- On calcule l'espérance de Z :

  Cette dernière est nulle car on intègre un cosinus sur $[0, 2\pi]$

- Calcul de la covariance.

  Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{Cov}(Z(x), Z(y)) = \mathbb{E}(Z(x)Z(y)) \quad \text{car } \mathbb{E}(Z) = 0$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,2\pi]} \frac{2\sqrt{f_x(\omega) f_y(\omega)}}{\cancel{g(\omega)}} \cos(\langle \omega, x \rangle + \phi) \cos(\langle \omega, y \rangle + \phi) \cancel{g(\omega)} \frac{1}{2\pi} \, d\omega \, d\phi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2 \times [0,2\pi]} \sqrt{f_x(\omega) f_y(\omega)} \left(\cos(\langle \omega, x-y \rangle) + \underbrace{\cos(\langle \omega, x+y \rangle + 2\phi)}_{= 0 \text{ cq on intègre par rapport à } \phi} \right) \frac{1}{2\pi} \, d\omega \, d\phi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{f_x(\omega) f_y(\omega)} \cos(\langle \omega, x-y \rangle) \, d\omega$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sqrt{a(x) a(y)}}{16\pi} \cos(\langle \omega, x-y \rangle) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\|\omega\|^2 (a(x) + a(y))}{4} \right) d\omega$$

D'après la Q1 de la partie 2,

$$\mathrm{Cov}(Z(x), Z(y)) = \frac{\sqrt{a(x) a(y)}}{16\pi} \frac{8\pi}{a(x) + a(y)} \exp\left(-\frac{2\|x-y\|^2}{a(x) + a(y)} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{a(x) a(y)}}{a(x) + a(y)} \exp\left(-\frac{2\|x-y\|^2}{a(x) + a(y)} \right) = C(x, y)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on pose : $Y(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} Z(x)$

Comme dans la partie 2 (Q3) on peut construire un vecteur $Y = (S_N(x_k))_{k \in [0,n]}$ pour $(x_i)_{i \in [0,n]} \in (\mathbb{R}^2)^n$. Alors d'après le Théorème Central Limite (multi-dimensionnel) Y tend vers un vecteur gaussien d'espérance nulle

Il s'agit de la méthode d'échantillonnage d'importance