حل تمرین سری توانی و سری فوریه

آناهیتا حیدری

① برای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(x-۳)^n}{n}$ همگرا است.

② سری فوریه سینوسی و سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{۲x}$، $۰ < x < \pi$ را بیابید.

۱. از سری مکلارن می‌دانیم:

$$ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \qquad -1 < t \leq 1$$

قرار می‌دهیم t=(-1)(x-3):

$$\Rightarrow \quad ln(4-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}(x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}(x-3)^n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = -\,ln(4-x) \qquad -1 \leq x-3 < 1$$

$$\Rightarrow \qquad 2 \leq x < 4\,.$$

.٢

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2x}cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{ne^{2\pi}sin(n\pi) + 2e^{2\pi}cos(n\pi) - 2}{n^2+4}\right) = \frac{4((-1)^n e^{2\pi} - 1)}{\pi(n^2+4)}$$

$\Rightarrow$ **Fourier cosine series of f(x):** $\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{2\pi}-1)}{n^2+4}cos(nx)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2x}sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2e^{2\pi}sin(n\pi) - ne^{2\pi}cos(n\pi) + n}{n^2+4}\right) = \frac{2n((-1)^{n+1}e^{2\pi} + 1)}{\pi(n^2+4)}$$

$\Rightarrow$ **Fourier sine series of f(x):** $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n((-1)^{n+1}e^{2\pi}+1)}{n^2+4}sin(nx)$.