جلسه هفتم

۲.۶ اگر $A(x)$ تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ باشد، تابع مولد دنباله‌های زیر را بدست آورید:

۱) $b_n \ : \ 0, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots$

۲) $c_n \ : \ 0, a_0, 0, a_1, 0, a_2, \ldots$

۳) $d_n \ : \ a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$

۱) $B(x) = x^2 A(x)$

$x^2 A(x) = a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots \Rightarrow b_0 = b_1 = 0$

۲) $C(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$

۳) $D(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

$\dfrac{A(x)}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots)(a_0 + a_1 x + \cdots) = a_0 + (a_0+a_1)x + \cdots$

۴.۶ به چند طریق می‌توانیم ۲۰ عدد نان تهیه کنیم به طوری که حداقل یک نان بربری و حداکثر ۳ نان سنگک خریده باشیم و تعداد نانهای لواش مضرب ۴ باشد؟ فرض کنید تعداد انواع دیگر نان صفر باشد.

$(x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$

$$= x(1+x^2+\cdots)\left(\frac{\cancel{1-x^4}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{\cancel{1-x^4}}\right) = x\,\frac{1}{(1-x)^2} = x\sum_{0}^{\infty}(n+1)\,x^n = \sum_{0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$$

$\Leftarrow$ ضریب x^{20} ، ۲۰ است.

۲۱.۶ ثابت کنید تعداد افرازهای عدد طبیعی n به اعدادی طبیعی که هرکدام حداکثر چهار بار ظاهر شده است با تعداد افرازهایی از n به اعدادی طبیعی که هیچ کدام مضرب ۵ نیستند برابر است.

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)\cdots(1+x^r+\cdots+x^{4r})\cdots$$

$$=\left(\frac{\cancel{1-x^5}}{1-x}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{10}}}{1-x^2}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{15}}}{1-x^3}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{20}}}{1-x^4}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{25}}}{\cancel{1-x^5}}\right)\cdots$$

هرکدام از عوامل در مخرج ، به صورت $1-x^{5r}$ که $r\in \mathbb{N}$ است در صورت خط می‌خورد.

هرکدام از $\frac{1}{1-x^r}$ ، که $5\nmid r$ ، به صورت $(1+x^r+x^{2r}+\cdots)$ است یعنی

تعداد افرازهای n به اجزایی که مضرب ۵ نیستند.

۲۵.۶ فرض کنید b_n تعداد افرازهایی از n به توانهای ۲ باشد به‌طوری که هر عدد حداکثر ۳ بار تکرار شود. (۱) ثابت کنید تابع مولد دنباله برابر است با $B(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$. (۲) مقادیر a، b و c را بیابد به‌طوری که $B(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{(1-x)^2}+\frac{c}{1+x}$.
(۳) ثابت کنید $b_n=\frac{1}{4}(2n+3+(-1)^n)$.

1. $(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)\cdots(1+x^{2^r}+\cdots+x^{3\times 2^r})\cdots$

$$=\left(\frac{\cancel{1-x^4}}{1-x}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^8}}{1-x^2}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^{16}}}{\cancel{1-x^4}}\right)\cdots\left(\frac{\cancel{1-x^{4\times 2^r}}}{\cancel{1-x^{2^r}}}\right)\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$

2. $(1+x)(1-x)a+(1+x)b+(1-x)^2c=1$

$x=1:\ 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$x=-1:\ 4c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{4}$

$a(1-x^2)+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow B(x)=\sum_0^\infty \frac{1}{4}x^n+\sum_0^\infty\left(\frac{n+1}{2}\right)x^n+\sum_0^\infty\frac{1}{4}(-x)^n$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{4}+\frac{n+1}{2}+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$ 3