حل تمرین سری سوم منطق

آناهیتا حیدری

8 Let $\mathscr{A}(x_i)$ be a *wf.* of $\mathscr{L}$ in which x_i occurs free, and let x_j be a variable which does not occur free in $\mathscr{A}(x_i)$. Show that if x_j is free for x_i in $\mathscr{A}(x_i)$ then x_i is free for x_j in $\mathscr{A}(x_j)$. $\mathscr{A}(x_j)$ is the result of substituting x_j for every free occurrence of x_i in $\mathscr{A}(x_i)$.

برهان خلف. پس وجود دارد یک subformula به صورت $(\forall x_i)\, B(x_j)$ در $A(x_j)$.

از طرفی چون x_j در $A(x_i)$ آزاد نیست، پس این subformula در $A(x_i)$ به صورت $(\forall x_i) B(x_i)$

بوده است. اما x_i در این فرمول، آزاد نیست پس نباید با x_j در B عوض می‌شده است و این تناقض

است.

---

10 Repeat Exercise 6 for the following terms t.

(*a*) x_2.

(*b*) x_3.

(*c*) $f_1^2(a_1, x_1)$.

(*d*) $f_1^3(x_1, x_2, x_3)$.

$$((\underline{(\forall x_2)} A_1^2(x_2, \underset{f}{f_1^2(x_1}, x_2)) \rightarrow A_1^1(\underset{f}{x_1}))$$

با متغیرهای موجود در ط، c اشتراک

ندارد $\Rightarrow$ با ط و c آزاد است.

$$(\forall x_1)(\forall x_3)(A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))$$ همه آزاد هستند چون x_1 پابنداست

$$(\forall x_2)A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow \underline{(\forall x_3)}A_1^3(\underset{f}{x_1}, x_2, x_3)$$

با a, c آزاد است.

$$\underline{(\forall x_2)}A_1^3(\underset{f}{x_1}, \underset{f}{f_1^1(x_1)}, x_2) \rightarrow \underline{(\forall x_3)}A_1^1(\underset{f}{f_1^2(x_1, x_3)})$$

با c آزاد است.

---

12 Is there an interpretation (of an appropriate language $\mathscr{L}$) in which the *wf*.

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

is interpreted by a statement which is false? If so, describe one in detail. If not, explain why not.

بله. برای مثال:

$$I = (D_I = \mathbb{N},\ \bar{a}_1,\ \underbrace{\bar{f}_1^1 : \bar{a}_1}_{\text{تابع ثابت}},\ A_1^1 : < a_1)$$

$(\forall x_1)(x_1 < a_1 \rightarrow a_1 < a_1)$ که نادرست است.

---

15 In the interpretation described in Exercise 11, find valuations which satisfy and do not satisfy each of the following *wf*s.

(*a*) $A_2^2(x_1, a_1)$.

(*b*) $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow A_2^2(a_1, f_1^2(x_1, x_2))$.

(*c*) $\sim A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$.

(*d*) $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$.

(*e*) $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2)$.

v صدق کند

v' صدق نکند

(a) $x_1 < 0$ $\qquad v(x_1) = -1 \qquad v'(x_1) = 2$

(b) $x_1 - x_2 < x_1 \rightarrow 0 < x_1 - x_2$

$-x_2 < 0 \rightarrow x_2 < x_1 \qquad v(x_1) = 3 \qquad v(x_2) = 2$

$v'(x_1) = 1 \qquad v'(x_2) = 2$

(c) $x_1 \geqslant (x_1 - (x_1 - x_2)) \qquad v(x_1) = 2 \qquad v(x_2) = 2$

$x_1 \geqslant x_2 \qquad v'(x_1) = 2 \qquad v'(x_2) = 4$

(d) $\forall x_1 \ ((x_1 - x_2) < x_3) \qquad v'(x_1) = 4 \qquad v'(x_2) = 1 \qquad v'(x_3) = 2$

$\forall x_1 \ (x_1 < x_2 + x_3)$

v ای وجود ندارد که در این wf صدق کند. علت ← فرض کنید v''، x_1-هم‌ارز v باشد به گونه‌ای که

$v''(x_1) = v(x_2) + v(x_3) \Longrightarrow$ در d صدق نمی‌کند

(e) $(\forall x_1 \ (x_1 - 0) < x_1) \rightarrow x_1 < x_2 \qquad v(x_1) = 1 \qquad v(x_2) = 2$

v' ای وجود ندارد که در این wf صدق نکند. چون به وضوح هر v در $\forall x_1 \ x_1 < x_1$ ~ صدق می‌کند.

17 Which of the following closed *wfs*. are true in the interpretation of Exercise 11, and which are false?

(a) $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$.

(b) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\sim A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1))$.

(c) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_2^2(x_1, x_2) \rightarrow A_2^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$.

(d) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_2^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))$.

(a) $\forall x_1 \quad (0 - x_1) < 0$ نادرست است. به ازای $v(x_1) = -1$

که چون درست نیست، از بسته بودن نتیجه می‌شود نادرست است.

(b) $\forall x_1 \; \forall x_2 \; ((x_1 - x_2) \geqslant x_1)$

نادرست است. کافی است $v(x_2) = 1$ باشد. $x_2 \leqslant 0$

(c) $\forall x_1 \; \forall x_2 \; \forall x_3 \; (x_1 < x_2 \rightarrow (x_1 - x_3) < (x_2 - x_3))$

$x_1 < x_2$

به وضوح $A \rightarrow A$ درست است.

(d) $\forall x_1 \; \exists x_2 \quad x_1 < (x_1 - x_2) - x_2$

درست است. کافی است $v(x_2) = -1$ باشد. $0 < -2x_2$

---

19 Show that each of the following *wfs*. is logically valid.

(a) $((\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2))$.

فرض کنید I یک تعبیر دلخواه و v یک مقداردهی دلخواه از آن باشد. ثابت می‌کنم v در a صدق می‌کند.

برهان خلف. فرض کنید v در بخش اول صدق کند اما در بخش دوم صدق نکند. برای بخش اول داریم:

وجود دارد v_1 که ۱- هم‌ارز با v است و در $\forall x_2\, A_1^2(x_1,x_2)$ صدق می‌کند. پس هر v_2 که ۲- هم‌ارز با v_1 باشد، در $A_1^2(x_1,x_2)$ صدق می‌کند.

از طرفی چون v در بخش دوم صدق نمی‌کند داریم:

وجود دارد v_1' که ۲- هم‌ارز با v است و در $\exists x_1\, A_1^2(x_1,x_2)$ صدق نمی‌کند. پس وجود ندارد v_2' که ۱- هم‌ارز با v_1' باشد و در $A_1^2(x_1,x_2)$ صدق کند. اما طبق قبل، مقداردهی v_3 که $v_3(x_1)=v_1(x_1)$ و قرار می‌دهیم $v_3(x_2)=v_1'(x_2)$ ، در $A_1^2(x_1,x_2)$ صدق می‌کند و این تناقض است.

$$(b) \qquad (\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow \underbrace{((\forall x_1)A_2^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^1(x_2))}_{B}.$$

برهان خلف. فرض کنید v در $\forall x_1\, A_1^1(x_1)$ صدق کند یعنی هر v' که ۱- هم‌ارز v باشد، در $A_1^1(x_1)$ صدق می‌کند. v در B صدق نمی‌کند پس v در $\forall x_2\, A_1^1(x_2)$ نیز صدق نمی‌کند. یعنی وجود دارد v'' که ۲- هم‌ارز با v باشد و در $A_1^1(x_2)$ صدق نکند. ($A_1^1(v''(x_2))$ برقرار نیست)

اکنون قرار می‌دهیم $v'(x_1)=v''(x_2)$ که v' ۱- هم‌ارز v است و طبق قبل، $A_1^1(v'(x_1)=v''(x_2))$ برقرار است و این تناقض است.

(c) $(\forall x_1)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_1)\mathscr{A} \to (\forall x_1)\mathscr{B})$, for any *wfs*. $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$.

برهان خلف. فرض کنید v در $\forall x_1\ (A \to B)$ صدق کند. یعنی هر v' که ۱-هم‌ارز با v باشد، در

$A \to B$ صدق می‌کند. v در $\forall x_1\ A$ صدق می‌کند پس هر v'' که ۱-هم‌ارز با v باشد

در A صدق می‌کند. v در $\forall x_1\ B$ صدق نمی‌کند. یعنی وجود دارد v''' که ۱-هم‌ارز با v است

ولی در B صدق نمی‌کند. اما چون v''' ۱-هم‌ارز با v است، در A صدق می‌کند پس طبق

$\forall x_1\ A \to B$، v''' در B نیز صدق می‌کند و این تناقض است.

(d) $((\forall x_1)(\forall x_2)\mathscr{A} \to (\forall x_2)(\forall x_1)\mathscr{A})$, for any *wf*. $\mathscr{A}$.

برهان خلف. فرض کنید v در $\forall x_1 \forall x_2\ A$ صدق کند. پس هر v' که ۱-هم‌ارز با v باشد، در

$\forall x_2\ A$ صدق می‌کند. یعنی هر v'' که ۲-هم‌ارز با v' باشد، در A صدق می‌کند.

اکنون فرض کنید v در $\forall x_2 \forall x_1\ A$ صدق نکند. یعنی وجود دارد v_1 که ۲-هم‌ارز با v است

و در $\forall x_1\ A$ صدق نمی‌کند. یعنی وجود دارد v_2 که ۱-هم‌ارز با v_1 است و در A صدق نمی‌کند.

قرار می‌دهیم $v'(x_1)=v_2(x_1)$ که v' ۱-هم‌ارز با v_1 است و $v''(x_2)=v_1(x_2)$ که v''

۲-هم‌ارز با v' است. طبق قبل، v'' در A صدق می‌کند و این تناقض است.

---

21 Show that, if t is a term which is free for x_i in the *wf.* $\mathscr{A}(x_i)$, then the *wf.* $(\mathscr{A}(t) \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{A}(x_i))$ is a logically valid *wf.*

برهان خلف. فرض کنید v در $A(t)$ صدق کند ولی در $\exists x_i \; A(x_i)$ صدق نکند. یعنی وجود ندارد v'

که i-هم‌ارز با v باشد و در $A(x_i)$ صدق کند. اکنون v' را مقدار دهی i-هم‌ارزی با v که

$v'(x_i) = v(t)$ است تعریف می‌کنم. با مفروضات سوال، طبق قضیه ۳.۲۳، v' در

$A(x_i)$ صدق می‌کند و این تناقض است.

---

22 Show that none of the following *wfs.* is logically valid.

(*a*) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$.

(*b*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, x_1))$.

(*c*) $(\forall x_1)((\sim A_1^1(x_1)) \rightarrow (\sim A_1^1(a_1)))$.

(*d*) $((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1) \rightarrow (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2))$.

(a) $I = (D = \mathbb{N}, A_1^2 : <)$ تالی به ازای هیچ v برقرار نیست چون

همواره مقدار دهی ۱-هم‌ارزی با v موجود است که $v'(x_1) = v(x_2)+1 \Leftarrow v(x_2)+1 \not< v(x_2)$

(b) $I = (D = \mathbb{N}, A_1^2 : <)$ $v(x_1) = 1$ $v(x_2) = 2$

(c) $I = (D = \mathbb{N},\ A_1^1(x):\ x = a_1\ ,\ a_1 = 0)$ $\qquad v(x_1) = 1$

(d) $I = (D = \mathbb{N},\ A_1^2 : =)$ حالی به ازای هیچ v برقرار نیست چون همواره مقدار دهی

۱-هم‌ارز با v موجود است که $v'(x_1) \neq v(x_2)$

---

23 Let $\mathscr{A}(x_i)$ be a *wf*. of $\mathscr{L}$ in which x_i appears free and let t be a term which is free for x_i in $\mathscr{A}(x_i)$. Suppose that v is a valuation such that $v(t) = v(x_i)$. Show that v satisfies $\mathscr{A}(t)$ if and only if v satisfies $\mathscr{A}(x_i)$.

چون v i-هم‌ارز با خودش است و $v(t)=v(x_i)$، با مفروضات سوال، طبق قضیه ی

۳.۲۳، v در $A(t)$ صدق می‌کند $\iff$ v در $A(x_i)$ صدق کند.

پرسش ۱. آیا دو گزاره‌ی $\forall x(G(x) \vee F(x))$ و $\forall x(G(x)) \vee \forall x(F(x))$ با هم معادل هستند؟ برای پاسخ خود یک مثال در زبان فارسی بیاورید.

به طور کلی $\forall x\, G(x) \vee \forall x\, F(x) \to \forall x(G(x) \vee F(x))$ منطقا معتبر

است اما عکس آن خیر.

مثلا اگر یک کیسه پر از توپ های سفید و سیاه داشته باشیم ، G را "اگر x یک توپ در کیسه باشد ، که از هر دو رنگ حداقل یک توپ موجود است

x مشکی است" و F مشابها را سفید تعریف کنیم ، آنگاه $\forall x\ G(x)$ نادرست است و

مشابها $\forall x\ F(x)$ نادرست اما $\forall x\ (F(x) \vee G(x))$ درست است.

پرسش ۲. فرض کنید $\mathcal{L}$ زبان مرتبه‌ی اولی است که شامل متغیر، رابط‌ها، سورها، ثابت c_1، تابع f_1^2 و محمول A_1^2 است. فرمول زیر در این زبان را درنظر بگیرید.

$$\forall x \forall y (A_1^2(f_1^2(x,y), c_1) \to A_1^2(x,y))$$

تعبیرهای I و $I^{'}$ از زبان $\mathcal{L}$ را چنان تعریف کنید که تعبیر فرمول فوق در I درست و در $I^{'}$ نادرست باشد.

$$I = (D = \mathbb{Z},\ A_1^2 : =,\ f_1^2 : -,\ c_1 = 0)$$

$$\forall x \forall y\ (x - y = 0 \to x = y)$$

$$I' = (D = \mathbb{Z},\ A_1^2 : =,\ f_1^2 : +,\ c_1 = 0)$$

$\forall x \forall y\ (x + y = 0 \to x = y)$ مثلا به ازای $v(x)=1, v(y)=-1$ برقرار نیست.

پرسش ۳. فرض کنید که v یک تابع مقداردهی و I یک تعبیر دلخواه برای زبان $\mathcal{L}$ است. بررسی کنید که v در فرمول زیر صدق می‌کند یا خیر.

$$\forall x (A_1^2(x,y) \to A_1^2(x,y))$$

این فرمول منطقاً معتبر است.

برهان خلف. فرض کنید یک I و v از آن موجود باشد که در فرمول بالا صدق نکند. یعنی وجود دارد v' که x-هم‌ارز v است و در $A_1^2(x,y) \to A_1^2(x,y)$ صدق نمی‌کند. اما مقدم و تالی هر دو یکی هستند و ممکن نیست v' در یکی صدق کند و در دیگری صدق نکند.