Mars-Avril-Mai **2023**

AUGÉ Anaïs
GAMAMOU Yves Ziodo
PELOSI Piero

Avec le soutien du professeur : **LE-GALL** Pierre-Yves

Taux d'intérêts et décisions futures

Projet d'initiation à la recherche

Soutenance le **lundi 22 mai 2023**

SOMMAIRE

I – Introduction

Le temps est un concept fondamental dans l'élaboration des politiques économiques à long terme. En effet, la question centrale pour les décideurs est de savoir quels coûts ils sont prêts à supporter aujourd'hui pour récolter les bénéfices dans le futur.
Cependant au fil des années, la prise en compte de l'impact environnemental de l'homme a modifié la façon dont nous envisageons le long terme, ce qui a rendu encore plus complexe l'élaboration de politiques à long terme. C'est dans ce contexte que le modèle standard de Ramsey, qui a été développé par l'économiste américain Frank Ramsey en 1928, offre une lueur d'espoir en aidant à déterminer le taux d'intérêt optimal qui maximise l'utilité des consommateurs à long terme.
Dans ce projet, nous aborderons la question du taux d'intérêt optimal sur le long terme en nous appuyant sur le modèle de Standard de Ramsey. L'étude de ce modèle, qui s'appuie sur les préférences des ménages et les contraintes budgétaires, nous permet de découvrir comment il peut être utilisé pour éclairer les décisions économiques à long terme.

1.1 Avant de commencer, quelques mots sur le modèle de Solow

La croissance économique est une augmentation sur le long-terme des richesses d'un pays. Elle est mesurée par le PIB. Parmi les théories qui cherchent les causes de la croissance, celle de Solow est la référence pour l'économie néoclassique.
Le modèle de Solow est un cadre économique fondamental pour comprendre la croissance à long terme d'une économie. Élaboré par le célèbre économiste américain Robert Solow dans les années 1950 et 1960, ce modèle se concentre sur les facteurs de production qui déterminent le niveau de richesse d'une économie.
A partir de plusieurs hypothèses, le modèle considère la croissance comme équilibrée à long-terme. Reposant en grande partie sur le progrès technique, la croissance serait stable et mènerait naturellement au plein-emploi.
Solow considère un monde à un seul bien et un seul agent. La production ne dépend que de deux facteurs : le travail et le capital. Les autres hypothèses de ce modèle sont : la flexibilité des facteurs de production, les rendements d'échelle constants et le réinvestissement de l'épargne.
Dans ce modèle, l'augmentation des facteurs de production explique une part de la croissance, c'est-à-dire qu'il y a donc de la croissance par suite d'une augmentation de la population (facteur travail) ou des investissements (facteur capital). Cependant, une grande partie de la croissance ne peut pas vraiment s'expliquer par ces deux facteurs parce qu'elle est dû au progrès technique dont on ne connaît pas vraiment l'origine. Les causes de la croissance sont donc exogènes c'est-à-dire que le modèle n'explique pas leur origine. Mais avoir un taux d'épargne exogène signifie qu'il n'y a pas vraiment de décisions prises par les ménages. Dans ce modèle, le gouvernement leur dit indirectement combien épargner, combien dépenser et le fondement réside uniquement sur une fonction de production, ce qui est finalement très loin de la réalité. Le modèle de Ramsey entre donc en jeu en prenant en compte les préférences des ménages en matière d'épargne ainsi que de consommation.

II – Le modèle de Ramsey

2.1 Introduction du modèle

2.1.1 Quelques mots sur le modèle

Comme nous venons de le voir, dans le modèle de Solow, un taux d'épargne exogène est irréaliste. Il n'est pas exogène dans le monde réel puisque, évidemment, le gouvernement n'impose pas les niveaux de dépenses aux ménages.
Les consommateurs sont confrontés à un arbitrage entre la consommation en temps t (aujourd'hui par exemple), celle en $t+1$ ou encore celle dans deux périodes, en $t+2$.
De même, les entreprises réagissent aux variations des prix des facteurs de production en ajustant leurs dépenses.
Il existe tout de même une sorte de conseil politique dans lequel les experts ne choisissent pas le taux d'épargne mais peuvent potentiellement influencer le taux d'intérêt (par l'intermédiaire de la banque centrale).

Ce modèle est donc un véritable modèle macroéconomique, un modèle dynamique dans lequel les entreprises et les travailleurs prennent des décisions. Il s'agit également d'un modèle d'équilibre général dynamique, car les prix sont endogènes.
Les conclusions de ce modèle ne vont pas trop différer des conclusions du modèle de Solow : le capital sera incapable d'être un moteur de croissance sur le long terme et la croissance économique sera due principalement au taux de croissance de l'innovation technologique (taux de croissance de productivité). C'est tout de même un modèle très intéressant, typiquement économique, qui va nous permettre de nous apporter les connaissances nécessaires à la compréhension et résolution de n'importe quel modèle économique au niveau master.

2.1.2 Mise en place du modèle

Dans le modèle de Ramsey, nous nous intéressons à une économie avec deux types d'agents qui peuvent prendre des décisions différentes : les ménages et les entreprises. Il y a H ménages identiques dans cette économie. Ce nombre est fixe, le nombre de ménage n'évolue pas. Toutefois, la taille de chaque ménage augmente au taux n. De plus, chaque membre du ménage fournit 1 unité de travail à chaque moment t de l'année. Donc l'augmentation de la taille des ménages mène à une augmentation de la force de travail au taux n. Comme l'offre des ménages est constante, cette augmentation entraîne un accroissement de l'économie de plus en plus important. Nous supposons donc que chaque membre du ménage fournit une unité de travail quel que soit le niveau de salaire. Cette hypothèse peut paraître irréaliste mais ce modèle s'intéresse au capital et non pas à l'offre de travail.
Remarque : L'hypothèse d'expansion de la taille des ménages avec un nombre de ménage constant est irréaliste de même que l'hypothèse que chaque membre du ménage fournit une unité de travail quel que soit le salaire. En effet, si les salaires augmentent, on pourrait s'attendre à une augmentation du nombre d'heures travaillées.
Les ménages possèdent du capital (la dépréciation n'est pas prise en compte dans ce modèle). Ils louent ce capital aux entreprises et les entreprises produisent des biens en utilisant le travail et le capital. Les marchés sont concurrentiels, tous les agents sont preneurs de prix. Les entreprises sont entièrement détenues par les ménages donc les bénéfices qu'elles réalisent leur reviennent. On suppose qu'il y a de la concurrence parfaite (marchés compétitifs) donc les entreprises ne récupèrent pas de profits. On suppose donc que les profits n'existent pas dans ce modèle.

2.2 Les préférences des ménages

2.2.1 L'utilité des ménages

Les ménages ont une fonction d'utilité donnée par :

$$(1) : U = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(C(t)) \frac{L(t)}{H} dt$$

Avec :

- ρ est le taux d'actualisation: Le taux d'actualisation est le taux d'intérêt utilisé pour évaluer la valeur actuelle d'un investissement futur en tenant compte du temps et du risque associés à l'investissement. Il est utilisé pour déterminer si un investissement est rentable ou non. Autrement dit, plus ρ est important, plus les ménages auront tendance à avoir de la préférence pour le présent.
- $C(t)$ est la consommation de chaque membre du ménage en temps t
- La fonction u est l'utilité « instantanée ». Elle ne dépend que de la consommation (c'est une assomption économique standard). C'est l'utilité individuelle que chaque membre du ménage retire à l'instant t.
- $L(t)$ est la population totale (il y a une croissance démographique au taux n).
- Et $L(t)$ / H est le nombre de membres du ménage.

Dans les modèles économiques, il y a toujours une approche normative et une approche positive. Dans ce cas, le taux d'escompte met en évidence l'approche positive (la description du monde de la réalité). Ceci explique pourquoi les individus ont tendance à préférer le présent que les évènements futurs.
L'approche normative est plus sur le « devrait-il se passer comme ça ? ». Elle devient très intéressante dès lors que l'on parle de sujets comme le réchauffement climatique. Où la plupart des dégâts se vérifieront dans le futur.

2.2.2 La technologie des entreprises

Elle est donnée par :

$$Y = F(K, AL)$$

Où A est l'efficacité du travail, des connaissances ou simplement « la productivité ».
Les entreprises considèrent A comme donné et A croît de manière exogène au taux g. Nous supposons que F présente des rendements d'échelle constants :

$$F(\mu K, \mu AL) = \mu F(K, AL), \forall \mu \geq 0$$

Nous pouvons écrire la fonction de production sous sa forme intensive en utilisant l'hypothèse de rendements d'échelle constants :

$$y \equiv \frac{Y}{AL} = \frac{1}{AL} F(K, AL) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = F(k, 1) \equiv f(k)$$

Nous supposons aussi $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, et les conditions suivantes (d'Inada, économiste japonais).

$$\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0 \text{ et } \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$$

2.3 La contrainte budgétaire des ménages

Dans un modèle économique, lorsqu'on a une fonction d'utilité des ménages, on a aussi une contrainte. Pourquoi les ménages ne pourraient pas choisir une consommation infinie, par exemple ?
La valeur actuelle de la consommation est inférieure ou égale à la valeur actuelle du revenu ajoutée de la richesse actuelle. On va considérer que toute l'épargne est épargnée en capital.
La nuance réside dans le fait que le taux d'intérêt change au fil du temps :

$$(i) : R(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau$$

Ainsi, une unité d'investissement à 0 produit $e^{R(t)}$ unités au temps t.
Si le taux d'intérêt est constant, alors $R(t) = rt$.

Nous voulons que la consommation d'un ménage au cours de sa vie soit inférieure ou égale au revenu qu'il aura au cours de sa vie plus la richesse initiale du ménage.

$$\int e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} dt = \frac{K(0)}{H} + \int e^{-R(t)} W(t) \frac{L(t)}{H} dt$$

Avec :
- $C(t)$: la consommation ;
- $L(t) / H$: le nombre de personnes dans les ménages ;
- $C(t)L(t) / H$: la consommation totale du ménage au temps t.

Nous parlons maintenant de consommation et d'épargne. Ce qui importe ici, c'est le taux d'intérêt et non le taux d'actualisation. Il s'agit ici d'emprunter et d'épargner, il faut donc penser au taux d'intérêt. Nous savons quelle est la valeur de la consommation à un moment t. Maintenant, nous ne devons pas actualiser cette consommation parce qu'elle se situe dans le futur. Si nous avions épargné une certaine somme d'argent aujourd'hui, combien d'argent aurions-nous dû épargner pour obtenir $c(t)$ au temps t, c'est-à-dire $c(t)$ au temps t multiplié par $e^{-R(t)}$.

On en déduit que l'équation par unité de travailleur est la suivante :

$$\int e^{-R(t)}c(t)\frac{A(t)L(t)}{H}dt = k(0)\frac{A(0)L(0)}{H} + \int e^{-R(t)}w(t)\frac{A(t)L(t)}{H}dt$$

D'après les condition initiales et exogènes on a une croissance exponentielle de la population donc :

- $A(t) = A(0)e^{g(t)}$;
- $L(t) = L(0)e^{n(t)}$.

On obtient finalement l'égalité suivante :

$$A(t)L(t) = A(0)L(0)e^{(g+n)t}$$

On utilise cette égalité pour remplacer $A(t)L(t)$ dans les expressions précédentes et on obtient :

$$\int e^{-R(t)}c(t)\frac{A(0)L(0)e^{(g+n)t}}{H}dt = k(0)\frac{A(0)L(0)}{H} + \int e^{-R(t)}w(t)\frac{A(0)L(0)e^{(g+n)t}}{H}dt$$

On divise ensuite les deux côtés de l'équation par $A(0)L(0)$ puis on multiplie les deux côtés par H. On obtient l'égalité suivante :

$$(CB) : \int_0^\infty e^{-R(t)}c(t)e^{(g+n)t}dt = k(0) + \int_0^\infty e^{-R(t)}w(t)e^{(g+n)t}dt$$

C'est la contrainte budgétaire en termes de main-d'œuvre effective.
La consommation actualisée du ménage est donc égale au revenu actualisé du ménage plus les avoirs supplémentaires de richesse, le tout en termes de capital humain par unité.

2.4 La condition non-Ponzi

Il faut que l'on rajoute une dernière condition, pour anticiper le fait que les agents puissent avoir des comportements frauduleux. Dans ce modèle, on suppose déjà que les ménages décident leur épargne sur chaque période. Donc jusqu'ici les ménages pourraient avoir une consommation très élevée (fondée sur des emprunts) en période t, emprunter davantage pour rembourser la dette en période $t+1$ et maintenir un niveau de consommation très élevé et ainsi de suite indéfiniment, en creusant leur dette de manière exponentielle pour toujours.
Il est donc nécessaire d'imposer une condition pour que ce phénomène ne puisse pas se produire. Cette dernière s'appelle la condition Non-Ponzi et l'idée majeure est qu'il est impossible d'emprunter indéfiniment pour rembourser une dette passée. Formellement on va écrire :

$$\lim_{s \to \infty} e^{-R(s)}k(s)e^{(n+g)s} >= 0$$

On a que : $k(s) = K(s) / [A(s)L(s)]$, avec s, un instant temporel. Autrement dit, on peut dire jusqu'ici que $k(s)e^{(n+g)s}$ est le niveau total de capital ou d'épargne des ménages, puisque la signification des deux est très proche (pour l'instant). Concrètement, cela signifie que tôt ou tard, les dettes devront finir par être remboursées : impossibilité de garder les prêts à l'infini.
Désormais les ménages ont une contrainte à la fois budgétaire et une contrainte non-Ponzi (sur leur épargne).

2.4.1 La fonction d'utilité CRRA (de l'anglais, constante relative à l'aversion du risque)

Jusqu'à maintenant, la fonction d'utilité posée était très générale. On va se pencher sur une fonction d'utilité plus spécifique qui va nous permettre de résoudre plus précisément l'équilibre stable de cette économie.
Supposons la fonction d'utilité instantanée suivante :

$$(2) : u\big(C(t)\big) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Où $1/\theta$ mesure l'élasticité de substitution intertemporelle et est strictement positif. C'est le niveau d'indifférence des individus à la consommation aujourd'hui ou demain. Plus $1/\theta$ est élevé, plus un individu est indifférent à consommer beaucoup aujourd'hui et peu demain (l'effet de substitution domine l'effet de revenu). À l'inverse, plus θ est grand, et donc plus $1/\theta$ est petit, l'individu se désintéresse du niveau des prix ou du taux d'intérêt : tout ce qui va compter pour lui c'est d'avoir le même niveau de consommation à

toutes les périodes (aujourd'hui comme demain). Dans ce deuxième cas, l'effet de revenu va dominer l'effet de substitution.
Il existe aussi un cas particulier : lorsque $\theta = 1$. Dans ce cas, $u(C(t)) = \ln C(t)$. On peut donc considérer le comportement de cette fonction d'utilité comme celui d'une fonction logarithmique classique. En effet, on obtient une utilité marginale qui rapidement se retrouve à croître lentement (on peut penser à la série 1 + ½ + ⅓ + …).
Convertir la fonction d'utilité en une fonction de consommation échelonnée par la technologie :

$$(3) : \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{[A(t)c(t)]^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{[A(0)e^{gt}]^{1-\theta}c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = A(0)^{1-\theta}e^{(1-\theta)gt}\ \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Avec :

- $C(t)$: la consommation par personne ;
- $c(t) = C(t) / A(t)$, la consommation par unité de capital humain.

Nota bene : $A(0)^{1-\theta}$ est une constante et $e^{(1-\theta)gt}$ croît de manière exogène à la vitesse de $(1-\theta)g$.

2.5 Réécriture de l'utilité et résolution du problème de l'entreprise

Nous avons donc maintenant une fonction d'utilité par unité de capital humain.
En remplaçant la fonction d'utilité CRRA (2) dans la fonction d'utilité des ménages (1), on obtient :

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\frac{L(t)}{H}dt$$

En remplaçant par (3) ce que l'on vient d'obtenir et en notant que $L(t) = L(0)e^{nt}$, on obtient finalement :

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t}A(0)^{1-\theta}e^{(1-\theta)gt}\ \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\frac{L(0)e^{nt}}{H}dt$$

Posons B une constante, égale à tous les termes qui ne dépendent pas de t, c'est à dire tout ce qui peut être isolé de l'intégrale. Et aussi β égale à tous les termes en exposant de l'exponentielle. On a donc :

$$B \equiv A(0)^{1-\theta}\frac{L(0)}{H}, \beta \equiv \rho - n - (1-\theta)g$$

Nous devons supposer que $\beta > 0$ (il s'agit d'une hypothèse visant à garantir que la valeur de l'utilité ne tende pas vers l'infini).
On obtient finalement la fonction d'utilité pour les ménages à vie suivante, exprimée en termes d'unités de consommation par unité de capital humain :

$$U = A(0)^{1-\theta}\frac{L(0)}{H}\int_0^\infty e^{-\rho t}e^{(1-\theta)gt}\ e^{nt}\ \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt$$

$$(4) : U = B\int_0^\infty e^{-\beta t}\ \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt$$

Nous avons finalement décrit l'économie dans laquelle nous nous trouvons.
Nous voulons maintenant savoir comment les entreprises et les ménages se comportent en fonction des prix (c'est un concept de microéconomie).
Ensuite, nous allons mettre en relation les travailleurs et les entreprises pour obtenir l'équilibre et plus particulièrement le prix d'équilibre qui permet de rendre cohérentes les décisions des firmes avec celles des ménages.

2.5.1 Problème de maximisation du profit des entreprises

Les firmes cherchent à maximiser leur profit. Leur programme de maximisation est le suivant :

$$\max_{K(t),L(t)} \Pi(t) = F[K(t), A(t)L(t)] - W(t)L(t) - r(t)K(t)$$

Explication :
On suppose que devant F se trouve le prix implicite de la production qui vaut 1. $F[K(t), A(t)L(t)]$ est le revenu que la firme obtient, c'est-à-dire sa production. On soustrait à ce revenu les coûts auxquels doit faire face la firme. Ils se composent du coût des travailleurs et du coût du capital.

Les conditions du premier ordre, qui permettent de résoudre le problème de maximisation sont les suivantes (sans l'argument du temps, pour des raisons de commodité) :

$$\frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} - r = 0$$

$$\frac{\partial F(K, AL)}{\partial L} - W = 0$$

2.5.2 Prix des facteurs

Nous allons maintenant tout exprimer en termes d'unité de capital humain.
Nous pouvons réécrire les conditions de premier ordre du problème de maximisation du profit des entreprises comme suit :

$$(1) : r = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} = \frac{\partial ALf\left(\frac{K}{AL}\right)}{\partial K} = ALf'\left(\frac{K}{AL}\right)\frac{1}{AL} = f'(k)$$

$$(2) : W = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial L} = \frac{\partial ALf\left(\frac{K}{AL}\right)}{\partial L} = \frac{\partial AL}{\partial L} * f\left(\frac{K}{AL}\right) + AL * \frac{\partial f\left(\frac{K}{AL}\right)}{\partial L}$$

$$= A * f\left(\frac{K}{AL}\right) + AL * f'\left(\frac{K}{AL}\right) * \left(\frac{\partial \frac{K}{AL}}{\partial L}\right)$$

Explication :

(1) Pour passer de la première égalité à la deuxième, on a :

$$F(K, AL) = F(K, AL) * \frac{AL}{AL} = ALF\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = ALf\left(\frac{K}{AL}\right)$$

(2) Pour passer de la première égalité à la deuxième, on effectue le même processus.
Pour passer de la deuxième égalité à la troisième :
Comme on a :
$\frac{\partial \frac{K}{AL}}{\partial L} = \frac{\partial KA^{-1}L^{-1}}{\partial L} = -\frac{K}{AL^2}$, on obtient : $W = Af(k) - ALf'(k)\frac{K}{AL^2} = A[f(k) - kf'(k)]$.

En divisant le tout par A on obtient une expression du salaire par unité de capital humain :

$$w = f(k) - kf'(k)$$

Avec $f(k)$ la production, $f'(k)$ le taux de location du capital et k le montant du capital utilisé par l'entreprise.

2.6 Résolution du problème des ménages

Voici le problème de maximisation des ménages. On maximise la fonction d'utilité (4) :

$$\max_{c(t)} B \int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt$$

Sous réserve évidemment de la contrainte budgétaire, exprimée en termes de consommation par unité de capital humain et aussi en termes de salaires par unité de capital humain que l'on a explicité par (CB). Et avec évidemment la condition non Ponzi.

2.6.1 Le problème d'optimisation des ménages

Comme dans toute économie, les ménages ont pour objectif de maximiser leur utilité en fonction de leur contrainte budgétaire.
Ce modèle est continu dans le temps donc, formellement, pour le résoudre, il faut passer par l'hamiltonien (c'est une méthode similaire à celle du lagrangien mais spécifique pour les modèles continus).
La résolution de ce problème d'optimisation se fait à l'aide de la méthode du contrôle optimal en 4 étapes qui se base sur l'hamiltonien. Cette méthode apparaît comme la plus facile pour la résolution des problèmes d'optimisation dynamique. En effet, la théorie du contrôle optimal permet de décomposer un problème intertemporel (général) en des problèmes instantanés.

Voici la méthode du contrôle optimal :
Nous commençons par définir le hamiltonien associé au problème d'optimisation des ménages :

H [(ci,t)i∈{1,...,m}, kt, λt,t] ≡ U [(ci,t)i∈{1,...,m}, kt,t] + λtG [(ci,t)i∈{1,...,m}, kt,t]

[(ct)t≥0,(bt)t>0] est une solution de ce problème si et seulement s'il existe (λt)t≥0 tel que les 4 propriétés suivantes soient vérifiées :

- Condition du 1er ordre sur la variable de contrôle :
$$\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0$$
Condition d'évolution de la co-variable état :
$$\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial b(t)} = -\lambda \dot{t}$$
Contrainte budgétaire instantanée :
$$\forall t \geq 0, b\dot{t} \ = \ (rt \ - \ n)bt \ + \ wt \ - \ ct$$
Ces trois points impliquent l'équation d'Euler.
- Condition de transversalité :
$$\lim_{t \to +\infty} kt\lambda\dot{t} = \ 0$$
- Contrainte de solvabilité : l'utilité est toujours positive.
- Contraintes de positivité : ∀t ≥ 0, ct ≥ 0 et λt ≥ 0

2.6.2 Résolution pour le comportement des ménages

Dans cette partie nous nous intéresserons à la résolution du problème des ménages par la méthode standard du lagrangien. Nous pouvons transformer nos grandeurs temporaires en grandeurs instantanées afin de pouvoir intégrer chacune d'entre elles, c'est ce qui nous permet d'appliquer le lagrangien.
On établit le lagrangien :
$$L = B \int_0^\infty e^{-\beta t} \ \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \ dt - \lambda \left(\int_0^\infty e^{-R(t)} c(t) e^{(g+n)t} dt - k(0) - \int_0^\infty e^{-R(t)} w(t) e^{(g+n)t} dt \right)$$
L est donc la différence entre la fonction à maximiser et la contrainte budgétaire, multipliée par une constante lambda λ.
Il en vient par la suite la condition de premier ordre, où l'on dérive L par rapport à *c*(*t*). Les intégrales disparaissent mais cela n'est pas surprenant puisque l'on s'intéresse à un instant particulier *t* donc l'ensemble des instants que l'on retrouve dans l'intégrale peuvent être « oubliés ». À partir de L, on a donc :
$$Be^{-\beta t} c(t)^{-\theta} = \ \lambda e^{-R(t)} e^{(n+g)t}$$
En prenant le logarithme de part et d'autre de cette expression on obtient :
$$\ln B - \ \beta t - \theta \ln c(t) = \ln \lambda - R(t) + (n+g)t = \ln \lambda - \int_0^t r(\tau) d\tau + (n+g)t$$
On a appliqué évidemment les propriétés du logarithme suivantes :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^y) = y\ln(x)$
- $\ln(e^x) = x$

Et on a réécrit *R*(*t*) comme défini dans (i).
Nota bene : on aurait pu choisir n'importe quel instant *t* : t_1, t_2, … Cela assure le fait que l'équation va marcher tout le temps et surtout que l'on peut prendre la dérivée de part et d'autre (en *t*) tout en maintenant l'égalité :
$$-\beta - \theta \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \ -r(t) + n + g$$

Explication :

$$\frac{\partial ln(c(t))}{\partial t} = \frac{1}{c(t)}\frac{\partial c(t)}{\partial t} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

On résout ensuite pour la croissance de la consommation. En effet, en isolant $\dot{c}(t)$ / $c(t)$, on obtient le taux de croissance de la consommation des ménages. $\dot{c}(t)$ est le changement en termes de consommation et $c(t)$ est le niveau de consommation.

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - \beta - n - g}{\theta}$$

On se rappelle aussi l'égalité :

$$\beta = \rho - n - (1-\theta)g$$

β était en effet la différence entre le taux d'escompte, le taux de croissance de la population et $(1\text{-}\theta)g$.
Ce qui nous permet de substituer et obtenir :

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta}$$

C'est donc le taux de croissance de consommation par unité de capital humain.

2.6.3 Le comportement du consommateur

Maintenant on s'intéresse au taux de croissance de consommation non pas par unité de capital humain mais par personne. On sait que la consommation par unité de capital humain c(t) est égale à la consommation par travailleur divisée par son niveau d'éducation : c(t) = C(t) / A(t). D'où :

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = g + \frac{\dot{c}\ (t)}{c(t)} = g + \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta} = \frac{1}{\theta}\ (r(t) - \rho)$$

On admettra que : $\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = g + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$, avec g un taux de croissance exogène, pour des raisons de simplicité.

Par conséquent, les éléments qu'il est important de connaître pour déterminer l'évolution de la consommation (croissance) sont : $r(t)$, ρ, et θ.

La consommation augmente si le taux de location du capital dépasse le taux d'actualisation de la consommation future et vice-versa dans le cas contraire.

Plus $1/\theta$ (l'élasticité de substitution intertemporelle) est grand, plus les variations de la consommation en réponse aux différences entre le taux de location du capital et le taux d'actualisation sont importantes.

2.7 Détermination de l'équilibre

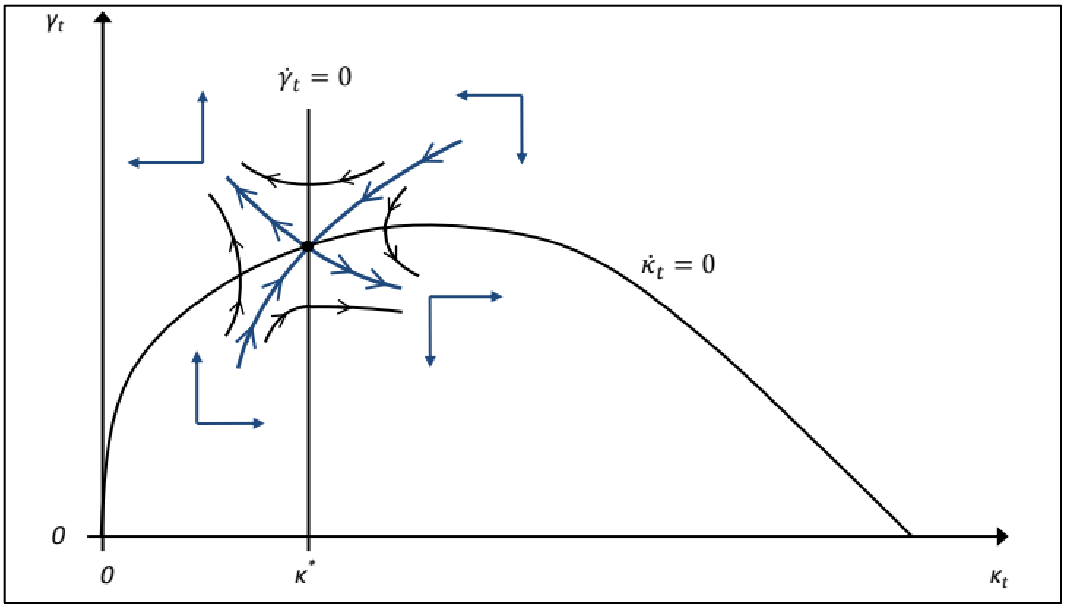
Les conditions de premier ordre permettent de déterminer les niveaux optimaux de consommation et d'épargne qui satisfont à la fois l'équilibre intertemporel et la contrainte budgétaire. Une fois les conditions de premier ordre dérivées, on résout généralement les équations simultanées pour trouver les valeurs optimales de consommation et d'épargne.

2.7.1 Condition d'optimalité de l'équilibre

Cela implique de prendre en compte non seulement les préférences individuelles des consommateurs, mais aussi les externalités et les effets redistributifs.Dans le cadre de l'optimalité de l'équilibre social, les décisions de consommation et d'épargne sont prises de manière à maximiser le bien-être agrégé de la société. Cela peut impliquer des considérations telles que l'équité, la réduction des inégalités, la satisfaction des besoins essentiels, la prise en compte des générations futures, etc.

2.7.2 Explication de l'équilibre et des profils des courbes obtenues

On s'intéresse désormais à la figure suivante :



Profil de consommation : La figure peut montrer comment la consommation évolue au fil du temps. On peut s'attendre à une augmentation progressive de la consommation au fur et à mesure que le temps avance, reflétant la tendance à la hausse du niveau de vie dans le modèle de Ramsey.
Profil d'épargne : La figure peut également représenter le profil d'épargne au fil du temps. Nous pouvons observer une accumulation d'épargne initiale, puis une diminution progressive de l'épargne à mesure que la consommation augmente. Cela peut refléter le compromis entre la consommation présente et future dans le modèle de Ramsey.
Évolution des prix et des taux d'intérêt : La figure peut présenter les mouvements des prix et des taux d'intérêt au fil du temps. Les prix et les taux d'intérêt peuvent avoir un impact sur les choix de consommation et d'épargne des individus, et leur évolution peut influencer l'allocation des ressources dans le modèle de Ramsey.
Bien-être intertemporel : La figure peut également illustrer le bien-être intertemporel au fil du temps. Cela peut être mesuré par une fonction d'utilité agrégée qui capture la satisfaction globale des consommateurs. Vous pourriez voir une augmentation du bien-être au fur et à mesure que la consommation augmente, avec une pondération appropriée pour les préférences temporelles.

2.7.3 La convergence vers un état stable

De la même manière que le modèle de Solow, ce modèle admet aussi une convergence conditionnelle qui même plus encore est régulière.Cette convergence vers un état régulier est généralement caractérisée par une stabilisation des variables économiques à des niveaux stationnaires. On a un équilibre de long terme stable donc l'épargne a atteint un taux constant, et la capital par habitant se stabilise.

2.8 Extensions possibles du modèle

Il existe plusieurs extensions possibles du modèle de Ramsey qui permettent de prendre en compte des éléments tels que les inégalités entre agents, les ressources non renouvelables et l'irrégularité de la croissance. Voici quelques exemples :

1. Modèle de Ramsey avec inégalités interpersonnelles : Cette extension vise à intégrer les inégalités entre les agents économiques dans le modèle de Ramsey. Au lieu de considérer un agent unique, le modèle peut être étendu pour inclure plusieurs agents ayant des niveaux de richesse et de revenu

différents. Cela permet d'analyser les effets de la politique économique sur la distribution des revenus et la réduction des inégalités.

2. Modèle de Ramsey avec ressources non renouvelables : Le modèle de Ramsey traditionnel suppose souvent que les ressources sont infinies. Cependant, dans la réalité, de nombreuses ressources naturelles sont limitées et non renouvelables. Une extension possible consiste à inclure ces ressources dans le modèle de croissance pour analyser les conséquences économiques de leur épuisement progressif. Cela permet de prendre en compte les effets de l'utilisation des ressources naturelles sur la croissance économique à long terme.
3. Modèle de Ramsey avec irrégularité de la croissance : Dans le modèle de Ramsey de base, la croissance économique est généralement supposée être régulière et constante dans le temps. Cependant, la réalité économique montre que la croissance peut être sujette à des fluctuations et des irrégularités. Une extension possible du modèle consiste à introduire des chocs économiques ou des variations de la productivité qui affectent la croissance de manière imprévisible. Cela permet d'analyser comment l'incertitude et l'irrégularité de la croissance influencent les décisions d'investissement et les politiques économiques optimales.

Ces extensions du modèle de Ramsey offrent des perspectives plus réalistes pour analyser les interactions complexes entre la croissance économique, les inégalités, les ressources naturelles et l'incertitude. Elles permettent d'explorer des questions importantes liées au développement durable, à la redistribution des revenus et à la stabilité économique à long terme.

III – Conclusion

En conclusion, le modèle de Ramsey est un outil puissant utilisé en économie pour analyser les choix de consommation et d'épargne des individus ou des économies dans un contexte intertemporel. Il permet de comprendre comment les préférences individuelles, les contraintes budgétaires, les taux d'intérêt et les politiques fiscales influencent les décisions économiques à travers le temps.

Le modèle de Ramsey met l’accent sur la consommation présente et le future. Il permet aussi d’examiner comment les individus prennent des décisions en tenant compte des bénéfices à court terme et des coûts à long terme. Il considère également l'importance du capital accumulé au fil du temps et son impact sur la production et la croissance économique.

Cependant, il est important de noter que le modèle de Ramsey repose sur certaines hypothèses simplificatrices, telles que l'utilité exponentielle et l'homogénéité des individus. De plus, il ne tient pas compte de certains aspects du comportement réel des agents économiques, tels que l'incertitude et les comportements non rationnels.

Malgré ces limitations, le modèle de Ramsey offre un cadre analytique utile pour comprendre les choix économiques intertemporels et les politiques économiques optimales.

Il est utilisé dans la recherche économique (le modèle DICE) pour éclairer les décisions économiques, l'épargne, l'investissement et la croissance économiques à long terme.

BIBLIOGRAPHIE

Plan du projet

Fondé sur la lecture du rapport : Discounting the future : the case of climate change. Ivar EKELAND, Canada Research Chair in Mathematical Economics, UBC, September 17, 2009.
https://www.ceremade.dauphine.fr/~ekeland/Articles/09-09-CahiersCDD2.pdf

Introduction

CAIRN.INFO, Matières à Réflexion
https://www.cairn.info/revue-economique-2001-3-page-595.htm

Le modèle de Ramsey, Philippe DARREAU, Université de Limoges
https://www.unilim.fr/pages_perso/philippe.darreau/wafx_res/Files/2-la%20croissance%20optimale.pdf

Macroéconomie : La dynamique de Solow avec la règle d'or (modèle de Ramsey)#9, Gère ton éco, Youtube
https://www.youtube.com/watch?v=RPjocQsZSkk

Le modèle de Ramsey

The Ramsey-Cass-Koopmans model part 1: derivation, Klaus PRETTNER, Youtube
https://www.youtube.com/watch?v=yzUm6JkccXg&t=1423s

The Ramsey-Cass-Koopmans model part 2: analysis, Klaus PRETTNER, Youtube
https://www.youtube.com/watch?v=2KU52fLH2UU

Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2003). Economic Growth (2nd ed.). The MIT Press.

Ramsey Growth Model, David JINKINS, Youtube
https://www.youtube.com/@davidjinkins8293

Macroéconomie 1, Olivier LOISEL, ENSAE, 2022
http://olivierloisel.com/macroeconomics/Chapter%202.pdf

Macroéconomie de la Croissance, Chahir ZAKI, Paris 1 / FESP, 2013
https://scholar.cu.edu.eg/m/?q=zaki/files/4_chap3_l3croissance.pdf

La croissance économique selon Solow et Ramsey, Benjamin RAUSCH, Université de Bruxelles, 2013
https://bssm.ulb.ac.be/data/past_conference/2013_rausch_slides.pdf