Ana María Rincón Casallas. Grupo 1

Ejercicios 1.1

1. Los siguientes párrafos han sido tomados de Wikipedia. De estos párrafos, liste tres proposiciones y tres frases que no sean proposiciones.

Proposiciones

* La lógica matemática estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican conceptos intuitivos de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones y computación.

* La lógica matemática se ocupa de la posibilidad de axiomatizar las teorías matemáticas, de clasificar su capacidad expresiva, y desarrollar métodos computacionales útiles en sistemas formales.

* La lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado dentro de un determinado sistema formal

Frases que no son proposiciones

* En un nivel elemental.

* En un nivel avanzado.

* Sino solo de demostraciones y razonamientos que pueden ser completamente formalizados en todos sus aspectos.

2. Los siguientes párrafos han sido tomados de Wikipedia. De estos párrafos, liste tres proposiciones y tres frases que no sean proposiciones.

Proposiciones

*Las especificaciones formales sean útiles en el proceso de desarrollar un sistema.

*Una especificación formal usa notación matemática para describir de manera precisa las propiedades que un sistema de información debe tener.

*Una especificación formal puede servir como un punto de referencia fiable tanto para quienes se dedican a investigar sobre los requerimientos del cliente que solicita el sistema, como para aquellos que desarrollan los programas para satisfacer esos requerimientos, y también para los que redactan manuales de instrucciones para el sistema.

Frases que no son proposiciones

* Sin preocuparse por la forma de obtener dichas propiedades.

* Describe lo que el sistema debe hacer sin decir cómo se va a hacer.

* Debido a que es independiente del código del programa.

3. Considere los siguientes tres argumentos:

a) Si está soleado, entonces es de día. Está soleado. Por lo tanto, es de día.

b) Si no es martes, entonces es lunes. No es martes. Por lo tanto, es lunes.

c) Todos los planetas giran alrededor del Sol. Marte es un planeta. Por lo tanto,

Marte gira alrededor del Sol.

Identifique dos argumentos que tengan la misma estructura.

Los dos argumentos que tienen la misma estructura son el (a) y el (b), solo que el (b) se esta negando.

Ejercicios 1.2

1. Justifique por qué cada una de las siguientes expresiones es una proposición:

b) (true ≡ false)

true y false son proposiciones por definición 1.4, por tanto (true ≡ false) también es proposición.

d) $(p \vee (p \equiv (\neg q)))$

p y q son proposiciones por definición, por tanto $(\neg q)$ es proposición y de esta forma $(p \equiv (\neg q)))$, entonces $(p \vee (p \equiv (\neg q)))$ es proposición.

f) $((q \wedge (\neg q)) \leftarrow (\neg (\neg (\neg (p \rightarrow r)))))$

p, q y r son proposiciones por definición, entonces $(\neg q)$ y $(p \rightarrow r)$, por tanto $(\neg (\neg (\neg (p \rightarrow r))))$ es proposición y $((q \wedge (\neg q)) \leftarrow (\neg (\neg (\neg (p \rightarrow r)))))$ también es proposición.

2. Justifique por qué las siguientes expresiones no son proposiciones:

a) $(p\vee)$

p es proposición por definición, pero $(p\vee)$ no es proposición por definición.

c) $\neg p$

p es proposición por definición, pero $\neg p$ no es proposición por definición.

e) $(p \vee q) \vee r$

p, q y r son proposiciones por definición, $(p \vee q)$ es proposición por definición; pero $(p \vee q) \vee r$ no es proposición por definición.

3. Use el lenguaje de la lógica proposicional para especificar las siguientes proposiciones:

a) Un número natural es par si y solo si no es impar.

p: número natural es par.

q: número impar.

$(p \equiv (\neg q))$

b) Si el sol brilla hoy, entonces no brilla mañana.

p: el sol brilla hoy.

q: el sol brilla mañana.

$(p \rightarrow (\neg q))$

c) Juan estaba celoso o estaba de mal genio.

p: Juan esta celoso.

q: Juan esta de mal genio.

$(p \vee q)$

d) Si una petición ocurre, entonces eventualmente será atendida o el proceso de horarios se bloqueará.

p: petición ocurre.

q: será atendida.

r: proceso de horarios se bloqueará.

$(p \rightarrow (q \vee r))$

e) Hoy lloverá o hará sol, pero no las dos.

p: Hoy lloverá.

q: Hoy hará sol.

$((p \vee q) \wedge (\neg (p \wedge q)))$

f) Sin zapatos o camisa no hay servicio en el restaurante.

p: sin zapatos.

q: sin camisa.

r: hay servicio de restaurante.

$((p \vee q) \rightarrow (\neg r))$

g) Mi hermana quiere un gato blanco y negro.

p: mi hermana quiere un gato blanco.

q: mi hermana quiere un gato negro.

$(p \wedge q)$

h) Mi novia ni raja ni presta el hacha.

p: mi novia raja.

q: mi novia presta el hacha.

$((\neg p) \wedge (\neg q))$

4. Considere la siguiente especificación:

h: El cuarteto interpretará a Haydn.

m: El cuarteto interpretará a Mozart

a) $(h \vee m)$

El cuarteto interpretará a Haydn o a Mozart.

b) $(h \equiv (\neg m))$

El cuarteto interpretará a Haydn si y solo si no interpreta a Mozart.

c) $(\neg (h \equiv m))$

El cuarteto no interpretará, Haydn si solo si interpreta a Mozart.

d) $(\neg (h \wedge m))$

El cuarteto no interpretará, Haydn y Mozart.

e) $(((\neg (h \wedge m)) \wedge (\neg h)) \rightarrow m)$

El cuarteto no interpretará, Haydn y Mozart, y no interpretará Haydn; entonces interpretará a Mozart.

5. Use el lenguaje de la lógica proposicional para especificar cada una de las siguientes argumentaciones, indicando claramente en cada caso la especificación de las variables proposicionales:

a) Si Pedro entiende matemáticas, entonces puede entender lógica. Pedro no entiende lógica. Consecuentemente, Pedro no entiende matemáticas.

p: pedro entiende matemáticas.

q: pedro entiende lógica.

$(p \rightarrow q), (\neg q), (\neg p)$

b) Si llueve o cae nieve, entonces no hay electricidad. Llueve. Entonces, no habrá electricidad.

p: llueve.

q: cae nieve.

r: hay electricidad.

$((p \vee q) \rightarrow (\neg r)), p, (\neg r)$

c) Si llueve o cae nieve, entonces no hay electricidad. Hay electricidad. Entonces no nevó.

p: llueve.

q: cae nieve.

r: hay electricidad.

$((p \vee q) \rightarrow (\neg r)), r, (\neg q)$

d) Si sin x es diferenciable, entonces sin x es continúa. Si sin x es continúa, entonces sin x es diferenciable. La función sin x es diferenciable. Consecuentemente, la función sin x es integrable.

p: x.

q: es diferenciable.

r: es continua.

s: es integrable.

$(((\neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow r)), (((\neg p) \rightarrow r) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)), ((\neg p) \rightarrow q), ((\neg p) \rightarrow s)$

e) Si Gödel fuera presidente, entonces el Congreso presentaría leyes razonables. Gödel no es presidente. Por lo tanto, el Congreso no presenta leyes razonables.

p: Gödel es presidente.

q: congreso presenta leyes razonables.

$(p \rightarrow q), (\neg p), (\neg q)$

f) Si llueve, entonces no hay picnic. Si cae nieve, entonces no hay picinic. Llueve o cae nieve. Por lo tanto, no hay picnic.

p: llueve.

q: hay picnic.

r: cae nieve

$(p \rightarrow (\neg q)), (r \rightarrow (\neg q)), (p \vee r), (\neg q)$

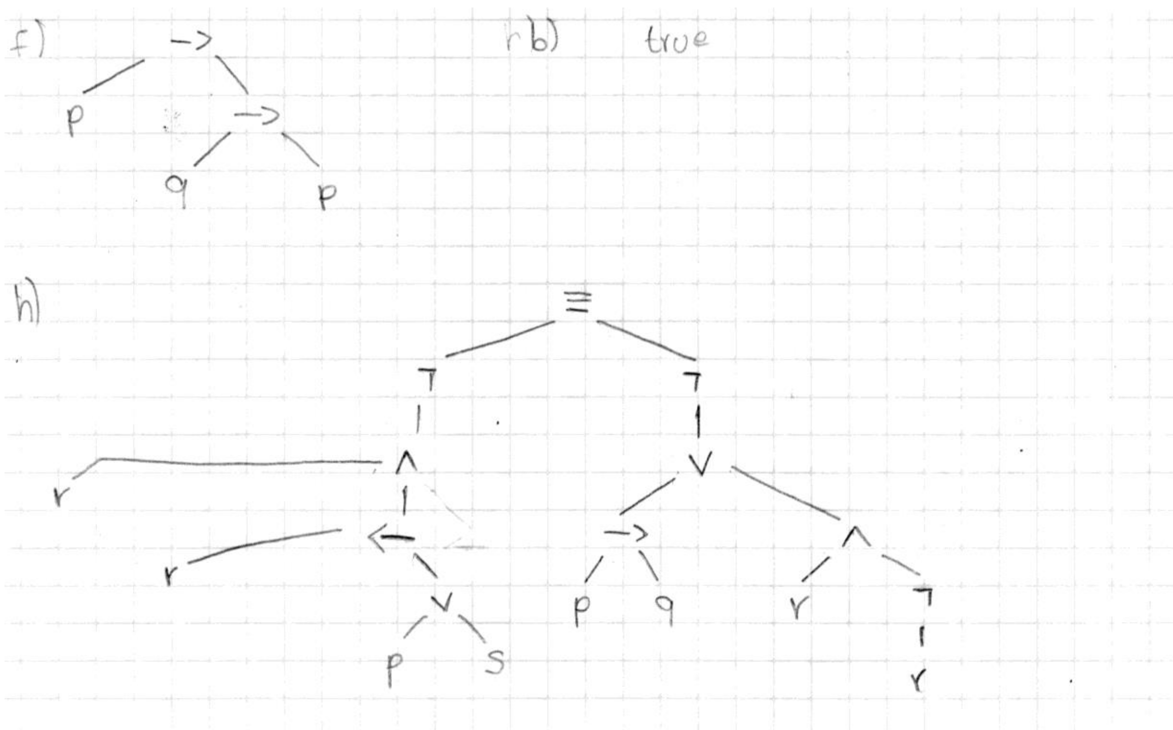
Ejercicios 1.3

1. Dibuje el árbol de sintaxis para cada una de las siguientes proposiciones:

b) true

f) $\mathbf{(p \rightarrow (q \rightarrow p))}$

h) $\mathbf{(\neg ((false \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg ((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))}$



2. Liste todas las subproposiciones de cada una de las siguientes proposiciones:

e) $\mathbf{(p \rightarrow (q \rightarrow p))}$

Subproposiciones:

- $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
- $(q \rightarrow p)$
- p
- q

g) $\mathbf{(\neg ((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg ((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))}$

Subproposiciones:

- $(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))))$
- $((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))$
- $(r \wedge (r \leftarrow (p \vee s)))$
- $(r \leftarrow (p \vee s))$
- $(p \vee s)$
- $(\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r))))$
- $((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))$
- $(r \wedge (\neg r))$
- $(\neg r)$
- $(p \rightarrow q)$
- p
- q
- r
- s

3. Dibuje árbol de sintaxis para cada una de los siguientes casos:

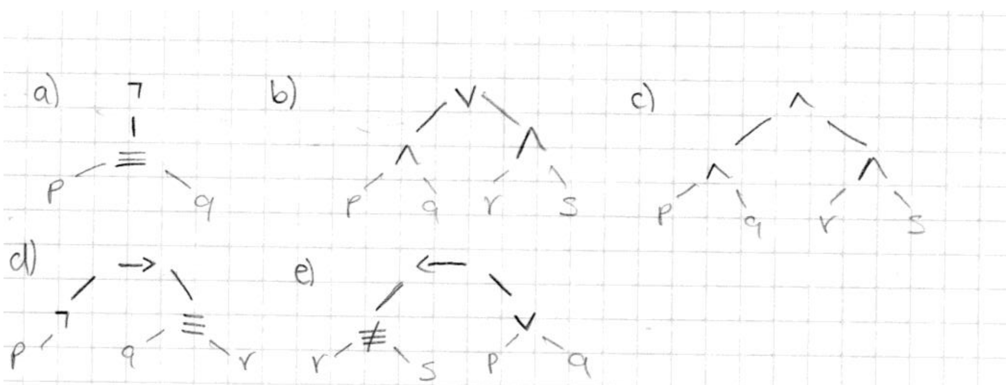
a) Una proposición que es una negación de una equivalencia.

b) Una proposición que es una disyunción cuyos disyuntos ambos son conjunciones.

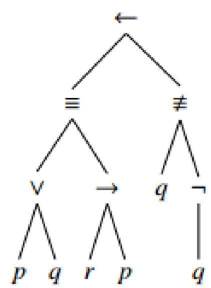
c) Una proposición que es una conjunción de conjunciones.

d) Una proposición que es una implicación cuyo antecedente es una negación y consecuente es una equivalencia.

e) Una proposición que es una consecuencia cuyo antecedente es una disyunción y consecuente una discrepancia.



4. Escriba la proposición correspondiente al siguiente árbol de sintaxis:

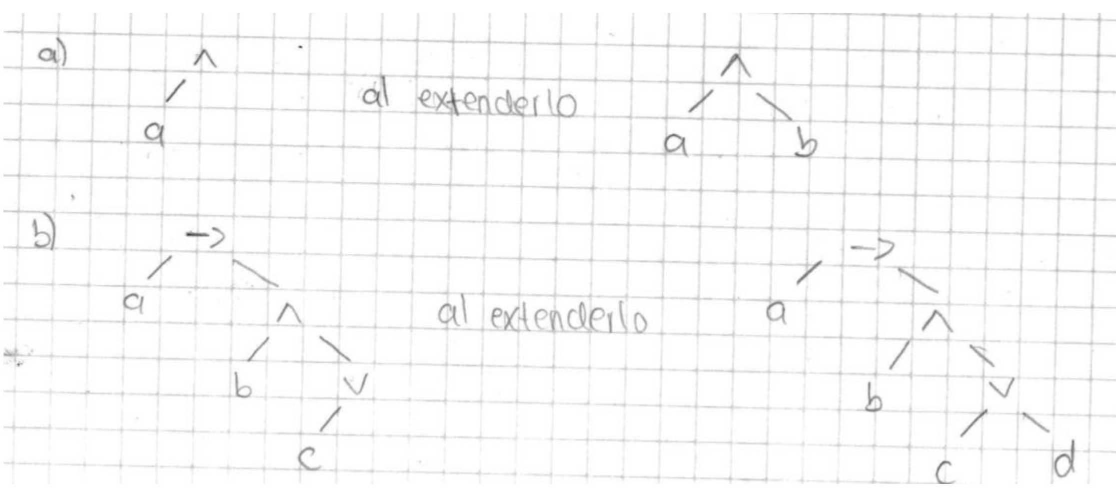


$$(((p \vee q) \equiv (r \rightarrow p)) \leftarrow (q \not\equiv (\neg q)))$$

5. En cada uno de los siguientes casos, dibuje un árbol de símbolos que no represente una proposición y que satisfaga las condiciones dadas:

a) Al extenderlo el árbol resultante represente una proposición.

b) Sea patológicamente mal formado, i.e., no hay forma de extenderlo con subárboles de tal modo que el árbol obtenido represente una proposición.



Ejercicios 1.4

1. Complete la demostración del Metateorema 1.7 con los casos en que φ sea de las forma

True, False

Demostración. Considere la siguiente propiedad para n ∈ N:

S (n): Cualquier proposición con a lo sumo n conectivos lógicos tiene la propiedad Q.

La demostración procede por inducción matemática sobre $n \in N$ (Definición 0.5), suponiendo que (1), (2), (3) y (4) son ciertos.

Caso base: Se debe demostrar S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad Q. Las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por la suposición (1), tienen la propiedad Q.

($\neg\psi$)

Demostración. Considere la siguiente propiedad para $n \in N$:

S (n): Cualquier proposición con a lo sumo n conectivos lógicos tiene la propiedad Q.

La demostración procede por inducción matemática sobre $n \in N$ (Definición 0.5), suponiendo que (1), (2), (3) y (4) son ciertos.

Caso base: Se debe demostrar S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad Q. Las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por la suposición (1), tienen la propiedad Q.

Caso inductivo: Se supone S (n) ($n \geq 0$) y se demuestra S (n+1). Suponga que φ tiene n+1 conectivos lógicos. Bajo esta suposición φ no puede ser una variable proposicional; entonces, considere el caso en que φ sea de la forma ($\neg\psi$).

ψ tiene una cantidad de conectivos lógicos estrictamente menor que la cantidad de conectivos lógicos en φ. Entonces, por la propiedad (4), al suponer S (n), φ tiene la propiedad Q.

($\psi \vee \tau$)

Demostración. Considere la siguiente propiedad para $n \in N$:

S (n): Cualquier proposición con a lo sumo n conectivos lógicos tiene la propiedad Q.

La demostración procede por inducción matemática sobre $n \in N$ (Definición 0.5), suponiendo que (1), (2), (3) y (4) son ciertos.

Caso base: Se debe demostrar S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad Q. Las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por la suposición (1), tienen la propiedad Q.

Caso inductivo: Se supone S (n) ($n \geq 0$) y se demuestra S (n+1). Suponga que φ tiene n+1 conectivos lógicos. Bajo esta suposición φ no puede ser una variable proposicional; entonces, considere el caso en que φ sea de la forma ($\psi \vee \tau$).

Tanto τ como ψ tienen una cantidad de conectivos lógicos estrictamente menor que la cantidad de conectivos lógicos en φ. Entonces, por la propiedad (4), al suponer S (n), φ tiene la propiedad Q.

$(\psi \wedge \tau)$

Demostración. Considere la siguiente propiedad para $n \in N$:

S (n): Cualquier proposición con a lo sumo n conectivos lógicos tiene la propiedad Q.

La demostración procede por inducción matemática sobre $n \in N$ (Definición 0.5), suponiendo que (1), (2), (3) y (4) son ciertos.

Caso base: Se debe demostrar S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad Q. Las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por la suposición (1), tienen la propiedad Q.

Caso inductivo: Se supone S (n) $(n \geq 0)$ y se demuestra S (n+1). Suponga que φ tiene n+1 conectivos lógicos. Bajo esta suposición φ no puede ser una variable proposicional; entonces, considere el caso en que φ sea de la forma $(\psi \wedge \tau)$.

Tanto τ como ψ tienen una cantidad de conectivos lógicos estrictamente menor que la cantidad de conectivos lógicos en φ. Entonces, por la propiedad (4), al suponer S (n), φ tiene la propiedad Q.

$(\psi \rightarrow \tau)$

Demostración. Considere la siguiente propiedad para $n \in N$:

S (n): Cualquier proposición con a lo sumo n conectivos lógicos tiene la propiedad Q.

La demostración procede por inducción matemática sobre $n \in N$ (Definición 0.5), suponiendo que (1), (2), (3) y (4) son ciertos.

Caso base: Se debe demostrar S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad Q. Las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por la suposición (1), tienen la propiedad Q.

Caso inductivo: Se supone S (n) $(n \geq 0)$ y se demuestra S (n+1). Suponga que φ tiene n+1 conectivos lógicos. Bajo esta suposición φ no puede ser una variable proposicional; entonces, considere el caso en que φ sea de la forma $(\psi \rightarrow \tau)$.

Tanto τ como ψ tienen una cantidad de conectivos lógicos estrictamente menor que la cantidad de conectivos lógicos en φ. Entonces, por la propiedad (4), al suponer S (n), φ tiene la propiedad Q.

$(\psi \leftarrow \tau)$

Demostración. Considere la siguiente propiedad para $n \in N$:

S (n): Cualquier proposición con a lo sumo n conectivos lógicos tiene la propiedad Q.

La demostración procede por inducción matemática sobre $n \in N$ (Definición 0.5), suponiendo que (1), (2), (3) y (4) son ciertos.

Caso base: Se debe demostrar S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad Q. Las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por la suposición (1), tienen la propiedad Q.

Caso inductivo: Se supone S (n) ($n \geq 0$) y se demuestra S (n+1). Suponga que φ tiene n+1 conectivos lógicos. Bajo esta suposición φ no puede ser una variable proposicional; entonces, considere el caso en que φ sea de la forma $(\psi \leftarrow \tau)$.

Tanto τ como ψ tienen una cantidad de conectivos lógicos estrictamente menor que la cantidad de conectivos lógicos en φ. Entonces, por la propiedad (4), al suponer S (n), φ tiene la propiedad Q.

2. Complete el Ejemplo 1.10 con los casos en que φ sea de la forma

$(\neg\psi)$

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

Para cualquier proposición φ, el objetivo es demostrar la propiedad P:

$P(\varphi)$: $L(\varphi) = R(\varphi)$.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante.

Caso inductivo: Suponga que φ es de la forma $(\neg\psi)$. Por la hipótesis inductiva, se sabe que $L(\psi) = R(\psi)$ y $L(\tau) = R(\tau)$. Note que:

$L(\varphi) = L((\neg\psi))$

$= 1 + L(\psi)$

$= 1 + R(\psi)$

$= R((\neg\psi)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$.

$(\psi \neq \tau)$

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

Para cualquier proposición φ, el objetivo es demostrar la propiedad P:

$P(\varphi \quad |)$: $L(\varphi) = R(\varphi)$.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante.

Caso inductivo: Suponga que φ es de la forma $(\psi \neq \tau)$. Por la hipótesis inductiva, se sabe que $L(\psi) = R(\psi)$ y $L(\tau) = R(\tau)$. Note que:

$L(\varphi) = L((\psi \neq \tau))$

$= 1 + L(\psi) + L(\tau)$

$= 1 + R(\psi) + R(\tau)$

$= R((\psi \neq \tau)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$.

$(\psi \vee \tau)$

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

Para cualquier proposición φ, el objetivo es demostrar la propiedad P:

$P(\varphi)$: $L(\varphi) = R(\varphi)$.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante.

Caso inductivo: Suponga que φ es de la forma $(\psi \vee \tau)$. Por la hipótesis inductiva, se sabe que $L(\psi) = R(\psi)$ y $L(\tau) = R(\tau)$. Note que:

$L(\varphi) = L((\psi \vee \tau))$

$= 1 + L(\psi) + L(\tau)$

$= 1 + R(\psi) + R(\tau)$

$= R((\psi \vee \tau)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$.

$(\psi \wedge \tau)$

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

Para cualquier proposición φ, el objetivo es demostrar la propiedad P:

$P(\varphi)$: $L(\varphi) = R(\varphi)$.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante.

Caso inductivo: Suponga que φ es de la forma $(\psi \wedge \tau)$. Por la hipótesis inductiva, se sabe que $L(\psi) = R(\psi)$ y $L(\tau) = R(\tau)$. Note que:

$L(\varphi) = L\ ((\psi \wedge \tau))$

$= 1 + L(\psi) + L(\tau)$

$= 1 + R(\psi) + R(\tau)$

$= R\ ((\psi \wedge \tau)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$.

$(\psi \rightarrow \tau)$

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

Para cualquier proposición φ, el objetivo es demostrar la propiedad P:

$P(\varphi)$: $L(\varphi) = R(\varphi)$.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante.

Caso inductivo: Suponga que φ es de la forma $(\psi \rightarrow \tau)$. Por la hipótesis inductiva, se sabe que $L(\psi) = R(\psi)$ y $L(\tau) = R(\tau)$. Note que:

$L(\varphi) = L\ ((\psi \rightarrow \tau))$

$= 1 + L(\psi) + L(\tau)$

$= 1 + R(\psi) + R(\tau)$

$= R\ ((\psi \rightarrow \tau)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$.

$(\psi \leftarrow \tau)$

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

Para cualquier proposición φ, el objetivo es demostrar la propiedad P:

$P(\varphi)$: $L(\varphi) = R(\varphi)$.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante.

Caso inductivo: Suponga que φ es de la forma $(\psi \leftarrow \tau)$. Por la hipótesis inductiva, se sabe que $L(\psi) = R(\psi)$ y $L(\tau) = R(\tau)$. Note que:

$L(\varphi) = L((\psi \leftarrow \tau))$

$= 1 + L(\psi) + L(\tau)$

$= 1 + R(\psi) + R(\tau)$

$= R((\psi \leftarrow \tau)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$.

3. Demuestre que cualquier proposición que no sea una variable proposicional ni una

constante inicia con un paréntesis izquierdo y termina con un paréntesis derecho.

$L(\varphi)$: número de paréntesis izquierdos en φ,

$R(\varphi)$: número de paréntesis derechos en φ.

El objetivo es demostrar que cualquier proposición φ que no sea una variable proposicional o una constante inicia con un paréntesis izquierdo y termina con uno derecho.

La demostración procede por inducción sobre φ.

Caso base: Si φ es una variable proposicional, entonces φ no tiene paréntesis alguno y

se tiene que $L(\varphi) = 0 = R(\varphi)$. Lo mismo sucede si φ es una constante. Por definición 1.4.

Caso inductivo: Hay 7 casos: que φ sea de la forma $(\neg\psi)$, $(\psi \equiv \tau)$, $(\psi \not\equiv \tau)$, $(\psi \vee \tau)$,

$(\psi \wedge \tau)$, $(\psi \rightarrow \tau)$ o $(\psi \leftarrow \tau)$. Suponga que φ es de la forma $(\psi \equiv \tau)$.

$L(\varphi) = L((\psi \equiv \tau))$

$= 1 + L(\psi) + L(\tau)$

$= 1 + R(\psi) + R(\tau)$

$= R((\psi \equiv \tau)) = R(\varphi)$.

En cualquiera de las dos situaciones $L(\varphi) = R(\varphi)$ y la proposición siempre comenzará con un paréntesis izquierdo y terminará con uno derecho.

7. Sea Prop $(\neg, \vee)$ el conjunto de proposiciones que tienen a $\neg$ y $\vee$ como únicos conectivos lógicos, y sea $\Gamma \subseteq$ Prop $(\neg, \vee)$. Suponga que Γ satisface las siguientes cuatro condiciones:

a) no existe una variable proposicional p tal que $\{p, (\neg p)\} \subseteq \Gamma$

b) si $(\neg(\neg\varphi)) \in \Gamma$, entonces $\varphi \in \Gamma$

c) si $(\neg (\varphi \vee \psi)) \in \Gamma$, entonces $(\neg\varphi) \in \Gamma$ y $(\neg\psi) \in \Gamma$

d) si $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, entonces $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$

Demuestre que no existe $\tau \in$ Prop $(\neg, \vee)$ tal que $\{\tau, (\neg\tau)\} \subseteq \Gamma$.

Demostración: considere la siguiente propiedad para $n \in \mathbb{N}$.

S (n): Existe $\tau \in$ Prop $(\neg, \vee)$ tal que $\{\tau, (\neg\tau)\} \subseteq \Gamma$

Suponiendo que (a), (b), (c) y (d) son ciertos.

Caso base: se debe demostrar para S (0), es decir, que cualquier proposición con 0 conectivos lógicos tiene la propiedad S. las únicas proposiciones con 0 conectivos lógicos son las variables proposicionales que, por suposición (a), no tienen la propiedad S.

Ya que no se cumple para el caso base, no se cumplirá para un caso inductivo, puesto que no tenemos una suposición a partir del caso base.