حل تمرین مبانی ترکیبیات

جلسه دوم

۳۵.۱ ثابت کنید تعداد دسته جوابهای دو معادله $a_1+a_2+a_3=13$ و $b_1+b_2+b_3=17$ در مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، برابر است.

* $a_1+a_2+a_3=13$: اگر حداقل ۲ تا از متغیرها دو رقمی باشند، n باید حداقل ۲۰ باشد (n=۱۳) $\Leftarrow$ پس

حداکثر یکی از متغیرها دو رقمی است. جواب را با متمم بدست می‌آوریم.

کل حالات: $\binom{13-3+(3-1)}{(3-1)} = \binom{12}{2}$

حالات نامطلوب: $\binom{13-12+(3-1)}{(3-1)} \times 3 = 3\binom{3}{2}$ (a_2 و a_1 یا a_3 دو رقمی باشد)

$$N_1 = \binom{12}{2} - 3\binom{3}{2} = 57$$

* $b_1+b_2+b_3=17$: مشابه قبل.

کل حالات: $\binom{17-3+(3-1)}{(3-1)} = \binom{16}{2}$

حالات نامطلوب: $\binom{17-12+(3-1)}{(3-1)} \times 3 = 3\binom{7}{2}$

$$\boxed{N_2 = \binom{16}{2} - 3\binom{7}{2} = 57 = N_1}$$

۵۱.۱ به کمک اتحاد چوشی‌چی حاصل عبارات زیر را بدست آورید

$$S_۲ = ۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + \cdots + \underbrace{(n-۱)n}_{k=۲}$$

$$S_۳ = ۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + \cdots + \underbrace{(n-۲)(n-۱)n}_{k=۳}$$

* اتحاد چوب‌شی : $n \geq k \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

$$S_۲ = ۲\left(\binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲}\right) = \boxed{۲\binom{n+1}{۳}}$$

$$S_۳ = ۳!\left(\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳} + \cdots + \binom{n}{۳}\right) = \boxed{۶\binom{n+1}{۴}}$$

۵۳.۱ فرض کنید $n, m, k \in \mathbb{N}$ و $n \geq m \geq k \geq ۲$. ثابت کنید

$$\binom{n}{k} + \binom{m}{k} < \binom{n+۱}{k} + \binom{m-۱}{k}.$$

* لم. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

$$\Rightarrow \cancel{\binom{n}{k}} + \binom{m-1}{k-1} + \cancel{\binom{m-1}{k}} \overset{?}{<} \binom{n}{k-1} + \cancel{\binom{n}{k}} + \cancel{\binom{m-1}{k}}$$

$$\binom{m-1}{k-1} \overset{?}{<} \binom{n}{k-1} \iff m-1 < n \iff m < n+1 \iff m \leq n \checkmark$$

۵۵.۱ برابری‌های ترکیبیاتی زیر را با فرض $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$\sum_{k=۱}^{n} k^۲ \binom{n}{k} = n(n+۱)۲^{n-۲} \quad (۱)$$

شمارش دوگانه: فرض کنید از بین n دانش آموز، بخواهیم یک گروه k نفری ($1 \le k \le n$) انتخاب و سپس از اعضای آن گروه، یک نماینده برای کلاس ریاضی و یک نماینده برای کلاس نقاشی انتخاب کنیم. (لزوما متمایز نیستند).

شمارش سمت چپ: ابتدا k نفر از n انتخاب می‌کنیم، سپس به ترتیب نماینده‌ی اول و نماینده‌ی دوم انتخاب می‌شوند. $(1 \le k \le n)$

شمارش سمت راست: ابتدا نماینده‌ها را مشخص می‌کنیم. دو حالت داریم: (۱) نماینده‌ی اول با نماینده‌ی دوم یکی باشد که n حالت دارد. باقی $n-1$ نفر، می‌توانند در گروه باشند یا نباشند ← $N_1 = n \times 2^{n-1}$

(۲) نماینده‌ها متمایز باشند ← $n \times (n-1)$ حالت و باقی $n-2$ نفر می‌توانند باشند یا نباشند. $N_2 = n \times (n-1) \times 2^{n-2}$

$$\Longrightarrow N = N_1 + N_2 = n \times 2^{n-2}(2 + n - 1) = n \times 2^{n-2} \times (n+1)$$

۵۹.۱ با فرض $n, m \in \mathbb{N}$ و $n > m$ ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^{m}\binom{n}{m}.$$

شمارش دوگانه: فرض کنید بخواهیم از یک مجموعه‌ی n عضوی، m عضو انتخاب کرده و از بین m عضو، یک زیرمجموعه‌ی دلخواه انتخاب کنیم.

شمارش سمت راست: ابتدا به $\binom{n}{m}$ حالت m عضو را انتخاب کرده و هرکدام می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند.

شمارش سمت چپ: ابتدا اعضای زیرمجموعه را مشخص کرده (با k عضو که $0 \le k \le m$) سپس $m-k$ عضو برای مجموعه‌ی m عضوی انتخاب می‌کنیم.

آناهیتا حیدری