حل تمرین سری پنجم نظریه گراف

آناهیتا صبری

4.2.1 Show that if either

(*a*) G is not 2-connected, or

(*b*) G is bipartite with bipartition (X, Y) where $|X| \neq |Y|$,

then G is nonhamiltonian.

(a) $\Rightarrow \quad \kappa(G) < 2$

اگر $\kappa(G)=0$ که حکم بدیهی است. اگر نه، پس $\kappa(G)=1 \Leftarrow G$ راس برشی $\underbrace{\text{راس برشی}}_{v}$ دارد.

طبق قضیه ۴.۲، G همیلتونی نیست. $\quad 2 \leqslant \omega(G-v) \nleq 1 \quad \Longrightarrow$

(b) $\quad S = \begin{cases} X & |X|<|Y| \\ Y & \text{o.w.} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \omega(G-S) = \max\{|X|,|Y|\} \nleq \min\{|X|,|Y|\}$

$\Leftarrow$ طبق قضیه ۴.۲، G همیلتونی نیست.

4.2.2 A mouse eats his way through a $3\times3\times3$ cube of cheese by tunnelling through all of the 27 $1\times1\times1$ subcubes. If he starts at one corner and always moves on to an uneaten subcube, can he finish at the centre of the cube?

یک مسیر همیلتونی با ۲۷ راس، ۲۶ یال دارد. اگر گوشه‌ی شروع را $\underbrace{(0,0,0)}_{v_0}$ و مرکز را $\underbrace{(1,1,1)}_{v_{26}}$

در نظر بگیریم، به ازای هر یال، زوجیت مجموع مولفه‌ای در سر یک یال، متفاوت است. پس در صورت

وجود مسیر همیلتونی از v_1 به v_{26} ، باید داشته باشیم : $\quad$ ∴X∴ $\quad$ $0+0+0 \overset{2}{\equiv} 1+1+1$

4.2.3 Show that if G has a Hamilton path then, for every proper subset S of V, $\omega(G-S) \leq |S|+1$.

$S=\emptyset$ * ⇐ $1 = \omega(G) \leqslant 1$ ✓ ⇐ پس در ادامه فرض می‌کنیم S ناتهی باشد.

اگر G همیلتونی باشد ، طبق تمرین برای هر زیرمجموعه‌ی سره و ناتهی S از V داریم :

$$\omega(G-S) \leqslant |S| \Longrightarrow \omega(G-S) \leqslant |S|+1 \quad ✓$$

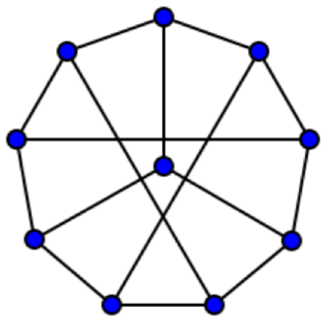
اگر G همیلتونی نباشد ، فرض کنید v_1 و v_n دو راس انتهایی مسیر همیلتونی G باشند. v_1 و v_n را با یک یال به یکدیگر متصل می کنیم ⇐ گراف حاصل (G') همیلتونی است. طبق تمرین داریم :

$$\forall S \neq \emptyset \subset V(G') \qquad \omega(G'-S) \leqslant |S|$$

اکنون با حذف یال v_1v_n از G' ، چون با حذف یک یال ، حداکثر یک واحد به ω افزوده می‌شود ، داریم :

$$\omega(G-S) \leqslant |S|+1 \quad ✓$$

4.2.12 G is *hypohamiltonian* if G is not hamiltonian but $G-v$ is hamiltonian for every $v \in V$. Show that the Petersen graph (figure 4.4) is hypohamiltonian.
(Herz, Duby and Vigué, 1967 have shown that it is, in fact, the smallest such graph.)



از آن جا که گراف پترسن راس‌ترایا است، با توجه به اسم رد به رد

حکم نتیجه می‌شود.

5.1.2 Show that a tree has at most one perfect matching.

استقرای قوی روی تعداد رئوس T .

پایه ($n=1$ و $n=2$): $n=1$ ← بدون تطابق کامل ✓

$n=2$ ← دقیقاً یک تطابق کامل ✓

گام: $n>2$ ⇐ پس T برگ دارد. چون هر برگ ℓ درجه یک است، یک تطابق

کامل از T درصورت وجود، قطعاً شامل آن برگ است. ℓ و همسایه‌ی آن را از T حذف می‌کنیم. گراف حاصل

یک جنگل است و طبق فرض استقرا حکم برای هر مولفه‌ی آن برقرار است. ⇐ طبق اصل ضرب، کل گراف

نیز حداکثر ۱ تطابق کامل دارد.

5.1.3 For each $k > 1$, find an example of a k-regular simple graph that has no perfect matching.

اگر k زوج باشد، تعداد رئوس را فرد درنظر می‌گیریم $\Leftarrow$ تطابق کامل ندارد. اگر k فرد باشد، یک راس

برشی که هر یال آن نیز برشی باشد و مولفه‌های متصل به آن، دلخواه، تطابق کامل ندارد؛ زیرا:

$$o(G-v) = d(v) = k \nleq 1$$

5.1.4 Two people play a game on a graph G by alternately selecting distinct vertices $v_0, v_1, v_2, \ldots$ such that, for $i > 0$, v_i is adjacent to v_{i-1}. The last player able to select a vertex wins. Show that the first player has a winning strategy if and only if G has no perfect matching.

$\Longrightarrow$: عکس نقیض. فرض کنید M یک تطابق کامل از G باشد. با $\underbrace{\text{هر انتخاب بازیکن}}_{v_i}$ اول، بازیکن دوم همیشه

راسی از M را انتخاب می‌کند که در M با v_i، match شده است. پس بازیکن دوم همیشه استراتژی

برد دارد.

$\Leftarrow$: فرض کنید M یک تطابق ماکزیمم از G باشد. چون M کامل نیست، پس حداقل یک راس وجود

دارد که M آن را پوشش نمی‌دهد. نشان می‌دهیم بازیکن اول با $\underbrace{\text{انتخاب چنین راسی}}_{v_0}$، استراتژی برد دارد.

بعد از v_0، بازیکن اول به ازای $\underbrace{\text{هر انتخاب بازیکن دوم}}_{v_i}$، راسی از G را انتخاب می‌کند که در M، با v_i $(i>0)$

match شده است. با توجه به اینکه یک تطابق، ماکزیمم است اگر و تنها اگر مسیر M-augmenting

نداشته باشد و اگر در مرحله‌ای بازیکن اول نتواند راسی را انتخاب کند یعنی مسیر M-augmenting از v_0 تا

آن مرحله وجود دارد، حکم نتیجه می‌شود.