تمرین :

۱) مطلوبست انتگرال فوریه

$$f(x) = e^{-kx} \,, \quad (x>0 \,,\ k>0)$$

تعریف می‌کنیم :

$$f^*(x) = \begin{cases} e^{-kx} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -e^{kx} & x<0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f^* \text{ یک تابع فرد است}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x)|\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-kx}\,dx = 2\left.\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_{0}^{\infty} = \frac{2}{k} < \infty \checkmark$$

← چون صفر تک نقطه است ، ۰ در راست آن که $\frac{-2}{k}$ است را قرار میدهیم.

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin(wx)\left[\int_{0}^{\infty} \sin(wt)\, e^{-kt}\,dt\right]dw = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin(wx)\,\frac{w}{w^2+k^2}\,dw}$$

آناهیتا صدری

مثال: صورت مختلط سری فوریه تابع

$$y = e^x, \quad -\pi < x < \pi, \quad p = 2\pi$$

را یافته و به کمک آن صورت حقیقی سری فوریه تابع فوق را بدست آورید.

Complex Fourier:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-ik)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-ik)} e^{x(1-ik)}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi(1-ik)} - e^{-\pi(1-ik)}}{2\pi(1-ik)}$$

$$* \; e^{ik\pi} = \cos(k\pi) + i\,\cancel{\sin(k\pi)}^{\,0} = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{(-1)^k}{2\pi(1-ik)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{(-1)^k\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(1+ik)}{2\pi(1+k^2)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \boxed{\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+ik)}{1+k^2}e^{ikx}} \qquad -\pi < x < \pi$$

$$(1+ik)e^{ikx} + (1-ik)\,e^{-ikx} =$$

$$\cos kx + \cancel{i\sin kx} + \cancel{ik\cos kx} - k\sin kx + \cos kx - \cancel{i\sin kx} - \cancel{ik\cos kx} - k\sin kx$$

$$= 2(\cos kx - k\sin kx)$$

$$* \; \frac{(-1)^k(1+ik)}{1+k^2}\,e^{ikx} + \frac{(-1)^k\,(1-ik)}{1+k^2}\,e^{-ikx} = \frac{2(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx - k\sin kx)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \boxed{\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx - k\sin kx)}$$

$$-\pi < x < \pi$$

Real Fourier:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^t}{1+k^2}(\cos kt + k\sin kt)\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\hookrightarrow \int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right) + C$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{1+k^2}(-1)^k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^t}{1+k^2}(\sin kt - k\cos kt)\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\hookrightarrow \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right) + C$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{1+k^2} \left(-k(-1)^k\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \boxed{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+k^2)} (\cos kx - k \sin kx)}$$

$$-\pi < x < \pi$$

که با قبلی یکی است

آناهیتا صیدری