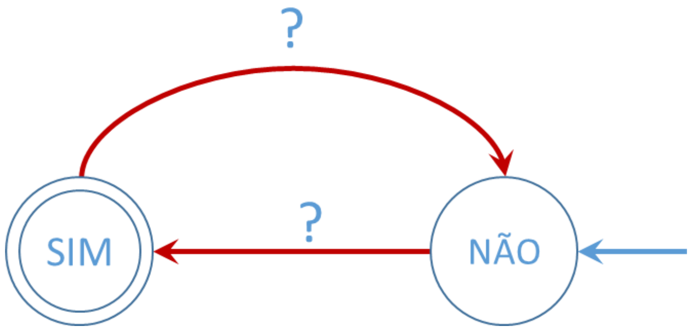
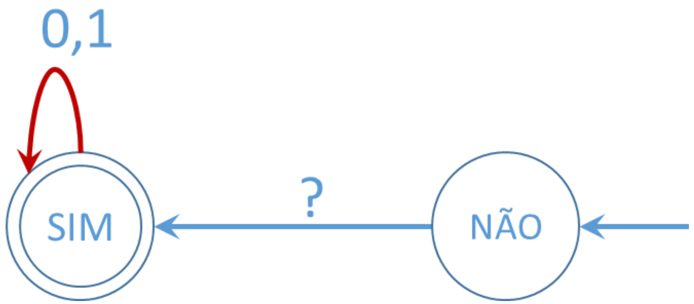
Operações regulares

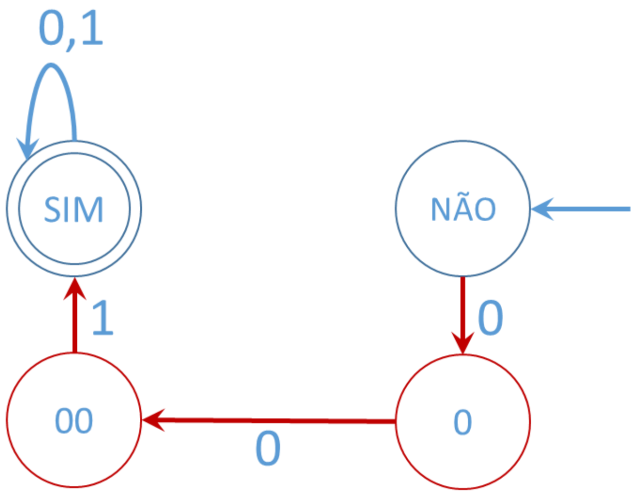
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG
Centro de Engenharia Elétrica e Informática – CEEI
Departamento de Sistemas e Computação – DSC
Professor: Andrey Brito
Período: 2023.2

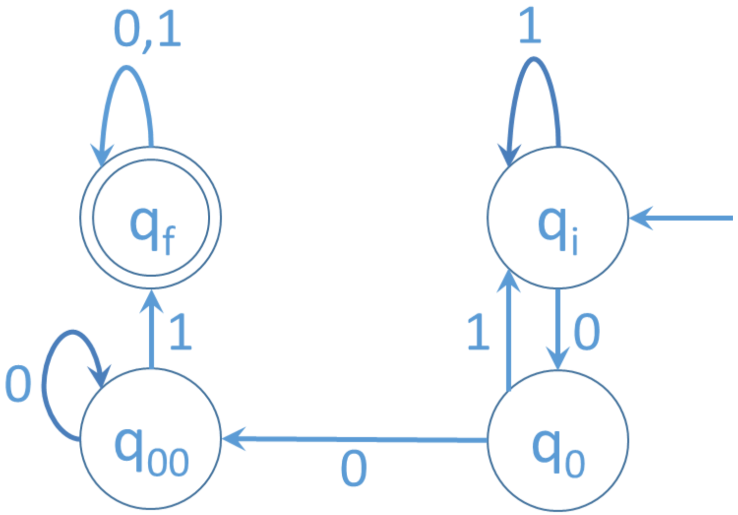
Passos na construção de um autômato: “contém a sub-cadeia ‘001’”

1.


2.


3.


4.


5.


Exemplo: especificação formal → diagrama

- Qual o diagrama de estados do autômato $<Q, \sum, \delta, q_0, F>$, onde:
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
  - $\sum = \{R, 0, 1, 2\}$
  - $\delta: Q \times \sum \rightarrow Q$ é tal que
    - $\delta(q_j,0)=q_j$
    - $\delta(q_j,1)=q_k$, onde $k = (j+1)$ módulo 3
    - $\delta(q_j,2)=q_k$, onde $k = (j+2)$ módulo 3
    - $\delta(q_j,R)=q_0$
  - $F = \{q_0\}$

Onde estamos?

- Entendemos o vocabulário e a notação
  - Alfabeto, linguagem e cadeia
  - Função de transição, estados finais e iniciais
  - Diagramas de estado, máquinas de estado, autômatos finitos
  - Problemas de decisão, aceitação e rejeição

- Precisamos saber olhar para um diagrama de estados de um AF e defini-lo formalmente, e vice-versa

- Construir autômatos finitos para um problema qualquer

Operações sobre linguagens

Operações regulares

- Aritmética
  - Objeto de estudo: números
  - Exemplos de operações: +, -, *, /

- Teoria da computação, linguagens formais
  - Objeto de estudo: linguagens (problemas de decisão)
  - Exemplos de operações:
    - União: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
    - Concatenação: $A \bullet B = \{ xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$
    - Estrela: $A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Operações regulares

- Aritmética
  - Objeto de estudo: números
  - Exemplos de operações: +, -, *, /
- Teoria da computação, linguagens formais
  - Objeto de estudo: linguagens (problemas de decisão)
  - Exemplos de operações:
    - União: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
    - Concatenação: $A \bullet B = \{ xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$
    - Estrela: $A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

Qual o tamanho dos conjuntos resultantes?

Operações sobre linguagens...

- Exemplos de operações:
  - União: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  - Concatenação: $A \bullet B = \{ xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$
  - Estrela: $A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

- Considere as seguintes linguagens
  - L_1 = { w escrito com 0s e 1s | w tem um número par de 1s}
  - L_2 = { w escrito com 0s e 1s | w contém exatamente 3 símbolos}
  - Quem é $L_3 = L_1 \cup L_2$?
  - Quem é $L_4 = L_1 \bullet L_2$?
  - Quem é $L_5 = L_2^*$?

Operações sobre linguagens...

- Exemplos de operações:
  - União: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  - Concatenação: $A \bullet B = \{ xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$
  - Estrela: $A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

- Considere as seguintes linguagens
  - $L_1 = \{ w \in \sum^* \mid w \text{ tem um número par de 1s}\}$
  - $L_2 = \{ w \in \sum^* \mid w \text{ contém exatamente 3 símbolos}\}$
  - Quem é $L_3 = L_1 \cup L_2$?
  - Quem é $L_4 = L_1 \bullet L_2$?
  - Quem é $L_5 = L_2^*$?

Operações sobre linguagens...

- Exemplos de operações:
  - União: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  - Concatenação: $A \bullet B = \{ xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$
  - Estrela: $A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

- Considere as seguintes linguagens
  - $L_1 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ tem um número par de 1s}\}$
  - $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ contém exatamente 3 símbolos}\}$
  - Quem é $L_3 = L_1 \cup L_2$?
  - Quem é $L_4 = L_1 \bullet L_2$?
  - Quem é $L_5 = L_2^*$?

?

Operações sobre linguagens...

- Exemplos de operações:
  - União: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
  - Concatenação: $A \bullet B = \{ xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$
  - Estrela: $A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

- Considere as seguintes linguagens
  - $L_1 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ tem um número par de 1s}\}$
  - $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w \text{ contém exatamente 3 símbolos}\}$
  - Quem é $L_3 = L_1 \cup L_2$?
  - Quem é $L_4 = L_1 \bullet L_2$?
  - Quem é $L_5 = L_2^*$?

Lembrando que:
$A^* = \{ x_1x_2x_3...x_k \mid k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$

(E o que é λ?)

- λ significa uma palavra com 0 símbolos (a palavra nula ou vazia)
  - Por exemplo, uma máquina recebe a palavra fazia do mesmo jeito que um programa poderia executar mesmo sem receber nenhuma entrada
  - Em alguns livros, descrito como **ε**

- O que significa dizer que um autômato aceita λ?

Operações

- União, concatenação e estrela → operações regulares
  - Operações para construção de "expressões regulares"

- Ao longo do curso também consideraremos outras operações
  - Complemento
  - Intersecção
  - Subtração
  - E outras...

- Qual o complemento? Intersecção? Subtração?
  - $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ tem um número par de 1s$\}$
  - $L_6 = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ contém o padrão "101"$\}$

Olhando o complemento mais de perto

- Considerando $\sum = \{0,1\}$ e novamente as linguagens
  - $L_1 = \{ w \in \sum^* \mid$ w contém exatamente 3 símbolos$\}$
  - $L_2 = \{ w \in \sum^* \mid$ w tem um número par de 1s$\}$

- Qual o complemento?

Olhando o complemento mais de perto

- Considerando $\Sigma = \{0,1\}$ e novamente as linguagens
  - $L_1 = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ contém exatamente 3 símbolos$\}$
  - $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ tem um número par de 1s$\}$

- Qual o complemento?
  - $\overline{L_1} = \{ w \mid w$ não contém exatamente 3 símbolos$\}$
  - $\overline{L_2} = \{ w \mid w$ tem um número ímpar de 1s$\}$

- Como projetar os autômatos?

(Lembrando: Classe de linguagens)

- Todas as linguagens que podem ser reconhecidas pelo mesmo tipo de máquina (por enquanto, a máquina é o autômato finito)

- O nome da classe que contém todas as linguagem que podem ser resolvidas por AFs é a "classe das linguagem regulares"

(Fechamento)

- Se uma operação sobre uma linguagem da classe C sempre gera uma linguagem que pertence à mesma classe, a classe é fechada pela operação
  - Ou seja, se para reconhecer/resolver L eu preciso de um tipo de máquina
  - Depois que eu aplicar aquela operação, será que continuo precisando do mesmo tipo de máquina?

(Fechamento)

- A classe de linguagens regulares é fechada pela operação de complemento?
  - Se existe um AF que reconhece uma linguagem sempre existe um AF que reconhece o complemento
  - Como provar que sempre existe um AF?
    - Existe um procedimento que funciona sempre?
    - (Assim como garantimos isso para o complemento)

Operações regulares: união

- Teorema 1: a classe de linguagens regulares é fechada pela operação de união
  - Se A e B são linguagens regulares, então $A \cup B$ também é regular
- Como provar?
  - A e B são regulares, logo, reconhecidas por autômato finitos M_1 e M_2, respectivamente
  - Se houver um autômato finito que reconheça $A \cup B$ (de forma genérica), então $A \cup B$ será regular

O que precisaria ser feito?

- L’ = { w $\in \sum^*$ | w tem um número par de 0s}
- L’’ = { w $\in \sum^*$ | w tem um número ímpar de 1s}
- L’ $\cup$ L’’?

Como construir M?

- M aceita uma palavra de $A \cup B$ se M_1 ou M_2 aceitaria
- Qual a dificuldade?
  - Os símbolos de entrada só podem ser lidos uma vez, logo não podemos construir uma máquina que execute um e depois o outro
  - Temos que executar as duas máquinas simultaneamente
- Solução: seria possível fazer uma máquina que execute as duas máquinas de uma só vez?

O que precisaria ser feito?

- L’ = { w $\in \sum^*$ | w tem um número par de 0s}
- L’’ = { w $\in \sum^*$ | w tem um número ímpar de 1s}
- L’ $\cup$ L’’?

Como construir M

- Para executar duas máquinas ao mesmo tempo, você precisaria:
  - Considerar que aquela entrada poderia ir para qualquer uma das duas
  - Lembrar o estado de cada uma delas depois de cada entrada
  - Ou seja, precisa lembrar de um par de estados

- Pergunta-chave: do que é preciso lembrar? Existe o risco de precisar lembrar de um volume "potencialmente ilimitado" de informações?

Teorema 1 – Prova

$A_1 = L(M_1)$, onde $M_1 = <Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1>$

$A_2 = L(M_2)$, onde $M_2 = <Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2>$

Construa $M = <Q, \Sigma, \delta, q_0, F>$, tal que $A_1 \cup A_2 = L(M)$, da seguinte forma:

1. $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$;
2. Σ é o mesmo;
3. $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$;
4. $q_0 = (q_1, q_2)$;
5. $F = \{(r_1, r_2) : r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$.

IMPORTANTE: usar o nome dos estados neste formato!

Exemplos da construção

- $L_1 = \{ w \in \sum \mid w$ tem um número par de 0s$\}$
- $L_2 = \{ w \in \sum \mid w$ tem um número ímpar de 1s$\}$
- $L_1 \cap L_2$? $L_1 - L_2$?