جلسه‌ی ششم

۱۳.۵ جمله عمومی دنباله‌های بازگشتی زیر را بدست آورید:

(۱) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = 6$

$x^2 = x + 6 \Rightarrow \alpha_1 = -2 \;,\; \alpha_2 = 3 \Rightarrow a_n = A_1(-2)^n + A_2 3^n$

با a_0, a_1 ای نیز $\Rightarrow A_1 = \frac{3}{5} \;,\; A_2 = \frac{12}{5} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{3}{5}(-2)^n + \frac{12}{5}3^n}$

(۳) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}, a_0 = 4, a_1 = 10$

$x^2 = 6x - 8 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \;,\; \alpha_2 = 4 \Rightarrow \boxed{a_n = 3(2)^n + 4^n}$

۱۵.۵ جمله عمومی دنباله $\{a_n\}$ به‌صورت $a_n = k \times 3^n + l \times 6^n$ است. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بنویسید.

$\alpha_1 = 3 \qquad \alpha_2 = 6 \Rightarrow (x-3)(x-6) = x^2 - 9x + 18$

$\Rightarrow a_n = 9a_{n-1} - 18a_{n-2} \qquad a_0 = k + l \qquad a_1 = 3k + 6l$

۱۹.۵ جملات دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, b_n = a_{n-1} - b_{n-1}, a_0 = 1, b_0 = 2.$

جمله عمومی این دنباله‌ها را پیدا کنید.

$$\left.\begin{array}{l} b_{n-1} = a_n - a_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} - b_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_n + a_{n-1}$$

چندجمله‌ای مشخصه: $x^2 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = -\sqrt{2} \qquad \alpha_2 = \sqrt{2}$

$a_0 = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1 \qquad b_0 = a_1 - a_0 = \sqrt{2}(A_2 - A_1) - 1 = 2$

$\Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad 2A_2 = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $A_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)(-\sqrt{2})^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})^n$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$

۲۹.۵ برای دنباله بل $\{B_n\}$ ثابت کنید $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ که در آن $B_0 = 1$. یادآوری می‌کنیم که B_n برابر است با تعداد افرازهای یک مجموعه n عضوی به یک یا چند زیرمجموعه.

فرض کنید مجموعه‌ی شامل عضو آخر، $(n-k)+1$ عضوی باشد. پس باقی مجموعه‌ها B_k حالت دارند و برای $0 \leq k \leq n$

$n-k$ عضوی که در این مجموعه با عضو آخر هستند، $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ حالت داریم. $\Leftarrow$ $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n$

۳۱.۵ عدد استرلینگ نوع اول که آن را با $s(n, k)$ نمایش می‌دهیم برابر است با تعداد روشهای توزیع n شیء متمایز روی k دایره نامتمایز به طوری که روی هر دایره جایگشت دوری اشیاء لحاظ شود. به عنوان مثال، $s(۳, ۲) = ۳$ و $s(۳, ۱) = ۲$.

(الف) مقدار $s(n, ۱)$ و $s(n, n - ۱)$ را بدست آورید.

(ب) ثابت کنید

$$s(n, k) = s(n - ۱, k - ۱) + (n - ۱)s(n - ۱, k).$$

الف) جایگشت دوری $s(n, 1) = (n-1)!$

چون دایره‌ها ناتهی هستند، دقیقاً یکی از آن‌ها دوتایی و بقیه تک عضو هستند. $s(n, n-1) = \binom{n}{۲}$

ب) ۱) شیء اول (a_1) در یک دایره تنها قرار گیرد: $s(n-1, k-1)$

۲) 〃 〃 نگیرد: به $s(n-1, k)$ حالت باقی شیءها را در دایره‌ها قرار می‌دهیم. سپس a_1 را سمت راست یکی از a_i ها $(۲ \leq i \leq n)$ قرار می‌دهیم (در یکی از دایره‌ی متناظر با آن a_i) که $n-1$ حالت دارد.

$$\Rightarrow s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)\, s(n-1, k)$$