حل تمرین سری سوم نظریه گراف

آناهیتا حیدری

2.1.6 Show that if G is a tree with $\Delta \geq k$, then G has at least k vertices of degree one.

راس با درجه ی Δ را حذف می‌کنیم. حداقل k مولفه ی همبندی باقی می ماند. هر مولفه یا تک راس (پس در G درجه 1 است.) و یا درخت است که طبق قضیه، حداقل ۲ راس درجه 1 دارد. بدیهی است v به حداکثر یکی از این رئوس متصل است (وگرنه دور خواهیم داشت). $\Leftarrow$ G حداقل k راس درجه 1 دارد.

2.1.9 Show that if G is a forest with exactly $2k$ vertices of odd degree, then there are k edge-disjoint paths $P_1, P_2, \ldots, P_k$ in G such that $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_k)$.

حکم را با استقرا روی k اثبات می‌کنیم.

پایه $(k=0)$ $\Leftarrow$ G گراف بدیهی است $\Leftarrow$ یال ندارد ✓

فرض (k) و گام $(k \to k+1)$: چون $k>0$ ، G حداقل یک مولفه ی غیربدیهی دارد. می دانیم هر مولفه در جنگل، درخت است. $\Leftarrow$ در مولفه ی غیربدیهی G ، حداقل ۲ راس درجه 1 وجود دارد. طبق قضیه، بین این دو راس یک مسیر یکتا وجود دارد. با حذف یال های این مسیر از G ، دقیقا ۲ راس فرد، زوج می‌شوند.

طبق فرض استقرا، حکم برای گراف حاصل برقرار است و با اضافه کردن P_{k+1} که همان مسیر حذف شده

است، حکم اثبات می‌شود.

2.1.10* Show that a sequence $(d_1, d_2, \ldots, d_\nu)$ of positive integers is a degree sequence of a tree if and only if $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$.

$(\Rightarrow)$: می‌دانیم در هر درخت، $|E| = \nu - 1 \Rightarrow \sum d_i = 2(\nu - 1)$ ✓

$(\Leftarrow)$: استقرا روی ν. پایه $(\nu = 2)$: $d_1 + d_2 = 2 \Rightarrow d_1 = d_2 = 1$ ✓ 

فرض (ν) و حکم $(\nu \to \nu + 1)$:

$$\left\lfloor \frac{2(\nu-1)}{\nu} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor -\frac{2}{\nu} \right\rfloor = 2 - \left\lceil \frac{2}{\nu} \right\rceil \overset{\nu > 2}{=} 1$$

طبق لانه‌کبوتری، راسی (v_i) وجود دارد که درجه ۱ باشد.

$$\left\lceil \frac{2(\nu-1)}{\nu} \right\rceil = 2 + \left\lceil -\frac{2}{\nu} \right\rceil = 2 - \left\lfloor \frac{2}{\nu} \right\rfloor \overset{\nu > 2}{=} 2$$

طبق لانه‌کبوتری، راسی (v_j) وجود دارد که درجه‌ی آن، حداقل ۲ باشد.

اکنون از دنباله‌ی داده شده $(d_1, \ldots, d_{\nu+1})^*$، d_i را حذف و از d_j یک واحد کم می‌کنیم. $\Rightarrow$ از مجموع درجات، ۲ واحد کم می‌شود

طبق فرض استقرا، درختی برای دنباله‌ی حاصل وجود دارد. اکنون به این درخت، یک راس (v_i) افزوده، و آن را به

v را وصل می‌کنیم. گراف نهایی همبند با v یال $\Rightarrow$ درخت است با دنباله * ✓

2.1.11 Let T be an arbitrary tree on $k+1$ vertices. Show that if G is simple and $\delta \geq k$ then G has a subgraph isomorphic to T.

استقرا روی k. پایه $(k=0)$: بدیهی.

فرض (k) و حکم $(k \to k+1)$: از T، $\underbrace{\text{یک برگ}}_{v_l}$ حذف می‌کنیم. $k+1$ راس می‌ماند. طبق فرض استقرا،

G زیرگرافی یکریخت با $\underbrace{\text{این درخت}}_{T'}$ دارد. اکنون راس متناظر با والد v_l را در G در نظر بگیرید.

T'، $k+1$ راس دارد و $\delta_G \geq k+1 \Rightarrow$ این راس به حداقل $\underbrace{\text{یک راس دیگر}}_{v'}$ خارج از این زیرگراف دارد.

$\Rightarrow$ با افزودن v' به T'، حکم اثبات می‌شود.

2.2.6 Show that

(*a*) if each degree in G is even, then G has no cut edge;
(*b*) if G is a k-regular bipartite graph with $k \geq 2$, then G has no cut edge.

(a) برهان خلف. فرض کنید e یک یال برشی در G و G_1 یکی از مولفه‌های همبندی $G-e$ باشد.

$$\underbrace{\sum_{v_i \in G_1} \deg_{G_1}(v_i)}_{\text{زوج}} = \underbrace{\left(\sum_{v_i \in G_1} \deg_{G}(v_i)\right) - 1}_{\text{فرد}}$$

$\Rightarrow$ مجموع درجات رئوس G_1 در G، فرد است

$\Rightarrow$ حداقل یک راس فرد داریم ※

(ط) برهان خلف. فرض کنید e یک یال برشی در G باشد $\Leftarrow$ $G-e$ دارای ۲ مولفه است که هر کدام دوبخشی $(\underbrace{X_i}_{n_1}, \underbrace{Y_i}_{n_2})$ و کامل یک راس درجه $k-1$ است و باقی درجه k هستند. برای یکی از مولفه‌ها داریم:

$$k n_1 = k(n_2 - 1) + k - 1 \Rightarrow 1 = k(n_2 - n_1) \Rightarrow n_2 - n_1 = \frac{1}{k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k = 1 \quad ※ \quad (k \geqslant 2)$$

2.2.12* Let S be an n-element set, and let $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ be a family of n distinct subsets of S. Show that there is an element $x \in S$ such that the sets $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ are all distinct.

باید نشان دهیم x از S وجود دارد که تفاوت هیچ دو A_i، فقط x نباشد.

گراف G را به این صورت تعریف می‌کنیم: $V(G) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

$A_i \sim A_j \iff A_i , A_j$ فقط در یک عضو متفاوت باشند

این یال را با همان عضو رنگ می‌کنیم. هر رنگ که در یک دور از G ظاهر شود، باید به تعداد زوج ظاهر شود.

(چون با شروع از یک راس و طی کردن آن دور، در نهایت به همان راس می‌رسیم.)

پس با انتخاب یک زیرگراف از G که هر رنگ را دقیقا ۱ بار شامل شود، این زیرگراف دور نخواهد

داشت $\Rightarrow$ جنگل است $\Rightarrow$ حداکثر $n-1$ یال دارد $\Rightarrow$ عضوی از S وجود دارد که روی هیچ یالی نیست ✓

2.3.2 Show that a simple connected graph that has exactly two vertices which are not cut vertices is a path.

لم. به ازای هر راس v از گراف همبند G، زیردرخت فراگیر T موجود است به طوری که $d_G(v) = d_T(v)$.

چنین زیردرخت فراگیری از G را درنظر بگیرید. طبق قضیه، هر برگ در این درخت، غیر برشی است و

از آن جا که فراگیر است، در G نیز غیر برشی است. می‌دانیم هر درخت، حداقل Δ برگ دارد

$\Leftarrow \quad \Delta(G) = 2$

اکنون کافیست ثابت کنیم G دور نیست. برهان خلف. اگر G دور باشد، هر راس آن غیر برشی است

← حداقل ۳ راس غیر برشی دارد. ✗.

2.4.5 (*a*) Let H be a graph in which every two adjacent vertices are joined by k edges and let G be the underlying simple graph of H. Show that $\tau(H) = k^{\nu-1}\tau(G)$.

(*b*) Let H be the graph obtained from a graph G when each edge of G is replaced by a path of length k. Show that $\tau(H) = k^{\epsilon-\nu+1}\tau(G)$.

(*c*) Deduce from (*b*) that $\tau(K_{2,n}) = n2^{n-1}$.

(a) استقرا روی تعداد یال‌های G. پایه ($\epsilon = 0$) $\xleftarrow{\nu=1}$ $\tau(H) = \tau(G)$ ✓

$\xleftarrow{\nu>1}$ $\tau(G) = 0 \Rightarrow \tau(H) = 0$ ✓

فرض (ϵ) و حکم ($\epsilon \to \epsilon+1$):

یال e از H را درنظر بگیرید. زیردرخت‌های فراگیر H را می‌توان به دو دسته افراز کرد:

① شامل یالی از دو راس پایانی e باشند ← $k.\tau(H.e)$

② شامل یالی از دو راس پایانی e نباشند ← $\tau(H-a)$

← e و تمام k−1 یال موازی با e

$$\tau(H) = \tau(H-a) + \tau(H.e) = k^{\nu-1}\tau(G-e) + k.k^{\nu-2}.\tau(G.e)$$

$$= k^{\nu-1}(\tau(G-e) + \tau(G.e)) = k^{\nu-1}\tau(G) ✓$$

(ط) استقرا روی تعداد یال‌های G. پایه: $\epsilon = 0$ ✓

برای یک یال از G (e)، زیردرخت فراگیر از H، k یا $k-1$ یال از مسیر جایگزین شده به جای آن یال را شامل می‌شود.

یعنی P_e حذف و رئوس سر و ته آن یکی شوند.

$$\Rightarrow \tau(H) = \tau(H \cdot P_e) + \underline{k} \cdot \tau(H - \{\text{رئوس درونی در } P_e\})$$

چون k حالت برای حذف یک یال از P_e داریم

$$= k^{(\epsilon-1)-(v-1)+1} \tau(G \cdot e) + k\left(k^{(\epsilon-1)-v+1} \tau(G - e)\right)$$

$$= k^{\epsilon - v + 1}\left(\tau(G \cdot e) + \tau(G - e)\right) = k^{\epsilon - v + 1} \tau(G) \checkmark$$

(c)

$$\tau(H) = n \qquad \Longrightarrow \tau(K_{2,n}) = 2^{n-2+1} \tau(H) = 2^{n-1} n \checkmark$$

جایگزینی هر یال با مسیر به طول ۲

H:  $\}$ n یال موازی