آزمون میان ترم اول ، درس مبانی ترکیبیات، دانشگاه شهید بهشتی، آبان ماه نود و هشت

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی :   وقت : ۸۰ دقیقه

یک. می خواهیم زیرمجموعه A را از مجموعه $X=\{1,2,\cdots,11\}$ و زیرمجموعه B را از مجموعه $Y=\{7,8,\cdots,15\}$ انتخاب کنیم به طوری که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. به چند طریق این کار امکانپذیر است؟

دو. فرض کنید $D_k(n)$ تعداد توابع یک به یک و پوشا (دوسویی) از $X=\{1,2,\cdots,n\}$ به X باشد که دقیقاً k نقطه ثابت دارند.

(الف) مقادیر $D_{n-2}(n)$، $D_{n-3}(n)$ و $D_{n-4}(n)$ را بدست آورید.

(ب) ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n} k.D_k(n)=n!$.

سه. به ازای چه مقادیری از n می‌توان مجموعه $X=\{1,2,\cdots,n\}$ را به سه مجموعه A، B و C افراز کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه، سه عدد متوالی باشند؟ ادعای خود را ثابت کنید.

چهار. در یک آزمون با پنج سوال چهار گزینه ای، هر پاسخ درست، نزده و نادرست به ترتیب چهار نمره، صفر نمره و یک نمره منفی دارد. حداقل چند نفر در آزمون باید شرکت کرده باشند تا مطمئن شویم که حداقل سه نفر با نمره یکسان وجود دارند؟

پنج. یالهای گراف کامل K_{10} را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرده ایم. ثابت کنید حداقل ۲۰ مثلث تکرنگ وجود دارد (مثلث=گراف K_3).

①

$X \cap Y = \{۷, \dots, ۱۱\}$

هر عضو می‌تواند در A، B یا هیچکدام باشد ← $۳^۵$

$X - Y = \{۱, \dots, ۶\}$

هر عضو می‌تواند در A باشد یا نباشد ← $۲^۶$ حالت

$Y - X = \{۱۲, \dots, ۱۵\}$

هر عضو می‌تواند در B باشد یا نباشد ← $۲^۴$ حالت

$$\Rightarrow S = ۳^۵ \times ۲^۶ \times ۲^۴ = ۳^۵ \times ۲^{۱۰}$$

---

② ب) قضیه: $D_k(n) = \binom{n}{k} D_0(n-k)$

اثبات. ابتدا k نقطه‌ی ثابت را از n نقطه انتخاب کنید، پس باقی‌مانده نباید نقطه ثابت داشته باشند ← $D_0(n-k)$.

* لم ۱. $D_k(n) = \frac{n}{k} D_{k-1}(n-1)$

اثبات. طبق قضیه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} D_k(n) = \binom{n}{k} D_0(n-k) \\ D_{k-1}(n-1) = \binom{n-1}{k-1} D_0(n-k) \end{array}\right\} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} D_k(n) = \binom{n}{k} D_{k-1}(n-1) \Rightarrow D_k(n) = \frac{n}{k} D_{k-1}(n-1)$$

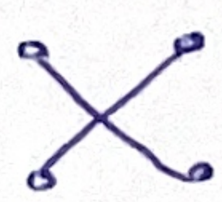
* لم ۲. $\sum_{k=0}^{n} D_k(n) = n!$

اثبات. همان تعداد کل توابع دوسویی است.

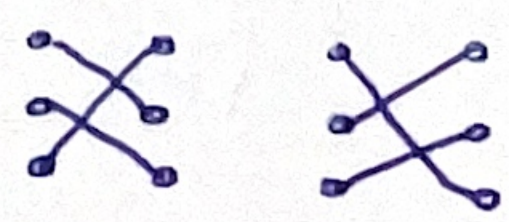
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k \cdot D_k(n) = n \sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(n-1) = n \sum_{k=0}^{n-1} D_k(n-1) = n \cdot (n-1)! = n!$$

الف)

$D_{n-2}(n) = \binom{n}{2} D_0(2) = \binom{n}{2}$

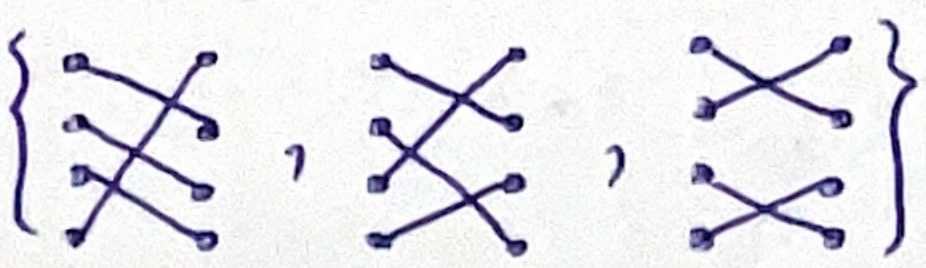


$D_{n-3}(n) = \binom{n}{3} D_0(3) = ۲\binom{n}{3}$



$D_{n-4}(n) = \binom{n}{4} D_0(4) = ۹\binom{n}{4}$

چون ۳ حالت داریم که راس اول به خودش نرود

$۳ \times |\{$  $\}| = ۹$

۳)

$m+(m+1)+(m+2)=3m+3=\frac{n(n+1)}{2} \Longrightarrow 6 \mid n(n+1) \xRightarrow{2 \mid n(n+1)} 3 \mid n(n+1)$

$\Longrightarrow \boxed{n \overset{3}{\equiv} 0 \text{ یا } -1}$

پایه $(n=3)$ $\quad A=\{1\} \quad B=\{2\} \quad C=\{3\}$ ✓

$(n=5) \quad A=\{4\} \quad B=\{5\} \quad C=\{1,2,3\}$ ✓

گام $(n \to n+3)$ $\quad A'=A\cup\{n+2\} \quad B'=B\cup\{n\} \quad C'=C\cup\{n+1\}$

$S(A')=m+n+2 \quad S(B')=m+1+n \quad S(C')=m+2+n+1$

---

۴) حالت‌بندی براساس تعداد غلط‌ها:

به فرم

$0 + \underbrace{\{0,4,\dots,20\}}_{\text{۶ عضو}} \to 4k$

$-1 + \{0,4,\dots,16\} \to 4k-1$

$-2 + \{0,4,\dots,12\} \to 4k-2$

$-3 + \{0,4,8\} \to 4k-3$

$-4 + \{0,4\} \to 4k \to$ اشتراک با حالت ۰ دارد $\to \{0\}$

$-5 \to 4k-1 \to$ اشتراک با حالت ۱ ندارد

کل حالات ۴ برای یک عدد ۷ دیدم

$S=\frac{6\times 7}{2}-1=20 \Longrightarrow$ جواب سوال $=2\times 20+1=\boxed{41}$

---

۵)

صفحه‌ی ۴۴، توضیحات "روش شمارشی"

$\binom{10}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} b_i r_i \geq 120-\frac{1}{2}\times 10\times 20=120-100=20$ ✓

$\ast$ $Max(b_i \times r_i)$ به ازای ۴ و ۵ یعنی $4\times 5=20$ رخ می‌دهد.

$b_i+r_i=9$