حل تمرین‌های تحویلی سری اول

۲.۱ عدد طبیعی n به عاملهای اول تجزیه شده است. فرض کنید تجزیه آن به صورت $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ باشد. ثابت کنید تعداد عامل‌های طبیعی n برابر است با

$$D_n = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1).$$

اصل ضرب. توان p_i $(1 \leq i \leq k)$ در یک عامل از n می‌تواند از ۰ تا n_i $\Rightarrow$ n_i+1 حالت باشد.

۴.۱ در چند جایگشت $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ از اعداد ۱ تا n، برای هر i داریم $\pi_i \leq i + 3$؟

π_1	π_2	π_3	$\cdots$	π_{n-3}	π_{n-2}	π_{n-1}	π_n
۱ تا ۴	۱ تا ۵	۱ تا ۶		۱ تا n	۱ تا n	۱ تا n	۱ تا n

$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots$

(از جایی که بیشترین محدودیت را دارد شروع می‌کنیم)

$$4 \times (5-1) \times (6-2) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{N = \begin{cases} 4^{n-3} \times 3! & n \geq 4 \\ n! & n < 4 \end{cases}}$$

۶.۱ به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه A، B و C از مجموعه n عضوی X انتخاب کرد به طوری که

(۱) $A \cup B \cup C = X$؟ (۲) $A \cap B \cap C = \varnothing$؟

(۳) $A \subseteq B \subseteq C$؟ (۴) $A \cap B \subseteq C$؟

۱ هر عضو X در هر کدام از سه زیرمجموعه، ۲ حالت دارد یعنی در کل 2^3 که حالتی که در هیچ کدام نباشد،
حذف است. $\Leftarrow 7^n$

۲ همانند قبل، اما این بار حالتی که در هر سه باشد، حذف می‌شود. $\Leftarrow 7^n$

۳ بین سه زیرمجموعه و یا اول یا آخر آن، یک جداکننده قرار می‌گیرد؛ سمت راست جداکننده،
۱ می‌شود و سمت چپ، صفر. $\Leftarrow 4^n$

۴ جداکننده ۳ حالت دارد که مطابق روبرو، حالت اول و
دوم، هرکدام ۳ حالت $\Leftarrow 7^n$

$A \cap B$, C

$A\cap B$, C			B	C
00	$\rightarrow$	3	0	0
			0	1
			1	0
01	$\rightarrow$	3	〃	
11	$\rightarrow$	1		

۸.۱ فرض کنید a_n برابر تعداد افرازهای مرتب n باشد. به عنوان مثال $a_3 = 4$ چون $1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2 = 3$.
با بررسی مقادیر اولیه a_n، مقدار آن را برحسب n حدس بزنید و اثبات کنید.

$$\underbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}_{n}$$

$\boxed{a_n = 2^{n-1}}$ ← n-1 جای خالی داریم، در هر کدام، جدا کننده می‌تواند تکرار بگیرد یا نگیرد

* راه حل دیگر: استقرا یا روابط بازگشتی. خلاصه:

a_n ↱ اولین عنصر ۱ باشد $\xrightarrow{\text{معادلا}}$ آن را حذف و یک واحد از مجموع کم می‌کنیم $\longrightarrow a_{n-1}$

↳ اولین عنصر حداقل ۲ باشد $\xrightarrow{\text{معادلا}}$ یک واحد از آن کم می‌کنیم $\longrightarrow a_{n-1}$

$$\Longrightarrow a_n = 2a_{n-1}, \quad a_1 = 1 \quad \Longrightarrow a_n = 2^{n-1}$$

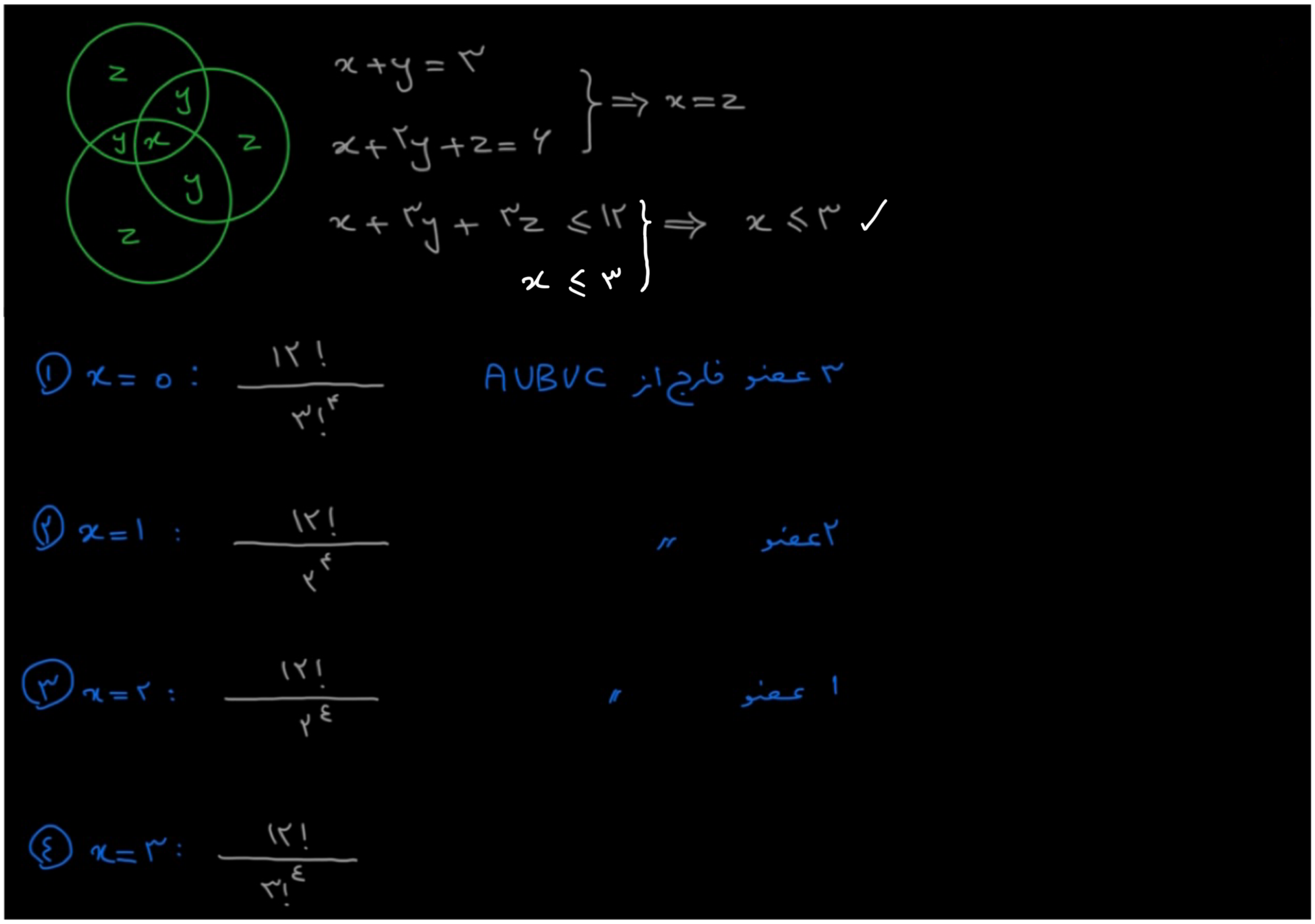
۱۰.۱ مجموع تمام اعداد پنج رقمی که با استفاده از ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت بدست آورید. (ارقام لزوما متمایز نیستند)

فرض کنید S_5 مجموع اعداد ۱ تا ۵ باشد.

$$N = S_5 \times 10^4 \times 5^4 + S_5 \times 10^3 \times 5^4 + \dots + S_5 \times 1 \times 5^4$$

$$= S_5 \times 5^4 \times (10^4 + 10^3 + \dots + 1) = \boxed{15 \times 5^4 \times \frac{10^5 - 1}{9}} = 15 \times 5^4 \times 11111$$

۱۲.۱ به چند طریق می‌توان از یک مجموعه ۱۲ عضوی، سه مجموعه شش عضوی A، B و C را انتخاب کرد به طوری که اشتراک هر دو تایی از آنها سه عضوی باشد؟



۲۰.۱ (۱) چند گراف ساده روی مجموعه رئوس n عضوی V می‌توان تعریف کرد؟ (۲) چندتای آنها m یال دارند؟ (۳) در چند تا از آنها درجه همه رئوس زوج است؟ (۴) در چند تای آنها درجه همه رئوس فرد است؟

① $2^{\binom{n}{2}}$ ② $\binom{\binom{n}{2}}{m}$

③ فرض کنید G گرافی با شرایط مطلوب باشد. راس دلخواه v از G را در نظر بگیرید.

باقی n-1 راس دیگر، هر حالتی که داشته باشند، v به هرکدام وصل است اگر و تنها اگر درجه‌ی آن راس در گراف G-v فرد باشد. درنهایت درجه‌ی v نیز زوج می‌شود؛ چون تعداد رئوس درجه فرد، زوج است.

$$\Leftarrow \quad \boxed{N = 2^{\binom{n-1}{2}}}$$

④ مشابه استدلال قبل. اگر n فرد باشد که صفر، اگر نه، پس n زوج است.

✓ v درجه فرد می‌شود ⟸ تعداد رئوس با درجه زوج در G-v فرد است ⟸

* n-1 فرد ⟸ n زوج
* تعداد رئوس با درجه فرد در G-v زوج است

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = \begin{cases} 2^{\binom{n-1}{2}} & \text{n زوج باشد} \\ 0 & \text{n فرد باشد} \end{cases}}$$

۲۲.۱ n مشتری بانک به چند طریق می‌توانند مقابل k باجه صف تشکیل دهند؟ ممکن است مقابل برخی باجه‌ها هیچ کسی نباشد و یا حتی همه مشتری‌ها مقابل یک باجه بایستند.

* تعداد توزیع‌های n شیء متمایز در k جعبه‌ی متمایز با این شرط که هیچ محدودیتی برای قرار گرفتن اشیاء در جعبه‌ها وجود ندارد اما در هر جعبه، ترتیب قرار گرفتن اشیاء در جعبه‌ها مهم باشد: $\boxed{\dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!}}$

یا معادلاً ابتدا $n!$ طریق همه را صف کنید، سپس تعداد پاسخ‌های حسابی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ را بدست آورید. $\Leftarrow$ $N = n! \times \binom{n+k-1}{k-1}$

۲۴.۱ تعداد دسته جوابهای نامعادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ را در مجموعه اعداد صحیح نامنفی بدست آورید.

$$x_{m+1} = n - \sum_{i=1}^{m} x_i \in \mathbb{W}$$

با اضافه کردن x_{m+1} به نامعادله داریم: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n$

$$\Rightarrow \boxed{N = \binom{n+m}{m}}$$

۲۶.۱ فرض کنید $P_d(n,k)$ تعداد افرازهای عدد طبیعی n به k عدد طبیعی متمایز است. به عنوان مثال ۲ $= P_d(۸,۳)$ چون ۴ + ۳ + ۱ = ۵ + ۲ + ۱ = ۸. ثابت کنید

$$P_d(n,k) = P_d(n-k,k) + P_d(n-k,k-۱).$$

① افرازهای n به k عدد طبیعی متمایز که شامل عدد یک باشند: از هر k عدد، یک واحد کم می‌کنیم؛ یکی که صفر می‌شود و حذف است. مجموع باقی‌، n-k است ← $P_d(n-k, k-1)$

② " " " شامل عدد یک نباشند: یعنی کمترین عدد، حداقل ۲ است.

از هر عدد یک واحد کم می‌کنیم، از مجموع k واحد کم می‌شود ← $P_d(n-k, k)$

آناهیتا حیدری