حل تمرین مبانی ترکیبیات

جلسه چهارم

۳.۳ برابری‌های زیر را به کمک استقراء ثابت کنید:

$$① \sum_{k=۱}^{n} k(k+۱)(k+۲) = \frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۴}$$

$$② \sum_{k=۱}^{n} k^۳ = \left(\sum_{k=۱}^{n} k\right)^۲ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

بررسی پایه ساده است.

① گام: $n \to n+1$

$$\sum^{n+1} k(k+1)(k+۲) = \left(\sum^{n} k(k+1)(k+۲)\right) + (n+1)(n+۲)(n+۳) \underset{\text{طبق فرض}}{=}$$

$$\frac{n(n+1)(n+۲)(n+۳)}{٤} + (n+1)(n+۲)(n+۳) = \frac{(n+1)(n+۲)(n+۳)(n+٤)}{٤} \checkmark$$

② گام: $n \to n+1$

$$\sum^{n+1} k^۳ - \sum^{n} k^۳ = (n+1)^۳ \overset{?}{=} (1+۲+\cdots+n+(n+1))^۲ - (1+۲+\cdots+n)^۲$$

$$= (n+1)\left(\overset{n(n+1)}{\cancel{۲(1+۲+\cdots+n)}} + (n+1)\right) = (n+1)(n+1)^۲ = (n+1)^۳ \checkmark$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum^{n} k^{۳} = \left(\sum^{n} k\right)^{۲}} \qquad \forall n \geqslant ۱$$

$$\sum^{n+1} k^{۳} - \sum^{n} k^{۳} = (n+1)^{۳} \overset{?}{=} \frac{(n+1)^{۲}(n+۲)^{۲}}{۴} - \frac{n^{۲}(n+1)^{۲}}{۴}$$

$$= \frac{(n+1)^{۲}}{۴}\left((n+۲)^{۲} - n^{۲}\right) = \frac{(n+1)^{۲}}{۴}\left(۲(۲n+۲)\right) = (n+1)^{۳} \checkmark$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum^{n} k^{۳} = \frac{n^{۲}(n+1)^{۲}}{۴}} \qquad \forall n \geqslant ۱$$

۷.۳ فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$. ثابت کنید:

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$$

پایه $(n = ۲)$: $|\sin(۲x)| = |۲\sin x \cos x| \underset{|\cos x| \leqslant 1}{\leqslant} ۲|\sin x| \checkmark$

فرض (n): $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$

گام $(n \to n+1)$: $|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx + x)| = |\sin nx \cos x + \sin x \cos nx|$

$\to \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\leqslant |\sin nx \cos x| + |\sin x \cos nx| \underset{|\cos| \leq 1}{\leqslant} |\sin nx| + |\sin x| \underset{\text{فرض}}{\leqslant} (n+1) \sin x$ ✓

نامساوی مثلثی $\rightarrow |a+b| \leqslant |a| + |b|$

۱۱.۳ دنباله $\{x_n\}$ با مقادیر اولیه $x_1 = 3$ و $x_2 = 9$ و رابطه بازگشتی $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ مفروض است. ثابت کنید $x_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

پایه ($n=1, 2$):
$x_1 = 2^2 - 1$ ✓ $\qquad x_2 = 2^3 + 1$ ✓

فرض (n) و حکم ($n \rightarrow n+1$):

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \overset{\text{ط.فرض}}{=} 2^{n+1} + (-1)^n + 2(2^n + (-1)^{n-1}) = 2^{n+2} + (-1)^{n-1}$$

$$= 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$$ ✓

۱۷.۳ برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از یک ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$$

راهنمایی. نابرابری قوی تری به شکل زیر پیدا کنید که در آن تابع f مثبت و نزولی باشد:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - f(n).$$

* ثابت می‌کنیم: $\sum_{i=۲}^{n} \frac{۱}{i^۲} < ۱-\frac{۱}{n}$

پایه ($n=۲$): $\frac{۱}{٤} < \frac{۱}{۲}$ ✓

فرض (n) و گام ($n \to n+۱$):

$$\sum_{i=۲}^{n+۱} \frac{۱}{i^۲} - \sum_{i=۲}^{n} \frac{۱}{i^۲} = \frac{۱}{(n+۱)^۲} \overset{?}{<} \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱} = \frac{۱}{n(n+۱)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{۱}{n+۱} < \frac{۱}{n} \quad ✓$$

۳۱.۳ فرض کنید $A_۱$ تا A_m زیرمجموعه‌هایی از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ باشند که شامل هیچ دو عدد متوالی نیستند. برای هر زیرمجموعه A، حاصلضرب اعضاء را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم $P(\varnothing) = 1$

۱). ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{m} P(A_i)^۲ = (n+۱)!$$

پایه: $n=۱$, $n=۲$

$n=۱$: $\{\ \}, \{۱\} \Rightarrow ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ = ۲!$ ✓

$n=۲$: $\{\ \}, \{۱\}, \{۲\} \Rightarrow ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲ = ۶ = ۳!$ ✓

استقرا با دو مقدمه.

گام: $n-2, n-1 \to n$

زیرمجموعه ها را به ۲ دسته افراز می‌کنیم:

$\{1,2,\dots,n-2\}$ ←

① n دارد ← $n-1$ ندارد $\Rightarrow \sum P(A_i)^2 = (n-1)! \times n^2$

② n ندارد $\to \{1,2,\dots,n-1\} \Longrightarrow \sum P(A_j)^2 = n!$

$n^2(n-1)! + n! = n!(n+1) = (n+1)!$ ✓

۳۳.۳ می‌خواهیم مجموعه $X_n = \{۱, ۲, \dots, n\}$ را به دو مجموعه A و B افراز کنیم به طوری که مجموع اعضای A و مجموع اعضای B دو عدد متوالی باشند. برای چه مقادیری از n، این کار امکانپذیر است؟

حکم: به ازای هر $n=4k+2$ ، $k \geq 0$ برقرار است.

پایه ← $n=2$ $A_2 = \{1\}$ $B_2 = \{2\}$

گام: $n \to n+4$ $(n \overset{4}{\equiv} 2)$

طبق فرض حکم برای n برقرار است یعنی $S(B_n) = S(A_n)+1$ $A_n \cap B_n = \varnothing$ $A_n \cup B_n = \{i\}_{i=1}^{n}$

قرار می‌دهیم :

$$A_{n+4} = A_n \cup \{n+1, n+4\}$$
$$B_{n+4} = B_n \cup \{n+2, n+3\}$$

۴۳.۳ ثابت کنید عددی (m) با 3^n رقم که همه ارقامش ۱ هستند بر 3^n بخش‌پذیر است.

پایه ($n=1$ یا $n=0$) : $3 \mid 111$ ✓ ، $1 \mid 1$ ✓

فرض (n) و حکم ($n \to n+1$) :

$$m = \frac{10^{3^{n+1}}-1}{9} = \frac{(10^{3^n}-1)}{9}\left(10^{2\times 3^n}+10^{3^n}+1\right)$$

$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$3^n \;\Big|\; \frac{10^{3^n}-1}{9} \rightarrow$$ طبق فرض استقرا

$$10^{2\times 3^n}+10^{3^n}+1 \overset{3}{\equiv} 1+1+1 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow 3^{n+1} \mid m \;\checkmark$$

سوال ۳۹ :

* قضیه کوچک فرما : p عدد اول و $p \nmid n$ $\qquad n^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \quad \forall n$

اثبات با استقرا روی n ← معادلا اثبات می‌کنیم $\qquad n^p \overset{p}{\equiv} n$

$$(n+1)^p = n^p + \underbrace{\binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} n}_{\text{همه مضارب } p \text{ هستند}} + 1$$

$$\overset{p}{\equiv} n^p + 1 \equiv n + 1 \quad \checkmark$$

← طبق فرض $n^p \overset{p}{\equiv} n$