

## حل تمرین بخش دنباله و سری تابعی

آناهیتا حیدری

سوال 30) هرگاه  $\{f_n\}$  و  $\{g_n\}$  بر مجموعه  $E$  به طور یکنواخت همگرا باشند و به علاوه  $\{f_n\}$  و  $\{g_n\}$  دنباله هایی از توابع کراندار باشند. ثابت کنید  $\{f_n, g_n\}$  بر  $E$  به طور یکنواخت همگرا خواهد بود.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N_1; \quad |f_n - f| < \varepsilon_1 \quad \forall n > N_1$$

$$\Rightarrow |g_n| |f_n - f| < |g_n| \varepsilon_1 < M_g \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow |g_n f_n - g_n f| < M_g \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists N_2; \quad |g_n - g| < \varepsilon_2 \quad \forall n > N_2$$

$$\Rightarrow |f| |g_n - g| < |f| \varepsilon_2 < M_f \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow |f g_n - f g| < M_f \varepsilon_2$$

$$\forall n > \text{Max}(N_1, N_2) :$$

$$|g_nf_n - g_nf| + |fg_n - fg| < M_g\varepsilon_1 + M_f\varepsilon_2$$

طبق نامساوی مثلثی:

$$|g_nf_n - gf| < M_g\varepsilon_1 + M_f\varepsilon_2$$

قرار می‌دهیم  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  در نتیجه:  $\varepsilon = \varepsilon_1(M_g + M_f)$  که دلخواه است.