

حل تمرین سری اول منطق

آنالیز صورت

۶— نشان دهید که هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقاً "هم ارز هستند".

$$(p \rightarrow q), ((\sim q) \rightarrow (\sim p)) \quad (\top)$$

$$((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \quad (\perp)$$

$$(((\sim p) \wedge (\sim q)) \rightarrow (\sim r)), (r \rightarrow (q \vee p)) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(((\sim p) \vee q) \rightarrow r), ((p \wedge (\sim q)) \vee r) \quad (\Leftarrow)$$

(۱)

$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\sim q \rightarrow \sim p$
T T T	T	F T F
T F F	T	T F F
F T T	T	F T T
F T F	T	T T T

(۲)

$(p \vee q) \wedge r$	\leftrightarrow	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T T T T T	T	T T T
T T T F F	T	F F F
T T F T T	T	T T F
T T F F F	T	F F F
F T T T T	T	F T T
F T T F F	T	F F F
F F F F T	T	F F F
F F F F F	T	F F F

(ج)

$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$	\leftrightarrow	$r \rightarrow (q \vee p)$
T T T T T	T	F T F
T T T F F	T	T F F
T F F T T	T	F T T
T F F T F	T	T T T
F F T T T	T	F T T
F F T T F	T	T T T
F F F T T	T	F T T
F F F T F	T	T T T

(ب)

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	\leftrightarrow	$(p \wedge \neg q) \vee r$
T T T T T	T	F F F T
T T T F F	T	F F F F
T T F T T	T	F F T T
T T F F F	T	F F T F
F T T T T	T	T F F T
F T T F F	T	T F F F
F F F T T	T	T T T T
F F F T F	T	T T T T

۱۱ - با استفاده از احکام ۱۴ و ۱۷ انشان دهید که صورت گزارهای $((\neg(p \vee (\neg q))) \rightarrow (q \rightarrow r))$ و $((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(r \wedge (\neg r)))$ منطقاً "هم ارز" هر یک از صورتهای گزارهای زیر است.

$$((\neg(q \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg q) \vee r)) \quad (\top)$$

$$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (\neg(q \wedge (\neg r)))) \quad (\bot)$$

$$((\neg((\neg q) \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow p)) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(q \rightarrow (p \vee r)) \quad (\Leftarrow)$$

$$(ii) (\neg(\rho \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg(\rho \vee \neg q)) \rightarrow (\neg q \vee r)$$

$$\equiv (\neg(\neg q \vee \rho)) \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv (\neg(q \rightarrow \rho)) \rightarrow (\neg q \vee r)$$

$$(\therefore) (\neg(\rho \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg \rho \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\equiv (\neg \rho \wedge q) \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv (\neg \rho \wedge q) \rightarrow (\neg(q \wedge \neg r))$$

$$(\overset{\circ}{\circ}) (\neg(\rho \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\neg(q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg \neg(\rho \vee \neg q))$$

$$\rho \rightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} \neg q \rightarrow \neg \rho$$

$$\equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg \neg(\rho \vee \neg q)) \equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (\rho \vee \neg q)$$

$$\equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg q \vee \rho) \equiv (\neg(\neg q \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow \rho)$$

$$(\therefore) (\neg(\rho \vee \neg q)) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\rho \vee \neg q) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\equiv (\rho \vee \neg q) \vee (\neg q \vee r) \equiv \rho \vee \neg q \vee r \equiv \neg q \vee (\rho \vee r)$$

$$\equiv q \rightarrow (\rho \vee r)$$

۱۳ - صورت‌های گزاره‌ایی به صورت نرمال عطفی بیا بید که منطقاً "هم ارز ترکیب‌های زیر باشد :

$$(((\sim p) \vee q) \rightarrow r) \quad (\top)$$

$$(p \leftrightarrow q) \quad (\leftrightarrow)$$

$$(p \wedge q \wedge r) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r) \quad (\wedge)$$

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s) \quad (\rightarrow)$$

$$(1) \quad (\sim p \vee q) \rightarrow r \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \sim q) \vee r \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee \sim q)$$

$$(2) \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

\sim	$((p \wedge (q \wedge r)) \vee (\sim p \wedge (\sim q \wedge r)))$									
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1

$$\sim [(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

$$\vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee r)$$

$$\wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r)$$

\sim	$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$						
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
& \neg[(\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \\
& \quad \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)] \\
& \equiv (p \vee q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee r \vee s) \\
& \quad \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s)
\end{aligned}$$

۱۶ - صورتهایی گزارهای بیابید که در آنها فقط رابطهای \sim و \rightarrow ظاهر شوند و با صورتهای گزارهای زیر منطقاً "هم ارز باشند" :

$$((p \wedge q) \vee (r \wedge s)) \quad (\top)$$

$$(p \leftrightarrow q) \quad (\beta)$$

$$(p \wedge q \wedge r) \quad (\varphi)$$

$$(i) (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r \vee \neg s)$$

$$\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \vee \neg(r \rightarrow \neg s) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg s)$$

$$(\rightarrow) p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg(\neg(p \rightarrow q)) \vee \neg(q \rightarrow p)$$

$$\equiv \neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p))$$

$$(\rightarrow) p \wedge q \wedge r \equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \equiv \neg(\neg p \vee (q \rightarrow \neg r))$$

$$\equiv \neg(p \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$$

۱۸- گزارهای بیابید که در آن فقط رابطه ظاهر شود، و منطقاً "هم ارز" ($p \rightarrow q$) باشد.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \wedge (q \mid q)) \equiv p \mid (q \mid q)$$

۱۹- ثابت کنید که هیچ رابطه دوتایی بجز \downarrow و \top وجود ندارد که به ترتیبی بتواند یک مجموعه کارساز از رابطهای را بسازد (راهنمایی: جدول درستی چنین رابطه‌ی را در نظر بگیرید).

p	\star	q
0	1	0
0		1
1		0
1	0	1

فرض کنیم رابطه مورد نظر \star باشد. از آن با کمترین روابط باید بتواند توتولوگی

و تناقض بازدene پی سطر اول داشته باشد. این روابط را بترتیب

او هستند. با توجه اینکه \star ، \downarrow و \top از نیت، پسندیدگی برابر ۳ مالت

باتی مانه هم پردازم.

$$\textcircled{1} \quad 0 \star 1 = 0 \wedge 1 \star 0 = 1 :$$

از جدول آن متراد دی که $\neg p \star q \equiv \neg q$ و این رابطه همچنانه تا T باشد.

$$\textcircled{2} \quad 0 \star 1 = 1 \wedge 1 \star 0 = 0 :$$

ربما این رابطه صحتان را باید $\neg p \star q \equiv \neg p$ نوشت و این رابطه نیز معتبرانه تا T باشد. [چون سطح که ارزشی متغیر اول T است، همراه مخالف ارزشی سطح است که متغیر اول F است]

۲۰- برای هر یک از استدلالهای زیر، صورت استدلالی متناظر را بنویسید، و معتبر بودن یا معتبر نبودن آن را مشخص کنید.

(۱) اگر تابع f پیوسته نباشد، آنگاه تابع g مشتق پذیر نیست. g مشتق پذیر است. پس f پیوسته است.

$$(\neg p \rightarrow \neg q), q; \therefore p$$

$$(p \vee \neg q) \wedge q \rightarrow p \equiv ((q \xrightarrow{F} \neg q) \vee (q \wedge p)) \rightarrow p \equiv \neg q \vee (\neg p \vee p) \stackrel{T}{\equiv} T$$

(۲) اگر حسن حرارت مرکزی نصب کرده باشد، آنگاه یا اتومبیلش را فروخته است یا از بانک وام گرفته است. حسن از بانک وام نگرفته است، پس اگر حسن اتومبیلش را نفروخته باشد، آنگاه حرارت مرکزی نصب نکرده است.

با خرمن ایندیه یا منطق بازه دست $\times \sigma$:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\quad}^F \\
 \overbrace{\quad}^F \\
 p \rightarrow (q \vee r), \neg r; \quad \therefore \neg q \rightarrow \neg p
 \end{array}
 \quad \text{مطابق شفلا، ارزش هم و بودنارد که نتیجه نادرست} \\
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\quad}^T \\
 \overbrace{\quad}^F \\
 \neg r
 \end{array}
 \quad \text{و مقدمات درست باشند} \Leftrightarrow \text{استهلال صحیح است.}$$

(پ) اگر در پالیگونیا نفت باشد آنگاه یا متخصصین درست تشخیص داده اند یا دولت دروغ می گوید . در پالیگونیا نفت نیست یا درغیراین صورت متخصصین درست تشخیص نداده اند . پس دولت دروغ نمی گوید .

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\quad}^T \\
 \overbrace{\quad}^T \\
 p \rightarrow (q \vee r), \neg p \vee (p \rightarrow \neg q); \quad \therefore \neg r
 \end{array}
 \quad \text{و در نتیجه استهلال صحیح نیست.}$$

p	q	r
F	T	T

با ازای

(ت) اگر U زیرفضایی از V باشد ، آنگاه U زیرمجموعه ای از V است ، U شامل بردار صفر است ، و U بسته است . U زیرمجموعه ای از V است و اگر U بسته باشد

آنگاه U شامل بردار صفر است . پس اگر U بسته باشد آنگاه U یک زیرفضای V است .

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\quad}^T \\
 \overbrace{\quad}^T \\
 p \rightarrow (q \wedge r \wedge s), q \wedge (s \rightarrow r); \quad \therefore s \rightarrow p
 \end{array}
 \quad \text{استهلال صحیح نیست.}$$

p	q	r	s
F	T	T	T

با ازای

۲۱ - فرض کنید که \mathcal{A} یک صورت استدلالی معتبر باشد . ثابت کنید
 که $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n-1}; \therefore (\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A})$ نیز یک صورت استدلالی معتبر است .

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n \vee A$$

$$\equiv \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \vee (\neg A_n \vee A)$$

$$\equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow A)$$

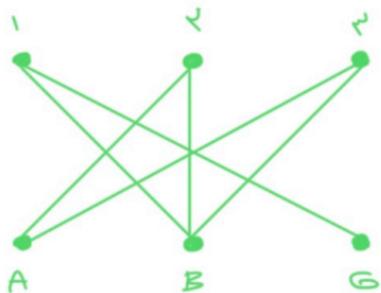
پرسش ۳. چهار نفر الف، ب، ج و د در مسابقه اسبسواری شرکت می‌کنند و
الف ادعا می‌کند: «من نه اول بودم نه آخر.»

ب ادعا می‌کند: «من آخر نبودم.»

ج ادعا می‌کند: «من اول بودم.»

د ادعا می‌کند: «من آخر بودم.»

فرض کنید سه تا از این ادعاهای راست و یکی غلط است. چه کسی دروغ می‌گوید و چه کسی اول شده است؟



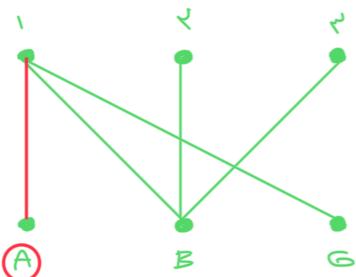
هفت رسم ممکن این لڑت ب از این نها یک راس است به
لورنام که لڑت فاصل دارای مدائل یی تطابق کامل باشد.

خوازه‌آنجاکه راس (۴) درجه ۱=۱=۱=۱=۱ متقابل است به

پس Δ می تواند در دفعه نخست باشد. پس می توانیم دو رأس (۴) و (۵) را از گذشت صفت کنیم.

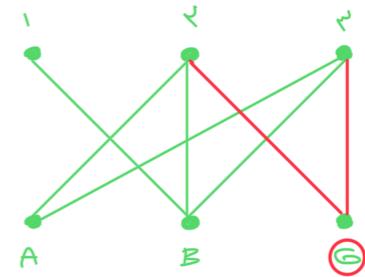
\Leftarrow ۵ نیز می تواند در دفعه نخست باشد چون در عین حال فحوضات درجه ایشان هم می شود.

* برسی حالت کویی باقی مانده:



[این حالت ممکن نیست چون (۲), (۳) و (۴) درج شده اند]

[درج شده هر دو ۲ دلیل داشته]



* پس آنها حالت ممکن، رُفاقت سه راست است \Leftrightarrow در دفعه نخست ایست و ۳ نظر ادل است.

پرسش ۴.

(آ) نشان دهید که هیچ یک از ادوات \perp , \neg , \rightarrow , \wedge , \vee به تنهایی، به طور تابعی کامل نیست.

(ب) نشان دهید که مجموعه ادوات $\{\wedge, \vee\}$ به طور تابعی کامل نیست.

(ج) چند ادات دو موضعی کامل وجود دارد؟ (راهنمایی: اگر \circ ادات دو موضعی کامل باشد، چه چیزی درباره $T \circ T = T$ و $\perp \circ \perp = \perp$ می توان گفت؟)

اثبات ب بر اثبات می کنیم.

لم. ب از ای از هر جدول درست [بایه ای است مطالعه ۲ مسیر دارد]، سطر متناظر با درستی تمام متغیرها، نمی تواند

باشد. F

اثبات: استقره روی تعداد را بینم.

بایه: $n=1$ دو حالت داریم: $T \wedge T \equiv T$ و $T \vee T \equiv T$ که کم برقرار است.

فرض کنیم کمترین n برقرار باشد. سپس $n+1$ داریم:

* صور = لزامی ای مورد نظر بفرم $P \vee Q$ باشد:

طبق فرض استقرا خردمندی صدیقی اینکه تمام زارهای موجود در $P \vee Q$ باشند.

$P \vee Q \equiv T \vee T \equiv T$ مثاباً با Q نیز برقرار است. داریم:

$P \wedge Q \equiv T \wedge T \equiv T$ مثاباً باشد: * صور = هر فرم

دستگیری ای T می شود \Leftrightarrow صدیقی وجود زارهای که تابع متنی T هستند، F نمود.

۱) اگر صحیحهای کامل نباشند، هر زیرمجموعه از آن نیز کامل نیست $\Rightarrow \{v\} \wedge \{x\} \neq \text{کامل}$.
استهلالی مثاباً قسمت قبل نیز برای \rightarrow برقرار است. (خردمندی T ، مخفتوانه F باشد)
 T تابعی جدول می سازد پس کامل نیست.

- یک مثال را داشته باشید که جدول آن، مخفتوانه T نباشد.

ج) پاسخ این سوال در پاسخ - سوال ۱۹، بررسی شد. تا ۲ رابط ۲ میان ناهم ارز و وجود
دارد: ↓, ↓