$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x,t)$$

$$v(x,0) = f_1(x)$$

$$v_t(x,0) = g_1(x)$$

$$* \quad v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0$$

با توجه به * ، فرم کسینوسی می‌نویسیم.

$$v(x,t) = \sum G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$\Rightarrow v_{tt} = \sum \ddot{G}_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \qquad , \quad v_{xx} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \sum G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$\Rightarrow F_1(x,t) = \sum \left(\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n\right) \cos \frac{n\pi}{l} x \qquad \lambda_n^2 = c^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2}{l} \int_0^l F_1 \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$\overset{ODE}{\Longrightarrow} G_n = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) + G_n^*(t)$$

$$v(x,0) = \sum a_n \cos \frac{n\pi}{l} x = f_1 \Rightarrow a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1 \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$v_t(x,0) = \sum \lambda_n b_n \cos \frac{n\pi}{l} = g_1 \Rightarrow b_n = \frac{2}{\lambda_n l} \int_0^l g_1 \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0 \ \checkmark$$

۲

$$u_{tt} - \underset{c^۲}{۲۵}\, u_{xx} = x + \frac{۲۵}{۲}\pi = F$$

$$u(x,۰) = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{\pi}{۴}\right)x^۲ = f \qquad u_t(x,۰) = ۱ + x = g \qquad ۰ \le x \le ۱$$

$$u_x(۰,t) = \frac{\pi}{۲} \qquad u_x(۱,t) = ۱$$

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x)$$

$$v_{tt} = u_{tt} \qquad v_{xx} = u_{xx} - U''$$

$$\Rightarrow v_{tt} - c^۲ v_{xx} = u_{tt} - c^۲(u_{xx} - U'') = u_{tt} - c^۲ u_{xx} + c^۲ U'' = \underbrace{F + c^۲ U''}_{F_1}$$

$$v(x,۰) = u(x,۰) - U(x) = \underbrace{f - U}_{f_1}$$

$$v_t(x,۰) = u_t(x,۰) = g = g_1$$

$$v_x(۰,t) = u_x(۰,t) - U'(۰) \qquad v_x(۱,t) = u_x(۱,t) - U'(۱)$$

پس برای تبدیل به فرم ۱ ، باید شرایط مرزی $U(x)$ ، $U'(۰) = \frac{\pi}{۲}$ و $U'(۱) = ۱$ باشد.

$$\Rightarrow U'(x) = \frac{۱ - \frac{\pi}{۲}}{۱} x + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow U(x) = \frac{x^۲}{۲}\left(۱ - \frac{\pi}{۲}\right) + \frac{\pi}{۲} x$$

پاسخ‌ها با جایگذاری مقادیر در ① به دست می‌آید.

آناهیتا حیدری