حل تمرین مبانی ترکیبیات

جلسه سوم

۱.۲ آیا می توان یک ماتریس مرتبه n با درآیه های عضو $\{-۱, ۰, ۱\}$ نوشت به طوری که مجموع هر سطر، هر ستون، و هر کدام از دو قطر اعدادی متمایز باشند؟

n سطر + n ستون + ۲ قطر = $۲n+۲$ عدد

اعداد صحیح در $[-n, n]$ = $۲n+۱$

$\left\lceil \frac{۲n+۲}{۲n+۱} \right\rceil = ۲ \Rightarrow$ حداقل ۲ تا از اعداد برابرند

۳.۲ بین هر ۵ عدد صحیح ثابت کنید سه عدد با مجموع مضرب سه وجود دارد.

باقی‌مانده بر ۳، ۳ حالت $\{۰ , ۱ , ۲\}$ دارد. اگر باقی‌مانده‌ی هر ۵ عدد، یک عدد باشد، که حل است.

اگر حداکثر ۲ نوع عدد باشند، $\left\lceil \frac{۵}{۲} \right\rceil = ۳ \Leftarrow$ طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۳ موجودند که همه

یک نوع باقی مانده بر ۳ دارند $\Leftarrow$ ✓.

اگر نه، پس از هر نوع حداقل یک عدد موجود است. $۰ + ۱ + ۲ = ۳ \overset{۳}{\equiv} ۰$ ✓

۷.۲ ثابت کنید در هر گراف ساده که در آن همه درجات زوج هستند، حداقل سه رأس با درجه یکسان وجود دارد.

۱. n زوج باشد:

$$\deg(v_i) \in \{\underbrace{0, 2, \dots, n-2}_{\frac{n}{2}}\} \qquad \frac{n}{\frac{n}{2}} = 2$$

اگر ۲ راس درجه شان صفر باشد، برای n-۲ راس باقی مانده $\Delta = n-3$ است و مشابها برای درجه n-۲.

⇐ حکم برقرار است.

n فرد باشد:

$$\deg(v_i) \in \{\underbrace{0, 2, \dots, n-1}_{\frac{n+1}{2}}\}$$

اگر درجه ی راسی صفر باشد، برای n-۱ راس باقی مانده، $\Delta = n-3$ و اگر درجه راسی n-۱ باشد، پس به

تمام رئوس وصل است و درجه ی هیچ کدام صفر نیست. ⇐ $\frac{n-1}{2}$ لانه داریم.

$$\left\lceil \frac{n}{\frac{n-1}{2}} \right\rceil = 2 + \left\lceil \frac{2}{n-1} \right\rceil = 3 \quad (n \geq 3)$$

۹.۲ ثابت کنید توانی از ۳ وجود دارد که سه رقم سمت راست آن ۰۰۱ است.

$$(\exists n \quad 3^n \overset{1000}{\equiv} 1 \quad \Rightarrow \quad 3^n - 1 \overset{1000}{\equiv} 0)$$

در دنباله $A_n=3^n$ ، از آن جا که باقی مانده بر ۱۰۰۰ حداکثر ۱۰۰۰ مقدار متمایز دارد و دنباله نامتناهی است، پس

$$\exists\, m,k \quad m>k, \quad 3^m \overset{1000}{\equiv} 3^k \Rightarrow 3^m-3^k \overset{1000}{\equiv} 0 \Rightarrow 3^k(3^{m-k}-1) \overset{1000}{\equiv} 0$$

$$\gcd(3^k,1000)=1 \Rightarrow 3^{m-k}-1 \overset{1000}{\equiv} 0 \Rightarrow 3^{m-k} \overset{1000}{\equiv} 1 \quad \checkmark$$

۱۱.۲ از میان اعداد طبیعی ۱ تا $۲n$، به تصادف $n+۱$ عدد برمی‌داریم. ثابت کنید (۱) دو عدد در میان آنها وجود دارد که نسبت به هم اول هستند. (۲) دو عدد x و y در میان آنها وجود دارد که بر x بر y بخش‌پذیر است.

(۱) می‌دانیم هر دو عدد متوالی، نسبت به هم اول هستند.

$$\{1,2\} \quad \{3,4\} \quad \cdots \quad \{2n-1, 2n\} \longrightarrow$$ n دسته داریم، n+1 عدد داریم ✓

(۲) هر عدد فرد بین ۱ تا ۲n را عضو نخست یک مجموعه و باقی اعضا، ضرب توان‌های دو آن عدد فرد هستند، تا جایی که از ۲n بیشتر نشود.

$$\{a, 2a, 2^2a, \dots, 2^k a\}$$ a عدد فرد بین ۱ تا ۲n و $2^k a \leq 2n$

$\Longrightarrow$ n دسته، n+1 عدد داریم ✓

۱۹.۲ در یک آزمون ده سوال تستی طرح شده‌است. پاسخ نادرست یک امتیاز منفی، پاسخ درست دو امتیاز و سوال بدون پاسخ صفر امتیاز دارد. حداقل چند نفر در آزمون شرکت کنند تا مطمئن باشیم که دو نفر با امتیاز کل برابر وجود دارد؟

$-1\times 10 \leqslant S \leqslant 2\times 10 \Rightarrow -10 \leqslant S \leqslant 20$

$-10 \leqslant S \leqslant 0 \longrightarrow$ S تست نادرست زده شود

$1 \leqslant S \leqslant 20$, $S \neq 19$ $\longrightarrow$ $\lceil \frac{S}{2} \rceil$ تست درست و $S\%2$ تست نادرست ...

تنها عددی که بین ۱۰- تا ۲۰ ساخته نمی‌شود ۱۹ است (چون باید حداقل ۱۰ تست درست زده شود)

۳۰ عدد متمایز داریم ← حداقل $\boxed{۳۱}$ نفر شرکت کنند.

۲۱.۲ $n+2$ عدد صحیح مفروضند. ثابت کنید دو عدد در میان آنها وجود دارند که مجموع یا تفاضل شان بر $2n$ بخش‌پذیر است.

باقی مانده بر $2n$ را درنظر بگیرید.

$\{0\} \quad \{1, 2n-1\} \quad \{2, 2n-2\} \quad \cdots \quad \{n-1, n+1\} \quad \{n\}$

$n+1$ دسته داریم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ عدد در یک دسته قرار می‌گیرند. اگر هر دو از یک نوع

باقی مانده بودند، تفاضل و اگر نه، مجموعشان بر $2n$ بخش پذیر است.

۲۵.۲ هفده مهره رخ را به دلخواه در خانه های صفحه شطرنج چیده ایم. ثابت کنید سه مهره رخ وجود دارند که هیچ دوتایی از آنها همدیگر را تهدید نمی‌کنند.

۸ ستون داریم ، ۱۷ مهره . طبق لانه کبوتری ، ستونی ✱ وجود دارد که دارای حداقل $\left\lceil \frac{17}{8} \right\rceil = 3$ مهره است.

این ستون را حذف کنید. حداقل $17-8 = 9$ مهره داریم با ۷ ستون . طبق لانه کبوتری ، ستونی ★ وجود دارد

که دارای حداقل $\left\lceil \frac{9}{7} \right\rceil = 2$ مهره است. با حذف این ستون ، حداقل ۱ مهره داریم با ۶ ستون .

A را یکی از مهره های باقی‌مانده در نظر بگیرید. B را مهره ای از ★ در نظر بگیرید که با A هم سطر نباشد.

(چون حداقل ۲ مهره دارد، ممکن است) . C را مهره ای از ✱ در نظر بگیرید که با A و B هم سطر نباشد.

(چون حداقل ۳ مهره دارد، ممکن است) . A و B و C ناهم سطر و ناهم ستون هستند. ✓

۲۷.۲ n^2 نقطه شبکه ای با مختصات صحیح از بازه $[1, n]$ را با دو رنگ دلخواه سیاه و سفید رنگ کرده ایم. حداقل n را بیابید به طوری که رنگ آمیزی هر طور باشد مستطیلی با اضلاع افقی و عمودی و با رئوس همرنگ در شکل وجود داشته باشد.

ابتدا ۳ خط عمودی دلخواه متمایز انتخاب می‌کنیم، سپس ۹ خط افقی دلخواه متمایز. هرکدام از خط‌های

افقی، ۳ نقطه تقاطع با هرکدام از خط‌های عمودی دارد. (هر نقطه ۲ حالت (رنگ) دارد ← $\underline{2^3}$ حالت)

پس از بین ۹ خط، طبق لانه کبوتری حداقل ۲ خط وجود دارند که نقاطشان همرنگ است. همان ۲ خط

افقی را به‌عنوان ضلع‌های افقی مستطیل درنظر بگیرید. از طرفی طبق لانه کبوتری، با ۳ نقطه و ۲ رنگ،

حداقل ۲ نقطه همرنگ هستند ← ۲ خط عمودی متناظر با آن‌ها، دو ضلع عمودی مستطیل هستند.

مستطیل به دست آمده، رئوس همرنگ دارد.

$\Leftarrow \boxed{n \geq 9}$

آناهیتا حیدری