Ana María Rincón Casallas. Grupo 1

Ejercicios 0.1

2.

a) **Número algebraico:** Un número algebraico es cualquier número real o complejo que es solución de una ecuación algebraica de la forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 x = 0$

Donde:

1. n > 0, es el grado del polinomio.
2. $a_i \in \mathbb{Z}$.
3. $0 \neq a_n \in \mathbb{Z}$

b) **Número irracional:** Un número irracional es un número que no puede ser expresado, como una fracción. Es cualquier número real que no es racional, en otras palabras un decimal infinito (es decir, con infinitas cifras) aperiódico.

c) **Número trascendental:** Es un número real que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficiente enteros no todos nulos. Tampoco es número racional, ya que estos resuelven ecuaciones algebraicas de primer grado, al ser real y no ser racional, necesariamente, es un número irracional. En este sentido, *número trascendente* es antónimo de *número algebraico*. La definición no proviene de una simple relación algebraica, sino que se define como una propiedad fundamental de las matemáticas. Los números trascendentes más conocidos son π y e.

3.

a) **Conjunto:** En matemáticas, un conjunto es una colección de elementos considerada en sí misma como un objeto. Los elementos de un conjunto, pueden ser las siguientes: personas, números, colores, letras, figuras, etc. Se dice que un elemento (o miembro) pertenece al conjunto si está definido como incluido de algún modo dentro de él.

b) **Conjunto finito**: En matemáticas, un conjunto finito es un conjunto que tiene un número finito de elementos. Por ejemplo {2, 4, 6, 8, 10} es un conjunto finito con cinco elementos. La cardinalidad o número de elementos de un conjunto finito es igual a un número natural.

Todo conjunto finito es un conjunto numerable, puesto que sus elementos pueden contarse, pero la recíproca es falsa: existen conjuntos numerables que no son finitos (como el propio N).

c) **Conjunto infinito:** En teoría de conjuntos, un conjunto infinito es un conjunto que no es finito. Algunos ejemplos son:

- Los números enteros Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} forman un conjunto infinito y numerable.
- Los puntos en una recta, representados por un número real, forman un conjunto infinito y no numerable.

4.

a) **Función parcial:** Una función parcial es una relación que asocia elementos de un conjunto (a veces denominado dominio) con, como máximo, uno de los elementos de otro conjunto (que puede ser el mismo), llamado codominio. En cualquier caso, no es necesario que todos los elementos del dominio estén asociados con algún elemento del codominio.

b) **Función total:** En matemáticas, una función se dice que es total si está definida para todo el conjunto de partida. Para comprender esto, debemos saber que:

Sea f: A → B, diremos que f está definida para un elemento $a \in A$ si existe un par $(a, f(a)) \in f$. Esto se escribe como f(a) = ↓. Por el contrario, escribiremos f(a) = ↑ cuando f no está definida para a.

c) **Función inyectiva:** La función f es inyectiva si cada elemento del conjunto final Y tiene como máximo un elemento del conjunto inicial X al que le corresponde. Es decir, no pueden haber más de un valor de X que tenga la misma imagen y.

d) **Función sobreyectiva:** Una función f es sobreyectiva (o suprayectiva) si todo elemento del conjunto final Y tiene al menos un elemento del conjunto inicial X al que le corresponde.

e) **Función biyectiva:** Una función f es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. Es decir, si todo elemento del conjunto final Y tiene un único elemento del conjunto inicial X al que le corresponde (condición de función sobreyectiva) y todos los elementos del conjunto inicial X tiene una única imagen en el conjunto final Y (condición de función inyectiva).

8.

a) **e.g.:** Es la abreviatura de las palabras en latín exempli gratia, que en español significan "por ejemplo".

Ej: Me gusta la música clásica, e.g. , Mozart, Beethoven, Chopin.

c) **etc.:** Del latín «*et cetĕra*», que en español significa "y lo demás".

Ej: Vendía patatas, tomates, nabos y etc.

d) **i.e.:** Es la abreviatura de las palabras en latín id est, que en español significan "es decir".

Ej: considere el sistema formal PR cuyas formulas son cadenas (i.e., secuencias)

e) **ibid.:** Del latín *ibídem* es un latinismo que significa "en el mismo lugar".

Ej:

4. E. Vijh, Latín para principiantes (Académico, Nueva York, 1997), p. 23.

5. Ibíd., p. 100.

El libro citado en la referencia 5 es el mismo que el de la 4; la diferencia es que esta vez se cita una página diferente.

9.

a) **a fortiori:** Es una locución latina que significa “con mayor motivo”. En lógica se usa esta expresión para referirse a una forma de argumentación por la que se saca una consecuencia de una cosa en vista de la conclusión que se sacó de otra, para la cual había menor motivo. Por ejemplo, si el que roba es sentenciado, a fortiori será sentenciado el que mata.

b) **a priori:** Del latín “de lo anterior”. La expresión se utiliza para demostrar algo que va desde su causa hasta el efecto. Las proposiciones a priori, por lo tanto, son necesarias. Las demostraciones directas en las matemáticas, por ejemplo, pertenecen a este tipo de locuciones. De esta forma, el conocimiento a priori permite anticipar un hecho o algunas de sus propiedades o características.

c) **ad absurdum:** Del latín “al absurdo”. Se usa en matemáticas como *Reductio ad absurdum*, que significa “reducción al absurdo”. La demostración por reducción al absurdo es un tipo de argumento muy empleado en demostraciones matemáticas. Consiste en demostrar que una proposición matemática es verdadera probando que si no lo fuera conduciría a una contradicción.

d) **ad infinitum:** Es una locución latina que significa “hasta el infinito”. En contexto, suele significar "continuar indefinidamente, sin límite", por tanto puede ser usada para describir un proceso sin fin, un proceso "repetitivo" sin fin, o un conjunto de instrucciones que han de ser repetidas "siempre", entre otros usos. También puede ser usada de manera similar a la locución latina "etcétera" para denotar palabras escritas o un concepto que continúa más allá de lo que se muestra.

Ej: "La sucesión 1, 2, 3, ... continua ad infinitum."

10. Un lema es un pequeño teorema que suele enunciarse y demostrarse antes de un teorema de más peso, y que ayuda en su demostración.

La palabra lema es una evolución del término griego lémma que significa “premisa”.

Ej:

- ✓ Lema de ABEL - Sea una serie entera de coeficientes complejos; si está uniformemente acotada por un valor, entonces, para cualquier número complejo, converge absolutamente y para cualquier número real, es normalmente convergente en el disco cerrado.

- ✓ Lema de GAUSS - En un anillo factorial A, si a es extraño con b y divide el producto bc, entonces a divide a c.

- ✓ Lema de SCHWARZ - Sea una función holomorfa en un disco abierto para todo complejo. Si además tenemos una igualdad para un complejo no nulo, entonces existe un complejo de módulo 1.

11. Corolario: Del griego antiguo κορώνη (koróne). Del latín corollarium, que significa “corona de flores”. Un corolario es un resultado que es consecuencia de los teoremas anteriores y que en muchos casos no necesita demostración (ya que es una consecuencia evidente) o su demostración es muy directa.

Este término matemático deriva de un concepto tan poco relacionado con las matemáticas como “corona de flores” porque en la antigüedad, a los actores como agradecimiento a su actuación se les regalaban flores, es decir, como consecuencia a su actuación recibían ese regalo.

Ej:

- A la afirmación

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

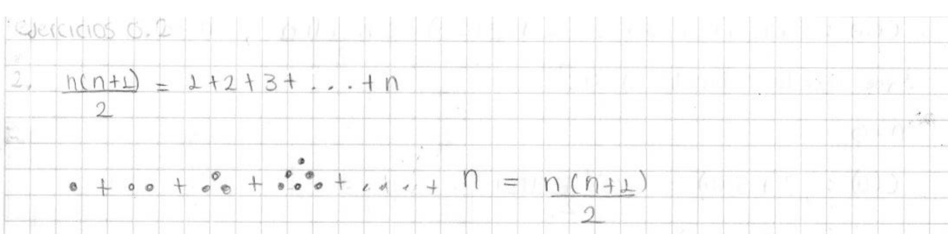
Le sigue el corolario

En un triángulo rectángulo la suma de los dos ángulos contiguos a la hipotenusa es igual a 90°.

Dado que la hipotenusa es la arista ubicada frente al ángulo de 90°, la suma de los ángulos del triángulo contiguos a esa línea es igual a 180° - 90° = 90°.

Ejercicios 0.2

2.



3.

3. $A(n): (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\dots+(2\cdot n-1)=n^2$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

caso base: $A(1): (2\cdot 1-1)=1^2$

$$2-1=1$$

$$1=1$$

Suponemos que se cumple la propiedad

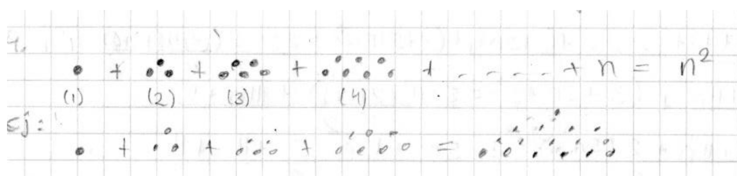
caso inductivo: $A(n+1) = \underbrace{(2\cdot 1-1)+\dots+(2\cdot n-1)}+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$

$A(n+1)= n^2+(2n+2-1) = (n+1)^2$

$= n^2+2n+1 = n^2+2n+1$ ✓

$A(n)$ se cumple para todos los $\mathbb{N}$

4.



5.

5. $B(n): 0^2+1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$

Caso base: $B(0): 0 = \dfrac{0(0+1)(2(0)+1)}{6}$

$$0=0$$

Caso inductivo: $B(n+1)$

$B(n+1): \underbrace{0^2+1^2+\dots+n^2}+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

Suponemos que se cumple la propiedad

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}=\frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6}=\frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}$$

$$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

6.

$C(n): 8+13+18+23+ \dots +(3+5n) = \frac{5n^2+11n}{2}, \quad n \geq 1$

¿Qué sucede cuando $n=0$?

$n=0$

$C(0): 3+5(0) = \frac{5(0)^2+11(0)}{2}$

$: 3 = \frac{0}{2}$

$: 3 = 2$

No se cumple con $n=0$

caso base: $C(1)$

$C(1): 3+5(1) = \frac{5(1)^2+11(1)}{2}$

$8 = \frac{16}{2}$

$8 = 8$

suponemos que se cumple la propiedad

Caso inductivo: $C(n+1)$

$C(n+1) = \underbrace{8+13+18+ \dots +(3+5n)} + (3+5(n+1)) = \frac{5(n+1)^2+11(n+1)}{2}$

$: \frac{5n^2+11n}{2} + (3+5n+5) = \frac{5(n^2+2n+1)+11n+11}{2}$

$: \frac{5n^2+11n+2(5n+8)}{2} = \frac{5n^2+10n+5+11n+11}{2}$

$: \frac{5n^2+11n+10n+16}{2} = \frac{5n^2+10n+11n+16}{2}$

8.

$2^n \geq n+12$ para todo $n \geq 4$

¿Es cierta esta propiedad para $n < 4$?

$\varphi(n):\ 2^n \geq n+12$

$\varphi(2):\ 2^2 \not\geq 2+12$

$4 \geq 14$ ✗

° caso base: $\varphi(4)$

$\varphi(4):\ 2^4 \geq 4+12$

$16 \geq 16$ ✓

Suponemos que se cumple la propiedad

• caso inductivo $= C(n+1)$

$C(n+1):\ 2^{(n+1)} \geq (n+1)+12$

$2^n \cdot 2 \geq (n+12)+1$

$(2^n \cdot 2)-1 \geq n+12\cancel{+1)-1}$

$(2^n \cdot 2)-1 \geq n+12$

19. Suponga que en una oficina postal vende estampillas de \$2 y \$3. Demuestre que cualquier cantidad de dinero n≥\$2 puede ser pagada con estampillas de estas denominaciones.

D(n): 2x+3y = n

Demostración caso base:

n(2) = 2(1) + 3(0) = 2

2 =2

Demostración caso inductivo:

Para todo n par:

X1 = x-1

Y1 = y+1

P(n+1): 2x1 + 3y1 = n+1

P(n+1): 2(x-1) + 3(y+1) = n+1

P(n+1): 2x – 2 + 3y + 3 = n+1

P(n+1): 2x + 3y + 1 = n+1

Para todo n impar:

X1 = x+2

Y1 = y-1

P(n+1): 2x1 + 3y1 = n+1

P(n+1): 2(x+2) + 3(y-1) = n+1

P(n+1): 2x + 4 + 3y – 3 = n+1

P(n+1): 2x + 3y + 1 = n+1

20.

20. C de $n+1 \rightarrow \{1, 2, ..., 2n\}$, $n \geq 1$

caso base $C(1)$

$C(1) = 1, 2 \rightarrow \frac{2}{1}$ ✓

caso inductivo $C(n+1)$

$C(n+1) = 1, 2, ..., n, 2n \rightarrow \frac{2n}{n}$ es divisible ✓

Ejercicios 0.3

2.

lenguaje: hay tres símbolos 'a', 'b' y 'c'; toda expresión es una fórmula

Axioma: cabcba

Reglas de inferencia:

a) si la fórmula comienza con a, agregue cac a la derecha y luego elimine los 3 primeros símbolos de la expresión resultante

b) si la fórmula comienza con b, agregue bab a la derecha y luego elimine los tres primeros símbolos de la expresión resultante

c) si la fórmula comienza con c, agregue ca a la derecha y luego elimine los primeros tres símbolos de la expresión resultante

Axioma: 0, cabcba

cabcbaca

1. cbaca (por c)

cbacaca

2. caca (por c)

cacaca

3. aca (por c)

acacac

4. cac (por a)

cacca

5. ca (por c)

cacaca

6. aca (por c)

- en el paso 6 al ser igual al 3, se vuelven a repetir los pasos 4, 5, para finalmente llegar del nuevo al 3.

6.

MULT (Numeros naturales positivos)

lenguaje: los símbolos son 'x', '=' y '|'. Una fórmula es una expresión de la forma $z \times y = k$, en donde z, y y k son secuencias no vacías en las cuales únicamente aparece el símbolo '|'

Axioma: el único axioma es la fórmula $| \times | = |$

demostrar que $|| \times ||| = ||||||$ es teorema de MULT

$R_1.\ \dfrac{z \times y = k}{z| \times y = ky}$ $\qquad R_2.\ \dfrac{z \times y = k}{y \times z = k}$

0. $| \times | = |$

1. $|| \times | = ||$ (por R_1)

2. $||| \times | = |||$ (por R_1)

3. $| \times ||| = |||$ (por R_2)

4. $|| \times ||| = ||||||$ (por R_1)

7.

PR

lenguaje: tiene dos símbolos '(' y ')'. Cualquier expresión es una fórmula.

Axioma: ()

Reglas: sean ϕ y ψ fórmulas de PR.

$\dfrac{\phi}{(\phi)}$ ADD $\qquad \dfrac{\phi}{\phi\phi}$ DOUBLE $\qquad \dfrac{\phi\,()\,\psi}{\phi\psi}$ OMIT

a) (1) $\dfrac{()}{((())())}$

0. ()
1. (()) → ADD
2. (())(()) → DOUBLE
3. $\underbrace{((())(}_{\phi}()\underbrace{))}_{\psi}$ → ADD
4. ((())()) → OMIT

b) $\dfrac{()}{(())()()()}$

0. ()
1. (()) → ADD
2. (())(()) → DOUBLE
3. $\underbrace{(())(())(())(}_{\phi}()\underbrace{)}_{\psi}$ → DOUBLE
4. $\underbrace{(())(())(}_{\phi}()\underbrace{)()}_{\psi}$ → OMIT
5. $\underbrace{(())(}_{\phi}()\underbrace{)()()}_{\psi}$ → OMIT
6. (())()()() → OMIT

C) $\dfrac{()}{()\,(()())\,()}$

0. ()
1. ()() → DOUBLE
2. (()()) → ADD
3. (()()) (()()) → DOUBLE
4. $\underbrace{(}_{\emptyset}\underbrace{()()) \; (()()) \; (()())(()())}_{\nu}$ → DOUBLE
5. $\underbrace{(}_{\emptyset}\underbrace{()) \; (()()) \; (()())(()())}_{\nu}$ → OMIT
6. $\underbrace{() \; (()()) \; (}_{\emptyset}()\underbrace{()) \; (()())}_{\nu}$ → OMIT
7. $\underbrace{() \; (()()) \; (}_{\emptyset}()\underbrace{) \; (()())}_{\nu}$ → OMIT
8. $\underbrace{() \; (()()) \; () \; (}_{\emptyset}()\underbrace{())}_{\nu}$ → OMIT
9. $\underbrace{() \; (()()) \; () \; (}_{\emptyset}\underbrace{())}_{\nu}$ → OMIT
10. $\underbrace{() \; (()())}_{\emptyset}()\underbrace{()}_{\nu}$ → OMIT
11. () (()()) () → OMIT

B) Todo teorema de PR tiene la propiedad de que la cantidad de paréntesis izquierdos es igual a la cantidad de paréntesis derechos, puesto que en las reglas siempre que se añaden o quitan paréntesis, se quita como tal una pareja de estos (derecho e izquierdo)

10.

EVEN $\mathbb{N} \neq 0$

Lenguaje: el único símbolo del sistema formal es 'I', cualquier expresión es una fórmula

Axioma: $||$

Regla: $\dfrac{\emptyset}{\emptyset ||}$ PILE

$\dfrac{\emptyset}{\emptyset ||}$

Axioma: $||$

$\{ i = k \mid k \text{ es par} \}$

PILE. $(i+2) = k$

Dem. 0. $||$
⋮
n.

como el axioma es par, por definición de par, si a un par le sumamos una cantidad par, seguirá siendo par.

Tomare el sistema formal como:

0. $||$ (PILE)

1. $||||$ (PILE)

4. $||||||$ (PILE)

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2(1+2+\cdots+n) = n(n+1)$$

$$A(n): 2+4+6\cdots+2n = n(n+1)$$

caso base: $A(1): 2 = 1(1+1)$ ✓

$2 = 2$

caso inductivo: $A(n+1): 2+4+\cdots+2n+2(n+1) = (n+1)(n+2)$

supONemos que se cumple la propiedad

$: n(n+1) + 2n + 2 = n^2+3n+2n$

$n^2+3n+2 = n^2+3n+2n$ ✓

como $A(n)$ es verdad y la secuencia de num | es la que se muestra en $A(n)$, entonces EVEN es decidible.

d) Cambie el axioma de EVEN por uno nuevo, resultando en un sistema formal ODD, de tal manera que los teoremas de ODD representen exactamente los números naturales impares.

El axioma para ODD, sería:

Axioma: |

Ya que, como aumenta de 2 en 2, entonces sería par y de esta misma forma si es par y le sumamos uno será impar.