مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

صورت مختلط انتگرال فوریه تابع فوق را بیابید. به کمک آن انتگرال فوریه را به صورت حقیقی به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi \quad \checkmark$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwx}\, dx = \frac{e^{iw\pi} - e^{-iw\pi}}{2\pi i w}$$

$$= \frac{\sinh(iw\pi)}{\pi i w} = \frac{\sin(w\pi)}{\pi w}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\pi)\, e^{iwx}}{\pi w}\, dw$$

چون $\frac{\text{فرد . فرد}}{\text{فرد}}$ = فرد

صفر می‌شه

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\pi)\left[\cos(wx) + i \sin(wx)\right]}{w}\, dw$$

$$\boxed{= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(w\pi)\cos(wx)}{w}\, dw}$$

$$a(w) = \frac{\sin(w\pi)}{\pi w} \qquad b(w) = 0$$

و یا a و b مستقیم از c محاسبه شوند:

آناهیتا صدری

مثال: تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

را بیابید.

گسترش زوج آن

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x)|\, dx = \int_{-a}^{a} k\, dx = ٢ak \quad \checkmark$$

$$F_s\{f\} = \sqrt{\frac{٢}{\pi}} \int_0^a k \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{٢}{\pi}}\, k \left(\frac{1-\cos(aw)}{w}\right)$$

$$F_c\{f\} = \sqrt{\frac{٢}{\pi}} \int_0^a k \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{٢}{\pi}} \left(\frac{k \sin(aw)}{w}\right)$$

هرگاه $f'(x)$, $f''(x)$ پیوسته تکه‌ای بر بازه $[0,\pi]$ باشند آنگاه موارد ثابت کنید

۱) $F_s\{f''\} = \frac{2n}{\pi}\left[f(0) - (-1)^n f(\pi)\right] - n^2 F_s\{f\}$

۲) $F_c\{f''\} = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n f'(\pi) - f'(0)\right] - n^2 F_c\{f\}$

$F_s\{f'\} = ?$ $\quad F_c\{f'\} = ?$

$$F_s\{f'\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{f\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}^{\,0} - n\int_0^{\pi} f\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= -n\,F_c\{f\}$$

$$F_c\{f'\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[f\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} f\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n f(\pi) - f(0)\right] + n\,F_s\{f\}$$