Tarea N°6

Ejercicios 3.2

2 $F = \{p \mapsto (p \equiv q), q \mapsto (r \to s), r \mapsto false\}$

b) $(p \equiv r)[p, q, r := (p \equiv q), (r \to s), false]$

$((p \equiv q) \equiv false)$

d) $((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)))[p, q, r := (p \equiv q), (r \to s), false]$

$(((p \equiv q) \wedge (r \to s)) \vee ((\neg(p \equiv q)) \wedge (\neg(r \to s))))$

f) $((p \vee r) \leftarrow (p \wedge q))[p, q, r := (p \equiv q), (r \to s), false]$

$(((p \equiv q) \vee false) \leftarrow ((p \equiv q) \wedge (r \to s)))$

3, a) p

$F = \{p \mapsto true\}$
$\varphi = p$
$F(\varphi) = true$
$\models true$
$V(true) = T$ ✓

c) $((p \wedge (\neg q)) \to r)$

$F = \{p \mapsto true, q \mapsto true, r \mapsto true\}$

$\varphi = ((p \wedge (\neg q)) \to r)$

$F(\varphi) = ((true \wedge (\neg true)) \to true)$
$\models ((true \wedge (\neg true)) \to true)$
$V(((true \wedge (\neg true)) \to true)) = T$
$H_{\to}(H_{\wedge}(V(true), V(\neg true)), V(true))$
$H_{\to}(F, T) = T$
$T = T$ ✓

e) $(p \to (q \to p))$

$F = \{p \mapsto true, q \mapsto true\}$
$\varphi = (p \to (q \to p))$
$F(\varphi) = (true \to (true \to true))$
$V(true \to (true \to true)) = T$
$H_{\to}(V(true), H_{\to}(V(true), V(true)))$
$H_{\to}(T, T) = T$
$T = T$ ✓

g) $(\neg((r \wedge (r \leftarrow (p \vee s))) \equiv (\neg((p \rightarrow q) \vee (r \wedge (\neg r)))))) = \varphi$

$F = \{ p \mapsto true,\ q \mapsto true,\ r \mapsto true,\ s \mapsto true \}$

$F(\varphi) = (\neg((true \wedge (true \leftarrow (true \vee true))) \equiv (\neg((true \rightarrow true) \vee (true \wedge (\neg true))))))$

$\models (\neg(((true \wedge (true \leftarrow (true \vee true))) \equiv (\neg((true \rightarrow true) \vee (true \wedge (\neg true))))))$

$V((\neg((true \wedge (true \leftarrow (true \vee true))) \equiv (\neg((true \rightarrow true) \vee (true \wedge (\neg true))))))) = T$

$H_\neg(H_\equiv(H_\wedge(v(true), H_\leftarrow(v(true), H_\vee(v(true), v(true)))), H_\neg(((true \rightarrow true) \vee (true \wedge (\neg true))))))$

$H_\neg(H_\equiv(H_\wedge(T, H_\leftarrow(T, H_\vee(T,T))), H_\neg(H_\vee(H_\rightarrow(v(true), v(true)), H_\wedge(v(true), H_\neg(v(true)))))))$

$H_\neg(H_\equiv(H_\wedge(T,T), H_\neg(H_\vee(T, H_\wedge(T,F)))))$

$(H_\neg(H_\equiv(T, H_\neg(T))) = H_\neg(H_\equiv(T;F)) = H_\neg(F) = T$ ✓

5. a) $(\varphi[q := \gamma])[p := \psi] \neq (\varphi[p := \psi])[q := \gamma]$

$\varphi = (p \rightarrow q) \quad \gamma = (p \wedge q) \quad \psi = (r \vee s)$

$F = \{ q := (p \wedge q) \} \quad G = \{ p := (r \vee s) \}$

$F(\varphi) = (p \rightarrow (p \wedge q))$
$G(\varphi) = ((r \vee s) \rightarrow q)$

$(p \rightarrow (p \wedge q))[p := (r \vee s)] \neq ((r \vee s) \rightarrow q)[q := (p \wedge q)]$

$((r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)) \neq ((r \vee s) \rightarrow (p \wedge q))$

b) $\varphi[p, q := \psi, \gamma] \neq (\varphi[p := \psi])[q := \gamma]$.

$\varphi = (p \vee q) \quad \psi = (q \wedge s) \quad \gamma = (r \wedge t)$

$(p \vee q)[p, q := (q \wedge s), (r \wedge t)] \neq ((p \vee q)[p := (q \wedge s)])[q := (r \wedge t)]$

$((q \wedge s) \vee (r \wedge t)) \neq ((q \wedge s) \vee q)[q := (r \wedge t)]$

$((q \wedge s) \vee (r \wedge t)) \neq (((r \wedge t) \wedge s) \vee (r \wedge t))$

Ejercicios 3.2

1. $\varphi[p:=\psi]=\varphi$

$\varphi=(r\wedge s)$, $\psi=(p\vee q)$

$(r\wedge s)[p:=(p\vee q)]=(r\wedge s)=\varphi$

3. $\models(p\vee(\neg p))$

$\models(p\vee(\neg p))[p:=true]$

$\models(true\vee(\neg true))$

$V((true\vee(\neg true)))=T$

$H_\vee(v(true),H_\neg(v(true)))=T$

$H_\vee(T,H_\neg(T))=T$

$H_\vee(T,F)=T$

$T=T$ ✓

$\models(true\vee(\neg true))[true:=p]$

$\models(p\vee(\neg p))$

4. (a) $\Gamma\models\varphi$, entonces $\Gamma\models\varphi[p:=\psi]$

hay una v que hace satisfacible a Γ
y esa v hace $V(\varphi)=T$

$\models\varphi$
Por metateorema 3.7
$\models\varphi[p:=\psi]$

$V(\varphi[p:=\psi])=T$

$\Gamma\models\varphi[p:=\psi]$

5. a) si φ es satisfacible, entonces $\varphi[p:=\psi]$ es satisfacible

$\bar{v}(\varphi)=T$

si φ no contiene p entonces

$\varphi[p:=\psi]=\varphi$

$\bar{v}(\varphi[p:=\psi])=\bar{v}(\varphi)=T$

si φ contiene a p

$\bar{V}(\varphi) = T$

$\varphi[p := \psi]$

los valores posible que puede tomar p son T o F, lo mismo que pasa con ψ, los posibles valores de verdad son T o F, por tanto el sustituirlos no cambiaria su tabla de verdad.

b) si φ es insatisfacible, entonces $\varphi[p := \psi]$ es insatisfacible.

$V(\varphi) = F$

si φ no contiene a p

$\varphi[p := \psi] = \varphi$

$V(\varphi[p := \psi]) = V(\varphi) = F$

si φ contiene a p

$V(p)$ puede ser T o F, pero no se sabe cual valuación de p me hace $V(\varphi) = F$, por tanto no se puede aeirmar que $V(\varphi[p := \psi]) = F$, porque no se cual valor de ψ me hace insatisfacible a φ.

c) si $\varphi[p := \psi]$ es satisfacible, entonces φ es satisfacible

$\bar{V}(\varphi[p := \psi]) = T$

si φ no contiente p entonces

$\varphi = \varphi[p := \psi]$

$\bar{V}(\varphi) = \bar{V}(\varphi[p := \psi]) = T$

si φ contiene p

$\bar{V}(\varphi[p := \psi]) = T$

φ

los valores posibles que puede tomar p son T o F, igualmente para ψ, por tanto el sustituirlo NO cambia su tabla de verdad.

d) si $\varphi[p:=\psi]$ es insatisfacible, entonces φ es insatisfacible

$v(\varphi[p:=\psi]) = F$

si φ no contiene a p, entonces

$v(\varphi[p:=\psi]) = v(\varphi)$
$F = F$ ✓

si φ contiene a p

$v(\varphi[p:=\psi]) = F$

$V(\psi)$ puede ser T o F, pero no se sabe cual valuacion de ψ me hace $v(\varphi[p:=\psi]) = F$, por tanto no se puede afirmar que $v(\varphi) = F$, porque no se cual valor de p me hace insatisfacible a φ

Ejercicios 3.3

I. (1) $\{(\neg\varphi)\} \models ((\neg\varphi) \vee \psi)$

$v((\neg\varphi)) = T$ $\quad$ $v(((\neg\varphi) \vee \psi)) = T$

met. 2.23 $\quad$ reemplazo

$v(\varphi) = F$ $\quad$ $v(T \vee \psi) = T$

$v(\psi) = T$

$v(\psi) = F$

(2) $\models (((\neg\varphi) \vee \psi) \equiv (\varphi \to \psi))$

$((\neg\varphi) \vee \psi) = (\varphi \to \psi)$

$v((\neg\varphi) \vee \psi) = v(\varphi \to \psi) = T$ $\quad$ $v((\neg\varphi) \vee \psi) = v(\varphi \to \psi) = F$

$v(\neg\varphi) = v(\psi) = T$ $\quad$ • $v(\varphi) = v(\psi) = T$ $\quad$ $v(\neg\varphi) = v(\psi) = F$ $\quad$ • $v(\varphi) = T$ $v(\psi) = F$

$\to v(\varphi) = F$ $v(\psi) = T$ $\quad$ • $v(\varphi) = F$ $v(\psi) = T$

$v(\neg\varphi) = T$ $v(\psi) = F$ $\quad$ • $v(\varphi) = v(\psi) = F$ $\quad$ $\to v(\varphi) = T$ $v(\psi) = F$

$\to v(\varphi) = F$ $v(\psi) = F$

$v(\neg\varphi) = F$ $v(\psi) = T$

$\to v(\varphi) = T$ $v(\psi) = T$

9. $\models (\varphi[p := \psi] \equiv \varphi[p := \gamma])$, entonces $\models (\psi \equiv \gamma)$

• Si φ es una variable proposicional

$\varphi = p$ $\quad$ $\varphi[p := \psi] = p[p := \psi] = \psi$

$\varphi[p := \gamma] = p[p := \gamma] = \gamma$

$\models (\varphi[p := \psi] \equiv \varphi[p := \gamma]) = \models (\psi \equiv \gamma)$

• Si φ es una constante, $\varphi = true$

$\varphi[p := \psi] = true[p := \psi] = true$

$\varphi[p := \gamma] = true[p := \gamma] = true$

$\models (\varphi[p := \psi] \equiv \varphi[p := \gamma]) = \models (true \equiv true)$

igualmente para false.

• Si φ tiene un conectivo lógico $(\neg\varphi)$

• $F : \{p \mapsto \psi\}$ $G : \{p \mapsto \gamma\}$

$\bar{F}(\neg\varphi) = (\neg F(\varphi))$

$\bar{G}(\neg\varphi) = (\neg G(\varphi))$

$V((\neg F(\varphi)) \equiv (\neg G(\varphi))) = T$

$H_\neg(V(F(\varphi))) = H_\neg(V(G(\varphi)))$

$V(F(\varphi)) = V(G(\varphi))$

como $V(F(\varphi))$ depende de $V(\psi)$ y $V(G(\varphi))$ depende de $V(\gamma)$. entonces $V(\psi) = V(\gamma)$ y.

$\models (\psi \equiv \gamma)$

• Si φ tiene conectivo logico $\otimes$ donde $\otimes$ puede ser $\{\rightarrow, \leftarrow, \equiv, \not\equiv, \vee, \wedge\}$

$F : \{p \mapsto \psi\}$ $G : \{p \mapsto \gamma\}$

$V(F(\varphi)) = V(G(\varphi))$

$V(\alpha \otimes \beta) \doteq V(\delta \otimes \rho)$

$V(\alpha \otimes \beta) = T = V(\delta \otimes \rho) = T$

$V(\alpha) \otimes V(\beta) = V(\delta) \otimes V(\rho)$

$V(\alpha)$ y $V(\beta)$ dependen de $V(\psi)$, $V(\delta)$ y $V(\rho)$ dependen de $V(\gamma)$ entonces

$V(F(\varphi)) = V(G(\varphi))$

como $V(F(\varphi))$ depende de $V(\psi)$ y $V(G(\varphi))$ dependen de $V(\gamma)$. entonces $V(\psi) = V(\gamma)$ y

$\models (\psi \equiv \gamma)$