(1-x^2)+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow B(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{4}x^n+\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)x^n+\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{4}(-x)^n$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{4}+\frac{n+1}{2}+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$ (3)

7.

$$A-1=2xA+\sum_{1}^{\infty}2^n x^n+\sum_{1}^{\infty}3^n x^n=2xA+\frac{2x}{1-2x}+\frac{3x}{1-3x}$$

$$\Rightarrow A(1-2x)=\frac{2x-6x^2+3x-6x^2}{(1-2x)(1-3x)}+1 \Rightarrow A=\frac{-6x^2+1}{(1-2x)^2(1-3x)}$$

$$\frac{B}{1-3x}+\frac{C}{1-2x}+\frac{D}{(1-2x)^2}=A \Rightarrow (1-2x)^2B+(1-3x)(1-2x)C+(1-3x)D=-6x^2+1$$

$$x=\frac{1}{2}:\ -\frac{D}{2}=\frac{-1}{2} \Rightarrow D=1$$

$$x=\frac{1}{3}:\ \frac{B}{9}=\frac{3}{9} \Rightarrow B=3$$

$$3(1+4x^2-4x)+C(1-5x+6x^2)+1-3x=-6x^2+1 \Rightarrow C=-3$$

$$\Longrightarrow A = \sum_{۰}^{\infty} ۳(۳x)^n + \sum_{۰}^{\infty}(-۳)(۲x)^n + \sum_{۰}^{\infty}(n+۱)(۲x)^n$$

$$\Longrightarrow a_n = ۳^{n+۱} - ۳\times ۲^n + (n+۱)\,۲^n = \boxed{۳^{n+۱} + (n-۲)\,۲^n}$$