

El sismo y sus espectros

Luis C. Pérez Tato

18 de septiembre de 2012

1. Introducción

Como el sagaz lector ya habrá adivinado, en lo que sigue no emplearemos la palabra *espectro* para referirnos a ningún fantasma sino para hacerlo a la *distribución de la intensidad de una radiación en función de una magnitud característica como la longitud de onda, la energía, la frecuencia o la masa*, que es la segunda acepción que da el diccionario de la RAE.

La radiación de la que se trata en los párrafos siguientes es la que producen las ondas sísmicas al atravesar el terreno y alcanzar la superficie. El objetivo de esta exposición es, simplemente, proporcionar una breve explicación de los conceptos que se emplean para caracterizar la acción sísmica en la mayor parte de las normas del mundo.

2. Espectros de respuesta

2.1. Introducción

En física, se denomina espectro de frecuencias al gráfico que muestra la descomposición de una señal ondulatoria (sonora, luminosa, electromagnética, sísmica, . . .) en el dominio de frecuencias.

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra el espectro de frecuencias de una señal de audio en un instante dado. En la figura 2 se muestra otro ejemplo que corresponde a la frecuencias en que emiten luz visible distintas sustancias.

En los apartados siguientes se tratará de explicar el modo en que se descompone una excitación de tipo mecánico (sísmica, . . .) como la que se representa¹ en la figura 3 en el dominio de frecuencias y la utilidad que dicha descomposición tiene en el diseño de estructuras.

2.2. Respuesta de un conjunto de osciladores a una excitación

Supongamos que se dispone de una serie de osciladores de 1 GDL de distintos períodos propios T_1, T_2, \dots, T_n . Supongamos también que cada oscilador está conectado a un registrador del que se puede obtener la historia de desplazamientos del oscilador.

Si sometemos este dispositivo a una excitación para, a continuación, obtener el valor extremo (máximo de los valores absolutos) de cada una de esas historias de desplazamientos y denominarlo $u_{ext}(T_i)$ obtendremos los pares:

$$\begin{array}{c} (T_1, u_{ext}(T_1)) \\ (T_2, u_{ext}(T_2)) \\ \vdots \\ (T_n, u_{ext}(T_n)) \end{array}$$

¹La excitación tendrá, en general, tres componentes. Como el tratamiento de todas ellas es idéntico en lo sucesivo se ignora la naturaleza espacial de la vibración.



Figura 1: Analizador de espectro de un conocido programa de reproducción de audio.

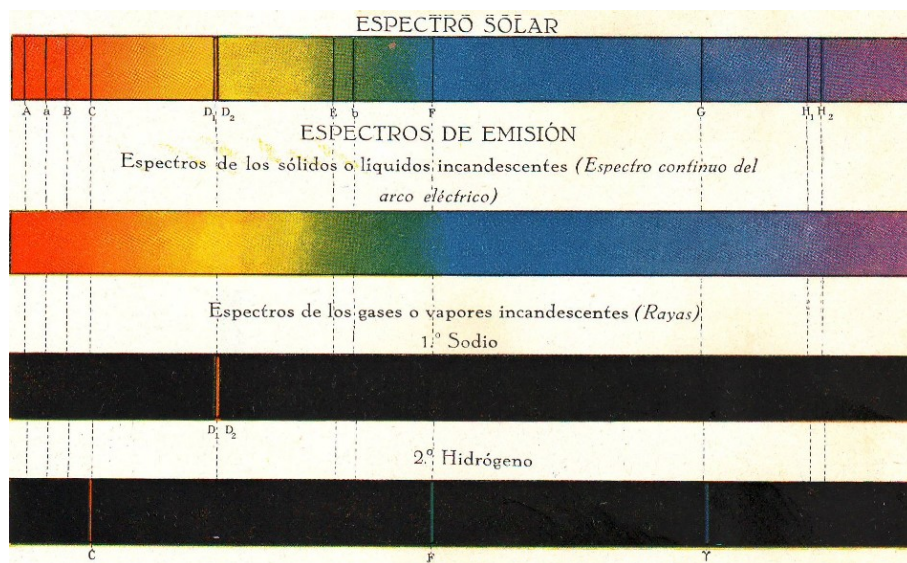


Figura 2: Espectros de emisión correspondientes a la luz solar, de un arco eléctrico, del sodio y del hidrógeno.

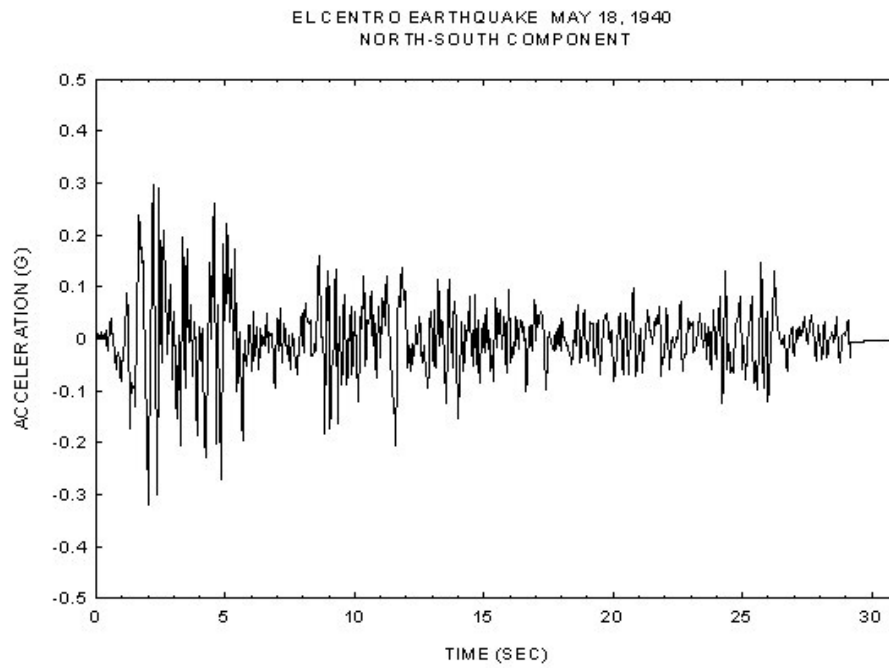


Figura 3: Acelerograma del terremoto ocurrido en El Centro al sur de California (EEUU) el 18 de mayo de 1940.

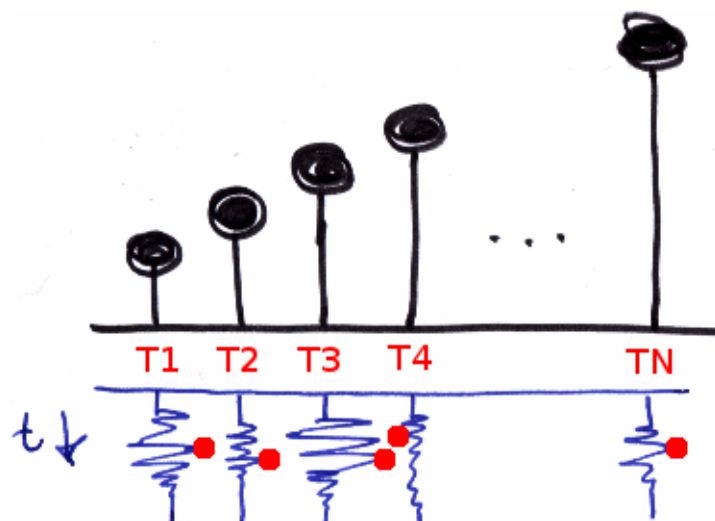


Figura 4: Valores extremos (puntos de color rojo) de la respuesta de un conjunto de osciladores

Si llevamos estas coordenadas sobre un gráfico de manera que las abscisas correspondan al período y las ordenadas al desplazamiento extremo habremos obtenido el espectro de respuesta de la excitación.

De manera más formal, se llama espectro de respuesta a una excitación a la función que a cada oscilador de un grado de libertad, de período propio T , le hace corresponder el valor extremo de su respuesta (máximo o mínimo en valor absoluto) en determinada magnitud (desplazamiento, velocidad, aceleración, ...).

La utilidad de los espectros de respuesta radica en que simplifican los datos a considerar en el análisis al proporcionar, para cada período de oscilación, la respuesta máxima que se produce bajo la excitación que provoca dicho espectro.

Los inconvenientes que presenta el empleo de espectros de respuesta son:

- No se tiene en cuenta la duración del fenómeno.
- No se tiene en cuenta el número de ciclos que produce la excitación.
- La respuesta en cada período depende también del amortiguamiento.

2.3. Espectro de respuesta elástica

Cuando consideramos la respuesta de osciladores elásticos lineales al espectro obtenido lo llamamos *espectro de respuesta elástica*.

2.3.1. Cálculo del espectro de respuesta elástica

Para obtener el espectro de respuesta elástica a una excitación, es necesario obtener la respuesta en el tiempo de numerosos osciladores sometidos a dicha excitación. Para ello ha de resolverse la ecuación diferencial del oscilador sometido a la excitación $p(t)$:

$$m\ddot{x} + l\dot{x} + kx = p(t) \quad (1)$$

siendo:

x : Desplazamiento del oscilador debido a la excitación.

k : Rigidez del oscilador.

l : Amortiguamiento viscoso del oscilador.

m : Masa sujeta a oscilación.

para lo que empleamos la integral de Duhamel.

Integral de Duhamel La ecuación 1 define la respuesta dinámica de un sistema elástico lineal de un grado de libertad a una excitación $p(t)$ cualquiera.

Si el sistema está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio (es decir $x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$) y se aplica un impulso representado por la función Delta de Dirac ²

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

²La función Delta de Dirac tiene valor unidad en el origen ($t = 0$) y nulo en el resto del dominio.

La solución de esta ecuación es la llamada *función de respuesta al impulso unidad* que se escribe:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\nu\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (3)$$

siendo:

$\nu = \frac{l}{2m\omega_n}$: Factor de amortiguamiento.

$\omega_n = \sqrt{k/m}$: Pulsación. Frecuencia angular natural del oscilador sin amortiguamiento.

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \nu^2}$: Frecuencia angular natural del movimiento amortiguado.

Si el impulso unidad en lugar de producirse en el instante inicial ($t = 0$) se produce en otro instante arbitrario ($t = \tau$) tendremos:

$$h(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_d} e^{-\nu\omega_n(t-\tau)} \text{sen}(\omega_d(t - \tau)) & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} \quad (4)$$

Si consideramos la excitación $p(t)$ como una sucesión de impulsos unidad:

$$p(t) = \int_0^t p(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (5)$$

como el problema es lineal, podemos aplicar el principio de superposición y calcular la respuesta como suma de las respuestas a cada impulso:

$$x(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6)$$

sustituyendo la función de respuesta al impulso unidad obtenemos la llamada integral de Duhamel:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\nu\omega_n(t-\tau)} \text{sen}(\omega_d(t - \tau)) d\tau \quad (7)$$

Respuesta del oscilador a la excitación Si la excitación (de aceleración \ddot{s}_{exc}), para la que queremos obtener la respuesta, es de la forma:

$$p(t) = -m\ddot{s}_{exc} \quad (8)$$

tendremos que el desplazamiento relativo u entre la masa y su anclaje vendrá dado por:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{s}_{exc}(\tau) \cdot e^{-\nu\omega_n(t-\tau)} \text{sen}(\omega_d(t - \tau)) d\tau \quad (9)$$

expresión en la que $\ddot{s}_{exc}(\tau)$ es la aceleración causada por la excitación en el instante τ .

Si tenemos un registro de valores de la aceleración \ddot{s}_{exc} en función del tiempo podremos integrar numéricamente la expresión 9 y obtener así la historia de desplazamientos relativos $u(t)$. Las velocidades $\dot{u}(t)$ y aceleraciones $\ddot{u}(t)$ se obtienen derivando numéricamente la historia de desplazamientos.

En el diseño de estructuras interesa conocer el valor de la fuerza de inercia que actúa sobre la misma. Esta fuerza depende de la aceleración total de la masa, suma de la relativa $\ddot{u}(t)$ y la del anclaje del oscilador (excitación).

2.3.2. Desplazamiento, velocidad y aceleración espectrales

Una vez determinadas las historias de desplazamientos y velocidades relativas y de la aceleración total para cada período T , podemos buscar sus valores extremos y, cada uno de ellos, nos dará un punto del espectro de respuesta. Para designar estos valores extremos se suele emplear la siguiente notación:

- Desplazamiento relativo espectral: $S_d = \max|u|$
- Velocidad relativa espectral: $S_v = \max|\dot{u}|$
- Aceleración absoluta espectral: $S_a = \max|\ddot{u} + \ddot{s}_{exc}|$

2.3.3. Influencia del amortiguamiento

Es frecuente que en el diagrama del espectro de respuesta se representen los resultados obtenidos con amortiguamiento nulo y, además, los correspondientes a distintos valores del amortiguamiento (5 %, 10 %, ...). De este modo se proporciona información sobre la influencia que tiene el amortiguamiento en la respuesta a las distintas frecuencias.

2.3.4. Influencia de las características de la estructura

Dependiendo de las distribuciones de rigidez y de masa de la estructura esta presentará modos propios más o menos próximos a las frecuencias contenidas en la excitación. Dependiendo de estas características el efecto que dicha excitación cause en la estructura se verá amplificado o atenuado.

Lo mismo sucede con los osciladores cuya respuesta forma el espectro. Por tanto no es raro encontrar espectros de respuesta en los que, para determinadas frecuencias, las aceleraciones son bastante mayores (o menores) que las de la excitación.

Efecto de la rigidez del oscilador Si consideramos el caso de una estructura muy rígida que, por tanto, tendrá un desplazamiento relativo x , velocidad relativa \dot{x} y aceleración relativa \ddot{x} muy pequeñas con lo que la aceleración absoluta del oscilador será prácticamente igual a la de la excitación, y por tanto la aceleración absoluta espectral será:

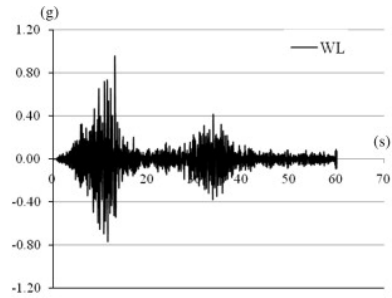
$$S_a = \max|\ddot{s}_{exc}| \quad (10)$$

El caso contrario, cuando la estructura es muy flexible el movimiento absoluto de la masa del oscilador será prácticamente nulo con lo que el desplazamiento espectral será:

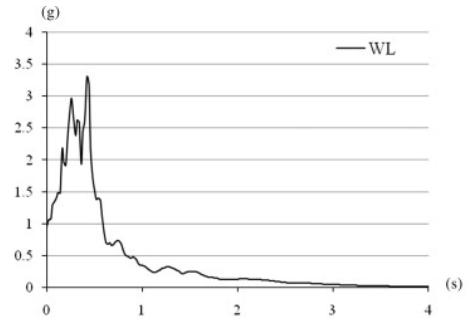
$$S_d = \max|s_{exc}| \quad (11)$$

En la práctica se suele considerar que una estructura es muy flexible cuando su período fundamental de oscilación es mayor de 15 segundos.

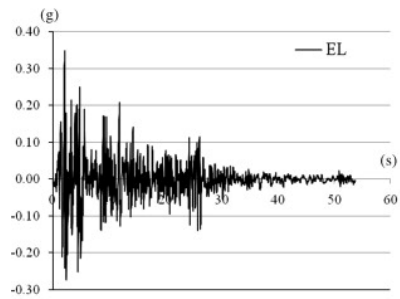
Factores de amplificación dinámica Para cada una de las magnitudes cinemáticas (desplazamiento, velocidad y aceleración) se define el *factor de amplificación dinámica* como el cociente entre el valor máximo de dicha magnitud en la estructura y el máximo correspondiente a la excitación, es decir:



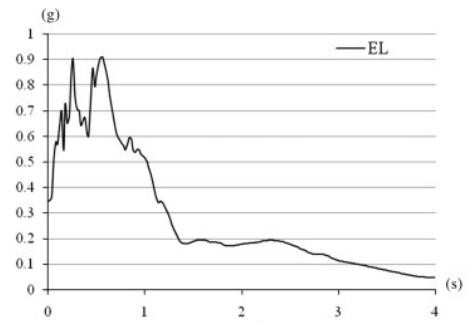
(a) Time history of Wolong earthquake record



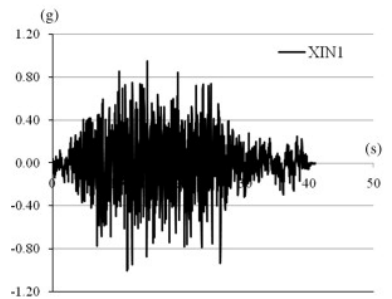
(b) Response spectrum of Wolong earthquake record



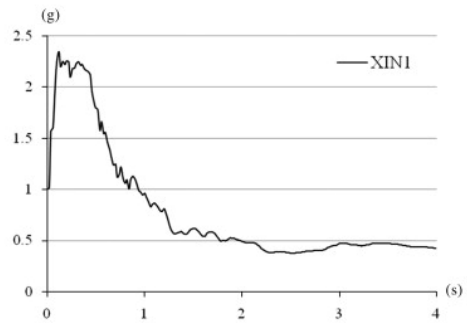
(c) Time history of El Centro earthquake record



(d) Response spectrum of El Centro earthquake record



(e) Time history of XIN1 artificial accelerogram



(f) Response spectrum of XIN1 artificial accelerogram

Figura 5: Acelerogramas y sus correspondientes espectros de respuesta (tomada de la referencia [2]).

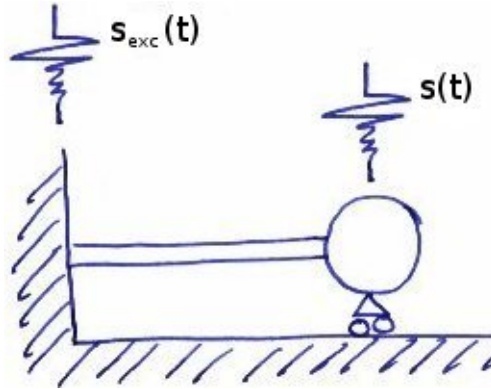


Figura 6: Oscilador rígido ($s(t) \approx s_{exc}(t)$)

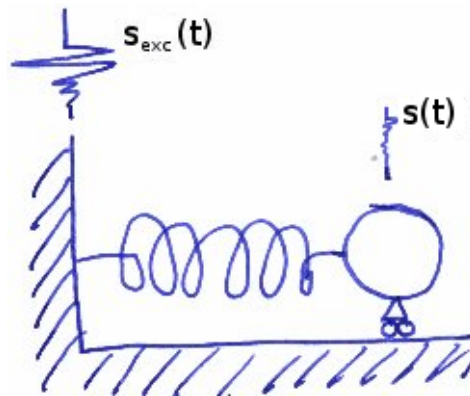


Figura 7: Oscilador flexible ($s(t) \approx 0$)

Parámetro	Oscilador	
	Rígido	Flexible
Rigidez	$k \rightarrow \infty$	$k \rightarrow 0$
Pulsación	$\omega \rightarrow \infty$	$\omega \rightarrow 0$
Período	$T \rightarrow 0$	$T \rightarrow \infty$
Desplazamiento relativo espectral	$S_d \approx 0$	$S_d \approx \max s_{exc} $
Velocidad relativa espectral	$S_v \approx 0$	$S_v \approx \max \dot{s}_{exc} $
Aceleración absoluta espectral	$S_a \approx \max \ddot{s}_{exc} $	$S_a \approx 0$
Factores de amplificación dinámica	$\beta_d = 0$	$\beta_d = 1$
	$\beta_v = 0$	$\beta_v = 1$
	$\beta_a = 1$	$\beta_a = 0$

Cuadro 1: Influencia de la rigidez en los parámetros de la oscilación.

$$\beta_a(\nu, T) = \frac{S_a}{\max|\ddot{s}_{exc}|} \quad (12)$$

$$\beta_v(\nu, T) = \frac{S_v}{\max|\dot{s}_{exc}|} \quad (13)$$

$$\beta_d(\nu, T) = \frac{S_d}{\max|s_{exc}|} \quad (14)$$

2.3.5. Efecto del terreno

Como se ha visto el espectro elástico de respuesta queda definido tanto por las características del oscilador (rigidez, ...) como por las del acelerograma de la excitación \ddot{s}_{exc} .

En el caso de un sismo el acelerograma que se presenta en determinado punto de la superficie del terreno³ varía mucho según la naturaleza del terreno. Los datos experimentales muestran que las condiciones locales del terreno (rigidez de los distintos estratos) puede tener los siguientes efectos sobre el movimiento sísmico:

- Atenuación de los movimientos del terreno de período corto.
- Amplificación de los movimientos de período largo.

2.3.6. Pseudo-espectros de respuesta

En el apartado 2.3.1 vimos que la frecuencia natural del sistema amortiguado viene dada por la expresión:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \nu^2} \quad (15)$$

Cuando el amortiguamiento ν es inferior al 10 % tendremos que

³En realidad el terreno puede considerarse como una estructura situada sobre el hipocentro del terremoto a través de la cual se propaga la acción sísmica. Esta «estructura» tendrá sus propias características de rigidez, densidad y amortiguamiento que «filtrarán» el movimiento que propaga.

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \sqrt{(1 - 0,01^2)} = 0,995 \quad (16)$$

Es decir que podemos considerar iguales ambas pulsaciones $\omega_n \approx \omega_d$, con lo que la ecuación 9 queda:

$$u(t) = \frac{-1}{\omega} \int_0^t \ddot{s}_{exc}(\tau) \cdot e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau \quad (17)$$

Las derivadas respecto al tiempo son:

$$\dot{u}(t) = - \int_0^t \ddot{s}_{exc}(\tau) \cdot e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau \quad (18)$$

$$\ddot{u}(t) = \omega \int_0^t \ddot{s}_{exc}(\tau) \cdot e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau \quad (19)$$

De las relaciones anteriores se obtiene que:

$$\dot{u}(t) = \omega u(t) \quad (20)$$

$$\ddot{u}(t) = \omega^2 u(t) \quad (21)$$

si estas relaciones las particularizamos para los valores máximos⁴, es decir los que hemos llamado valores espectrales, tendremos:

$$S_{pv} = \omega S_d \quad (22)$$

$$S_{pa} = \omega^2 S_d \quad (23)$$

Que son las definiciones de la pseudo-velocidad y la pseudo-aceleración espectrales. (de ahí el subíndice p).

Como se ha indicado al principio, estas relaciones sólo se cumplen exactamente cuando el amortiguamiento es nulo y pueden considerarse aproximadas cuando éste es inferior a 0.1. El prefijo *pseudo* se emplea para indicar esta falta de exactitud.

Un pseudo-espectro de respuesta es aquel en el que se dan la pseudo-aceleración (o pseudo-velocidad) espectral en lugar del valor real de la aceleración (o la velocidad).

3. Espectros de diseño

3.1. Introducción

Al diseñar una estructura, como pueda ser un puente carretero, no se considera la carga de un vehículo concreto, tampoco se suele considerar un conjunto⁵ de vehículos que pudieran transitar por el mismo. En lugar de ello las normas establecen envolventes de cargas cuya aplicación

⁴Como la pulsación no depende del tiempo los máximos y mínimos se producirán en el mismo instante para desplazamiento, velocidad y aceleración.

⁵En algunos casos, como el análisis dinámico de puentes que se establece en la norma de puentes de ferrocarril española (IAPF), sí se establece la comprobación bajo un conjunto de trenes «tipo» de características determinadas.

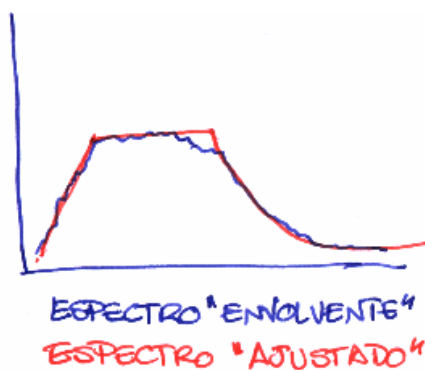


Figura 8: Ajuste del espectro de diseño.

«engloba» las acciones de los distintos tipos de vehículos que puedan circular por la vía a la que pertenece el puente.

Del mismo modo la comprobación de la estructura frente a sismo no se hace empleando el espectro de respuesta, que corresponderá a un sismo determinado ocurrido en un lugar que en general no coincidirá con la ubicación de la obra. En lugar de ello se empleará lo que se denomina un «espectro de diseño» que será la envolvente de los espectros de respuesta probables en determinada zona.

Los espectros de diseño son una herramienta muy útil puesto que permiten estimar el valor máximo de la acción sísmica sin necesidad de realizar un estudio sísmico de la zona en la que se ubica la obra.

3.2. Obtención del espectro de diseño

Como se ha indicado anteriormente los espectros de diseño son el resultado de considerar el efecto de múltiples terremotos registrados en una región. A partir de los espectros de respuesta obtenidos de estos registros y mediante la aplicación de técnicas estadísticas que permitan tener el suficiente margen de seguridad se obtiene un espectro que «envuelve» a aquellos de los que se ha partido. A continuación se ajusta el espectro obtenido mediante expresiones analíticas simples de modo que resulte fácil de emplear y además se eliminan el «rizado» de datos «párásitos».

Generalmente se emplean los espectros de diseño expresados en aceleraciones aunque existen procedimientos basados en el empleo de espectros expresados en desplazamientos. Es posible obtener los desplazamientos a partir de las aceleraciones empleando la expresión 23 (teniendo en cuenta las simplificaciones que allí se indicaron). Este procedimiento requiere que el espectro de aceleraciones del que se parte esté concebido contemplando esta posibilidad⁶.

4. La definición de la acción sísmica en las normas.

En la mayor parte de las normas la acción sísmica se define mediante la definición de una función de amplificación de las aceleraciones en función del período T del oscilador. En la figura 9 puede verse el aspecto de esta función en el caso del eurocódigo 8.

⁶El eurocódigo 8 proporciona espectros de diseño en aceleraciones que admiten el empleo de esta técnica.

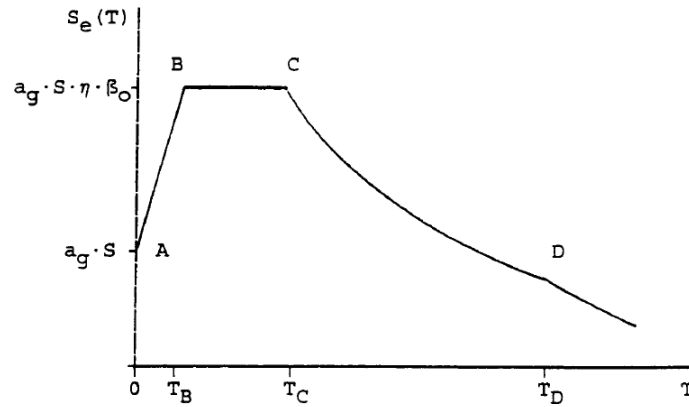


Figura 9: Función de amplificación de la aceleración del eurocódigo 8.

Para obtener el espectro de diseño en aceleraciones a partir de dicha función, basta multiplicarla por la aceleración sísmica máxima del terreno a_g que se obtendrá de tablas o mapas proporcionados por la norma.

Además este espectro se ajusta empleando distintos coeficientes que introducen el efecto de:

- La naturaleza del terreno (ver apartado 2.3.5).
- La importancia de la estructura (las mayor o menor gravedad de las consecuencias de su destrucción).
- La ductilidad de la estructura.
- El tipo de cimentación.
- Las características de amortiguamiento.

Una vez que se dispone del espectro de diseño a emplear se sigue el siguiente procedimiento:

1. Cálculo de los períodos propios de la estructura y los autovectores (modos) correspondientes.
2. Obtención de la masa modal efectiva.
3. Selección de los j primeros modos cuyas masas efectivas cumplan las prescripciones que indique la norma (suma mayor que el 90 % de la masa total,...).
4. Para cada uno de los j modos se determina la aceleración que proporciona el espectro de diseño a partir de su período de oscilación T .
5. Se calculan las fuerzas sísmicas equivalentes.
6. Estas fuerzas se introducen en el análisis como cargas estáticas y los resultados obtenidos se combinan de acuerdo con alguno de los criterios que adminta la norma.

Referencias

- [1] Sáez Pérez, Andrés *Elementos de dinámica estructural*. Departamento de mecánica de medios continuos y teoría de estructuras. E.T.S. Arquitectura de Sevilla (España),
- [2] Ying Zhou, Xilin Lu, Dagen Weng, Ruifu Zhang *A practical design method for reinforced concrete structures with viscous dampers*. (State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China).