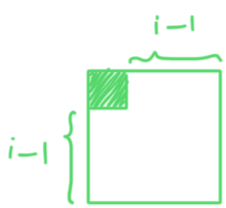
حل تمرین مبانی ترکیبیات

جلسه اول

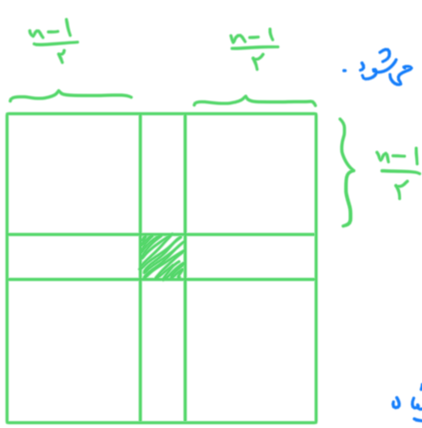
۱.۱ یک مربع به ضلع n را به مربعات واحد افراز کرده ایم. چند مربع در شکل حاصل دیده می‌شود؟ اگر n فرد باشد چند تا از مربعات قسمت اول، شامل مربع واحد وسط هستند؟

برای هر مربع، طول ضلع آن (i) و یک مربع واحد گوشه‌ای آن (مثلاً گوشه‌ی سمت چپ بالا) را دو مشخصه برای آن مربع در نظر می‌گیریم. بدیهی است به‌ازای هر $n \geq i \geq 1$ ، هر مربع واحد که در $i-1$ ستون یا سطر آخر قرار نگیرد، یک مربع $i\times i$ یکتا در مربع اصلی را مشخص می‌کند و برعکس.



برای جایگاه این مربع واحد، $n-(i-1)$ حالت برای ستون و مشابهاً $n-(i-1)$ حالت برای سطر آن وجود دارد که طبق اصل ضرب، $(n-(i-1))^2$ حالت وجود دارد.

$$\Longrightarrow \boxed{N = \sum_{i=1}^{n} (n-(i-1))^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



* اگر $i > \frac{n-1}{2}$: مربع $i\times i$ حتما شامل مربع واحد مرکزی می‌شود.

$$\Longrightarrow N_1 = \sum_{i=\frac{n-1}{2}+1}^{n} (n-(i-1))^2$$

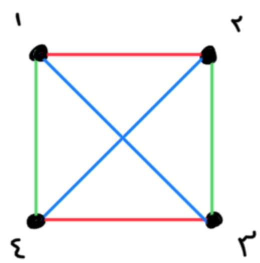
* اگر $i \leq \frac{n-1}{2}$: هر مربع واحد در مربع $i\times i$ ، می‌تواند در جایگاه

مربع مرکزی در مربع اصلی قرار گیرد و مربع i×i از کادر خارج نشود.

$$\Rightarrow N_2 = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^2 \qquad , \qquad N = N_1 + N_2$$

۳.۱ چهار تیم در یک تورنمنت ورزشی شرکت کرده اند و قرار است هر دوتایی از آنها با هم مسابقه بدهند. هر روز حداکثر یک مسابقه برگزار می‌شود و هر تیم در دو روز متوالی بازی نخواهد داشت. (۱) حداقل چند روز برای انجام مسابقات نیاز هست؟ (۲) چند ترتیب مختلف برای برنامه مسابقات وجود دارد؟

①



در گراف مقابل، هر راس نشان دهنده‌ی یک تیم و هر یال، متناظر با بازی بین ۲ راس متصل به آن است. از آن جا که هر ۲ تایی از تیم‌ها با هم مسابقه دارند، پس گراف کامل است. جمله‌ی هایلایت شده یعنی در هر دنباله‌ی متوالی از یال‌ها، هیچ دو یالی نباید راس مشترک داشته باشند. (در نظریه گراف، به مجموعه‌ای از یال‌ها که هیچ دوتایی، راس مشترک ندارند، تطابق گفته می‌شود) از آن جا که حداکثر تعداد چنین یال‌هایی در گراف بالا، ۲ است، پس حداقل $\frac{۶}{۲} = ۳$ دنباله‌ی ۲ یالی و ۲ روز فاصله بین هر دو دنباله‌ی متوالی، در نتیجه **حداقل ۸ روز** نیاز است.

مثال وجودی برای ۸ :

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

۱۳ و ۲۴ و - و ۱۲ و ۴۳ و - و ۱۴ و ۲۳

(برای خود زوج‌ها ترتیب نداریم چون گراف جهت‌دار نیست)

۲) مطابق شکل، هر یال دقیقاً یک یال روبه‌رو دارد ⇐ تعداد جایگشت‌های ۳ بسته‌ی متمایز که در هر بسته، ۲ یال

داریم: $\boxed{3! \times 2!^3}$

۵.۱ چند تابع مانند f از مجموعه $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, \ldots, m\}$ می‌توان تعریف کرد هرگاه $D_f \subseteq A$؟ چند تا از این توابع یک به یک هستند؟ چند تا از آنها یکنوای اکید هستند؟

* به طور کلی تعداد توابع از A به B، $|B|^{|A|}$ است. (هر عضو A، مستقل از اعضای دیگر A، می‌تواند به هر کدام از اعضای B متناظر شود.)

در این سوال چون $D_f \subseteq A$ و لزوماً با A برابر نیست، یک حالت اضافه برای هر عضو A در نظر می‌گیریم که به عضوی از B متناظر نشود. (در نتیجه در D_f قرار نمی‌گیرد) پس هر عضو A، مستقل از اعضای دیگر A، $|B|+1$ حالت دارد. پس طبق اصل ضرب، $(m+1)^n$ حالت داریم.

* اگر دامنه را ناتهی در نظر بگیریم، حالتی که تمام اعضای خارج از دامنه قرار گیرند را حذف می‌کنیم و پاسخ $\boxed{(m+1)^n - 1}$ می‌شود.

راه حل دوم: به ازای هر i بین ۱ تا n، هر بار i عدد از A برای D_f انتخاب می‌کنیم که

تعداد توابع از این مجموعه به B، m^i است. $\Rightarrow N=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}m^i = (m+1)^n-1$

(طبق بسط دو جمله‌ای)

اگر تابعی یک به یک باشد، پس هیچ ۲ عضوی از دامنه‌ی آن، به عدد یکسانی متناظر نمی‌شود. پس به ازای

انتخاب i عضو مرتب برای دامنه، عضو اول، m حالت، عضو دوم $m-1$ حالت، ...

چون برای توابع یک به یک داریم: $|D_f|\leqslant|R_f|$

، عضو iام، $m-i+1$ حالت دارد. $\Rightarrow N=\boxed{\sum_{i=1}^{\min(n,m)}\binom{n}{i}\binom{m}{i}\,i!} = \sum_{i=1}^{\min(n,m)}\binom{n}{i}\frac{m!}{(m-i)!}$

به ازای انتخاب i عضو مرتب برای دامنه، برای اینکه تابع یکنوای اکید شود، کافی است i عضو

از B انتخاب کنیم و با ترتیب صعودی یا نزولی، به دامنه متناظر کنیم.

$$\Rightarrow N=\boxed{2\sum_{i=1}^{\min(n,m)}\binom{n}{i}\binom{m}{i}}$$

۷.۱ به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_k$ از مجموعه n عضوی X را انتخاب کرد به طوری که

(۱) $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_k$

(۲) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k = X$؟

① به هر $x \in X$ که k رقم c را نسبت می دهیم به گونه‌ای که c_i ، 1 است اگر $x \in A_i$ و صفر است اگر $x \notin A_i$.

لم: فرض کنید c_j اولین رقم از کد متناظر با $x \in X$ باشد که 1 است (در صورت وجود). آن گاه،

به ازای $n \geq j' > j$ ، $\forall j'$ داریم: $c_{j'} = 1$.

اثبات.
$$c_j = 1 \iff x \in A_j \underset{A_j \subseteq A_{j+1}}{\overset{\text{ط.ف.}}{\Longrightarrow}} x \in \underset{\text{یعنی}}{\overset{c_{j+1}=1}{A_{j+1}}} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x \in \underset{\text{یعنی}}{\overset{c_n=1}{A_n}}$$

این یعنی به ازای هر $x \in X$ ، جایگاه اولین 1 در کد آن، کل کد را مشخص می‌کند (تمام قبل آن 0 و بعد از آن 1 می‌شود.) که $k+1$ حالت دارد (حالت اضافه این است که کد $0 \ldots 000$ باشد).

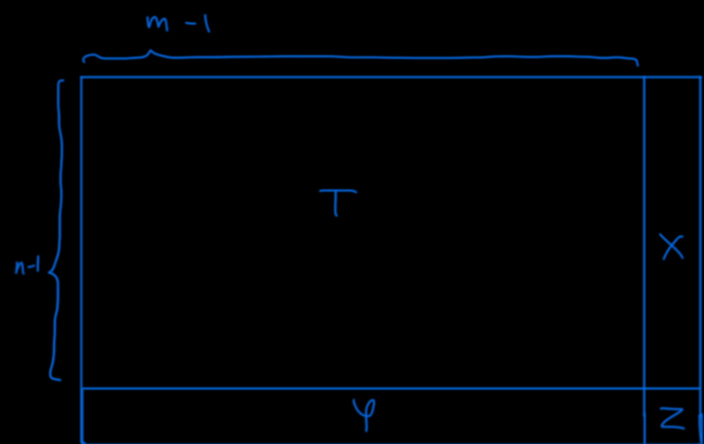
$$\Longrightarrow \quad N = \boxed{(k+1)^n}$$

② هر $x \in X$ ، می‌تواند در هر A_i باشد یا نباشد. اما در نهایت باید در حداقل یکی از آن‌ها باشد تا اجتماع‌شان X شود. $\Leftarrow$ $N = \boxed{(2^k - 1)^n}$

۹.۱ به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول n در m را با اعداد

۱ و ۱- پر کرد به طوری که حاصلضرب اعداد هر سطر و هم چنین هر ستون برابر ۱ باشد؟

لم. اگر از یک گوشه‌ی دلخواه، هر یک از خانه‌های جدول $(m-1)\times(n-1)$ به طور دلخواه پر شوند، آنگاه هر یک از خانه‌های سطر و ستون آخر (گوشه‌ی روبه‌رو) در جدول $m\times n$ تنها به یک طریق پر می‌شوند.



اثبات. حکم برای خانه‌های X و φ بدیهی است. پس کافی است برای Z ثابت شود؛ یعنی ثابت شود زوجیت تعداد (-1) در X و φ یکسان است.

فرض کنید x_i نشان‌دهنده‌ی تعداد (-1) در سطر iام T باشد و مشابها y_j برای ستون iام T. چون

شمارش سطرها و ستون‌ها آن فرق ندارند $\Leftarrow$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \sum_{j=1}^{m-1} y_j$$

$$\sum (x_i \,\%\, 2) \overset{2}{\equiv} \sum x_i \equiv \sum y_j \equiv \sum (y_j \,\%\, 2) \checkmark$$

برای $m=1$ یا $n=1$ نیز تنها حالت این است که تمام خانه‌ها (1) باشند، پس حکم برقرار است.

$\Leftarrow$ پاسخ مسئله، $2^{(m-1)(n-1)}$ است.

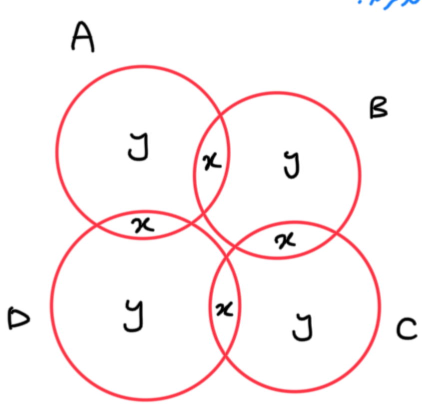
۱۱.۱ شش سخنران در یک سمینار به طور متوالی سخنرانی خواهند کرد. به چند طریق می‌توان برنامه سخنرانی‌ها را ترتیب داد به طوری که سخنران A، زودتر از سخنران B و سخنران B زودتر از سخنران C، سخنرانی کنند؟ ممکن از بین آنها سخنرانان دیگری باشند یا نباشند.

A و B و C را موقتا برای شمارش، سه شیء یکسان در نظر می‌گیریم و در نهایت به یک طریق جایگاه آن‌ها مشخص می‌شود. (ابتدا A، سپس B و در نهایت C)

$$\boxed{\frac{6!}{3!}}$$

۱۳.۱ به چند طریق می‌توان از یک مجموعه ۲۰ عضوی، چهار مجموعه پنج عضوی A، B، C و D را انتخاب کرد به طوری که $|A\cap B| = |B\cap C| = |C\cap D| = |D\cap A|$ و $A\cap C = \varnothing = B\cap D$؟

چون A با C و B با D مجزا هستند، پس اشتراک سه‌تایی یا چهارتایی ندارند.



$2x + y = 5 \qquad y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

حالت بندی روی x:

(۱) $x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow N_1 = \frac{20!}{5!^4}$

(۲) $x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow N_2 = \frac{20!}{3!^4}$

(۳) $x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow N_3 = \frac{20!}{2^4}$

$\Rightarrow N = N_1 + N_2 + N_3$

آناهیتا حیدری