حل تمرین روش‌های آماری

جلسه‌ی دوم

* مقدمات:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow \boxed{E(X^2) = Var(X) + E^2(X)}$$

Theorem.

$$\boxed{E(W) = E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)}$$

Theorem.

$$\boxed{\operatorname{var}(aX + bY) = a^2 \operatorname{var} X + b^2 \operatorname{var} Y + \underbrace{2ab \operatorname{cov}(X, Y)}}$$

وقتی X و Y مستقل باشند، $Cov(X, Y) = 0$.

۱ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد. نشان دهید $2\bar{X}$ برآوردگر نااریب θ است.

$$E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2\frac{\theta}{2} = \theta \checkmark$$

---

2. If $\hat{\Theta}_1$ and $\hat{\Theta}_2$ are unbiased estimators of the same parameter θ, what condition must be imposed on the constants k_1 and k_2 so that

$$k_1\hat{\Theta}_1 + k_2\hat{\Theta}_2$$

is also an unbiased estimator of θ?

$$E(k_1\hat{\theta}_1 + k_2\hat{\theta}_2) = k_1E(\hat{\theta}_1) + k_2E(\hat{\theta}_2) = k_1\theta + k_2\theta = \theta$$

$$\Longrightarrow \theta(k_1 + k_2) = \theta \Longrightarrow k_1 + k_2 = 1$$

---

3. Based on a sample of 2 observations, consider the two estimators of μ:

$$\bar{X} = (\tfrac{1}{2})X_1 + (\tfrac{1}{2})X_2$$

and

$$W \triangleq (\tfrac{1}{3})X_1 + (\tfrac{2}{3})X_2$$

(a) Prove they are unbiased.

$$E\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[E(X_1) + E(X_2)\right] = \frac{2\mu}{2} = \mu \checkmark$$

$$E\left(\frac{X_1}{3} + \frac{2X_2}{3}\right) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) = \frac{3}{3}\mu = \mu \checkmark$$

* کدام کاراتر است؟ (با فرض اینکه نمونه تصادفی باشد)

$$Var\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left[Var(X_1) + Var(X_2)\right] = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$Var\left(\frac{X_1}{3} + \frac{2X_2}{3}\right) = \frac{1}{9}Var(X_1) + \frac{4}{9}Var(X_2) = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$\Leftarrow$ اولی کاراتر است.

۴- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. به روش

گشتاورها برآوردگرهای پارامترای μ و σ^2 را تعیین کنید.

۲ پارامتر داریم $\Leftarrow$ $r=2$

$$\mu_1' = E(X_1) = \mu$$

$$m_1' = \frac{\sum X_i}{n} = \overline{X}$$

$$\mu_2' = E(X_1^2) = Var(X_1) + E^2(X_1) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$m_2' = \frac{\sum X_i^2}{n} = \overline{X^2}$$

$$\begin{cases} \mu_1' = m_1' \Longrightarrow \boxed{\hat{\mu} = \overline{X}} \\ \mu_2' = m_2' \Longrightarrow \sigma^2 + \mu^2 = \overline{X^2} \Longrightarrow \sigma^2 + \overline{X}^2 = \overline{X^2} \Longrightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2} \end{cases}$$

---

۵ - برای یک نمونه‌ی n تایی از X با توزیع $0 < x < 1$ ، $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}$ ، برآوردگر حداکثر درست‌نمایی برای θ را بدست آورید.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left[\prod x_i \right]^{\theta-1}$$

$$\Longrightarrow \ln(L(\theta)) = n \ln\theta + (\theta-1)\ln\left(\prod x_i\right) = \ell(\theta)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\theta}\ell(\theta) = \frac{n}{\theta} + \ln\left(\prod x_i\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{-n}{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)}}$$