حل تمرین سری دوم نظریه گراف

آناهیتا میری

1.6.2 Show that the number of (v_i, v_j)-walks of length k in G is the (i, j)th entry of $\mathbf{A}^k$.

استقرا روی k: برای $k=1$ تعداد چنین گذرهایی همان تعداد یال‌های بین v_i و v_j است. پس حکم

برقرار است. فرض کنید حکم برای k $(k \geq 1)$ برقرار باشد. برای $k+1$ داریم:

تعداد گذرهای به طول $k+1$ از v_i به v_j برابر است با مجموع تعداد گذرهای به طول k از v_i به هر یک

از همسایه‌های v_j. از طرفی درایه‌ی (i,j) از $A^{k+1} = A^k A$، حاصل جمع ضرب هر یک از درایه‌های

سطر iام از A^k (یعنی تمام گذرهای به طول k با شروع از v_i) در درایه‌ی متناظر با آن در ستون jام از

A (ناصفر است $\Longleftrightarrow$ راس همسایه‌ی v_j باشد). پس داریم:

✓ تعداد گذرهای به طول $k+1$ از v_i به v_j = مجموع تعداد گذرهای به طول k از v_i به هر یک از همسایه‌های v_j = $A^{k+1}[i, j]$

1.6.3 Show that if G is simple and $\delta \geq k$, then G has a path of length k.

راس دلخواه v_0 از G را در نظر بگیرید. به حداقل k راس وصل است. یکی از آن‌ها را v_1 می‌نامیم. v_1 به جز v_0

به حداقل $k-1$ راس دیگر وصل است... با ادامه‌ی این روند درنهایت v_{k-1} به حداقل یک راس وصل است که با v_0

تا v_{k-2} متفاوت است. آن را v_k می‌نامیم. $v_0 v_1 \dots v_k$ یک مسیر به طول k است.

1.6.6 (*a*) Show that if G is simple and $\delta > [\nu/2] - 1$, then G is connected.
(*b*) Find a disconnected $([\nu/2]-1)$-regular simple graph for ν even.

(a) برهان خلف. G حداقل ۲ مولفه همبندی دارد. در هر مولفه، $\delta \geq \lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor \Leftarrow$ هر مولفه حداقل

$\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor + 1$ راس دارد $\Leftarrow$ G حداقل $\nu + 1 \leq 2\left(\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor + 1\right)$ راس دارد. ※

(b) G با دو مولفه همبندی $G_1 \cong G_2 \cong K_{\frac{\nu}{2}}$ که هر دو $\left(\frac{\nu}{2}-1\right)$-منتظم هستند.

1.6.9 Show that if G is connected and each degree in G is even, then, for any $v \in V$, $\omega(G-v) \leq \frac{1}{2}d(v)$.

لم. تعداد یال‌های بین v و هر مولفه‌ی $G-v$ زوج است.

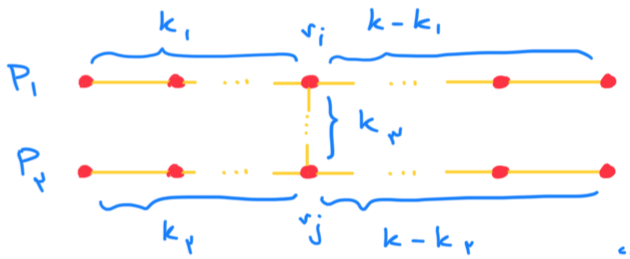
اثبات. برهان خلف. فرض کنید G_1 مولفه‌ای از $G-v$ باشد که $\underbrace{\text{تعداد یال‌های بین آن و } v \text{، فرد باشد}}_{m}$.

$$\text{مجموع درجات رئوس در } G_1 = \underbrace{\sum_{v_i \in V(G_1)} d(v_i)}_{\text{زوج}} - \underbrace{m}_{\text{فرد}} \in \text{اعداد فرد} \quad ※$$

چون G همبند است، طبق لم، از هر مولفه ی $G-v$ حداقل ۲ یال به v وصل است (اگر G تک

راس باشد حکم واضح است). $\Leftarrow$ $d(v) \geqslant 2\,\omega(G-v) \Longrightarrow \frac{1}{2}\,d(v) \geqslant \omega(G-v)$

1.6.10 Show that any two longest paths in a connected graph have a vertex in common.



برهان خلف. فرض کنید P_1, P_2 دو مسیر با بیشترین طول (به طول k) باشند که راس مشترکی ندارند. چون G همبند است، بین هر دو راس حداقل یک مسیر وجود دارد. کوتاه‌ترین مسیر بین هر یک از رئوس P_1 با هر یک از رئوس P_2 را در نظر بگیرید (فرض کنید این مسیر بین v_i از P_1 و v_j از P_2، به طول $k_3 \geqslant 1$ باشد). چون کوتاه‌ترین مسیر است، نمی‌تواند به جز v_i و v_j در راس دیگری با P_1 و P_2 مشترک باشد. اکنون داریم:

$$\max(k_1, k-k_1) + k_3 + \max(k_2, k-k_2) \geqslant \frac{k}{2} + k_3 + \frac{k}{2} \geqslant k+1$$

یعنی مسیری با طول حداقل $k+1$ وجود دارد که تناقض است.

1.6.12 The *diameter* of G is the maximum distance between two vertices of G. Show that if G has diameter greater than three, then G^c has diameter less than three.

کافیست نشان دهیم هر دو راس در G^c یا به هم وصل هستند یا همسایه مشترک دارند. فرض کنید

u و v دو راس از G باشند که $d(u,v) > 3$. ۲ راس دلخواه w و z از G را درنظر بگیرید. از آن جا

که بین u، v، z و w حداکثر ۴ راس متفاوت وجود دارد و $d(u,v) \geq 4$، پس $G[\{u,v,w,z\}]$

نمی‌تواند همبند باشد. برای این زیرگراف القایی ۲ حالت داریم:

① w و z در یک مولفه همبندی نباشند $\Leftarrow$ پس w و z به هم وصل نیستند $\Leftarrow$ w و z در G^c به هم وصل هستند ✓

② w و z در یک مولفه همبندی باشند $\Leftarrow$ از آن جا که حداکثر یکی از رئوس u و v می‌تواند در این مولفه باشد،

پس حداقل یکی از آن دو به هیچ کدام وصل نیست $\Leftarrow$ این راس در G^c به هر دوی w و z وصل است ✓

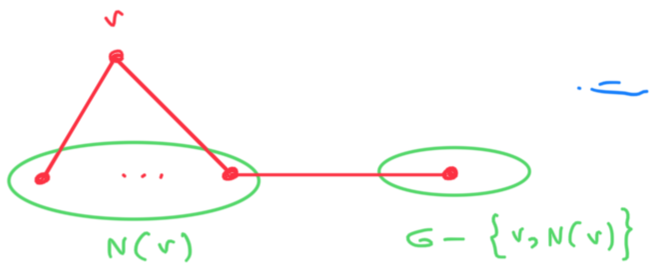
$\to n \geq 3$

1.6.14 Show that if G is simple and connected but not complete, then G has three vertices u, v and w such that $uv, vw \in E$ and $uw \notin E$.

راس دلخواه v که حداقل ۲ همسایه دارد را درنظر بگیرید. اگر $G[N(v)]$ کامل نباشد که حل است.

(یعنی حداقل ۲ راس از $N(v)$ موجودند به طوری که به هم وصل نیستند. این سه راس، سه راس مطلوب هستند)

اگر نه، از آن جا که G کامل نیست، $G - \{v, N(v)\}$ حداقل یک راس دارد. چون G همبند است، پس



راسی از $G - \{v, N(v)\}$ به راسی از $N(v)$ وصل است.

این سه راس، سه راس مطلوب هستند.

1.7.3* Show that if G is simple and $\delta \geq 2$, then G contains a cycle of length at least $\delta + 1$.

فرض کنید $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ بلندترین مسیر در G باشد $\Leftarrow$ $N(v_0) \in P$

(چون در غیر این صورت، P طولانی‌ترین مسیر نخواهد بود.) $1 < i \leq k$ را بزرگترین عددی قرار دهید به طوری

که $v_i \in N(v_0)$.

چون $i \geq \delta$، $v_0 v_1 \ldots v_i v_0$ یک دور با حداقل طول $\delta+1$ است.

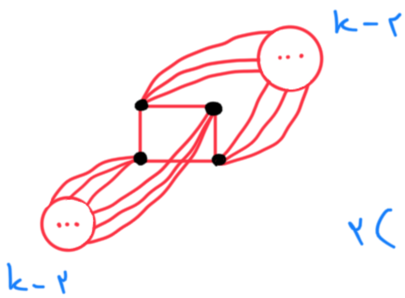
1.7.4 The *girth* of G is the length of a shortest cycle in G; if G has no cycles we define the girth of G to be infinite. Show that

(*a*) a k-regular graph of girth four has at least $2k$ vertices, and (up to isomorphism) there exists exactly one such graph on $2k$ vertices;

(*b*) a k-regular graph of girth five has at least k^2+1 vertices.

(ه) دور به طول ۴ از G را در نظر بگیرید. هر راس آن نمی‌تواند به هیچ کدام از ۳ راس دیگر این دور متصل باشد

یا حتی همسایه‌ی مشترک با ۲ راس مجاورش داشته باشد. برای مینیمم کردن تعداد رئوس، هر راس را به تمام



همسایه‌های راس مقابلش که در این دور نیستند، وصل می‌کنیم.

$$۲(k-۲)+۴=۲k$$

(به ازای هر یک راس که خارج از دایره‌های کشیده شده قرار گیرد، یک واحد به این عدد اضافه می‌شود. پس این گراف کمینه است)

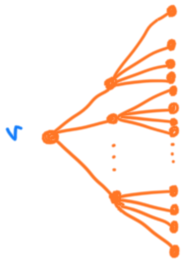
(ط) یک راس دلخواه از این گراف را در نظر بگیرید. به k راس وصل است. هر کدام از همسایه‌هایش به k−1 راس مجزا

وصل هستند (چرا که در غیر این صورت، دور به طول حداکثر ۴ خواهیم داشت).

پس حداقل $1+k+k(k-1)=1+k^2$ راس داریم.

1.7.5 Show that a k-regular graph of girth five and diameter two has exactly k^2+1 vertices, and find such a graph for $k=2, 3$. (Hoffman and Singleton, 1960 have shown that such a graph can exist only if $k=2, 3, 7$ and, possibly, 57.)

مطابق توضیح سوال قبل، گراف روبه‌رو را درنظر بگیرید. از آن جا که قطر ۲ است، بین

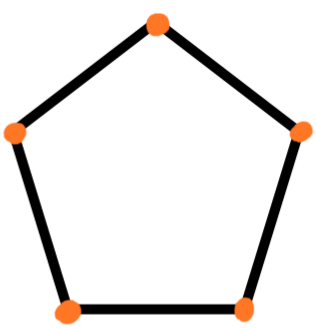


هر ۲ راس دلخواه یا به هم وصل هستند یا همسایه مشترک دارند، پس هیچ کدام از رئوس ستون

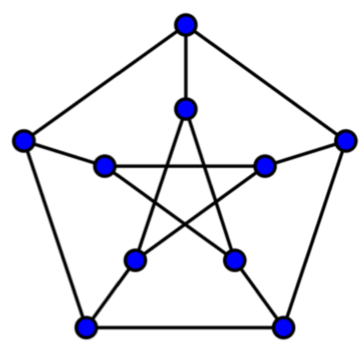
سمت راست، نمی‌توانند به راس دیگری خارج از این k^2+1 راس متصل باشند.

چون در غیر این صورت فاصله‌ی آن راس تا v، ۳ می‌شود. پس این گراف در صورت وجود، دقیقا k^2+1 راس

دارد.



k=۲



k=۳