حل تمرین سری چهارم نظریه گراف

آناهیتا حیدری

3.1.1 (*a*) Show that if G is k-edge-connected, with $k>0$, and if E' is a set of k edges of G, then $\omega(G-E')\leq 2$.

(*b*) For $k>0$, find a k-connected graph G and a set V' of k vertices of G such that $\omega(G-V')>2$.

(a) اگر E' یک برش یالی از G نباشد که حکم واضح است. پس فرض کنید یک برش یالی باشد.

$\omega(G-E') \geq 2 \Leftarrow$. از طرفی چون هر یال حداکثر ۲ مولفه‌ی همبندی را به هم وصل می‌کند، اگر

$\omega(G-E') \geq 3 \Leftarrow$ E' زیرمجموعه‌ای سره مانند E'' دارد که برش یالی از G است

$|E''| < k \Rightarrow$ G تناقض با فرض k-همبند یالی بودن $\Rightarrow \omega(G-E') = 2$ ✓

(b) $K_{k,m}$ $\quad m>2>k \Rightarrow \kappa(K_{k,n}) = k$

با حذف بخشی که k راس دارد، m مولفه باقی می‌ماند.

3.1.2 Show that if G is k-edge-connected, then $\varepsilon \geq k\nu/2$.

$k \leq \kappa'$

$\kappa' \leq \delta \Rightarrow k \leq \delta \Rightarrow \frac{k \cdot v}{2} \leq \varepsilon$

3.1.6 Show that if G is simple and 3-regular, then $\kappa = \kappa'$.

(حالت بندی روی κ) . با توجه به اینکه $\kappa \leq \kappa' \leq 3$ ، حکم برای ۳ یا $\kappa = 0$ واضح است .

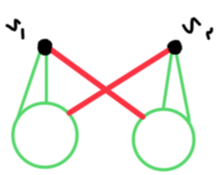
① $\kappa = 1$: (راس برشی) . $G - v$ حداقل ۲ مولفه دارد . طبق لانه کبوتری، v به حداقل یکی از این مولفه‌ها با

$\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$ یال متصل است $\Leftarrow$ یال برشی دارد $\Leftarrow$ $\kappa' = 1$ ✓

② $\kappa = 2$: $S = \{v_1, v_2\}$ ، $G - S$ حداقل ۲ مولفه دارد . چون $\kappa \leq \kappa'$ ، پس هر مولفه

به S با حداقل ۲ یال متصل است. اگر حداقل یکی از مولفه‌ها با ۲ یال به S متصل باشد که حل است.

اگر نه، پس هر دو مولفه با حداقل ۳ یال متصل است. با توجه به اینکه گراف ۳-منتظم و ساده است، تنها حالت ممکن



گراف روبه‌رو است .

مطابق شکل، مجموعه شامل ۲ یال قرمز رنگ، یک برش یالی برای G است $\Leftarrow$ $\kappa' = 2$ ✓

3.2.6* Let G be a 2-connected graph and let X and Y be disjoint subsets of V, each containing at least two vertices. Show that G contains disjoint paths P and Q such that

(i) the origins of P and Q belong to X,
(ii) the termini of P and Q belong to Y, and
(iii) no internal vertex of P or Q belongs to $X \cup Y$.

اگر در $G[X]$ یال نباشد، یک یال دلخواه به آن اضافه می‌کنیم. مشابها برای $G[Y]$. گراف همچنان ۲-همبند باقی می‌ماند. اکنون طبق قضیه، این دو یال روی دور مشترک هستند. یال‌های اشتراک این دور با $G[X]$ را حذف می‌کنیم و مشابها برای $G[Y]$. باقی‌مانده‌ی دور، ۲ مسیر مطلوب هستند.

---

* عدد همبندی راسی و یالی حاصل‌ضرب دکارتی دو مسیر مرتبه n و m و همچنین حاصل‌ضرب دکارتی دو دور مرتبه n و m را بدست آورید.

Theorem 1 (Špacapan [8]) *If G and H are nontrivial graphs, then*

$$\kappa(G \square H) = \min\{\kappa(G)|V(H)|,\, \kappa(H)|V(G)|,\, \delta(G)+\delta(H)\}.$$

* لم. $\delta(P_n \square P_m) = \delta(P_n) + \delta(P_m)$.

برهان. در مسیر، رئوس انتها کمترین درجه را دارند. پس در $P_n \square P_m$، کمترین درجه برای رأس گوشه‌ای است که درجه‌ی هرکدام، $\delta(P_n)+\delta(P_m)$ است.

ثابت می‌کنیم $\boxed{\kappa(G)=\kappa'(G)=\delta(G)}$ که $G=P_n \square P_m$.

① هر دو مسیر، بدیهی باشند: $\kappa(G)=\kappa'(G)=\delta(G)=0$ ✓

② دقیقا یکی از مسیرها، بدیهی باشد: G یک مسیر غیربدیهی می‌شود $\Leftarrow$ $\kappa(G)=\kappa'(G)=\delta(G)=1$ ✓

③ هر دو مسیر نابدیهی باشند: طبق قضیه بالا داریم:

$$\kappa(G)=\min\{m,n,2\} \overset{m,n\geq 2}{=} 2 \Longrightarrow \kappa(G)=\kappa'(G)=\delta(G)=2 \checkmark$$

* لم. $\delta(C_m \square C_n)=\delta(C_m)+\delta(C_n)=4$.

برهان. این گراف راس ترایاست $\Leftarrow$ ۴ - منتظم است.

Theorem 2. A Cartesian product is vertex transitive if and only if each of its factors is.

ثابت می‌کنیم $\kappa(G)=\kappa'(G)=\delta(G)$ که $G=C_m \square C_n$.

طبق قضیه 1 داریم:

$$\kappa(G)=\min\{2n,\ 2m,\ \delta(G)=4\} \underset{n,m\geq 3}{=} 4$$

$$\Longrightarrow \boxed{\kappa(G)=\kappa'(G)=\delta(G)=4} \checkmark$$