مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

صورت مختلط انتگرال فوریه تابع فوق را بیابید. به کمک آن انتگرال فوریه را به صورت حقیقی بدست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi \checkmark$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwx}\, dx = \frac{e^{iw\pi} - e^{-iw\pi}}{2\pi i w}$$

$$= \frac{\sinh(iw\pi)}{\pi i w} = \frac{\sin(w\pi)}{\pi w}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\pi)\, e^{iwx}}{\pi w}\, dw$$

چون $\frac{\text{فرد} \cdot \text{فرد}}{\text{فرد}} = \text{فرد}$

صفر می‌شه

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\pi)\left[\cos(wx) + i\sin(wx)\right]}{w}\, dw$$

$$\boxed{= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(w\pi)\cos(wx)}{w}\, dw}$$

$a(w) = \frac{\sin(w\pi)}{\pi w}$ $\quad b(w) = 0$: و یا a و b مستقیم از c محاسبه شوند.

آناهیتا صیدی

مثال: تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

را بیابید.

گسترش زوج آن

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x)|\, dx = \int_{-a}^{a} k\, dx = 2ak \quad \checkmark$$

$$F_s\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a k \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \left(\frac{1 - \cos(aw)}{w} \right)$$

$$F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a k \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k \sin(aw)}{w} \right)$$

آناهیتا حیدری