حل تمرین سری اول نظریه گراف

آناهیتا حیدری

1.2.4 Show that there are eleven nonisomorphic simple graphs on four vertices.

① : $|E| = 0$

$\Leftarrow \quad N_0 = 1$

② : $|E| = 1$

$\Leftarrow \quad N_1 = 1$

③ : $|E| = 2$

$\Leftarrow \quad N_2 = 2$

④ : $|E| = 3$

$\Leftarrow \quad N_3 = 3$

* از آن جا که تعداد یال‌های K_4، ۶ است، و تعداد گراف‌های nonisomorphic با G و $\overline{G}$ برابر است

داریم: $N = 2N_0 + 2N_1 + 2N_2 + N_3 = 11$

1.2.5 Show that two simple graphs G and H are isomorphic if and only if there is a bijection $\theta : V(G) \to V(H)$ such that $uv \in E(G)$ if and only if $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

$\Longrightarrow$: چون G و H isomorphic هستند، پس وجود دارد دوسوئی‌های θ_1 و θ_2 که

$$\underbrace{\psi_G(e) = uv}_{\text{معادل } uv \in E(G)} \iff \underbrace{\psi_H(\theta_2(e)) = \theta_1(u)\theta_1(v)}_{\text{معادل } \theta_1(u)\theta_1(v) \in E(H)}$$

$\Leftarrow$: کافی است نشان دهیم

$\exists$ bijection $\phi : E(G) \to E(H)$ such that

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\,\theta(v)$$

هر یال از G، مثل e، دارای رئوس انتهایی مانند uv است.

$$\underbrace{e \in E(G) \text{ یا } uv \in E(G)}_{\psi_G(e) = uv} \iff \underbrace{\theta(u)\theta(v) \in E(H) \text{ یا } e' \in E(H)}_{\psi_H(\phi(e')) = \theta(u)\theta(v)}$$

(در واقع ϕ تابعی است که هر یال uv از G را به $\theta(u)\theta(v)$ می‌برد و ϕ^{-1} هر یال uv از H را به
$\theta^{-1}(u)\theta^{-1}(v)$ [چون θ دوسویی است، وارون دارد] از G می‌برد.)

(*b*) A simple graph G is *self-complementary* if $G \cong G^c$. Show that if G is self-complementary, then $\nu \equiv 0, 1 \pmod 4$.

$$\varepsilon = \binom{\nu}{2} - \varepsilon \implies 2\varepsilon = \frac{\nu(\nu-1)}{2} \implies 4\varepsilon = \nu(\nu-1) \implies 4 \mid \nu(\nu-1)$$

یا ν زوج است یا $\nu-1$ $\implies$ $4 \mid \nu$ یا $4 \mid \nu-1$ $\implies \nu \overset{4}{\equiv} 0, 1$

1.2.12 An *automorphism* of a graph is an isomorphism of the graph onto itself.

(*b*) Find $\Gamma(K_n)$ and $\Gamma(K_{m,n})$.

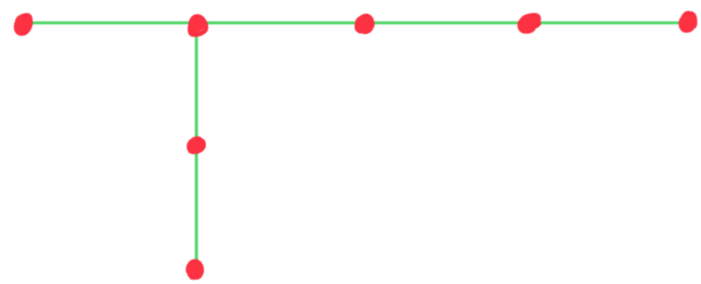
(*c*) Find a nontrivial simple graph whose automorphism group is the identity.

(b) $\Gamma(K_n)$: تمام $n!$ حالت مختلف برای نامگذاری یک گراف کامل

$\Gamma(K_{m,n})$: بخش اول که m راس دارد به $m!$ طریق می‌تواند نامگذاری شود و بخش دوم که n راس دارد، به $n!$ طریق می‌تواند نامگذاری شود. چون گراف دو بخشی کامل است،

$m! \times n!$ حالت دارد. $(m \neq n)$ * $(m=n) \leftarrow 2(n!)^2$

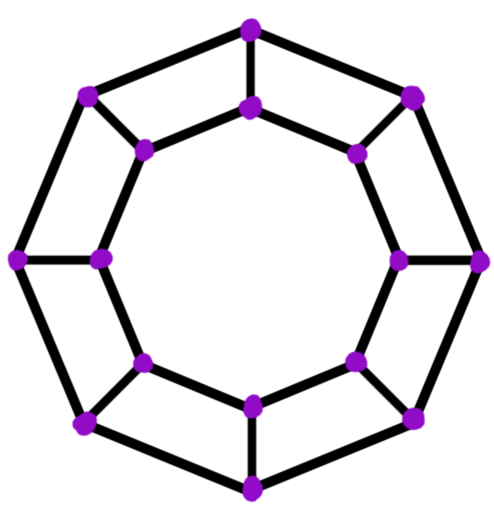
(c)



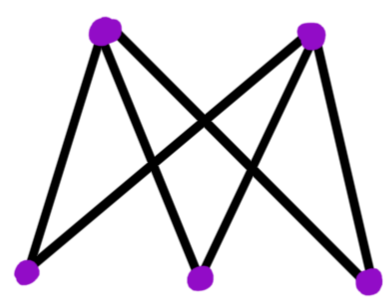
1.2.13 A simple graph G is *vertex-transitive* if, for any two vertices u and v, there is an element g in $\Gamma(G)$ such that $g(u)=g(v)$; G is *edge-transitive* if, for any two edges u_1v_1 and u_2v_2, there is an element h in $\Gamma(G)$ such that $h(\{u_1, v_1\})=\{u_2, v_2\}$. Find

(*a*) a graph which is vertex-transitive but not edge-transitive;
(*b*) a graph which is edge-transitive but not vertex-transitive.

(a)



(b)



1.3.2 Let G be bipartite. Show that the vertices of G can be enumerated so that the adjacency matrix of G has the form

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

where $\mathbf{A}_{21}$ is the transpose of $\mathbf{A}_{12}$.

فرض کنید $G(X,Y)$ یک گراف دوبخشی باشد. اگر در ماتریس مجاورت G، ترتیب به گونه‌ای صورت گیرد

XY یا YX (ابتدا تمام رئوس بخش X و سپس تمام رئوس بخش Y و یا برعکس) باشد،

از آن‌جا که رئوس هر بخش تشکیل یک گراف بدون یال می‌دهند، پس ماتریس مجاورت برای هر بخش، یک

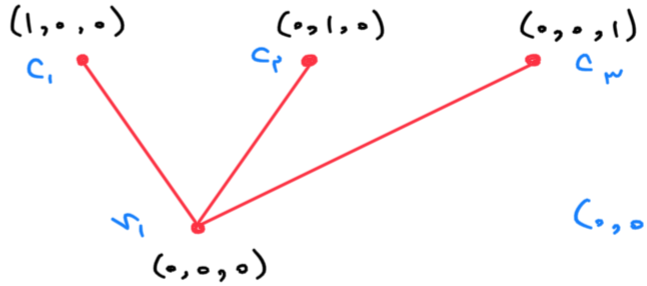
ماتریس صفر است. همچنین بدیهی است ماتریس مجاورت $Y\overset{X}{[\quad]}$ و $X\overset{Y}{[\quad]}$ ترانهاده‌ی یکدیگرند.

1.4.4 Find a bipartite graph that is not isomorphic to a subgraph of any k-cube.

* لم. هر دو راس دلخواه متمایز در یک گراف k-cube، حداکثر ۲ همسایه‌ی مشترک دارند.

اثبات (برهان خلف). فرض کنید v_1 و v_2 دو راس از یک گراف k-cube باشند که حداقل ۳ همسایه‌ی مشترک

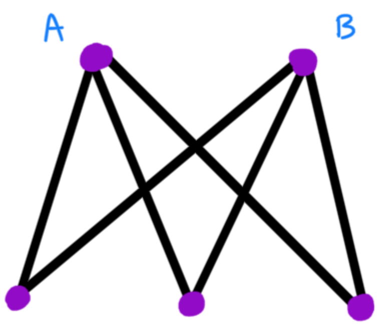
دارند. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید v_1 و سه همسایه‌ی آن به صورت زیر باشند:



چون v_2 هم به c_1 و هم به c_2 وصل است و c_1 و c_2

در ۲ رقم متمایز هستند، پس v_2 باید یا به صورت $(0,0,0)$

یا به صورت $(1,1,0)$ باشد که حالت اول همان v_1 است و حالت دوم نمی‌تواند به c_3 وصل باشد.



پس گراف دو بخشی روبه‌رو، زیرگرافی از هیچ گراف k-cube نمی‌تواند

باشد چون A و B، ۳ همسایه‌ی مشترک دارند.

1.4.5* Let G be simple and let n be an integer with $1 < n < \nu - 1$. Show that if $\nu \geq 4$ and all induced subgraphs of G on n vertices have the same number of edges, then either $G \cong K_\nu$ or $G \cong K_\nu^c$.

حکم را با استقرا روی ν اثبات می‌کنیم.

پایه: $\nu = 4 \Rightarrow n = 2$. اگر گراف کامل یا تهی نباشد، پس وجود دارد راسی که به یک راس

وصل و به راسی وصل نباشد. با انتخاب دو راس اول، ۱ یال و با انتخاب دو راس دوم، هیچ یالی

نخواهیم داشت.

فرض: حکم برای $r \geq 4$ برقرار باشد.

گام: برای $r+1$ داریم:

* اگر $n < r-1$: یک راس (u) را حذف می‌کنیم. طبق فرض استقرا، گراف حاصل یا تهی است یا کامل.

اگر کامل باشد، پس m (تعداد یال‌های موجود در هر زیرگراف القایی n راسی) $= \binom{n}{2}$. پس با شامل

شدن راس حذف شده در یک مجموعه‌ی n راسی، زیرگراف القایی حاصل، باید $\binom{n}{2}$ یال داشته باشد.

پس راس حذف شده نیز باید به همه‌ی رئوس دیگر متصل باشد. $\Leftarrow$ G کامل است.

اگر $G-u$ تهی باشد، پس $m=0$ $\Leftarrow$ G نمی‌تواند یال داشته باشد $\Leftarrow$ G تهی است.

* اگر $n = r-1$: یعنی به ازای هر دو راس، تعداد یال‌هایی که حداقل یکی از رئوس انتهایی آن، یکی از

آن دو راس باشد، برابر است. با برهان خلف ثابت می‌کنیم راسی وجود ندارد که به یک راس متصل

و به راسی متصل نباشد.

لم: به ازای هر راس دلخواه از G، درجه‌ی تمام رئوس متصل به آن راس، باهم (d_1) برابر و درجه‌ی

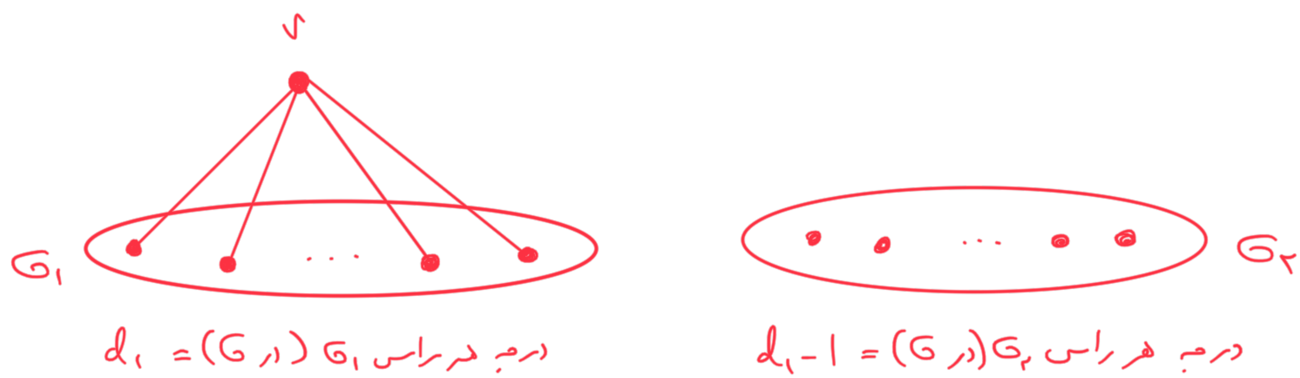
تمام رئوسی که به آن متصل نیستند نیز با هم برابر است و یک واحد از d_1 کمتر است.

اثبات. فرض کنید v راسی از G باشد که به حداقل یک راس متصل و به حداقل یک راس متصل نیست.

$$\forall u_1, u_2 \in N(v) \quad d(v) + d(u_1) - 1 = d(v) + d(u_2) - 1 \Rightarrow d(u_1) = d(u_2)$$

$$\forall u'_1, u'_2 \in G - \{v, N(v)\} \quad d(v) + d(u'_1) = d(v) + d(u'_2) \Rightarrow d(u'_1) = d(u'_2)$$

$$d(v) + d(u_1) - 1 = d(v) + d(u'_1) \Rightarrow d(u'_1) = d(u_1) - 1$$



از آن جا که G_1 و G_2 گراف های منتظم هستند، هر کدام یا کامل است یا تهی (طبق لم). فرض کنید G_1

کامل باشد. چون یک راس از G_1 هم به v وصل است هم به راسی دیگر از G_1 $\Leftarrow$ $d_1 = d(v)$

$\Leftarrow$ هیچ یالی بین G_1 و G_2 نیست. چون درجه‌ی رئوس در G_1 و G_2 متفاوت است و به تنهایی $d_1 > 1$

تعداد یال‌های باقی مانده از حذف ۲ راس از G_1 با دو راس از G_2 متفاوت خواهد شد. ✗

پس G_1 باید تهی باشد. از آن جا که $d_1 > 1$ $\Leftarrow$ رئوس G_1 به رئوس G_2 متصل هستند.

(چون رئوس G_1 به هم وصل نیستند برای یکی از آن‌ها، راسی از G_2 هست که به آن وصل است.
طبق لم، درجه‌ی این راس از راسی از G_1 که به آن وصل نیست، یک واحد بیشتر است.)

$$\Longrightarrow d_1 - 1 = d_1 + 1 \quad \times$$

در نتیجه، راسی از G وجود ندارد که به حداقل یک راس متصل، و به حداقل یک راس متصل
نباشد. $\Leftarrow$ $G \cong K_n$ یا $G \cong K_n^c$

1.5.3 Show that if a k-regular bipartite graph with $k>0$ has bipartition (X, Y), then $|X|=|Y|$.

از آن جا که تمام یال ها صرفا بین X و Y قرار دارند، کافی است مجموع درجات در هر بخش را برابر قرار دهیم.

$$k|X| = k|Y| \xrightarrow{k\neq 0} |X| = |Y|$$

1.5.5 If G has vertices $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$, the sequence $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_\nu))$ is called a *degree sequence* of G. Show that a sequence $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ of non-negative integers is a degree sequence of some graph if and only if $\sum_{i=1}^{n} d_i$ is even.

$\Rightarrow$: طبق قضیه، مجموع درجات در هر گراف، زوج است.

$\Leftarrow$: به هر راس v_i، به اندازه $\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor$ طوقه می‌دهیم. دنباله‌ای باقی مانده از ۰ و ۱ است که تعداد ۱ ها زوج است. به دلخواه هر ۱ را به یک ۱ دیگر وصل می‌کنیم تا دنباله ۰ شود.