

Lema do bombeamento e linguagens além de LC

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Centro de Engenharia Elétrica e Informática – CEEI

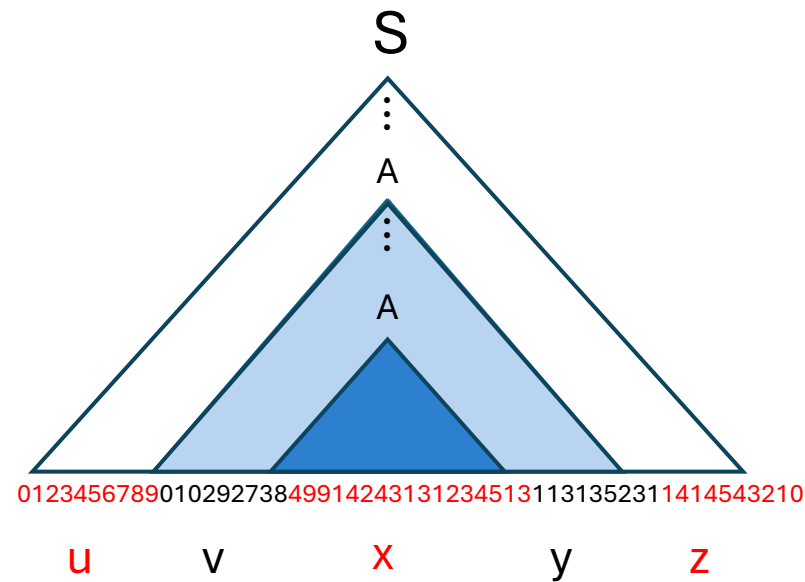
Departamento de Sistemas e Computação – DSC

Professor: Andrey Brito

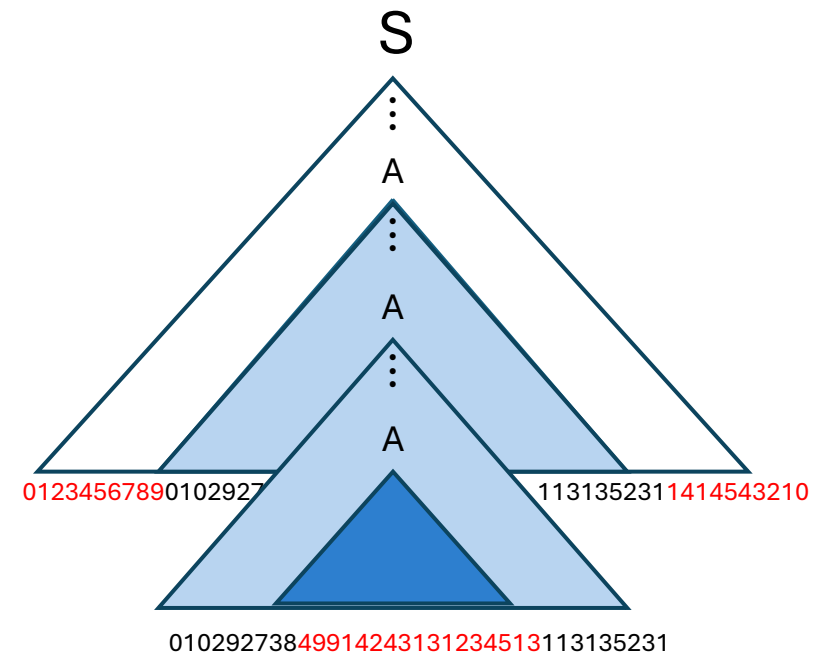
Período: 2023.2

Gerando palavras: bombeando para mais

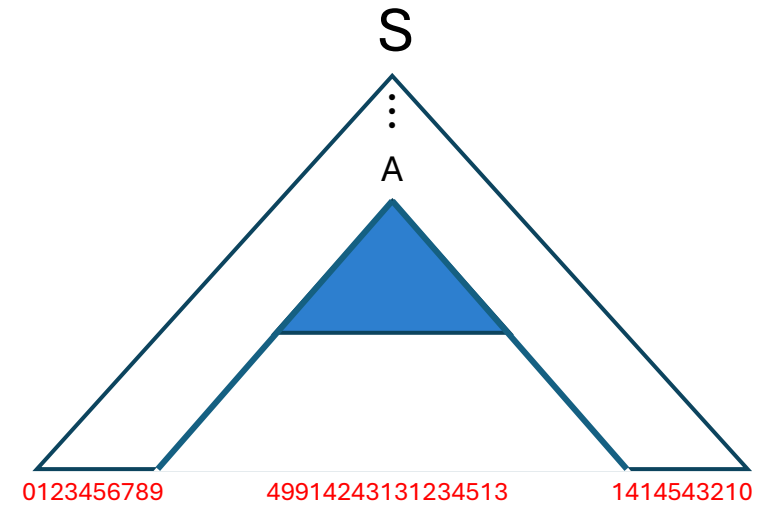
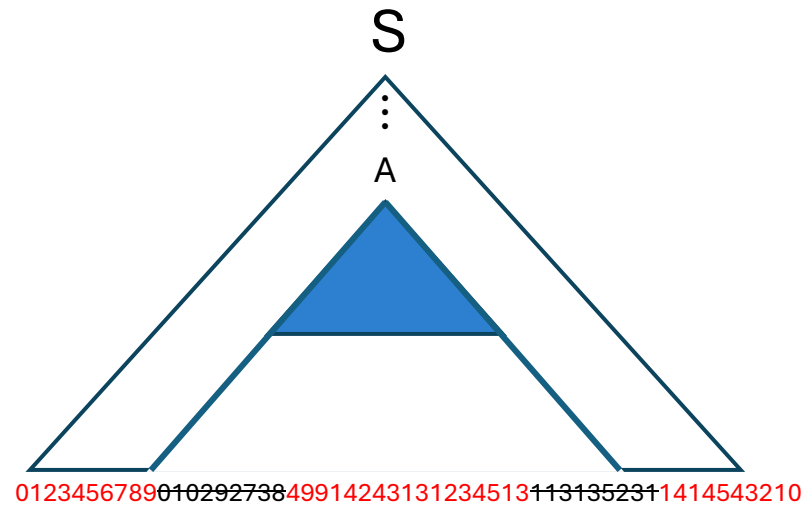
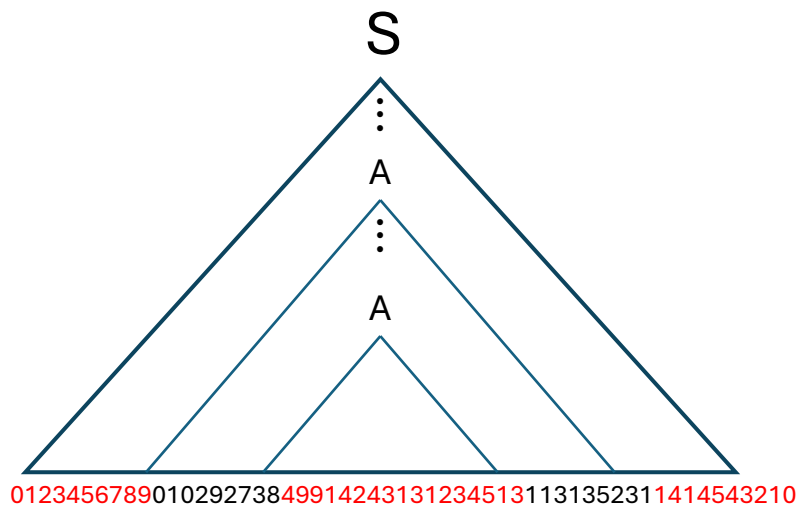
- Como a palavra mais longa se compara com a palavra original?
De onde vieram os pedaços que passaram a existir?



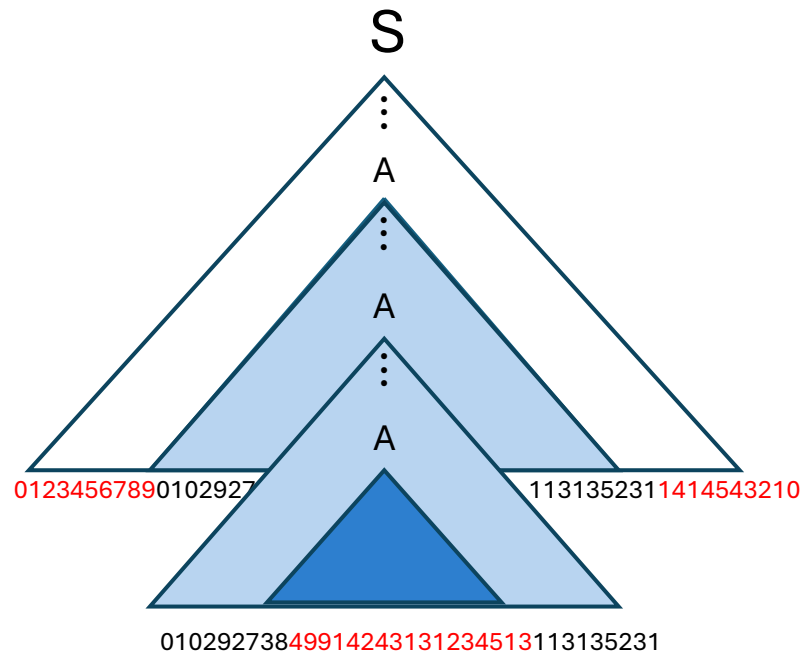
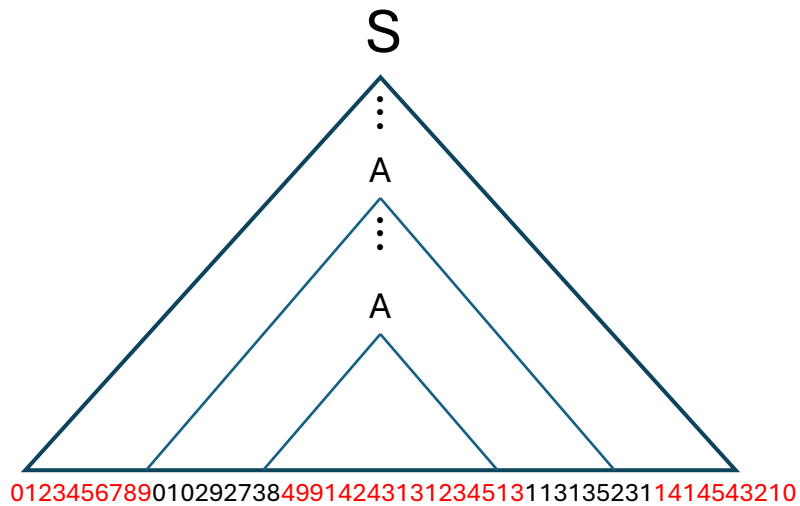
uvxyz →
uvvxyyz



Lema do bombeamento: Um pedaço some...

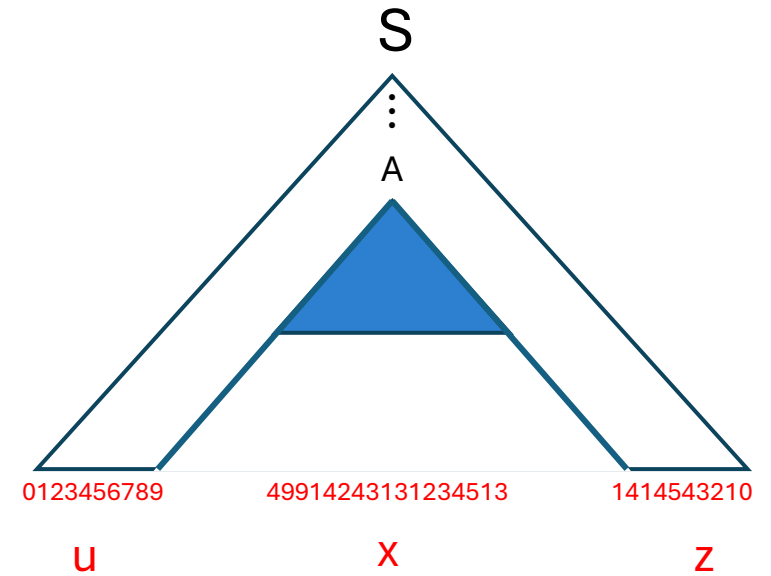
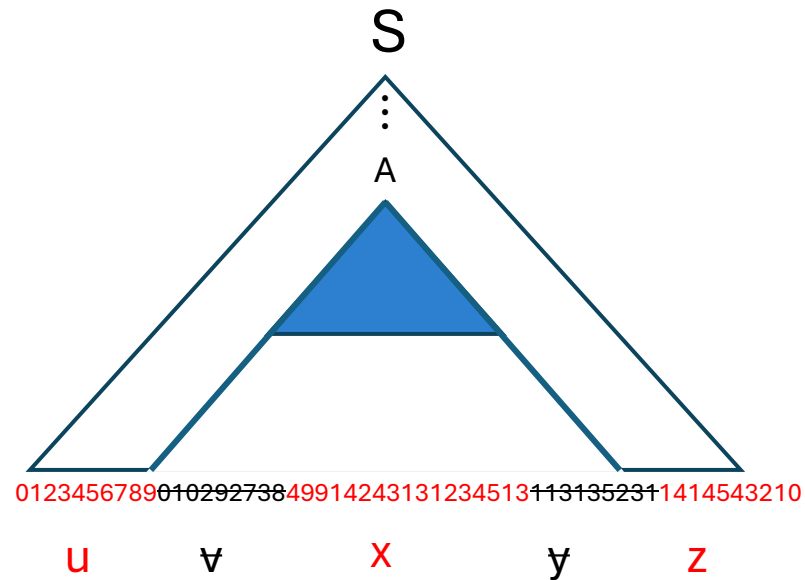
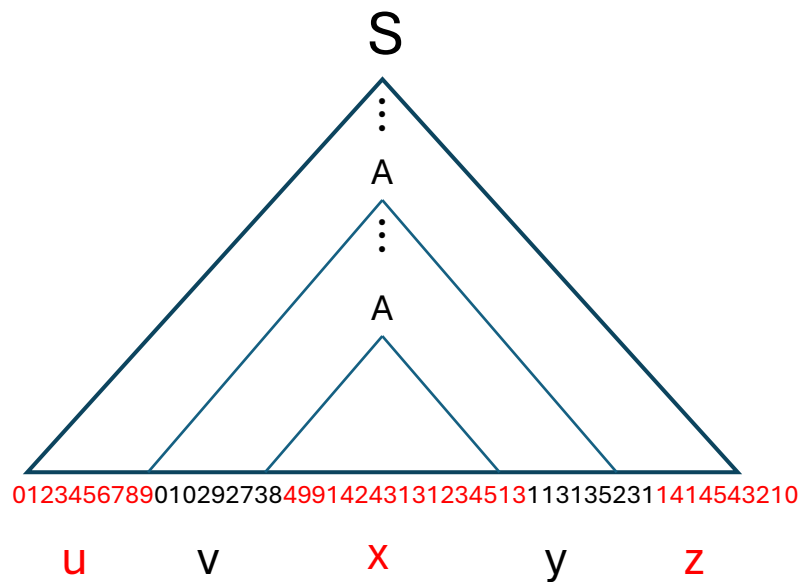


Lema do bombeamento: Ou um se repete...

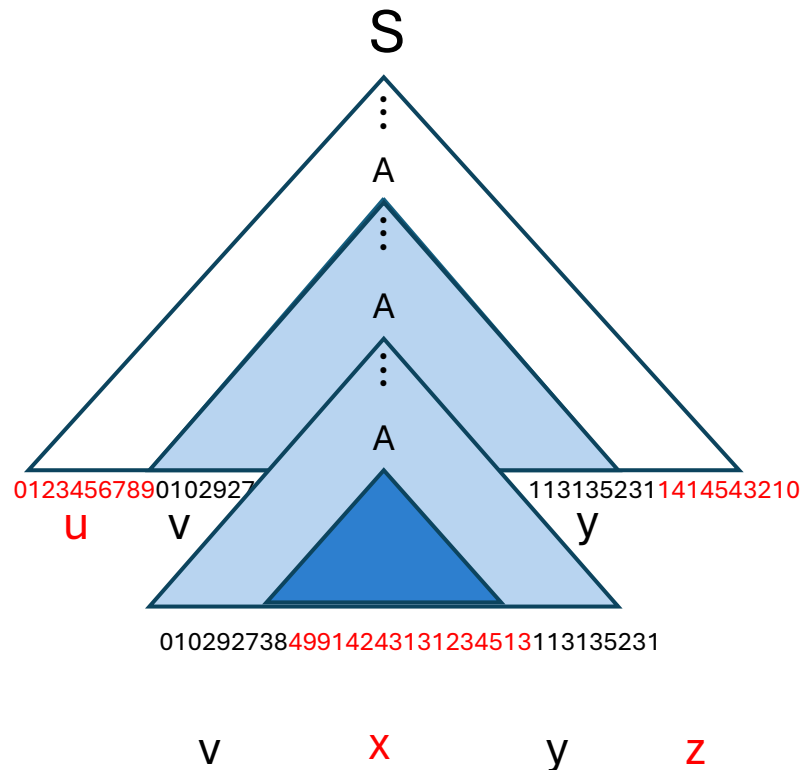
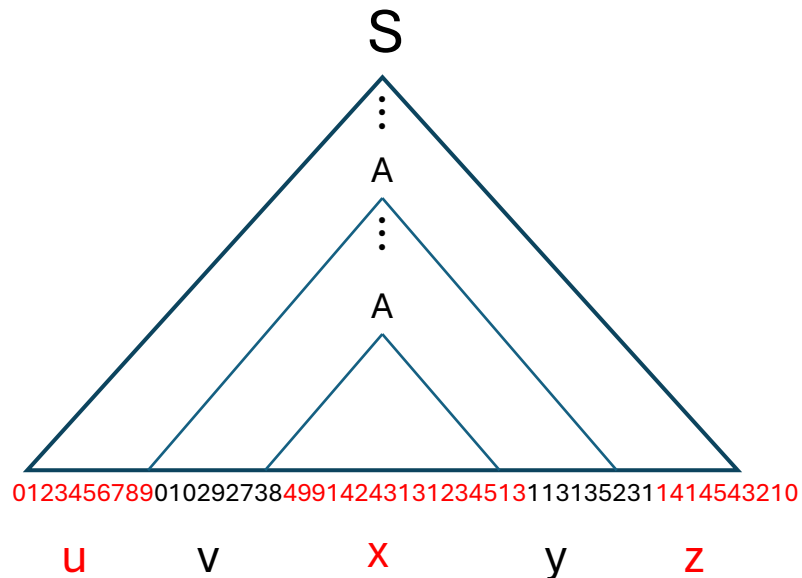


Por quê?

No primeiro caso a parte que some é a gerada pela antiga escolha, que não foi mais usada

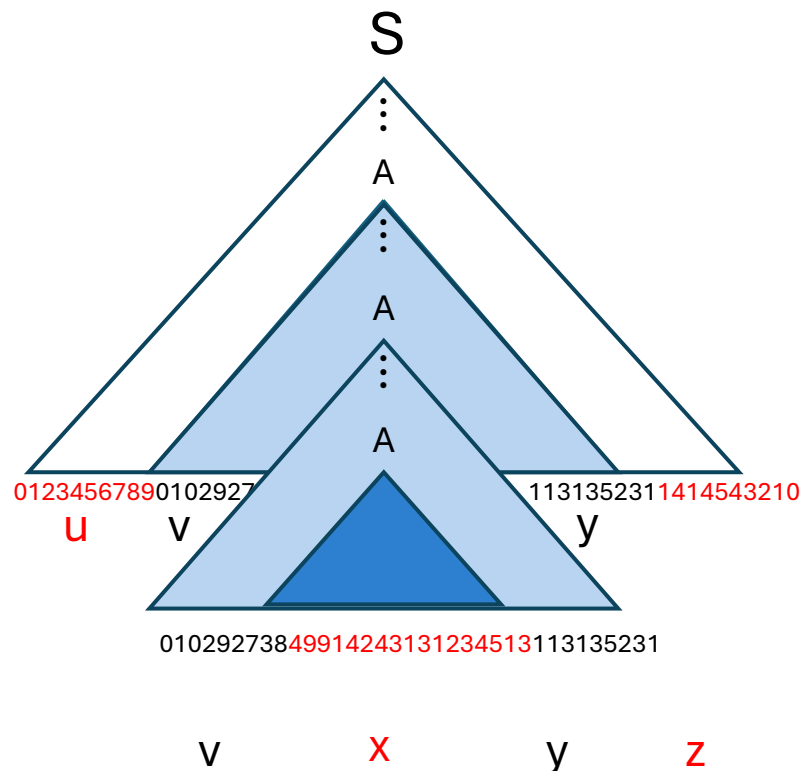
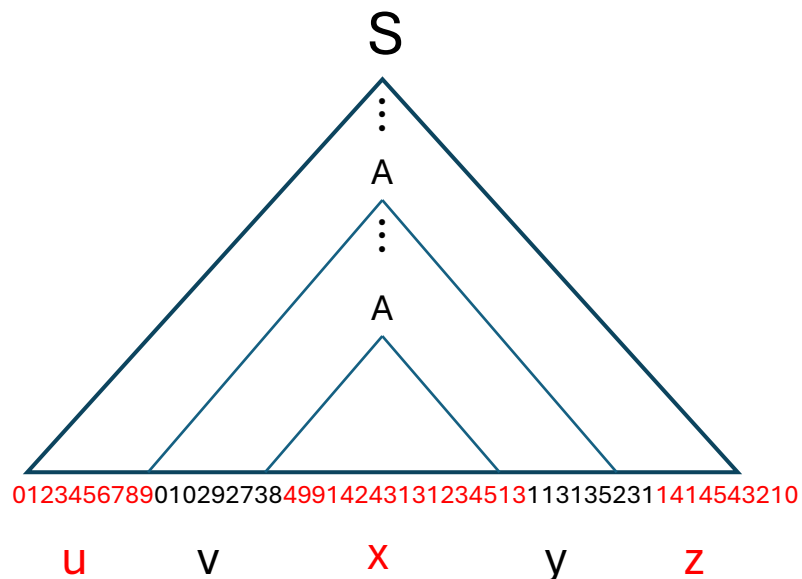


No segundo caso, a antiga escolha foi usada duas vezes, e por isso se repete



Quantas
vezes posso
fazer isso?

No segundo caso, a antiga escolha foi usada duas vezes, e por isso se repete



Quantas
vezes posso
fazer isso?
Quantas eu
quiser.

Lema do bombeamento para LLC

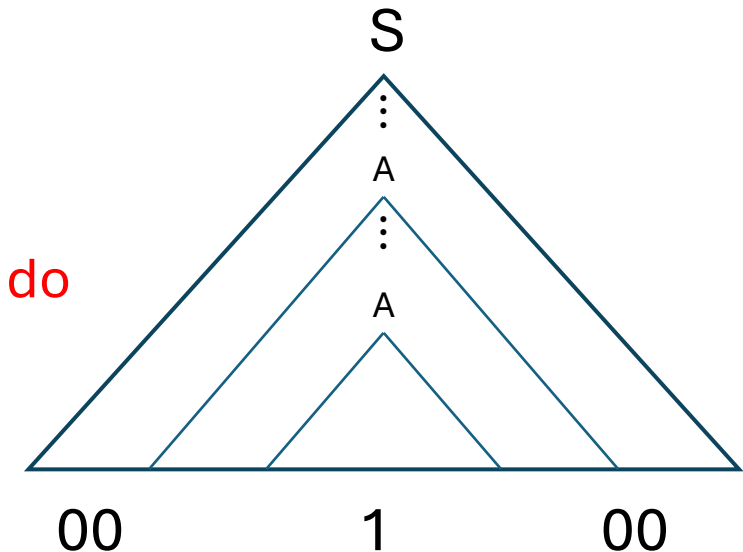
- Se uma linguagem L é livre de contexto, existe um número p , tal que...
- Qualquer palavra em L que seja maior que p tem uma árvore de derivação que tem uma repetição, ou seja, daria para gerar variações dessa palavra que precisam pertencer à linguagem
- Então, a palavra pode ser quebrada em cinco pedaços: $s = u.v.x.y.z$
 - Para $i \geq 0$, $u.v^i.x.y^i.z \in A$

Lema do bombeamento para LLC

- Se uma linguagem L é livre de contexto, existe um número p , tal que...
- Qualquer palavra em L que seja maior que p tem uma árvore de derivação que tem uma repetição, ou seja, daria para gerar variações dessa palavra que precisam pertencer à linguagem
- Então, a palavra pode ser quebrada em cinco pedaços: $s = u.v.x.y.z$
 - Para $i \geq 0$, $u.v^i.x.y^i.z \in A$
 - $|v.y| > 0$
 - $|v.x.y| \leq p$

Lema do bombeamento para LLC

- Se $|s| > p$ então $s = uvxyz$ e para $i \geq 0$, $uv^i xy^i z \in A$
 - Só precisamos pensar nas palavras longas pois elas são as que certamente precisam de loops
- $|vy| > 0$
 - Algo precisou ser gerado pelo loop (as aparições da variável que se repete)
 - $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$ não ajudam a gerar palavras longas (esse loop pode sim estar lá, mas não é por causa dele que a palavra é longa)
- $|vxy| \leq p$
 - Se a parte que você consegue gerar sem usar repetições do loop já é maior que p , não faz sentido



Exemplo

- $B = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$ é livre de contexto?

Exemplo

- $B = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$ é livre de contexto?
 - Primeiro, selecione uma palavra de comprimento maior que p (que tal $a^p b^p c^p$?)
 - Essa palavra precisa poder ser quebrada, então pense em maneiras de quebrá-la
 - v e y podem conter somente um tipo de símbolo (ou a ou b ou c)
 - v e y podem conter mais de um tipo de símbolo

Exemplo

- Caso 1: v e y podem conter somente um tipo de símbolo (ou a ou b ou c)
 - No bombeamento, o símbolo que for repetido (ex., $s = uv^2xy^2z$) quebra o balanço da palavra
- Caso 2: v e y podem conter mais de um tipo de símbolo (ex., $v = aab$, $y = bcc$)
 - A quantidade pode ser preservada com uma boa escolha de v e y
 - Mas o bombeamento muda a ordem dos símbolos

Alguns pontos para discussão sobre gramáticas

Discussão

- Qual a gramática para $a^i b^j c^k$ com $i=j$ ou $i=k$?
- A classe das linguagens livre-de-contexto é fechada pela operação de união?
- A classe das linguagens livre-de-contexto é fechada pela operação de concatenação?
- A intersecção de uma linguagem livre-de-contexto com uma linguagem regular será sempre uma linguagem regular?
- Algumas gramáticas livre-de-contexto podem ser convertidas em autômatos finitos?

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - Lembre de uma que você já conhecer, por exemplo: $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$

Aproveitando: $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid \lambda$

Funciona?

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - Lembre de uma que você já conhecer, por exemplo: $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$

Aproveitando: $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid \lambda$

Funciona? Não, como eu gero coisas como 0110?

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - Voltando a uma que você já conhece: $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Como forçar para ter pelo menos um 1 a mais do que os zeros?

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros:

Funciona?

$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda \mid 1$

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros:
 $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda \mid 1$
- Funciona? Não, ainda consigo fazer palavras com a mesma quantidade de 0s e 1s.

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros:
Funciona?

$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid 1$

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$

- $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$

- $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$

- Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros:

$$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid 1$$

Funciona? Não, eu obrigo todo o S a virar um 1 no fim. Então não consigo gerar por exemplo, 01110.

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros:

E agora?

$X \rightarrow 1S$

$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda \mid 1$

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros:

E agora?

$X \rightarrow S1S$

$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda \mid 1$

Perguntas

- Como construir uma gramática para as seguintes linguagens $\Sigma = \{0, 1\}$
 - $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{o número de 1s é maior que o número de 0s} \}$
 - $S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda$
 - Adicione algumas regras para garantir que tem mais “1”s do que zeros

$X \rightarrow S1S$

$S \rightarrow 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \lambda \mid 1$

Tem pelo menos um “1” a mais, que está no início (1S), no fim (S1) ou no meio (S1S)

Além do “1” extra, obrigatório, pode colocar outros quando quiser.