

حل تمرین سری اول منطق

ساخته‌های صیغی

۶- نشان دهید که هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقاً "هم‌ارز هستند".

$$(p \rightarrow q), ((\sim q) \rightarrow (\sim p)) \quad (\bar{A})$$

$$((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \quad (B)$$

$$(((\sim p) \wedge (\sim q)) \rightarrow (\sim r)), (r \rightarrow (q \vee p)) \quad (P)$$

$$(((\sim p) \vee q) \rightarrow r), ((p \wedge (\sim q)) \vee r) \quad (T)$$

(A)

p	q	$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\sim q$	\rightarrow	$\sim p$
T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

(B)

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	\leftrightarrow	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	F

(ب)

$(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$	\leftrightarrow	$r \rightarrow (q \vee p)$
T T T T T	T	F T F
T T T F F	T	T F F
T F F T T	T	F T T
T F F T F	T	T T T
F F T T T	T	F T T
F F T T F	T	T T T
F F F T T	T	F T T
F F F T F	T	T T T

(ت)

$(\sim p \vee q) \rightarrow r$	\leftrightarrow	$(p \wedge \sim q) \vee r$
T T T T T	T	F F F T
T T T F F	T	F F F F
T T F T T	T	F F T T
T T F F F	T	F F T F
F T T T T	T	T F F T
F T T F F	T	T F F F
F F F T T	T	T T T T
F F F T F	T	T T T T

۱۱ - با استفاده از احکام ۱، ۱۴ و ۱۷ نشان دهید که صورت گزاره‌ای $((\sim(p \vee (\sim q))) \rightarrow (q \rightarrow r))$

منطقاً "هم‌ارز هر یک از صورت‌های گزاره‌ای زیر است .

$$((\sim(q \rightarrow p)) \rightarrow ((\sim q) \vee r)) \quad (\bar{A})$$

$$(((\sim p) \wedge q) \rightarrow (\sim(q \wedge (\sim r)))) \quad (B)$$

$$((\sim((\sim q) \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow p)) \quad (P)$$

$$(q \rightarrow (p \vee r)) \quad (T)$$

$$(i) (\neg(p \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg(p \vee \neg q)) \rightarrow (\neg q \vee r)$$

$$\equiv (\neg(\neg q \vee p)) \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv (\neg(q \rightarrow p)) \rightarrow (\neg q \vee r)$$

$$(ii) (\neg(p \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \wedge \neg r))$$

$$(iii) (\neg(p \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg(q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg\neg(p \vee \neg q))$$

$$\stackrel{\text{عكس}}{p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p}$$

$$\equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg\neg(p \vee \neg q)) \equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (p \vee \neg q)$$

$$\equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg q \vee p) \equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(iv) (\neg(p \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \vee \neg q) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\equiv (p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee r) \equiv p \vee \neg q \vee r \equiv \neg q \vee (p \vee r)$$

$$\equiv q \rightarrow (p \vee r)$$

۱۳ - صورت‌های گزاره‌ای به صورت نرمال عطفی بیابید که منطقاً "هم‌ارز ترکیب‌های زیر باشند":

$$(((\neg p) \vee q) \rightarrow r) \quad (\text{آ})$$

$$(p \leftrightarrow q) \quad (\text{ب})$$

$$(p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r) \quad (\text{پ})$$

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s) \quad (\text{ت})$$

$$(\text{آ}) \quad (\neg p \vee q) \rightarrow r \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \neg q) \vee r \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee \neg q)$$

$$(\text{ب}) \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$(\text{پ}) \quad \neg((p \wedge (q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge (\neg q \wedge r)))$$

\neg	p	q	r	$(q \wedge r)$	$(p \wedge (q \wedge r))$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q \wedge r)$	$(\neg p \wedge (\neg q \wedge r))$	$((p \wedge (q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge (\neg q \wedge r)))$	\neg
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0

$$\neg[(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)]$$

$$\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

$$\wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

\sim	$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$						s
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
& \sim[(\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s) \\
& \vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \sim s)] \\
& \equiv (p \vee q \vee \sim r \vee s) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee q \vee r \vee s) \\
& \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r \vee s) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee s)
\end{aligned}$$

۱۶ - صورت‌هایی گزاره‌ای بیابید که در آنها فقط رابط‌های \sim و \rightarrow ظاهر شوند و با صورت‌های گزاره‌ای زیر منطقاً "هم‌ارز" باشند :

$$((p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \quad (\text{آ})$$

$$(p \leftrightarrow q) \quad (\text{ب})$$

$$(p \wedge q \wedge r) \quad (\text{پ})$$

$$(ا') \quad (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \vee \sim (\sim r \vee \sim s)$$

$$\equiv \sim (p \rightarrow \sim q) \vee \sim (r \rightarrow \sim s) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (r \rightarrow \sim s)$$

$$(ب) \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \sim (\sim (p \rightarrow q) \vee \sim (q \rightarrow p))$$

$$\equiv \sim ((p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p))$$

$$(ج) \quad p \wedge q \wedge r \equiv \sim (\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \equiv \sim (\sim p \vee (q \rightarrow \sim r))$$

$$\equiv \sim (p \rightarrow (q \rightarrow \sim r))$$

۱۸ - گزاره‌ای بیابید که در آن فقط رابط | ظاهر شود ، و منطقاً "هم‌ارز $(p \rightarrow q)$ باشد .

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \wedge (q \wedge \sim q)) \equiv p \wedge (q \wedge \sim q)$$

۱۹ - ثابت کنید که هیچ رابط دوتایی بجز \downarrow و $|$ وجود ندارد که به تنهایی بتواند یک مجموعه کارساز از رابطها را بسازد (راهنمایی: جدول درستی چنین رابطی را در نظر بگیرید) .

p	*	q
۰	۱	۰
۰		۱
۱		۰
۱	۰	۱

فرض کنید رابط مورد نظر * باشد . از آن جا که این رابط باید بتواند توتولوژی

و تناقض بسازد ، پس سطر اول و آخر جدول رو به رو ، اجباراً به ترتیب

۰ و ۰ هستند . با توجه اینکه * ، \downarrow یا $|$ نیست ، پس تنها به بررسی حالت

باقی مانده می پردازم.

$$\textcircled{1} \quad 0 \star 1 = 0 \quad 1 \star 0 = 1 :$$

از جدول آن می توان دید که $(\sim p \star \sim q) \equiv p \star q$ و بین رابطه هیچ نامه نمی تواند $\perp \perp$ باشد. [چون ارزشی مطرح که هر دو T هستند، مخالف ارزشی مطرح که هر دو F هستند است.]

$$\textcircled{2} \quad 0 \star 1 = 1 \quad 1 \star 0 = 0 :$$

برای این رابط می توان رابطی $p \star q \equiv \sim p$ نوشت و این رابط نیز نمی تواند $\perp \perp$ باشد. [چون مطرح که ارزشی متغیر ادل T است همراه مخالف ارزشی مطرح است که متغیر ادل F است.]

۲۵- برای هر یک از استدلالهای زیر، صورت استدلالی متناظر را بنویسید، و معتبر بودن یا معتبر نبودن آن را مشخص کنید.

(آ) اگر تابع f پیوسته نباشد، آنگاه تابع g مشتق پذیر نیست. g مشتق پذیر است. پس f پیوسته است.

$$p \therefore q, (\sim p \rightarrow \sim q)$$

$$(p \vee \sim q) \wedge q \rightarrow p \equiv ((q \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)) \rightarrow p \equiv \sim q \vee (\cancel{p} \vee p) \equiv T$$

(ب) اگر حسن حرارت مرکزی نصب کرده باشد، آنگاه یا اتومبیلش را فروخته است یا از بانک وام گرفته است. حسن از بانک وام نگرفته است، پس اگر حسن اتومبیلش را نفروخته باشد، آنگاه حرارت مرکزی نصب نکرده است.

با فرض اینکه بای منطق بازه و نه Xor :

$$\begin{array}{c} \overbrace{F} \\ \overbrace{F} \\ p \rightarrow (q \vee r), \neg r; \quad \therefore \neg q \rightarrow \neg p \\ \underline{T} \quad \underline{F} \quad \underline{F} \quad \underline{T} \quad \underline{T} \quad \underline{F} \end{array}$$

مطابق شکل، ارزش هر می و بود نه ارد که نتیجه نادرست و مقدمات درست باشند \Rightarrow استدلال معتبر است.

(پ) اگر در پالیگونیا نفت باشد آنگاه یا متخصصین درست تشخیص داده اند یا دولت دروغ می گوید ، در پالیگونیا نفت نیست یا در غیر این صورت متخصصین درست تشخیص نداده اند ، پس دولت دروغ نمی گوید .

$$\begin{array}{c} \overbrace{T} \\ p \rightarrow (q \vee r), \neg p \vee (p \rightarrow \neg q); \quad \therefore \neg r \\ \underline{T} \quad \underline{T} \quad \underline{F} \end{array}$$

به ازای $T \rightarrow F$ و در نتیجه استدلال معتبر نیست.

p	q	r
F	T	T

(ت) اگر U زیرفضائی از V باشد ، آنگاه U زیرمجموعه ای از V است ، U شامل بردار صفر است ، و U بسته است ، U زیرمجموعه ای از V است و اگر U بسته باشد

آنگاه U شامل بردار صفر است ، پس اگر U بسته باشد آنگاه U یک زیرفضای V است .

$$\begin{array}{c} \overbrace{T} \\ p \rightarrow (q \wedge r \wedge s), q \wedge (s \rightarrow r); \quad \therefore s \rightarrow p \\ \underline{F} \quad \underline{T} \quad \underline{T} \quad \underline{T} \quad \underline{T} \quad \underline{F} \end{array}$$

به ازای $T \rightarrow F$ ، استدلال معتبر نیست.

p	q	r	s
F	T	T	T

۲۱ - فرض کنید که A . $\therefore A_1, A_2, \dots, A_n$ یک صورت استدلالی معتبر باشد. ثابت کنید که $(A_n \rightarrow A)$. $\therefore A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ نیز یک صورت استدلالی معتبر است.

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \equiv \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n \vee A$$

$$\equiv \sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \vee (\sim A_n \vee A)$$

$$\equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow A)$$

پرسش ۱. ساکنین جزیره‌ای از دو گروه دروغگوها و راستگوها تشکیل شده‌اند. راستگوها همواره راست می‌گویند و دروغگوها همواره دروغ می‌گویند. (الف) شخصی برای مسافرت به این جزیره سفر کرده است و به دو نفر از اهالی برمی‌خورد. اولی می‌گوید: «ما هردو راستگو هستیم» ولی دومی بلافاصله می‌گوید: «نه یکی از ما دروغگوست!». مشخص کنید که هر یک از دو نفر راستگو هستند یا دروغگو. (ب) اگر به یکی از اهالی برخورد کنیم که بگوید: «من از گروه دروغگوها هستم» به نظر شما او در واقع به کدام گروه تعلق دارد؟

الف) طبق محلات گفته شده داریم: $p \rightarrow q$, $q \rightarrow \sim p$

حالت اول: p درست باشد. $\left. \begin{array}{l} p, (p \rightarrow q); \therefore q \\ p, (q \rightarrow \sim p); \therefore \sim p \end{array} \right\} \Rightarrow p, (p \rightarrow q), (q \rightarrow \sim p); \therefore \sim p$
 که با فرض درست بودن p در تناقض است. پس این حالت ممکن نیست و $p \equiv F$.

حالت دوم: q درست باشد. $p, q \rightarrow \sim p; \therefore \sim p$
 این حالت ممکن است.

حالت سوم: q نادرست باشد.
 $\sim p \therefore \sim q \rightarrow \sim q$
 این حالت نیز ممکن است. [البته برای خوانشی "صدا" یکم از ما دروغگو است.]
 که بین هم p و هم q نادرست هسته.

ب) اگر فرض کنیم از ساکنین جزیره باشد:
 $\sim S \rightarrow S$ $S \rightarrow \sim S$
 چون راستگوات چون دروغگوات
 که تناقضی هسته.
 پس فرض سوال نادرست است.

پرسش ۲. آقایان الف و ب دو منطق دان زیرک و آگاه هستند، همراه با دوست مشترک خویش دور میزی نشسته اند. دوست مشترک دو منطق دان می خواهد میزان زیرکی آنان را بسنجد، به هریک از آنان درگوشی یک عدد صحیح مثبت می گوید. سپس با صدای بلند به خطاب به آن ها می گوید که حاصل ضرب آن دو عدد تنها می تواند ۸ یا ۱۶ باشد. نخستین منطق دانی که بتواند عدد نفر دیگر را تعیین کند، برنده بازی خواهد بود. با توجه به گفت و گویی که پس از طرح این پرسش میان آن دو صورت می گیرد، عدد آقای ب را مشخص کنید.

- A • الف: «من هم هیچ اطلاعی از عدد شما ندارم.»
 B • ب: «من هم هیچ چیز درباره ی عدد شما نمی دانم.»
 C • الف: «شما باید دستکم یک اشاره یا سرنخی در این زمینه به من بدهید.»
 D • ب: «باور کنید، من هم چنین انتظاری از شما دارم و شما هم هیچ اشارهای به این موضوع نمی کنید.»

* چون هیچ کدام برنده نیستیم عدد دیگری را
 به قطع نمیدانیم. پس هر حالتی که به قطعیت برسد
 رد است.

- ① ۱۶ یا ۸: تنها حالت ۱ است. α
 ② ۱ یا ۸: طبیعتاً قبل از عدد دیگر ۱۶ نمی تواند باشد α ۸ است. α هیچ حالتی قابل قبول نیست
 ③ ۱ یا ۸: " عدد دیگر ۱ نمی تواند باشد پس ۸ است. α α مفروضات سوال
 ④ ۲ یا ۸: " عدد دیگر نمی تواند ۸ یا ۲ α ۸ است α نادرست هسته.
 ⑤ ۴ یا ۸: " عدد دیگر نمی تواند ۲ یا ۴ α ۴ است. α

راه حل با فرض اینکه دو منطق دان با هوشی نباشند و صرفاً هر بار قطعی ترین حالت را حذف کنند:

	ب	الف	
$A \Rightarrow$	۱	۱۶	
$B \Rightarrow$	۱۶	۱	
$B \Rightarrow$	۱	۸	تفاوت حالت با رقم مانده برابر است
$C \Rightarrow$	۸	۱	انگیزه ب ۱ باشد
$C \Rightarrow$	۲	۸	تفاوت حالت با رقم مانده برابر است
$D \Rightarrow$	۸	۲	انگیزه الف ۸ باشد
$D \Rightarrow$	۲	۴	تفاوت حالت با رقم مانده برابر است
			انگیزه ب ۲ باشد

\Rightarrow پس تفاوت عددی که برابر با ۷ مانده، ۴ است و عدد الف ۷ می‌تواند ۲ یا ۴ باشد.

\Rightarrow الف برنده است.

پرسش ۳. چهار نفر الف، ب، ج و د در مسابقه‌ی اسب‌سواری شرکت می‌کنند و

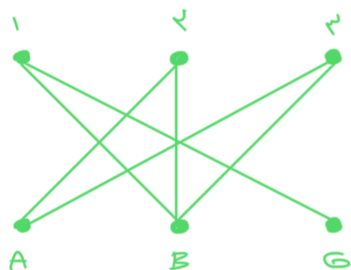
الف ادعا می‌کند: «من نه اول بودم نه آخر.»

ب ادعا می‌کند: «من آخر نبودم.»

ج ادعا می‌کند: «من اول بودم.»

د ادعا می‌کند: «من آخر بودم.»

فرض کنید سه تا از این ادعاها راست و یکی غلط است. چه کسی دروغ می‌گوید و چه کسی اول شده است؟



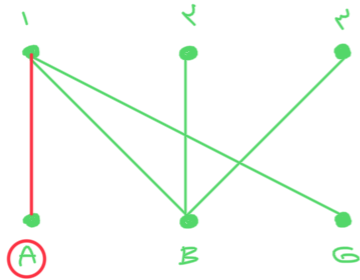
هدف رسم محتمل این گراف به ازای تنها یک راس است به گونه‌ای که گراف حاصل دارای حداقل یک تطابق کامل باشد.

به ازای آنجا که راس (۴) درجه ۱ است و به D متصل است،

پس ۵ نمی تواند درونج گفته باشد. پس می توانیم دو رأس (۴) و (۵) را از گراف حذف کنیم.

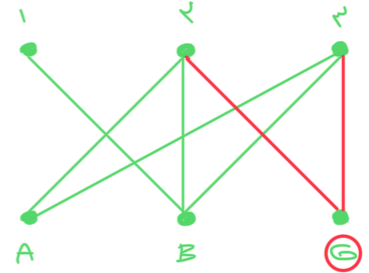
⇐ نیز نمی تواند درونج گفته باشد چون در غیر این صورت درجه ایی ۵ می شود.

* بررسی حالت های باقی مانده :



[این حالت ممکن نیست چون (۲)، (۳)]

درجه ۱ هست و هر دو به ۵ وصل هستند]



* پس تنها حالت ممکن ، گراف تحت راست است ⇐ ۶ درونج گفته است و ۵ نفر ادل است.

پرسش ۴.

(آ) نشان دهید که هیچ یک از ادوات $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \perp$ به تنهایی، به طور تابعی کامل نیست.

(ب) نشان دهید که مجموعه ادوات $\{\wedge, \vee\}$ به طور تابعی کامل نیست.

(ج) چند ادوات دو موضعی کامل وجود دارد؟ (راهنمایی: اگر \circ ادوات دو موضعی کامل باشد، چه چیزی درباره ی $T \circ T$ و $\perp \circ \perp$ می توان گفت؟)

ابتدا ب را اثبات می کنیم.

لم. به ازای هر جدول درست [سه بیت است مثال ۲ می تونه دارد] ، سطر متناظر با درست تمام متغیرها ، نمی تواند ۴ باشد.

اثبات . استقرا روی تعداد رابط .

پایه : $n=1$ دو حالت داریم : $T \vee T \equiv T$ و $T \wedge T \equiv T$ که کم برقرار است.

فرض کنیم کم برای n برقرار باشد. برای $n+1$ داریم :

* صورت = گزاره ای مورد نظر به فرم $P \vee Q$ باشد:

طبق فرض استقرا خردی جدول برای اینکه تمام گزاره‌ای موجود در P ، T یا F باشد، T یا F باشد.

مثالها برای Q نیز برقرار است. داریم:

$$P \vee Q \equiv T \vee T \equiv T$$

* صورت = فرم $P \wedge Q$ باشد: مشابه قبل:

$$P \wedge Q \equiv T \wedge T \equiv T$$

و حکم اثبات می‌شود که جدول وجود ندارد که سطری که تمام متغیرها T هستند، F شود.

آ) بعد از آن مجموعه‌ای کامل باشد، هر نمره مجموعه از آن نیز کامل نیست \Rightarrow $\{8\}$ و $\{7\}$ کامل نیست.

استدلالی مشابه: قوت قبل نیز برای \rightarrow برقرار است. (خردی همه T ، نمی‌تواند F باشد)

\perp آنرا یک جدول می‌سازد پس کامل نیست.

\rightarrow یک معنای \rightarrow و با توجه به جدول آن، نمی‌تواند T یا \perp باشد.

ج) پاسخ این سوال، در پاسخ به سوال ۱۹، بررسی شد. تنها ۲ رابط ۲ معنای ناهم‌ارز وجود

دارد: \downarrow ، \uparrow