حل تمرین‌های تحویلی سری دوم

۶.۲ در داخل مربعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر، ۱۳ نقطه به تصادف انتخاب کرده ایم. ثابت کنید فاصله دو تا از آنها حداکثر ۵ سانتی‌متر است.

از آن جا که در یک مستطیل به اضلاع ۳ و ۴، قطر ۵ است، با تقسیم بندی مربع ۱۲×۱۲ به مستطیل‌های ۳×۴، ۱۲ مستطیل خواهیم داشت.

$$\left\lceil \frac{13}{12} \right\rceil = 2 \checkmark$$

۸.۲ برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید مضربی از n وجود دارد که ارقامش تنها ۰ و ۱ هستند.

دنباله‌ی ۱، ۱۱، ۱۱۱ و ... را درنظر بگیرید. از آن جا که نامتناهی‌است و باقیمانده بر n، n حالت

$a_m = \underbrace{11\cdots1}_{m}$

امکان دارد، حداقل ۲ عضو از دنباله وجود دارند که بر n هم باقیمانده هستند.

a_{m_1} و a_{m_2} $m_2 > m_1$

$$a_{m_2} - a_{m_1} = \underbrace{111\ldots1}_{m_2 - m_1}\underbrace{00\ldots0}_{m_1} \mod (n) = 0$$

۱۰.۲ فرض کنید k عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد. کمترین مقدار n را بیابید به طوری که جمله زیر همیشه برقرار باشد:

در میان هر n عدد صحیح، دو عدد وجود دارند که مجموع یا تفاضلشان مضرب k است.

برای مجموع:

$$\underbrace{\{0,k\}\quad\{1,k-1\}\quad\cdots\quad\{\lfloor \tfrac{k}{2}\rfloor,\lceil \tfrac{k}{2}\rceil\}}_{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor+1 \text{ حالت}} \quad\Rightarrow\quad n=\lfloor \tfrac{k}{2}\rfloor+2$$

$\Rightarrow n_{min}=\lfloor \frac{k}{2}\rfloor+2$ (اگر دومی هم نوع اول باشد تفاضلشان بر k بخش‌پذیر است.)

متمایز

۱۴.۲ سی عدد حداکثر هفت رقمی مفروضند. ثابت کنید دو زیرمجموعه مجزا از آنها وجود دارند به طوری که مجموع اعضایشان با هم برابر است.

فرض کنید $S(A)$ مجموع اعضای A باشد   زیرمجموعه های ناتهی $\rightarrow 2^{30}-1$

$$\forall A\subset X;\quad S(A)\le S(X)\le(10^7-1)30$$

$$\left\lceil\frac{2^{30}-1}{(10^7-1)30}\right\rceil \geq \left\lceil\frac{10^9-1}{(10^7-1)100}\right\rceil = \left\lceil\frac{10^9-1}{10^9-100}\right\rceil = 2$$

در نهایت فرض کنید A و B دو زیرمجموعه با مجموع برابر باشند. برای اینکه مجزا شوند، کافیست قرار

دهیم: $D = B - A\cap B$ و $C = A - A\cap B$

چون اعداد متمایز هستند، این دو زیرمجموعه ناتهی هستند.

۲۴.۲ یالهای گراف کامل از مرتبه $۲n+۱$ را با n رنگ مختلف رنگ کرده ایم. ثابت کنید دوری تکرنگ در گراف رنگ شده وجود دارد.

تعداد یال؟ $= \binom{2n+1}{2} = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1)$

n رنگ داریم $\longrightarrow \frac{n(2n+1)}{n} = 2n+1$

پس حداقل $2n+1$ یال همرنگ وجود دارد. گرافی با n راس و حداقل $2n+1$ یال، شامل دور است.

(به طور کلی در یک گراف اگر $|E| \geq |V| \Leftarrow$ گراف دارای دور است.)

۳۰.۲ رئوس دو ۱۲ ضلعی منتظم و برابر را با دو رنگ قرمز و آبی به دلخواه رنگ کرده ایم به طوری که از هر کدام شش رأس قرمز و شش رأس آبی است. آیا می‌توان آنها را به گونه ای بر هم منطبق کرد که حداقل ۶ زوج رأس منطبق، همرنگ باشند؟

یکی از ۱۲ ضلعی‌ها را فیکس می‌کنیم. به ۱۲ طریق می‌توان ۱۲ ضلعی دیگر را روی آن قرار داد. فرض کنید هر بار تعداد منطبق شده‌های همرنگ را حساب کنیم. به ازای هر راس از ۱۲ ضلعی اول، در دقیقا ۶ حالت با راسی همرنگ خودش منطبق می‌شود. پس در کل، تعداد کل منطبق شده‌ها، $\underline{۱۲ \times ۶}$ است. طبق لانه کبوتری، حالتی وجود دارد که حداقل $۶ = \frac{۱۲ \times ۶}{۱۲}$ زوج راس منطبق، همرنگ باشند.

۳۴.۲ نقاط صفحه را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرده ایم. ثابت کنید (۱) دو نقطه همرنگ با فاصله d وجود دارد. (۲) دو نقطه ناهمرنگ با فاصله d وجود دارد. (۳) ثابت کنید یکی از دو رنگ دارای این خاصیت است که فاصله بین نقاط با آن رنگ، هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. (۴) ثابت کنید سه نقطه همرنگ وجود دارند که یکی از آنها وسط پاره خطی است که دو نقطه دیگر را به هم وصل میکند.

مشروط به اینکه از هر رنگ، حداقل یک نقطه موجود باشد.

① بارسم مثلث متساوی الاضلاع به ضلع d ، حداقل ۲ راس آن همرنگ هستند.

② ۲ نقطه ی ناهمرنگ دلخواه را درنظر بگیرید. نقطه ی وسط پاره خط واصل آن‌ها، یا قرمز است یا آبی.
$A = \{r, b\}$

آن را با نقطه ی همرنگش در A عوض کنید. با ادامه ی این روند، هر بار فاصله ی بین r و b نصف

می‌شود. این کار را آن قدر انجام می دهیم تا فاصله ی بین r و b از d کمتر شود. اکنون دو دایره هر

بار به مرکز r و b و شعاع d می‌زنیم. چون فاصله ی r و b کمتر از d است، این دو دایره متقاطع

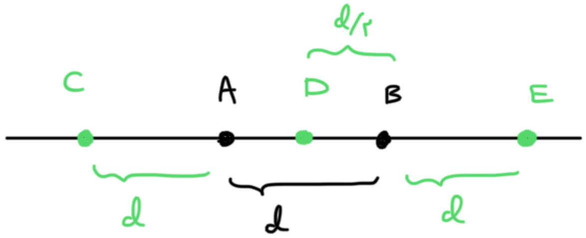
هستند. هر نقطه ی تقاطع، یا قرمز است (با b) و یا آبی (با r) فاصله ی d دارد. ✓

③ برهان خلف. پس اعداد r و b موجودند که هیچ دو قرمزی به فاصله ی r نباشند و مشابهاً برای b.

یک نقطه دلخواه (R) به رنگ قرمز و مثلثی به فرم

را درنظر بگیرید. هیچ کدام از دو راس پایینی

نمی‌توانند قرمز باشند (فاصله‌شان تا R ، r می‌شود). پس هر دو آبی هستند با فاصله b. ✗



④ ۲ نقطه‌ی متمایز همرنگ A و B را در نظر بگیرید.

سه نقطه‌ی C و D و E را روی خط واصل AB مطابق شکل انتخاب می‌کنیم. اگر هر سه همرنگ باشند که مسئله

حل است. اگر نه، پس حداقل یکی از آن‌ها با A و B همرنگ است. آن نقطه با A و B سه نقطه مطلوب هستند.

۴۰.۲ پنج نقطه در صفحه مفروضند به طوری که هیچ سه تایی از آنها در یک راستا نیستند. ثابت کنید چهارتا از آنها تشکیل یک چهارضلعی محدب می‌دهند. (اردیش و سکرش در سال ۱۹۳۵ حدس زده اند که در میان هر $۲^{n-۲}+۱$ نقطه که هیچ سه تایی در یک راستا نیستند، n نقطه وجود دارند که رئوس یک n ضلعی محدب هستند. این حدس برای مقادیر اولیه $۳ \leq n \leq ۶$ اثبات شده‌است.)

ابتدا Convex Hull این نقاط را رسم می‌کنیم. اگر چهار ضلعی یا پنج ضلعی باشد که حل است. اگر نه پس مثلث است.

$\Leftarrow$ ۲ نقطه‌ی دیگر درون این مثلث هستند. خط واصل این دو نقطه، مثلث را به ۲ بخش تقسیم می‌کند. طبق لانه کبوتری،

۲ راس مثلث در یک بخش قرار می‌گیرند. این دو راس با دو نقطه‌ای که روی خط هستند، تشکیل یک چهارضلعی محدب می‌دهند.

۴۲.۲ (۱) زیرمجموعه‌های A_1 تا A_m از $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ مفروضند و برای هر دوتایی از آنها داریم $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. ثابت کنید $m \leq 2^{n-1}$.

(۲) زیرمجموعه‌های n عضوی A_1، A_2، ... و A_m از مجموعه $X = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ مفروضند و برای هر دوتایی از آنها داریم $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. ثابت کنید $m \leq \binom{2n-1}{n-1}$.

۱. X، 2^n زیرمجموعه دارد. آن‌ها را به دسته‌های ۲تایی طوری افراز می‌کنیم که هر زیرمجموعه با مکملش در یک دسته باشد ← 2^{n-1} دسته که از هر دسته حداکثر یک زیرمجموعه می‌توان انتخاب کرد.

$$\Longrightarrow m \le 2^{n-1}$$

۲. مشابه قبل، به دسته‌های ۲تایی که مکمل هم باشند افراز می‌کنیم.

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2} = \frac{(2n)!}{n!\,n!\,2} = \frac{(2n-1)!\times \cancel{2n}}{(n-1)!\,n!\times \cancel{2n}} = \binom{2n-1}{n-1} \Rightarrow m \le \binom{2n-1}{n-1}$$

۴۸.۲ یالهای گراف کامل از مرتبه ۶۶ را با ۴ رنگ، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید مثلثی با سه یال همرنگ وجود دارد.

یک راس دلخواه از این گراف را در نظر بگیرید. به ۶۵ راس دیگر وصل است. طبق لانه کبوتری، حداقل $17 = \lceil \frac{65}{4} \rceil$ یال همرنگ دارد. ۱۷ راس متناظر با این یال‌ها را در نظر بگیرید. اگر حداقل یک یال به رنگ c_1 در زیرگراف القایی حاصل از این ۱۷ راس باشد که حل است. اگر نه، پس یک گراف کامل ۱۷ راسی داریم با حداکثر ۳ رنگ.

رنگ c_1

لم ۱. اگر یال‌های گراف کاملی با ۱۷ راس را با ۳ رنگ، رنگ کنیم، مثلثی با ۳ یال همرنگ وجود دارد.

اثبات. مشابه اثبات بالا ... $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 6$ ...

لم ۲. اگر یال‌های گراف کاملی با ۶ راس را با ۲ رنگ، رنگ کنیم، مثلثی با ۳ یال همرنگ وجود دارد.

اثبات. با ادامه‌ی همین روند، یا استفاده از اعداد رمزی ← $R(3,3) = 6$ ✓