



Universidade Federal
de São João del-Rei

Ana Cláudia Machado

COLÔNIA DE FORMIGAS: otimização baseada no comportamento bioinspirado das
formigas

São João Del-Rei - MG

2025

1 . INTRODUÇÃO

A otimização por Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization* - ACO) é um método de otimização combinatória baseado no comportamento de formigas, as quais constroem trilhas de feromônio para se orientarem no espaço. Nesse sentido, no ACO cada formiga constrói um caminho, isto é, uma solução baseada no feromônio acumulado nas arestas e nas distâncias.

Matematicamente, dado um conjunto de n cidades $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, deseja-se encontrar a permutação $\pi \in S_n = \{s: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}\}$, de modo que a função objetivo $f: S_n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\pi(i), \pi(i+1)) + \rho(\pi(n), \pi(1))$$

seja minimizada.

Assim como nas implementações de algoritmos bioinspirados desenvolvidas anteriormente, a escolha do conjunto de parâmetros é algo essencial para o bom desempenho do algoritmo. Neste trabalho, variou-se os seguintes parâmetros: α (influência do feromônio entre os vértices), β (influência da distância entre os vértices), Q (constante de controle) e as taxas de evaporação e atualização. Utilizando três instâncias diferentes, executa-se o algoritmo 10 vezes com cada combinação de parâmetros, de modo a validar estatisticamente as afirmações sobre o melhor conjunto. Para esse conjunto, realiza-se algumas análises gráficas.

2 . IMPLEMENTAÇÃO E METODOLOGIA

Nesta seção, detalha-se quais parâmetros são fixos e quais seus valores, bem como quais são variados e sua faixa de valores. Como forma de representação, cada formiga constrói um caminho, o qual é representado por um vetor V de n posições, de modo que cada posição é uma das cidades. Para escolha da próxima cidade, a formiga segue a probabilidade

$$P_{ij} = \frac{\tau_{ij}^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}{\sum_{k \in \text{cidades disponíveis}} \tau_{ik}^\alpha \cdot \eta_{ik}^\beta}$$

sendo α a influência do feromônio na escolha e β a influência da distância. τ_{ij} é a quantidade de feromônio presente na aresta de i para j , enquanto que $\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$, sendo d a distância entre os pontos i e j . Cada caminho possui um *fitness* associado, o qual é a distância percorrida no circuito. Sendo este um problema de minimização, quanto menor o valor do *fitness*, melhor é a solução encontrada por aquela formiga.

Por definição, adotou-se o número de formigas igual ao número de cidades do problema, de modo que cada formiga inicia seu caminho em uma cidade diferente. Além disso, o número máximo de iterações foi fixado em 100 para as instâncias *DARTZIG42* e *SGB128* e 200 para a instância *LAU15*, com uma quantidade inicial de feromônio igual a $5 \cdot 10^{-8}$ para todas as arestas.

Por fim, para a deposição de feromônio nas arestas, seguiu-se duas abordagens: primeiro, cada formiga atualiza o caminho que construiu na iteração, utilizando a fórmula

$$\tau_{ij} = (1 - \xi) \cdot \tau_{ij} + \xi \cdot \tau_0$$

sendo ξ a taxa de atualização local e τ_0 a quantidade de feromônio inicial. Em seguida, a formiga que encontrou o melhor caminho faz um reforço de feromônio nessas arestas, aplicando

$$\tau_{ij} = (1 - \rho) \cdot \tau_{ij} + \rho \cdot \frac{Q}{L_{best}}$$

sendo ρ a taxa de evaporação global, Q é uma constante pré-definida e L_{best} é o custo, ou seja, distância do melhor caminho. Esse reforço no caminho tem como objetivo fazer com que as formigas sejam influenciadas a seguir por esse melhor solução, de modo que, com o passar das iterações, todas converjam para um melhor caminho encontrado.

Desse modo, variou-se os parâmetros: influência do feromônio, influência da distância, constante Q e taxas de atualização local e evaporação global. Para definir qual o melhor conjunto de parâmetros, executa-se o algoritmo dez vezes com cada conjunto a fim de obter as médias dos seguintes valores: melhor aptidão com o seu desvio padrão e aptidão média com o seu desvio padrão. Por fim, para o melhor conjunto de parâmetros, faz-se duas plotagens gráficas: a do melhor fitness em cada execução ao longo das gerações e a média dos valores de todas as execuções de melhor *fitness*, pior *fitness*, média e mediana dos *fitness* ao longo das gerações.

3 . RESULTADOS

Verificou-se o funcionamento do algoritmo com a instâncias *LAU15*, *DANTZIG42* e *SBG128* . A seguir, são apresentados seus resultados.

3.1 INSTÂNCIA LAU15

Nesta instância, têm-se um conjunto de quinze cidades, com o menor circuito tendo distância igual a 291. A solução ótima é dada pela sequência [1, 13, 2, 15, 9, 5, 7, 3, 12, 14, 10, 8, 6, 4, 11].

3.1.1 MELHOR CONJUNTO DE PARÂMETROS

A tabela 1 é constituída pelos 10 primeiros resultados para a instância *LAU15*, ordenados pela melhor aptidão média.

Alfa	Beta	Q	Taxa de Atualização	Taxa de Evaporação	Melhor Aptidão Média	Melhor Aptidão Desvio Padrão	Aptidão Média Média	Aptidão Média Desvio Padrão
1.0	1.0	100	0.001	0.005	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	100	0.001	0.5	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	100	0.1	0.005	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	100	0.1	0.5	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	200	0.001	0.005	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	200	0.001	0.5	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	200	0.1	0.005	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	200	0.1	0.5	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	500	0.001	0.005	291.0	0.0	291.0	0.0
1.0	1.0	500	0.001	0.5	291.0	0.0	291.0	0.0

Tabela 1. Dez melhores combinações de parâmetros para o ACO

Pode-se perceber que o desempenho do ACO é muito eficiente, haja vista que, em todas as combinações de parâmetros, o menor caminho foi encontrado. Ao comparar com o melhor desempenho do Algoritmo Genético (AG) combinatório para o Caixeiro Viajante, presente na Tabela 2, percebe-se que a eficácia do ACO é claramente mais assertiva. Isso indica que a abordagem do ACO, no problema proposto, pode encontrar as melhores soluções com mais facilidade do que o AG.

Taxa de Cruzamento	Taxa de Mutação	Tamanho da População	Número de Gerações	Melhor Aptidão (Média)	Melhor Aptidão (Desvio Padrão)	Aptidão Média (Média)	Aptidão Média (Desvio Padrão)
1.0	0.01	200	50	299.2	11.013123484683575	357.5675	47.28526052058929
1.0	0.01	100	100	299.4	12.285492799775406	320.594	12.93772279464633
0.8	0.01	200	50	302.1	14.62456077213185	333.5425	38.69491477140978
0.8	0.01	100	100	302.4	13.599019572503503	319.084	13.023742592323883
0.6	0.01	100	100	303.7	17.83909564224973	319.491	18.51858012915677

Tabela 2. Cinco melhores combinações de parâmetros para o AG

Em conclusão, como em todas as combinações de parâmetros o melhor resultado foi encontrado, em todas as execuções, haja vista que o desvio padrão tanto da melhor aptidão quanto da aptidão média na última execução são zero. Assim, com os dados presentes na Tabela 1 não é possível diferenciar os conjuntos de parâmetros, sendo todos igualmente eficientes.

3.1.2 ANÁLISE GRÁFICA PARA O MELHOR CONJUNTO DE PARÂMETROS

Escolheu-se, de forma arbitrária, o conjunto de parâmetros $\alpha = 1$; $\beta = 1$; $Q = 500$; $\rho = 0.005$ e $\xi = 0.1$ para realizar a análise gráfica. Assim, realizou-se duas análises gráficas: na primeira, o comportamento do melhor *fitness* ao longo das gerações é analisado para cada uma das execuções, como mostrado na Figura 1.

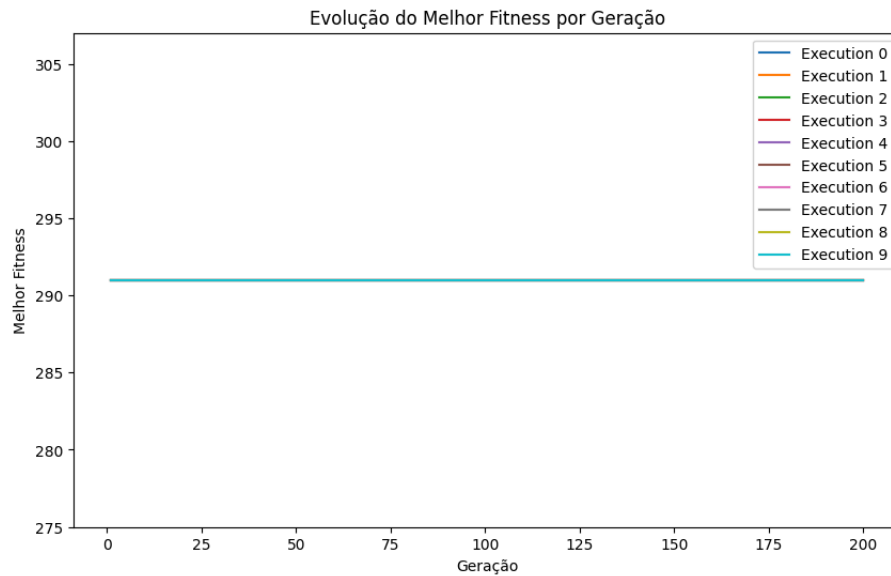


Figura 1. Evolução do melhor fitness por geração

Em acordo com os dados apresentados na Tabela 1, todas as execuções encontram o melhor resultado. É interessante ressaltar que isso ocorre desde a primeira iteração para todas as execuções, ressaltando que esse é, realmente, um caso simples para o ACO.

A segunda análise gráfica está relacionada com a variação do *fitness* ao longo das gerações. Para isso, calcula-se a média de todas as execuções para os seguintes valores: melhor *fitness*, pior *fitness*, *fitness* médio e mediana do *fitness*. O resultado é apresentado na Figura 2.

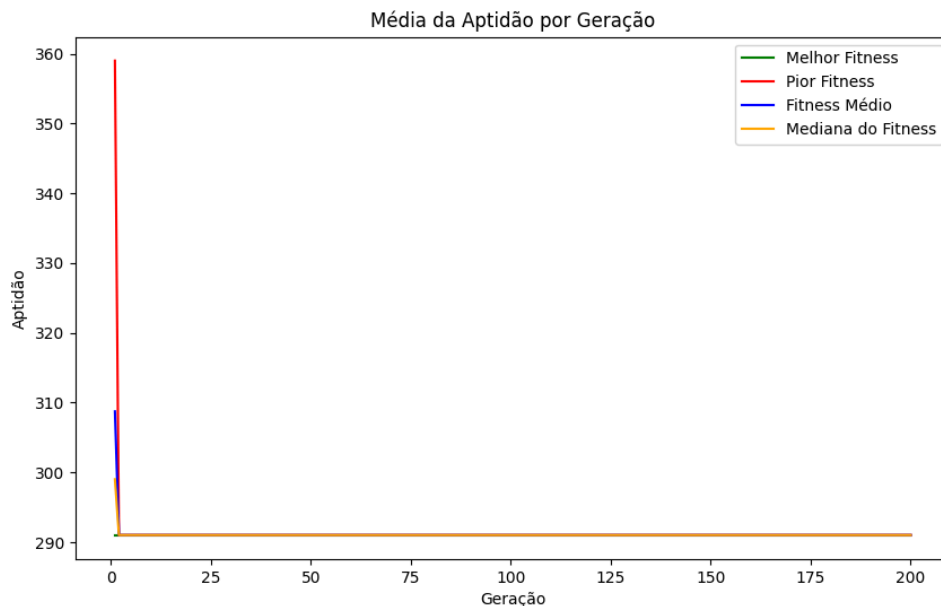


Figura 2. Média de *fitness* por geração

Apenas na primeira iteração os valores para o pior *fitness* médio, *fitness* médio e mediana do *fitness* são diferentes do melhor resultado possível. Mesmo assim, os valores de média e mediana são baixos, por volta de 300 e a pior solução é 360, distante poucas dezenas do melhor *fitness* possível. Por fim, a evolução da formiga 0 na execução 0 desse conjunto de parâmetros é evidenciado na Figura

3, demonstrando a rápida convergência da colônia para o melhor resultado possível, o qual foi encontrado na primeira iteração por essa formiga.

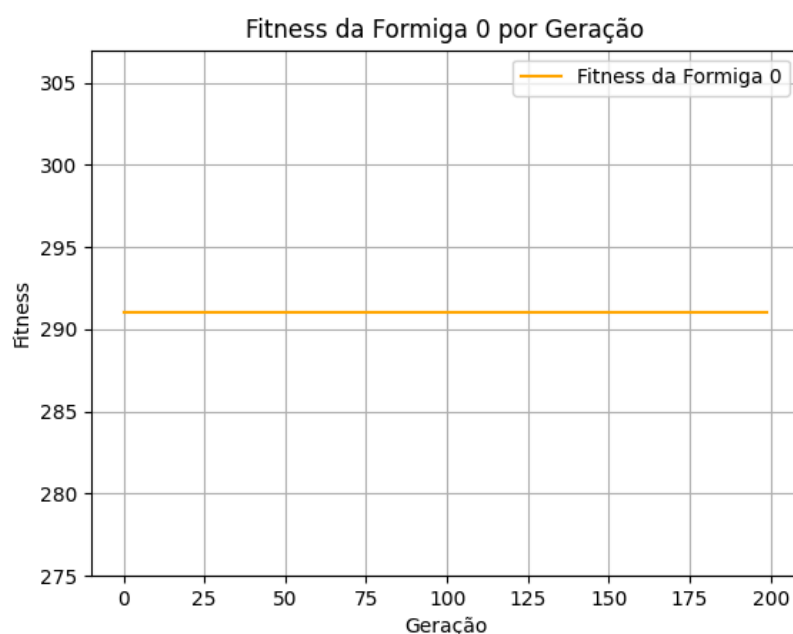


Figura 3. Evolução da formiga 0

3.2 INSTÂNCIA DANTZIG42

Nesta instância, têm-se um conjunto de 42 cidades, com o menor circuito tendo distância igual a 699.

3.2.1 MELHOR CONJUNTO DE PARÂMETROS

A tabela 3 é constituída pelos 10 primeiros resultados para a instância *DANTZIG42*, ordenados pela melhor aptidão média.

Alfa	Beta	Q	Taxa de Atualização	Taxa de Evaporação	Melhor Aptidão Média	Melhor Aptidão Desvio Padrão	Aptidão Média Média	Aptidão Média Desvio Padrão
1.0	5.0	100	0.1	0.005	738.8	20.735	753.869	21.734
1.0	5.0	200	0.1	0.005	739.5	28.668	749.912	28.327
1.0	5.0	500	0.1	0.005	761.6	49.916	770.076	47.811
1.0	5.0	100	0.1	0.5	828.0	0.0	829.595	0.732
1.0	5.0	200	0.001	0.005	828.0	0.0	830.31	0.0
1.0	5.0	100	0.001	0.005	828.0	0.0	830.31	0.0
1.0	2.5	100	0.1	0.005	835.2	15.179	836.314	15.391
1.0	1.0	100	0.1	0.005	864.0	0.0	864.0	0.0
1.0	1.0	200	0.1	0.5	864.0	0.0	864.0	0.0
1.0	1.0	500	0.001	0.005	864.0	0.0	864.0	0.0

Tabela 3. Dez melhores combinações de parâmetros para o ACO

Com o aumento do número de cidades, é perceptível o aumento da complexidade do problema, haja vista que, agora, a melhor solução não é encontrada de forma unânime por todos os conjuntos de parâmetros. Especificamente, o conjunto de parâmetros encontrou a menor aptidão média igual a 738.8, com um desvio padrão de 20.735. Tendo em vista que o

valor do desvio padrão não é muito alto, a variabilidade das melhores aptidões são próximas da média. Em relação à última geração, a aptidão média é um pouco mais alta, 753.869, porém ainda com um baixo desvio padrão, 21.734.

Esse melhor conjunto de parâmetros considera mais a influência da distância do que a influência do feromônio depositado, dado que o valor de β é mais alto do que o de α . Além disso, a taxa de evaporação é muito menor do que a de atualização local.

3.2.2 ANÁLISE GRÁFICA PARA O MELHOR CONJUNTO DE PARÂMETROS

O comportamento do melhor *fitness* ao longo das gerações é analisado para cada uma das execuções na Figura 4.

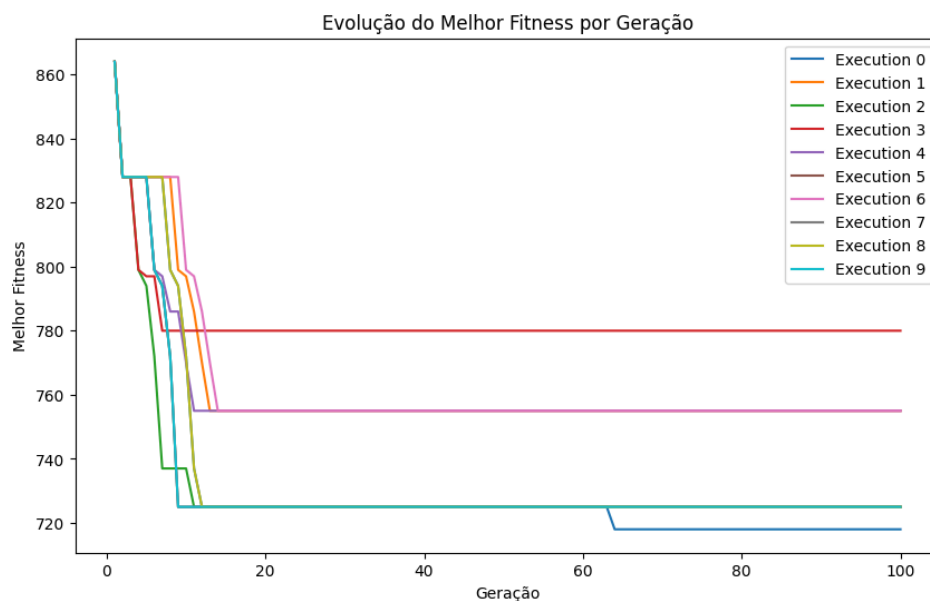


Figura 4. Evolução do *fitness* ao longo das gerações

Em todas as execuções, a convergência do *fitness* para um determinado melhor caminho local é clara, sendo que, na pior das execuções, essa convergência ocorre por volta de 780. Nota-se que, para a maioria das execuções, a convergência ocorre próximo a 720. Assim, é possível perceber que as formigas tendem a permanecer em um caminho ao longo das iterações, conservando essa melhor solução local.

Já a Figura 5 evidencia os valores de melhor e pior *fitness* médio, além da média e da mediana do *fitness*. O comportamento do pior *fitness* se inicia com picos de aumento e de declínio, entretanto há uma clara estabilização entre 850 e 900. É interessante notar que a mediana e o melhor *fitness* convergem de forma muito semelhante, o que indica que um grande número de formigas possui um *fitness* consideravelmente bom.

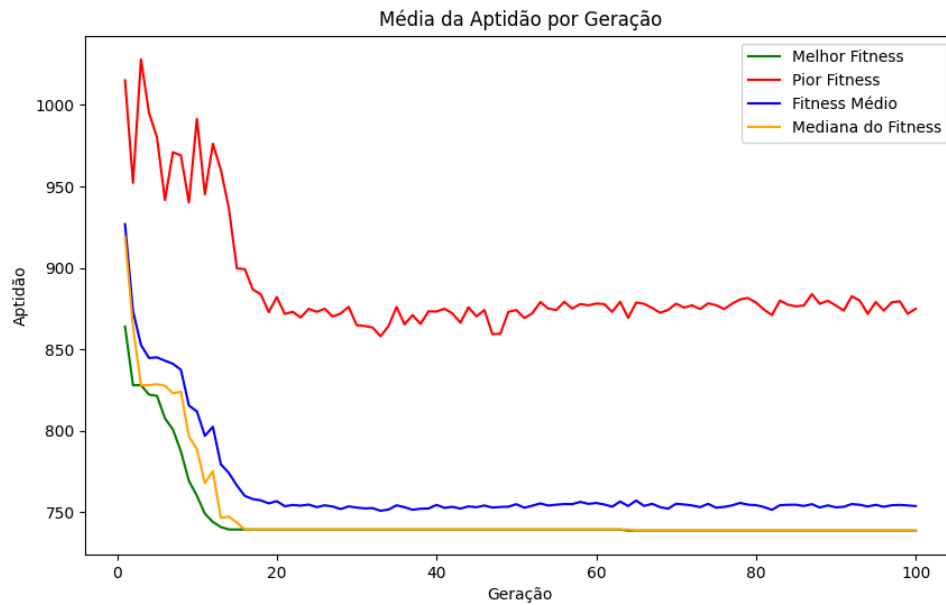


Figura 5. Média de *fitness* por geração

Por fim, têm-se na figura 6 a evolução do *fitness* da formiga 0 na execução 0 do melhor conjunto de parâmetros. A primeira característica clara desse gráfico é o fato de que o melhor *fitness* atingido pelo formiga é revisitado diversas vezes, com picos intercalados de valores piores entre eles. Isso indica que, ao longo das iterações, a formiga tende a retornar para o melhor caminho encontrado até o momento, entretanto, há picos de exploração na solução, os quais representam iterações em que a formiga optou por testar novos caminhos.

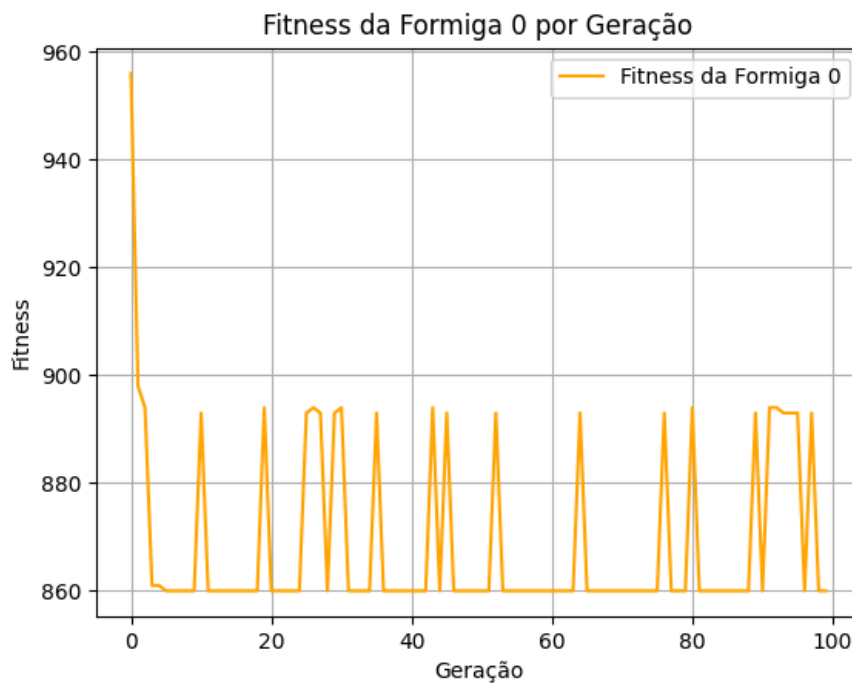


Figura 6. Evolução da formiga 0

3.3 INSTÂNCIA SGB128

A mais complexa entre as instâncias utilizadas é a SGB128, a qual é composta por 128 cidades e não possui melhor solução conhecida.

3.3.1 MELHOR CONJUNTO DE PARÂMETROS

A tabela 4 é constituída pelos 10 primeiros resultados para a instância *SGB128*, ordenados pela melhor aptidão média.

Alfa	Beta	Q	Taxa de Atualização	Taxa de Evaporação	Melhor Aptidão Média	Melhor Aptidão Desvio Padrão	Aptidão Média Média	Aptidão Média Desvio Padrão
1.0	5.0	200	0.1	0.005	21484.2	687.665	26122.934	415.295
1.0	2.5	500	0.1	0.005	21510.6	426.474	24749.615	379.9
5.0	5.0	500	0.1	0.005	21513.6	578.567	24013.725	402.198
1.0	5.0	100	0.1	0.5	21593.9	625.422	24815.589	766.018
1.0	1.0	200	0.1	0.005	21611.7	546.742	24503.727	361.145
1.0	5.0	500	0.1	0.005	21613.4	473.317	25851.966	302.347
5.0	5.0	100	0.1	0.005	21631.1	456.081	24712.84	323.12
1.0	2.5	100	0.1	0.005	21638.9	502.707	25608.94	250.275
1.0	1.0	500	0.1	0.5	21662.2	643.735	22229.021	630.319
5.0	2.5	500	0.1	0.005	21663.5	480.478	23701.475	338.292

Tabela 4. Dez melhores combinações de parâmetros para o ACO

Dado que não existe uma solução conhecida, não é possível analisar o quão próximo do melhor caminho as soluções encontradas estão. Uma possível análise é que a melhor aptidão média encontrada foi de 21484.2, com um desvio padrão considerável de 687.665. Isso indica que os valores de melhor aptidão possuem certa dispersão em relação à média. Percebe-se que os dois melhores resultados encontrados possuem um valor de α menor do que o de β , mais uma vez indicando que a influência da distância foi mais decisiva nessas melhores escolhas do que a do feromônio depositado.

Assim, o melhor conjunto de parâmetros é constituído por $\alpha = 1$; $\beta = 5$; $Q = 200$, $\xi = 0.1$ e $\rho = 0.005$.

3.3.2 ANÁLISE GRÁFICA PARA O MELHOR CONJUNTO DE PARÂMETROS

O comportamento do melhor *fitness* ao longo das gerações é analisado para cada uma das execuções na Figura 7.

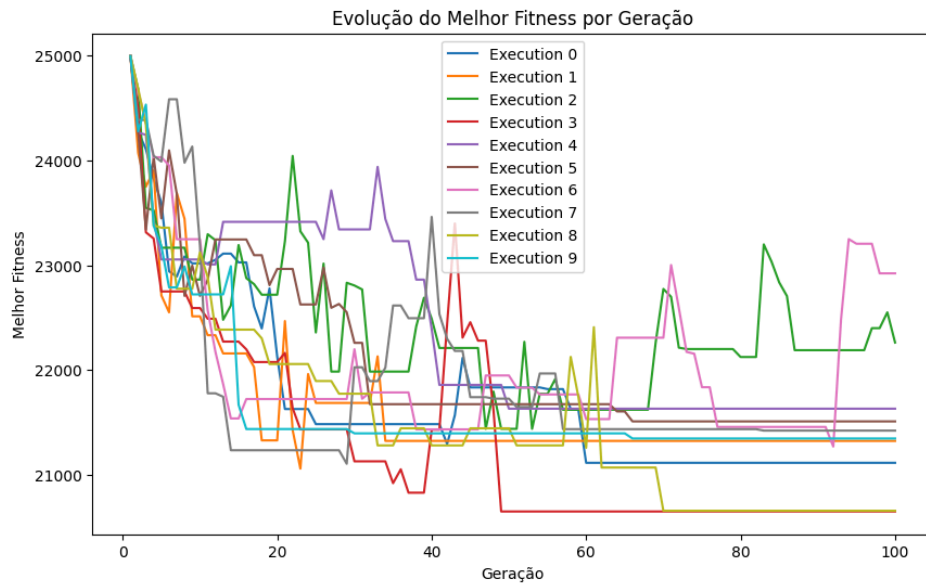


Figura 7. Evolução do *fitness* ao longo das gerações

As linhas que representam cada execução possuem um comportamento mais caótico do que nas execuções anteriores, com uma quantidade maior de picos e estabilização em valores distintos. Para duas das execuções, é possível perceber que com 100 iterações a estabilização em torno de um único valor ainda não foi alcançada. Isso é explicado pela maior complexidade da solução, com um maior número de cidades e, portanto, mais permutações possíveis.

Duas das execuções se estabilizaram em valores menores de 21000, sendo esses os menores valores alcançados por essas execuções. Por fim, a maioria das execuções se estabilizou entre 21000 e 22000.

Outra análise está presente na Figura 8, indicando a evolução da média do pior e melhor *fitness*, além da média e mediana.

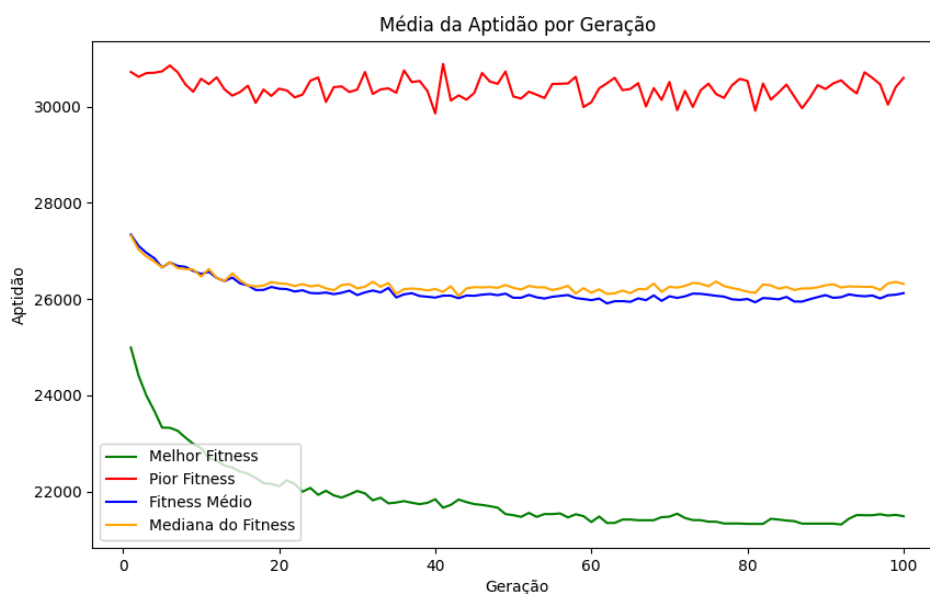


Figura 8. Média de *fitness* por geração

Os valores para pior *fitness* são muito altos, possuindo um intervalo de aproximando 8000 unidades para o melhor *fitness*. Já a média e mediana possuem valores muito próximos, o que sugere uma distribuição mais simétrica para os valores *fitness*, não possuindo grandes *outliers*.

Por fim, a Figura 9 explicita o comportamento do *fitness* da formiga 0 na execução 0 com esse conjunto de parâmetros. É claro a forma como o *fitness* dessa formiga é mais instável, apresentando diversos picos e declínios, o que indica que a exploração no espaço de busca dos caminhos foi devidamente realizada. Por ser um problema consideravelmente mais complexo, com um número maior de iterações, talvez uma possível estabilização conseguisse ser visualizada com mais clareza.

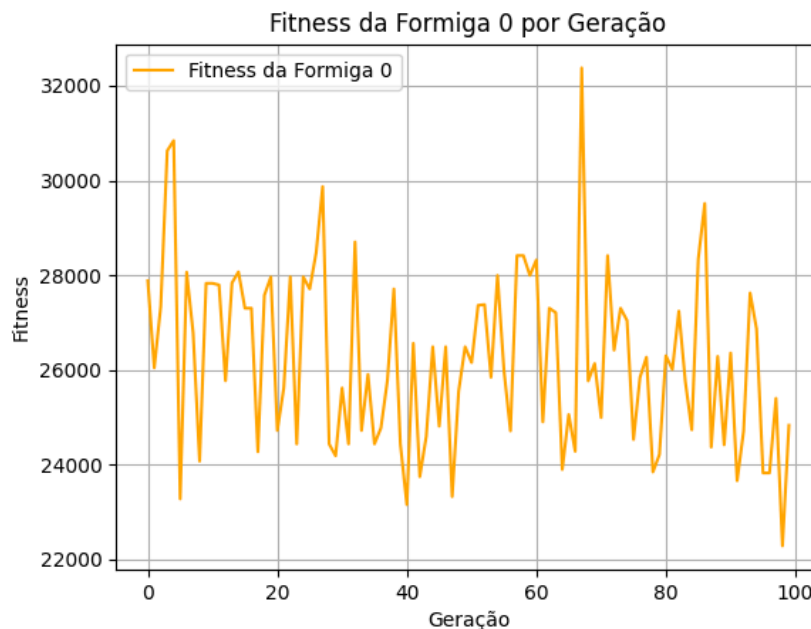


Figura 9. Evolução da formiga 0

4 . CONCLUSÃO

O problema do Caixeiro Viajante é um conhecido problema de otimização, o qual trabalha com a permutação de cidades, buscando a distância mínima entre elas. Desse modo, é possível utilizar diversas estratégias para solucioná-lo, sendo duas delas o AG combinatório e o ACO. Numa comparação entre essas duas otimizações, percebeu-se que o desempenho apresentado pelo ACO foi consideravelmente superior ao AG na instância LAU15.

Para as instâncias DANTZIG42 e SGB128, o ACO apresentou um desempenho satisfatório considerado a maior complexidade dessas instâncias. Análises gráficas permitiram entender a convergência das formigas na colônia para um melhor caminho encontrado e, de modo a reforçar essa melhor solução. Enfim, a aplicação de variação em cinco parâmetros permitiu analisar, para essa implementação, a influência de cada um dos elementos e concluir que, nas duas instâncias mais

complexas, a distância entre as arestas foi mais significativa nos melhores conjuntos de parâmetros do que o feromônio ali depositado.