حل تمرین روش‌های آماری

جلسه‌ی اول

۱ - یک شرکت تولید لاستیک اتومبیل، لاستیک‌هایی تولید می‌کند که طول عمر این لاستیک‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۴ ماه و انحراف معیار ۲ ماه است. احتمال اینکه در یک نمونه‌ی تصادفی ۲۵ تایی از لاستیک‌ها میانگین طول عمر کمتر از ۲۵ ماه باشد را بیابید.

جامعه نرمال $\Longrightarrow \quad \bar{X} \sim N\left(24 , \frac{4}{25}\right)$

$$P(\bar{X} < 25) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{25-24}{2/5}\right) = P\left(Z < \frac{5}{2}\right) = \Phi(2.5) \simeq 0.9938$$

---

۲ - فرض کنید مقدار سال‌های تحصیل در بین افراد بالغ در کشوری معین دارای میانگین ۱۱.۱ سال و انحراف معیار ۳ سال باشد. احتمال اینکه در یک نمونه‌ی تصادفی ۱۰۰ نفری از افراد بالغ، متوسط تعداد سال‌های تحصیل بین ۱۱ تا ۱۲ سال باشد را بیابید.

$$n > 30 \Longrightarrow \bar{X} \sim N\left(11.1 , \frac{9}{100}\right)$$

$$P(11 < \bar{X} < 12) \simeq P\left(\frac{11-11.1}{3/10} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{12-11.1}{3/10}\right) = P\left(\frac{-1}{3} < Z < 3\right)$$

$$\simeq P(-0.33 < Z < 3) = \Phi(3) - \Phi(-0.33) \simeq .9987 - .3707 = 0.628$$

---

۳ - یک جامعه‌ی نرمال واریانس ۶ دارد. اگر نمونه‌ی تصادفی ۲۵تایی از این جامعه انتخاب شود احتمال اینکه واریانس نمونه بین ۳.۴۵ و ۱۰.۷۵ باشد را بیابید.

درجه آزادی

$$\text{جامعه نرمال} \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P(3{,}48 < S^2 < 10{,}78) = P\left(\frac{24 \times 3{,}48}{6} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{24 \times 10{,}75}{6}\right)$$

$$= P(13{,}8 < \chi^2(24) < 43) = P(\chi^2(24) < 43) - P(\chi^2(24) \leqslant 13{,}8)$$

$$\simeq 0{,}99 - 0{,}05 = 0{,}94$$

---

۴ - نمره‌های یک کلاس از دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۵ است. اگر از این کلاس یک نمونه ۲۰تایی انتخاب کنیم و مشاهده کنیم که انحراف استاندارد نمره‌های آن‌ها ۴.۲۸ است، احتمال اینکه میانگین نمره‌های این افراد از ۱۷ بیشتر باشد را بیابید.

$$\text{جامعه نرمال} \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P(\bar{X} > 17) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > \frac{17-15}{\frac{4{,}28}{\sqrt{20}}}\right) \simeq P(T > 2{,}09) = 1 - P(T \leqslant 2{,}09)$$

از جدول $t(19)$

$$\simeq 1 - 0{,}975 = 0{,}025$$

---

۵ - دو کارخانه تولید کابل A و B وجود دارند. کابل‌هایی که کارخانه‌ی A تولید می‌کند، به طور متوسط تحمل ۴۰۰۰ پوند نیروی کششی و انحراف معیار ۳۰۰ پوند را دارند و کابل‌هایی که کارخانه‌ی B تولید می‌کند، به طور متوسط تحمل ۴۵۰۰ پوند نیرو با انحراف معیار ۲۰۰ پوند را دارند. اگر ۱۰۰ کابل نوع A و ۵۰ کابل نوع B آزمایش شوند، احتمال اینکه متوسط تحمل نیروی کششی B حداقل ۶۰۰ پوند بیشتر از نیروی کششی A باشد را بیابید.

$$P(\bar{X}_B - \bar{X}_A \geqslant ۶۰۰) = P(\bar{X}_A - \bar{X}_B \leqslant -۶۰۰)$$

$$n_A , n_B > ۳۰ \quad \Longrightarrow \quad \bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N\left(۴۰۰۰ - ۴۵۰۰ , \frac{۳۰۰^{۲}}{۱۰۰} + \frac{۲۰۰^{۲}}{۵۰} \right)$$

$$\Longrightarrow P(\bar{X}_A - \bar{X}_B \leqslant -۶۰۰) = P\left(\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^{۲}}{n_A} + \frac{\sigma_B^{۲}}{n_B}}} \leqslant \frac{-۶۰۰ + ۵۰۰}{\sqrt{۱۷۰۰}} \right)$$

$$\simeq P(Z \leqslant -۲٫۴۳) \simeq ۰٫۰۰۷۵$$