جلسه ی پنجم

۲.۴ می‌خواهیم هر یک از خانه های یک جدول ۳ × ۳ را با دو رنگ، رنگ کنیم به طوری که مربع ۲ × ۲ تکرنگ ایجاد نشود. چند رنگ آمیزی مختلف وجود دارد؟

۴ مربع ۲×۲ داریم. A_i ← تعداد حالت هایی که مربع iام تک رنگ شود.

$$\cup A_i = ۴ \times ۲^{۶} - (۴ \times ۲^{۴} + ۲ \times ۲^{۳}) + ۴ \times ۲ \times ۲ - ۲ = ۱۹۰$$

$$۲^{۹} - ۱۹۰ = ۳۲۲$$

۵.۴ چند عدد طبیعی نابیشتر از $۲^{۳۰}$ وجود دارد که نه مربع کامل هستند، نه مکعب کامل و نه توان پنجم کامل؟

مربع کامل: $۱ \leq n^{۲} \leq ۲^{۳۰} \Rightarrow ۱ \leq n \leq ۲^{۱۵} \quad : \quad A_۱$

مکعب کامل: $۱ \leq n^{۳} \leq ۲^{۳۰} \Rightarrow ۱ \leq n \leq ۲^{۱۰} \quad : \quad A_۲$

توان پنجم کامل: $۱ \leq n^{۵} \leq ۲^{۳۰} \Rightarrow ۱ \leq n \leq ۲^{۶} \quad : \quad A_۳$

$A_۱ \cap A_۲ : ۱ \leq n^{۶} \leq ۲^{۳۰} \Rightarrow ۱ \leq n \leq ۲^{۵}$

$A_۱ \cap A_۳ : ۱ \leq n^{۱۰} \leq ۲^{۳۰} \Rightarrow ۱ \leq n \leq ۲^{۳}$

$A_۲ \cap A_۳ : ۱ \leq n^{۱۵} \leq ۲^{۳۰} \Rightarrow ۱ \leq n \leq ۲^{۲}$

$$A_{۱} \cap A_{۲} \cap A_{۳} : [۲,۳,۵] = ۳۰ \implies ۱ \leq n^{۳۰} \leq ۲^{۳۰} \implies ۱ \leq n \leq ۲$$

$$\left(\bigcup_{i=۱}^{۳} A_i\right)' = ۲^{۳۰} - (۲^{۱۵} + ۲^{۱۰} + ۲^{۶}) + (۲^{۵} + ۲^{۳} + ۲^{۲}) - (۲)$$

۱۲.۴ (۱) برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$

(۲) با فرض $n, m \in \mathbb{N}$ و $m > n$ ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = ۰$$

$$n!\, S(n,n) = n! \left(\frac{۱}{n!} \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \binom{n}{k} (n-k)^n \right) = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$ ۱.

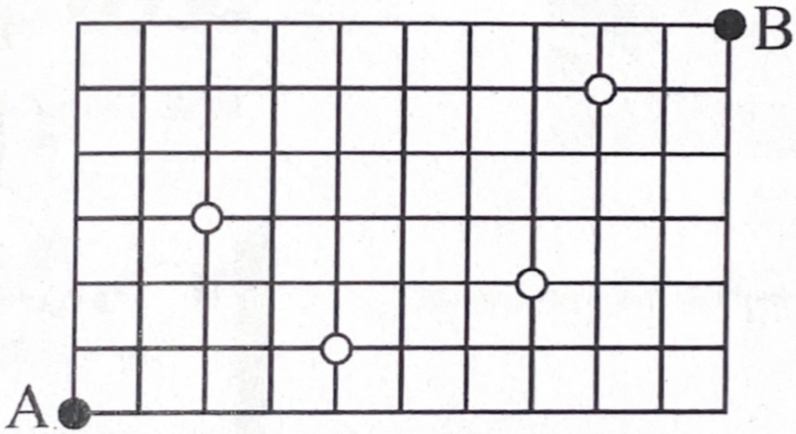
$$* \; S(n,n) = ۱ \implies n!\, S(n,n) = n!$$

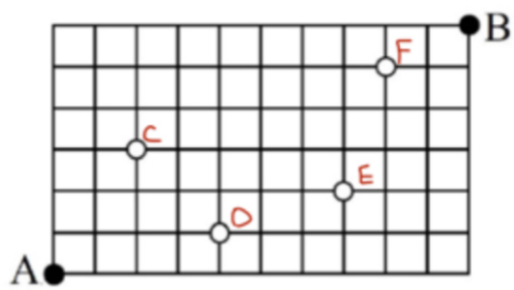
$$\sum_{k=۰}^{m} (-۱)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = \mathrm{Onto}(n,m) = ۰$$ ۲.

تعداد نگاشت‌های پوشا از A به B که

$|A| < |B| \implies$ صفر است

۱۳.۴ می‌خواهیم در شکل زیر از نقطه A به نقطه B برویم. تنها در دو جهت به سمت بالا و به سمت راست می‌توانیم حرکت کنیم. همچنین نمی‌خواهیم از چهار نقطه مشخص شده در شکل عبور کنیم. چند مسیر متفاوت وجود دارد؟





$AB = \binom{16}{10}$

$ACB = \binom{5}{2}\binom{11}{8}$ $ADB = \binom{5}{4}\binom{11}{6}$ $AEB = \binom{9}{7}\binom{7}{3}$ $AFB = \binom{13}{8}\binom{3}{2}$

$ACFB = \binom{5}{2}\binom{8}{6}\binom{3}{2}$ $ADEB = \binom{5}{4}\binom{4}{3}\binom{7}{3}$ $ADFB = \binom{5}{4}\binom{8}{4}\binom{3}{2}$

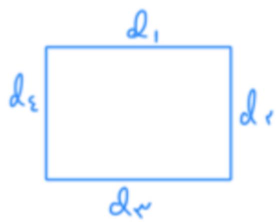
$AEFB = \binom{9}{7}\binom{4}{1}\binom{3}{2}$

بقیه ۴نقطه‌ای‌ها صفر هستند

$ADEFB = \binom{5}{4}\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2}$

پاسخ مسئله ← $AB - (ACB + ADB + AEB + AFB) + (ACFB + ADEB + ADFB + AEFB)$
$- ADEFB$.

۱۴.۴ به چند طریق می‌توان چهار دیوار یک اتاق را با چهار رنگ موجود رنگ کرد به طوری که دیوارهای مجاور همرنگ نباشند؟



① d_2 و d_4 همرنگ باشند:

$$\underset{d_1}{4} \times \underset{d_2 = d_4}{3} \times \underset{d_3}{3}$$

② " همرنگ نباشند:

$$\underset{d_1}{4} \times \underset{d_2}{3} \times \underset{d_4}{2} \times \underset{d_3}{2}$$

$S = ۸۴$

۱۵.۴ به چند طریق می‌توان رئوس گراف دوری C_n را با k رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند؟

* راه حل با روابط بازگشتی:

با فرض اینکه گراف نامگذاری شده باشد:

(رنگ زردها مشخص نیست)

① رئوس v_1 و v_{n-1} همرنگ باشند:

v_n، $k-1$ حالت دارد ⇐ $(k-1)f(n-2)$

② .. هم‌رنگ نباشند :

(رنگ زردها مشخص نیست)

v_n ، $k-2$ حالت دارد ⇐ $(k-2)\,f(n-1)$

$$\Rightarrow f(n) = (k-1)\,f(n-2) + (k-2)\,f(n-1)$$

۲۶.۴ ‏$2n$ مداد رنگی داریم شامل n رنگ مختلف، از هر رنگ ۲ تا: یکی کمرنگ و دیگری پررنگ. به چند طریق می‌توان آنها را کنار هم چید به طوری که مداد کمرنگ از هر رنگ، سمت چپ مداد پررنگ از همان رنگ (نه لزوماً کنار آن) باشد؟

$$\frac{(2n)!}{2^n}$$