

حل تمرین روش آماری

طبیعی چهارم

① فرض کنید که یک دارو استاندارد ۲۵٪ در درمان یک بیماری موثر است و شخصی ادعا می‌کند

که دارویی که او ساخته است ۵۰٪ در درمان آن بیماری موثر است. فرض کنید که ۲۰ بیمار را

انتخاب کنیم و متغیر تصادفی X را برابر تعداد بیماران بهبود یافته توسط داروی جدید در بین ۲۰ بیمار در نظر

بگیریم. با در نظر گرفتن $C = \{X \mid X \geq 9\}$ ، احتمال خطای نوع اول و دوم را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} H_0: p = \frac{1}{4} \\ H_1: p = \frac{1}{2} \end{cases} \quad X \sim B(20, p)$$

$$\alpha = P(X \in C \mid H_0) = P(X \geq 9 \mid p = \frac{1}{4})$$

$$= 1 - P(X \leq 8 \mid p = \frac{1}{4}) \approx 1 - 0.9591 = 0.0409$$

$$\beta = P(X \notin C \mid H_1) = P(X \leq 8 \mid p = \frac{1}{2}) \approx 0.2517$$

$$\textcircled{2} \text{ با فرضی } X \sim N(\mu, \sigma) \text{ و } \begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu = 1 \end{cases}$$

یک نمونه تصادفی X_1, X_2, \dots, X_{25} از X جمع آوری شده است. اگر ناهمبستگی

به صورت $C = \{X_1, \dots, X_{25} \mid \bar{X} > 0.4\}$ با α و β را بدست آوریم.

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\alpha = P(\bar{X} > 0.4 \mid \mu = 0) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0.4 - 0}{1/5}\right) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$\beta = P(\bar{X} \leq 0.4 \mid \mu = 1) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{0.4 - 1}{1/5}\right) = P(Z \leq -1.5)$$

$$\approx 0.0668$$

⑤ در مثال قبل، اگر ناهای عبارت به صورت $C = \{X_1, \dots, X_{25} \mid \bar{X} > c\}$ با α مقدار

c را به گونه ای تعیین کنیم که $\alpha = 0.1$ و احتمال خطای نوع دوم را به دست آوریم.

$$0.1 = \alpha = P(\bar{X} > c \mid \mu = 0) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - 0}{1/5}\right) = P(Z > 5c)$$

$$\Rightarrow P(Z \leq 5c) = 0.9 \Rightarrow 5c = z_{0.9} = 1.28$$

$$\Rightarrow c = \frac{1.28}{5} \approx 0.256$$

$$\beta = P(\bar{X} \leq c \mid \mu=1) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{0.512-1}{1/8}\right) = P(Z \leq -1.22)$$

$$\approx 0.112$$

④ فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با یکی از تجمعات زیر باشد:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$f_0(x)$	0.08	0.08	0.1	0.1	0.2	0.5
$f_1(x)$	0.1	0.18	0.28	0.18	0.28	0.1

در آزمون فرض $H_0: X \sim f_0$ $H_1: X \sim f_1$ کدام یک از تجمعات مجزا زیر را ترجیح می دهیم؟

$$C_1 = \{x_1, x_3\} \quad C_2 = \{x_2, x_3\}$$

$$C_1 \text{ برای } \alpha = P(X = x_1 \cup X = x_3 \mid H_0) = 0.08 + 0.1 = 0.18$$

$$\beta = P(X \notin C_1 \mid H_1) = 0.68$$

$$C_2 \text{ برای } \alpha = P(X = x_2 \cup X = x_3 \mid H_0) = 0.08 + 0.1 = 0.18$$

$$\beta = P(X \notin C_2 \mid H_1) = 0.6$$

چون α برای هر دو یکسان، با توجه به اینکه C_2 کمتر است، تجمعه C_2 را ترجیح می دهیم.