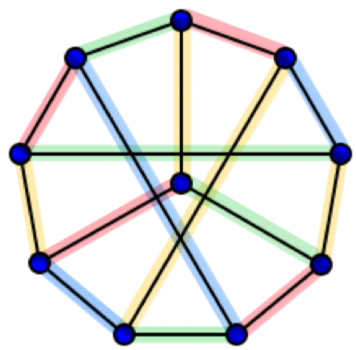
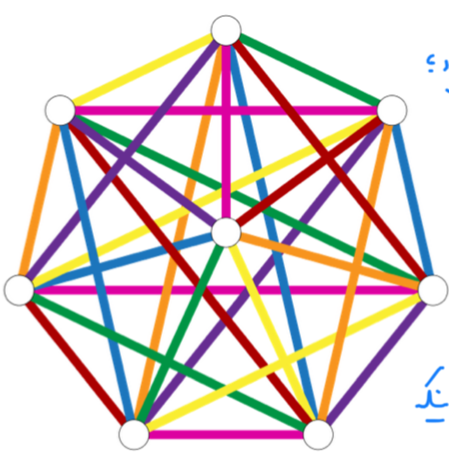
حل تمرین سری ششم نظریه گراف

آناهیتا میری

6.1.2 Show that the Petersen graph is 4-edge-chromatic.



6.2.1* Show, by finding appropriate edge colourings, that $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n-1$.



*Wikipedia

① برای K_{2n}: مطابق شکل، یک راس به عنوان راس مرکزی قرار می‌گیرد؛

به هر راس با رنگ متفاوت متصل می‌شود و هر راس دیگر، به ترتیب،

یال e_i به رنگ c_i

خود نسبت به امتداد e_i $(1 \leq i \leq 2n-1)$ با c_i رنگ می‌شود. با توجه به اینکه

برای هر c_i مطابق ساختار گفته شده، یک تطابق کامل داریم و درجه‌ی راس مرکزی، $2n-1$ است،

$\chi'(K_{2n}) = 2n-1$ نتیجه می‌شود.

② برای K_{2n-1} : طبق قضیه ویزینگ، $2n-2 \le \chi' \le 2n-1$. با برهان خلف نشان می‌دهیم

$\chi' \neq 2n-2$. چون تعداد رأس‌ها فرد است، سایز هر تطابق از K_{2n-1}، حداکثر $n-1$ است.

$$\Rightarrow q = (n-1)(2n-1) \le (n-1)(2n-2) \quad \times \quad \Rightarrow \chi'(K_{2n-1}) = 2n-1 .$$

6.2.2 Show that if G is a nonempty regular simple graph with ν odd, then $\chi' = \Delta + 1$.

برهان خلف. فرض کنید $\chi' = \Delta$.

ν فرد است $\Rightarrow \forall M \quad |M| \le \frac{\nu-1}{2} \Rightarrow \Delta\cdot\frac{\nu-1}{2} < q = \frac{\Delta\cdot\nu}{2} \quad \times$

6.2.5 G is called ***uniquely k-edge-colourable*** if any two proper k-edge colourings of G induce the same partition of E. Show that every uniquely 3-edge-colourable 3-regular graph is hamiltonian.

(D. L. Greenwell and H. V. Kronk)

لم. اگر G یک گراف مکعبی و از کلاس ۱ باشد ⇐ تطابق کامل دارد.

اثبات. $3m \ge \frac{3\nu}{2} \Rightarrow m \ge \frac{\nu}{2}$ $\qquad m = \min\{|M_1|, |M_2|, |M_3|\}$

از طرفی برای هر تطابق، همواره داریم: $|M| \le \frac{\nu}{2}$ ⇐ $m = \frac{\nu}{2}$ ⇐ هر سه تطابق، کامل هستند.

اکنون یک ۳- رنگ آمیزی یالی مجاز از G را در نظر بگیرید و همه ی یال های یک رنگ را از آن حذف کنید. چون

یک تطابق کامل از G حذف شده است، گراف حاصل، اجتماعی از دورهاست. اگر تعداد این دورها ۱ نباشد

(یعنی همیلتونی نباشد)، طبق اصل ضرب، با ثابت نگه داشتن رنگ آمیزی یالی یک دور، دوری دیگر ۲ حالت دارد و

این تناقض است.

7.1.1 (*a*) Show that G is bipartite if and only if $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}\nu(H)$ for every subgraph H of G.

$\Rightarrow$: اگر G دوبخشی باشد، به ازای هر زیرگراف H از G، حداقل $\left\lceil \frac{v(H)}{2} \right\rceil$ راس در یک بخش هستند و

مستقل هستند.

$\Leftarrow$: برهان خلف. پس حداقل یک دور فرد (C_v) وجود دارد $\Leftarrow$ $\frac{v}{2} > \frac{v-1}{2} = \alpha(C_v)$ $\times$

8.4.3 (*a*) Show that if G is a tree, then $\pi_k(G) = k(k-1)^{\nu-1}$.

(*b*) Deduce that if G is connected, then $\pi_k(G) \leq k(k-1)^{\nu-1}$, and show that equality holds only when G is a tree.

(a) G را از یک راس دلخواه آویزان می کنیم. این ریشه به k طریق رنگ می شود و برای باقی، به ترتیب عمق،

رنگ می‌کنیم. در هر سطح، چون هر راس دقیقاً یک والد دارد به $k-1$ طریق رنگ می‌شود. طبق

اصل ضرب داریم: $\pi_k(G) = k(k-1)^{v-1}$.

(ط) با درنظر گرفتن یک زیردرخت فراگیر T از G نتیجه می‌شود: $\pi_k(G) \leq k(k-1)^{v-1}$.

طبق توضیحات (ه)، رنگ‌آمیزی هر راس به جز ریشه، $k-1$ حالت دارد اگر و تنها اگر این راس در G

فقط به والد خود در T متصل باشد و این یعنی G همان T است.

8.4.4 Show that if G is a cycle of length n, then $\pi_k(G) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

استقرای قوی روی n.

پایه ← $(n=3)$:

$$k(k-1)(k-2) \stackrel{?}{=} (k-1)^3 - (k-1) = (k-1)\underbrace{((k-1)^2-1)}_{k(k-2)} \quad \checkmark$$

← $(n=4)$:

$$k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2)^2 = k(k-1)(k^2-3k+3)$$

$$(k-1)^4 + (k-1) = (k-1)((k-1)^3+1) = (k-1)(k^3-3k^2+3k) \quad \checkmark$$

گام ۱. یک راس دلخواه v از G را درنظر بگیرید. ۲ حالت دارد.

① همسایه‌های v همرنگ باشند: v را حذف و همسایه‌هایش را یکی می‌کنیم. گراف حاصل C_{n-2} است.
در این حالت پس از رنگ‌آمیزی C_{n-2} با k رنگ، با بازگشت به G، v، $(k-1)$ حالت دارد.

② همسایه‌های v همرنگ نباشند: v را حذف و همسایه‌هایش را به هم متصل می‌کنیم. گراف حاصل C_{n-1} است.
در این حالت پس از رنگ‌آمیزی C_{n-1} با k رنگ، با بازگشت به G، v، $(k-2)$ حالت دارد.

$$\Longrightarrow \pi_k(G) = (k-1)\,\pi_k(C_{n-2}) + (k-2)\,\pi_k(C_{n-1})$$

$$= (k-1)\left((k-1)^{n-2} + (-1)^{n-2}(k-1)\right) + (k-2)\left((k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\right)$$

$$= (k-1)^{n-1} + (k-2)(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}(k-1)^2 + (-1)^{n-1}(k-1)(k-2)$$

$$= (k-1)^n + (-1)^n(k-1) \quad \checkmark$$

9.3.1 (*a*) Show that if G is a connected planar graph with girth $k \geq 3$, then $\varepsilon \leq k(\nu-2)/(k-2)$.
(*b*) Using (*a*), show that the Petersen graph is nonplanar.

(a) طبق قضیه اویلر: $v - \varepsilon + \phi = 2 \Longrightarrow \phi = 2 - v + \varepsilon$

از طرفی به ازای هر وجه ، حداقل k یال داریم $\Leftarrow$ $2\varepsilon \geqslant k\phi$

$$\Longrightarrow 2\varepsilon \geqslant k(2-\nu+\varepsilon) \Longrightarrow k(\nu-2) \geqslant \varepsilon(k-2) \Longrightarrow \varepsilon \leqslant \frac{k(\nu-2)}{k-2}.$$

(b) $15 \not\leqslant \frac{5\times 8}{3} = 13\frac{1}{3} \Longrightarrow$ مسطح نیست

9.3.3 (*a*) Show that if G is a simple planar graph with $\nu \geq 11$, then G^c is nonplanar.
(*b*) Find a simple planar graph G with $\nu = 8$ such that G^c is also planar.

(a) G مسطح و $\nu \geqslant 3$ $\Leftarrow$ $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$ $\Leftarrow$ $\binom{\nu}{2} - \varepsilon' \leqslant 3\nu - 6$

از طرفی اگر G^c نیز مسطح باشد : $\varepsilon' \leqslant 3\nu - 6$

$$\Longrightarrow \binom{\nu}{2} \leqslant 6\nu - 12 \Longrightarrow \nu^2 - 13\nu + 24 \leqslant 0 \Longrightarrow 3 \leqslant \nu \leqslant 10.$$

(b)