Definición 4.2

Sean ϕ, ψ, τ proposiciones de DS. El *conjunto de axiomas* de DS está dado por el siguiente esquema axiomático:

$(Ax1)$: $((\phi \equiv (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \equiv \psi) \equiv \tau))$

$(Ax2)$: $((\phi \equiv \psi) \equiv (\psi \equiv \phi))$

$(Ax3)$: $((\phi \equiv \mathit{true}) \equiv \phi)$

$(Ax4)$: $((\phi \vee (\psi \vee \tau)) \equiv ((\phi \vee \psi) \vee \tau))$

$(Ax5)$: $((\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi))$

$(Ax6)$: $((\phi \vee \mathit{false}) \equiv \phi)$

$(Ax7)$: $((\phi \vee \phi) \equiv \phi)$

$(Ax8)$: $((\phi \vee (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv (\phi \vee \tau)))$

Definición 4.14

Sean ϕ y ψ proposiciones DS. Los siguientes axiomas de DS definen la negación y la discrepancia:

$(Ax9)$: $((\neg\phi) \equiv (\phi \equiv \mathit{false}))$

$(Ax10)$: $((\phi \not\equiv \psi) \equiv ((\neg\phi) \equiv \psi))$

Definición 4.23

Sean ϕ y ψ proposiciones de DS. El siguiente axioma de DS define la conjunción:

$(Ax11)$: $((\phi \wedge \psi) \equiv (\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))))$

$(Ax12)$: $((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv \psi))$

$(Ax13)$: $((\phi \leftarrow \psi) \equiv (\psi \rightarrow \phi))$

Definición 4.4

Sean p una variable proposicional y ϕ, ψ, τ proposiciones. Las *reglas de inferencia* de DS son:

$$\frac{\psi \qquad (\psi \equiv \phi)}{\phi}\ \textsc{Ecuanimidad} \qquad\qquad \frac{(\psi \equiv \tau)}{(\phi[p := \psi] \equiv \phi[p := \tau])}\ \textsc{Leibniz}.$$

Nota 4.9

El Metateorema 4.7 justifica la *corrección* de las siguientes reglas de inferencia:

$$\frac{\psi \qquad (\phi \equiv \psi)}{\phi}\ \textsc{Ecuanimidad*} \qquad\qquad \frac{(\tau \equiv \psi)}{(\phi[p := \psi] \equiv \phi[p := \tau])}\ \textsc{Leibniz*}$$

Nota 4.11

El Metateorema 4.10 justifica la corrección de las siguientes reglas de inferencia:

$$\frac{(\phi \equiv \psi) \qquad (\psi \equiv \tau)}{(\phi \equiv \tau)}\ \textsc{Transitividad}$$

$$\frac{(\phi \equiv \mathit{true})}{\phi}\ \textsc{Identidad} \qquad\qquad \frac{\phi}{(\phi \equiv \mathit{true})}\ \textsc{Identidad}$$

Nota 4.13

El Metateorema 4.12 justifica la corrección de las siguientes reglas de inferencia:

$$\frac{(\phi \equiv (\psi \equiv \tau))}{((\phi \equiv \psi) \equiv \tau)}\ \textsc{Asociatividad} \qquad\qquad \frac{((\phi \equiv \psi) \equiv \tau)}{(\phi \equiv (\psi \equiv \tau))}\ \textsc{Asociatividad}$$

$$\frac{(\phi \equiv \psi)}{(\psi \equiv \phi)}\ \textsc{Conmutatividad}$$

Teorema 4.6

Para cualquier proposición ϕ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}}$ *true*.
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \equiv \phi) \equiv \mathit{true})$.
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv \phi)$.

Metateorema 4.7

Sean ϕ, ψ, τ proposiciones. Las siguientes afirmaciones sobre DS son ciertas:

1. Si $\vdash_{\mathsf{DS}} \psi$ y $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv \psi)$, entonces $\vdash_{\mathsf{DS}} \phi$.
2. Si $\vdash_{\mathsf{DS}} (\tau \equiv \psi)$, entonces $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi[p := \psi] \equiv \phi[p := \tau])$.

Metateorema 4.10

Sean ϕ, ψ, τ proposiciones. La siguientes afirmaciones sobre DS son ciertas:

1. Si $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv \psi)$ y $\vdash_{\mathsf{DS}} (\psi \equiv \tau)$, entonces $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv \tau)$.
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} \phi$ sii $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv \mathit{true})$.

Metateorema 4.12

Sean ϕ, ψ, τ proposiciones. Las siguientes afirmaciones sobre DS son ciertas:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv (\psi \equiv \tau))$ si y solo si $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \equiv \psi) \equiv \tau)$.
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \equiv \psi)$ si y solo si $\vdash_{\mathsf{DS}} (\psi \equiv \phi)$.

Teorema 4.15

Para cualesquiera proposiciones ϕ y ψ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\mathit{false} \equiv (\neg \mathit{true}))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\neg \mathit{false}) \equiv \mathit{true})$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\neg \mathit{false})$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\neg(\phi \equiv \psi)) \equiv ((\neg\phi) \equiv \psi))$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\neg\phi) \equiv \psi) \equiv (\phi \equiv (\neg\psi)))$
6. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\neg(\neg\phi)) \equiv \phi)$
7. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \equiv (\neg\phi)) \equiv \mathit{false})$

Teorema 4.16

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ y τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \not\equiv (\psi \not\equiv \tau)) \equiv ((\phi \not\equiv \psi) \not\equiv \tau))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \not\equiv \psi) \equiv (\psi \not\equiv \phi))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \not\equiv \mathit{false}) \equiv \phi)$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \not\equiv \phi) \equiv \mathit{false})$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv \phi)$

Teorema 4.19

Para cualesquiera proposiciones ϕ y ψ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \vee (\neg\phi))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \vee \mathit{true}) \equiv \mathit{true})$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \vee \mathit{true})$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \vee \psi) \equiv ((\phi \vee (\neg\psi)) \equiv \phi))$

Definición 4.20

Una *derivación* en DS es una secuencia finita de proposiciones $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ de DS tales que $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi_{k-1} \equiv \phi_k)$ para $0 < k \leq n$.

Metateorema 4.21

Sea $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ una derivación en DS. Entonces se tiene $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi_0 \equiv \phi_n)$.

Teorema 4.24

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ, τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \wedge \tau))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \phi))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge \mathit{true}) \equiv \phi)$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge \mathit{false}) \equiv \mathit{false})$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge \phi) \equiv \phi)$

Teorema 4.25

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ, τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\neg\phi)) \equiv \mathit{false})$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\neg(\phi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\phi) \vee (\neg\psi)))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\neg(\phi \vee \psi)) \equiv ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)))$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\psi \equiv \tau)) \equiv (((\phi \wedge \psi) \equiv (\phi \wedge \tau)) \equiv \phi))$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\psi \not\equiv \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \not\equiv (\phi \wedge \tau)))$
6. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\psi \vee \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \tau)))$
7. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \vee (\psi \wedge \tau)) \equiv ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \tau)))$

Teorema 4.28

Para cualesquiera proposiciones ϕ y ψ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to \psi) \equiv ((\neg\phi) \vee \psi))$.
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi))$.

Teorema 4.29

Para cualquier proposición ϕ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \to \mathit{true})$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\mathit{false} \to \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\mathit{true} \to \phi) \equiv \phi)$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to \mathit{false}) \equiv (\neg\phi))$

Teorema 4.30

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ, τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \to \psi) \equiv (\phi \to \tau)))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \vee \tau)) \equiv ((\phi \to \psi) \vee (\phi \to \tau)))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \wedge \tau)) \equiv ((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \tau)))$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \to \tau)) \equiv ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \tau)))$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \leftarrow \tau)) \equiv ((\phi \to \psi) \leftarrow (\phi \to \tau)))$

Teorema 4.31

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ, τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\neg\phi) \to (\neg\psi)) \equiv (\psi \to \phi))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\neg(\phi \to \psi)) \equiv (\phi \wedge (\neg\psi)))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \equiv \psi) \equiv ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)))$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \equiv \psi) \to (\phi \to \psi))$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \to \tau)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \to \tau))$
6. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \vee (\phi \to \psi))$
7. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \vee (\psi \to \phi)) \equiv (\psi \to \phi))$
8. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\phi \to \psi)) \equiv (\phi \wedge \psi))$
9. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge (\psi \to \phi)) \equiv \phi)$

Teorema 4.33

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ, τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \to \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \tau)) \to (\phi \to \tau))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \equiv \psi))$

Nota 4.34

Para cualesquiera proposiciones ϕ y ψ, si $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \to \psi)$, entonces se dice que ϕ *es tan débil como* ψ (o, equivalentemente, ψ *es tan fuerte como* ϕ).

Teorema 4.35

Para cualesquiera proposiciones ϕ y ψ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi \to (\phi \vee \psi))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge \psi) \to \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \vee \psi))$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \vee \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \equiv (\phi \equiv \psi))$
5. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \vee \psi) \to \tau) \equiv ((\phi \to \tau) \wedge (\psi \to \tau)))$
6. $\vdash_{\mathsf{DS}} ((\phi \to (\psi \wedge \tau)) \equiv ((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \tau)))$

Teorema 4.36

Para cualesquiera proposiciones ϕ, ψ, τ de DS:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \equiv \psi) \wedge (\psi \equiv \tau)) \rightarrow (\phi \equiv \tau))$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \equiv \psi) \wedge (\psi \rightarrow \tau)) \rightarrow (\phi \rightarrow \tau))$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}} (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \equiv \tau)) \rightarrow (\phi \rightarrow \tau))$

Definición 5.4

Una secuencia de proposiciones $\phi_0, \ldots, \phi_n$ de DS es:

1. Una *derivación (relajada) de debilitamiento* si y solo si $\vdash_{\mathsf{DS}} \phi_{k-1} \rightarrow \phi_k$ para cualquier $0 < k \leq n$.
2. Una *derivación (relajada) de fortalecimiento* si y solo si $\vdash_{\mathsf{DS}} \phi_{k-1} \leftarrow \phi_k$ para cualquier $0 < k \leq n$.

Metateorema 5.5

Sean $\phi_0, \ldots, \phi_n$ proposiciones de DS.

1. Si $\phi_0, \ldots, \phi_n$ es una derivación de debilitamiento, entonces $\vdash_{\mathsf{DS}} \phi_0 \rightarrow \phi_n$.
2. Si $\phi_0, \ldots, \phi_n$ es una derivación de fortalecimiento, entonces $\vdash_{\mathsf{DS}} \phi_0 \leftarrow \phi_n$.

Definición 5.7

Sea Γ un conjunto de proposiciones de DS. Una *demostración con suposiciones en* Γ es una secuencia de proposiciones $\phi_0, \ldots, \phi_n$ de DS tal que para $0 \leq k \leq n$ una de las siguientes condiciones es cierta:

1. ϕ_k es un axioma de DS,
2. $k > 0$ y ϕ_k es la conclusión de una regla de inferencia de DS cuyas premisas aparecen en la secuencia $\phi_0, \ldots, \phi_{k-1}$, o
3. $\phi_k \in \Gamma$.

Si $\phi_0, \ldots, \phi_n$ es una demostración con suposiciones en Γ, entonces se dice que ϕ_n es un *teorema de* Γ *en* DS, lo cual se escribe como

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi_n.$$

METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN. El Metateorema de la Deducción formaliza y justifica una técnica de demostración muy común en la práctica de la informática y de las matemáticas conocida como la técnica de demostración por suposición del antecedente. El Metateorema de la Deducción establece que para demostrar una implicación lógica basta con construir una demostración del consecuente a partir de la información del antecedente.

Metateorema 5.9

Sean ϕ, ψ proposiciones de DS y Γ un conjunto de proposiciones de DS:

$$\text{si} \quad \Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathsf{DS}} \phi, \quad \text{entonces} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \rightarrow \phi.$$

El Metateorema de la Deducción establece que si una proposición ϕ se puede demostrar a partir de un conjunto de suposiciones $\Gamma \cup \{\psi\}$, entonces la implicación $\psi \rightarrow \phi$ se puede demostrar a partir de Γ. En el caso especial cuando $\Gamma = \{\}$, el metateorema de la deducción establece que si $\{\psi\} \vdash_{\mathsf{DS}} \phi$, entonces $\vdash_{\mathsf{DS}} \psi \rightarrow \phi$. Note que $\{\psi\} \vdash_{\mathsf{DS}} \phi$ es equivalente a decir que se demuestra ϕ suponiendo ψ como "axioma adicional".

Metateorema 5.10

Sean ϕ, ψ proposiciones de DS y Γ un conjunto de proposiciones de DS:

$$\text{si} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \rightarrow \phi, \quad \text{entonces} \quad \Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathsf{DS}} \phi.$$

Metateorema 5.11

Sea Γ un conjunto de proposiciones de DS y ϕ una proposición de DS.

Coherencia: Si $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

Completitud: Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi$.

En particular, si $\Gamma = \{\}$, entonces:

$$\vdash_{\mathsf{DS}} \phi \quad \text{sii} \quad \models \phi.$$

EL METATEOREMA DE COHERENCIA Y COMPLETITUD establece que analizar una proposición con métodos semánticos o con métodos deductivos en DS es igualmente potente. Coherencia significa que todo teorema de Γ es una consecuencia tautológica de Γ; completitud siginifica que para cualquier consecuencia tautológica de Γ hay una demostración en DS con suposiciones en Γ. En particular, cuando el conjunto de suposiciones Γ es vacío, la coherencia indica que todo teorema es una tautología y la completitud indica que toda tautología es teorema.

Metateorema 5.12

Sean Γ una colección de proposiciones y ϕ, ψ proposiciones:

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \to \phi \qquad \text{sii} \qquad \Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathsf{DS}} \phi.$$

Metateorema 5.13

Sean Γ un conjunto de proposiciones y ϕ, ψ proposiciones:

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \equiv \psi \qquad \text{sii} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \to \psi \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \to \phi.$$

Metateorema 5.14

Sean Γ un conjunto de proposiciones y ϕ, ψ proposiciones:

1. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \neg\phi \to \mathit{false}.$
2. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \to \phi \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \wedge \neg\phi \to \mathit{false}.$

Nota 5.15

Observe que en DS una contradicción puede representarse como $\phi \equiv \neg\phi$ o $\phi \wedge \neg\phi$, para cualquier proposición ϕ.

Metateorema 5.16

Sean Γ un conjunto de proposiciones y ϕ, ψ proposiciones:

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi \to \phi \qquad \text{sii} \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \neg\phi \to \neg\psi.$$

Metateorema 5.17

Sean Γ un conjunto de proposiciones y $\phi, \phi_0, \phi_1, \psi, \psi_0, \psi_1$ proposiciones:

1. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \to \psi_0 \vee \psi_1$ sii $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \wedge \neg\psi_1 \to \psi_0$.
2. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi_0 \wedge \phi_1 \to \psi$ sii $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi_0 \to \psi \vee \neg\phi_1$.
3. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi_0 \wedge \phi_1 \to \psi_0 \vee \psi_1$ sii $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi_0 \wedge \neg\psi_1 \to \psi_0 \vee \neg\phi_1$.

Metateorema 5.18

Sean Γ una colección de proposiciones y ϕ una proposición:

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi[p := \mathit{true}] \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi[p := \mathit{false}]\,.$$

El Metateorema 5.18 está basado en una propiedad de la lógica proposicional conocida como la *Regla de Shannon*.

Teorema 5.19

Sean p una variable proposicional y ϕ una proposición:

$$\vdash_{\mathsf{DS}} \phi \equiv (p \to \phi[p := \mathit{true}]) \wedge (\neg p \to \phi[p := \mathit{false}]).$$

Definición 5.20

Sean $\phi_0, \ldots, \phi_n$ proposiciones:

- La expresión $\bigvee_{i=0}^{n} \phi_i$, llamada *disyunción generalizada* (o *disyuntoria*), abrevia la proposición

  $$\phi_0 \vee \cdots \vee \phi_n.$$

- La expresión $\bigwedge_{i=0}^{n} \phi_i$, llamada *conjunción generalizada* (o *conjuntoria*), abrevia la proposición

  $$\phi_0 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

Metateorema 5.21

Sean Γ una colección de proposiciones y $\phi, \psi_0, \ldots, \psi_n$ proposiciones. Si

1. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \bigvee_{i=0}^{n} \psi_i$ y
2. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi_i \to \phi$, para cada $0 \leq i \leq n$,

entonces $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi$.

Metateorema 5.22

Sean Γ una colección de proposiciones y $\phi, \psi_0, \ldots, \psi_n$ proposiciones:

1. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \left(\bigvee_{i=0}^{n} \psi_i\right) \to \phi$ sii $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \psi_i \to \phi$, para cada $0 \leq i \leq n$.
2. $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \to \left(\bigwedge_{i=0}^{n} \psi_i\right)$ sii $\Gamma \vdash_{\mathsf{DS}} \phi \to \psi_i$, para cada $0 \leq i \leq n$.

Definición 4.20

Una *derivación* en DS es una secuencia finita de proposiciones $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ de DS tales que $\vdash_{\mathsf{DS}} (\phi_{k-1} \equiv \phi_k)$ para $0 < k \leq n$.

Definición 7.5

Sean x una variable, t un término y ϕ, ψ, τ fórmulas. El *conjunto de axiomas* de DS($\mathcal{L}$) está dado por el siguiente esquema axiomático:

$(Ax\cdot)$: Cualquier axioma de DS.

$(Bx1)$: $(\forall x\, \phi) \equiv \phi$, si x no aparece libre en ϕ.

$(Bx2)$: $\phi \vee (\forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\phi \vee \psi)$, si x no aparece libre en ϕ.

$(Bx3)$: $(\forall x\, \phi) \wedge (\forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\phi \wedge \psi)$.

$(Bx4)$: $(\forall x\, \phi) \to \phi[x := t]$, si t es libre para x en ϕ.

Definición 7.6

Sean x una variable, p un símbolo de predicado con aridad 0 y ϕ, ψ, τ fórmulas. Las reglas de inferencia de DS($\mathcal{L}$) son:

$$\frac{\psi \qquad \psi \equiv \phi}{\phi}\ \textsc{Ecuanimidad}$$

$$\frac{\psi \equiv \tau}{\phi[p := \psi] \equiv \phi[p := \tau]}\ \textsc{Leibniz} \qquad\qquad \frac{\phi}{\forall x\, \phi}\ \textsc{Generalización}$$

Teorema 7.8

Para cualquier variable x y fórmula ϕ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, true \equiv true$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, false \equiv false$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, \forall x\, \phi \equiv \forall x\, \phi$

Teorema 7.9

Para cualesquiera variable x y fórmulas ϕ, ψ, τ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi : \phi) \equiv (\forall x \mid: \neg\psi \vee \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid: \psi \wedge \tau \to \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \wedge \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \tau \to \phi)$

Teorema 7.10

Para cualesquiera variable x y fórmulas ϕ, ψ, τ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, (\psi \to \phi) \to (\forall x\, \psi \to \forall x\, \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, (\psi \equiv \phi) \to (\forall x\, \psi \equiv \forall x\, \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \tau : \psi \to \phi) \to ((\forall x \mid \tau : \psi) \to (\forall x \mid \tau : \phi))$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \tau : \psi \equiv \phi) \to ((\forall x \mid \tau : \psi) \equiv (\forall x \mid \tau : \phi))$

Teorema 7.11

Sean x una variable y ϕ, ψ fórmulas. Si x no aparece libre en ψ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \psi \wedge \forall x\, \phi \equiv \forall x\, (\psi \wedge \phi)$

2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \psi \rightarrow \forall x\, \phi \equiv \forall x\, (\psi \rightarrow \phi)$

Teorema 7.12

Para cualesquiera variables x e y, y fórmulas ϕ, ψ, τ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \mathit{false} : \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\forall x \mid \psi \vee \tau : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \phi) \wedge (\forall x \mid \tau : \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, \phi \equiv \forall y\, (\phi[x := y])$, si y es libre para x en ϕ.
4. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, \forall y\, \phi \equiv \forall y\, \forall x\, \phi$.

Definición 7.13

Sea ϕ una fórmula y x una variable. El siguiente axioma de $\mathsf{DS}(\mathcal{L})$ define la cuantificación existencial:

$(Bx5)$: $\exists x\, \phi \equiv \neg \forall x\, \neg \phi$.

Teorema 7.14

Para cualquier variable x y fórmula ϕ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, true \equiv true$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, false \equiv false$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, \exists x\, \phi \equiv \exists x\, \phi$

Teorema 7.15

Sean x una variable, t un término y ϕ una fórmula. Si t es libre para x en ϕ:

$$\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \phi[x := t] \to \exists x\, \phi.$$

Teorema 7.16

Para cualesquiera variable x y fórmulas ϕ, ψ, τ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, (\psi \to \phi) \to (\exists x\, \psi \to \exists x\, \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, (\psi \equiv \phi) \to (\exists x\, \psi \equiv \exists x\, \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \tau : \psi \to \phi) \to ((\exists x \mid \tau : \psi) \to (\exists x \mid \tau : \phi))$
4. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \tau : \psi \equiv \phi) \to ((\exists x \mid \tau : \psi) \equiv (\exists x \mid \tau : \phi))$

Teorema 7.17

Sean x una variable y ϕ, ψ fórmulas. Si x no aparece libre en ψ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \psi \vee \exists x\, \phi \equiv \exists x\, (\psi \vee \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \psi \to \exists x\, \phi \equiv \exists x\, (\psi \to \phi)$

Teorema 7.18

Para cualesquiera variables x e y, término t y fórmulas ϕ, ψ, τ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \mathit{false} : \phi) \equiv \mathit{false}$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} (\exists x \mid \psi \vee \tau : \phi) \equiv (\exists x \mid \psi : \phi) \vee (\exists x \mid \tau : \phi)$
3. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, \phi \equiv \exists y\, (\phi[x := y])$, si y es libre para x en ϕ.
4. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, \exists y\, \phi \equiv \exists y\, \exists x\, \phi$.

Teorema 7.19

Sean x una variable y ϕ, ψ fórmulas. Si x no aparece libre en ϕ:

1. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \forall x\, \psi \to \phi \equiv \exists x\, (\psi \to \phi)$
2. $\vdash_{\mathsf{DS}(\mathcal{L})} \exists x\, \psi \to \phi \equiv \forall x\, (\psi \to \phi)$