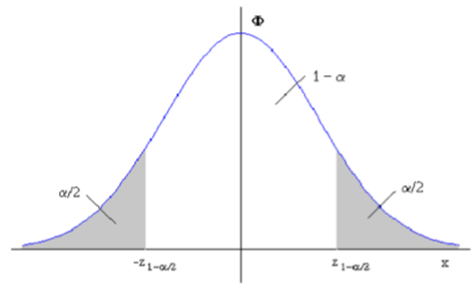
حل تمرین روش‌های آماری

جلسه‌ی سوم

* تعریف. q_p را چندک p ام متغیر تصادفی Q می‌نامند هرگاه: $\boxed{P(Q<q_p)=p}$



$$\Rightarrow \boxed{P\left(q_{\alpha/2} < Q < q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha}$$

* پس برای به دست آوردن فاصله اطمینان با دم‌های برابر در سطح $1-\alpha$ برای یک پارامتر، کمیت محوری مناسب آن را به جای Q در رابطه‌ی بالا قرار دهید.

از تقارن توزیع نرمال داریم:
(توزیع t نیز متقارن است)

$$\boxed{z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}}$$

* اگر جامعه نرمال نبود، برای nهای بزرگ از قضیه‌ی حد مرکزی استفاده کنید.
$n \geq 30$

---

* مثال. یک فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای μ در $N(\mu, \sigma^2)$ وقتی σ^2 معلوم باشد، از نمونه‌ی تصادفی:

کمیت محوری $\longrightarrow Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$P\left(z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = P\left(-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$\Leftarrow \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ یک بازه‌ی مطلوب است.

---

* فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای μ در $N(\mu, \sigma^2)$:

σ^2 معلوم : $\left(\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ *صرفا برای ساده‌سازی اینطور نوشتم! $\Leftarrow$

σ^2 نامعلوم : $\left(\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ * $n > 30 \Rightarrow t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \simeq z_{1-\alpha/2}$

درجه آزادی

---

۱ - اگر طول قد کارمندان یک اداره دارای توزیع نرمال باشد، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین طول قد کارمندان این اداره پیدا کنید درحالی که یک نمونه‌ی ۵تایی از بین کارمندان انتخاب شده باشد و مقدار ۱۶۰ ، ۱۷۰ ، ۱۶۵ ، ۱۷۵ و ۱۸۰ بدست آمده باشد.

σ نامعلوم و $1-\alpha = ۰/۹۵ \Rightarrow \alpha = ۰/۰۵ \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = ۰/۹۷۵$

$\bar{X} = ۱۷۰ \Rightarrow S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = ۶۲/۵$ و $t_{۰/۹۷۵}^{(۴)} = ۲/۷۸$

جایگذاری $\Rightarrow (۱۶۰/۱۷ \,,\, ۱۷۹/۸۳)$

---

* $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 \,,\, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

* میانگین موزون S_1^2 و S_2^2 : $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$$\Rightarrow \frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

* فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای $\mu_1-\mu_2$ (دو جامعه مستقل و با توزیع نرمال):

σ_1^2 و σ_2^2 معلوم:

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم

برابر:

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

نابرابر:

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(v)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

$$* \quad v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

---

۲ - یک درس ریاضی به ۱۲ شاگرد به روش معمولی تدریس گردید و به ۱۰ شاگرد عین همان درس به روش ارائه‌ی مطالب به صورت کنفرانس آموخته شد. در پایان سال از هر دو گروه امتحان گرفته شد و میانگین و انحراف استاندارد گروه اول به ترتیب ۸۵ و ۴ و برای گروه دوم به ترتیب ۸۱ و ۵ بدست آمد. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای اختلاف میانگین نمره‌ی دو روش بدست آورید به شرط آنکه دو روش دارای نمره‌ی تقریبی نرمال با واریانس برابر باشند.

$n_1=10 \quad , \quad \bar{X}_1=81 \quad , \quad S_1=5$

$n_2=12 \quad , \quad \bar{X}_2=85 \quad , \quad S_2=4$

$1-\alpha=0.90 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.95 \quad , \quad t_{0.95}(20)=1.72$

$$\Rightarrow S_p^2 = \frac{9 \times 5^2 + 11 \times 4^2}{20} = 20.05 \Rightarrow S_p = 4.478$$

جایگذاری $\Rightarrow \left(81 - 85 \pm 1.72(4.478)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}\right) \simeq (-7.298 \, , \, -0.702)$

---

* فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای p :

$$\left(\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

* $\hat{p} = \frac{x}{n}$ ، $x \rightarrow$ تعداد اعضای نمونه که دارای خصوصیت مورد نظر هستند.

* فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای $p_1 - p_2$ (اختلاف نسبت دو جامعه مستقل):

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right)$$