Ejercicios 2.3

1.

b) $((\varphi \equiv \psi) \equiv (\psi \equiv \varphi))$

$v(((\varphi \equiv \psi) \equiv (\psi \equiv \varphi))) = T$
$H_{\equiv}(v((\varphi \equiv \psi)), v((\psi \equiv \varphi))) = T$

(1) $v((\varphi \equiv \psi)) = T$ $\quad$ $v((\psi \equiv \varphi)) = T$

$H_{\equiv}(v(\varphi), v(\psi)) = T$ $\quad$ $H_{\equiv}(v(\psi), v(\varphi)) = T$

Por definición $\quad$ Por definición
$v(\varphi) = v(\psi)$ $\quad$ $v(\psi) = v(\varphi)$

(2) $v((\varphi \equiv \psi)) = F$ $\quad$ $v((\psi \equiv \varphi)) = F$

$H_{\equiv}(v(\varphi), v(\psi)) = F$ $\quad$ $H_{\equiv}(v(\psi), v(\varphi)) = F$

Por definición $\quad$ Por definición
$v(\varphi) \neq v(\psi)$ $\quad$ $v(\psi) \neq v(\varphi)$

valores de φ y ψ para $\models ((\varphi \equiv \psi) \equiv (\psi \equiv \varphi))$

$v(\varphi) = v(\psi)$
$v(\varphi) \neq v(\psi)$

c) $((\varphi \equiv true) \equiv \varphi)$

$v(((\varphi \equiv true) \equiv \varphi)) = T$
$H_{\equiv}(v((\varphi \equiv true)), v(\varphi)) = T$

(1) $v((\varphi \equiv true)) = T$ $\quad$ $v(\varphi) = T$
metateorema 2.23 ($\equiv$)
Por def $v(true) = T$
$v(\varphi) = v(true) = T$

(2) $v((\varphi \equiv true)) = F$ $\quad$ $v(\varphi) = F$
metateorema 2.23 ($\equiv$)

$v(\varphi) \neq v(true)$
Por def. $v(true) = T$ entonces
$v(\varphi) = F$

valores de φ para $\models ((\varphi \equiv true) \equiv \varphi)$

$v(\varphi) = T$
$v(\varphi) = F$

f) $((\varphi \vee false) \equiv \varphi)$

$v(((\varphi \vee false) \equiv \varphi)) = T$

$H_{\equiv}(v((\varphi \vee false)), v(\varphi)) = T$

(1) $v((\varphi \vee false)) = T$ $\quad v(\varphi) = T$

$H_{\vee}(v(\varphi), v(false))$

Por definición $v(false) = F$

$H_{\vee}(v(\varphi), F) = T$

$v(\varphi) = T$

(2) $v((\varphi \vee false)) = F$ $\quad v(\varphi) = F$

$H_{\vee}(v(\varphi), v(false)) = F$

$H_{\vee}(v(\varphi), F) = F$

$v(\varphi) = F$

Valores de φ para $\models ((\varphi \vee false) \equiv \varphi)$

$v(\varphi) = T$

$v(\varphi) = F$

g) $((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi)$

$v(((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi)) = T$

$H_{\equiv}(v((\varphi \vee \varphi)); v(\varphi)) = T$

(1) $v((\varphi \vee \varphi)) = T$ $\quad v(\varphi) = T$

metateorema 2.23 ($\vee$)

$v(\varphi) = T$

(2) $v((\varphi \vee \varphi)) = F$ $\quad v(\varphi) = F$

metateorema 2.23 ($\vee$)

$v(\varphi) = F$

Valores de φ para $\models ((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi)$

$v(\varphi) = T$

$v(\varphi) = F$

k) $(\neg(\varphi \wedge (\neg \varphi)))$

$V((\neg(\varphi \wedge (\neg\varphi)))) = F$

$H_\neg(V((\varphi \wedge (\neg\varphi)))) = T$

$V((\varphi \wedge (\neg\varphi))) = F$

$H_\wedge(V(\varphi), V((\neg\varphi))) = F$

$V(\varphi) \neq V((\neg\varphi))$
$V(\varphi) \neq H_\neg(V(\varphi))$
$V(\varphi) = V(\varphi)$

Valores de φ para $\models (\neg(\varphi \wedge (\neg\varphi)))$

$V(\varphi) = T$
$V(\varphi) = F$

l) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

$V((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))) = F$
$H_\rightarrow(V(\varphi), V((\psi \rightarrow \varphi))) = T$

(1) $V(\varphi) = T$

$V((\psi \rightarrow \varphi)) = T$
por reemplazo
$H_\rightarrow(V(\psi), V(\varphi)) = T$
$H_\rightarrow(V(\psi), T) = T$
$V(\psi) = F$
$V(\psi) = T$

(2) $V(\varphi) = F$

$V((\psi \rightarrow \varphi)) = T$
por reemplazo
$H_\rightarrow(V(\psi), V(\varphi)) = T$
$H_\rightarrow(V(\psi), F) = T.$
$V(\psi) = F$

(3) $V(\varphi) = F$

$V((\psi \rightarrow \varphi)) = F$
por reemplazo
$H_\rightarrow(V(\psi), V(\varphi)) = F$
$H_\rightarrow(V(\psi), F) = F$
$V(\psi) = T$

Valores de φ y ψ para $\models ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

$V(\varphi) = T$ y $V(\psi) = F$ o $V(\psi) = T$
$V(\varphi) = F$ y $V(\psi) = F$ o $V(\psi) = T$

n) $((\varphi \to \psi) \equiv ((\neg\psi) \to (\neg\varphi)))$

$V(((\varphi \to \psi) \equiv ((\neg\psi) \to (\neg\varphi)))) = T$

$H_{\equiv}(V((\varphi \to \psi)), V(((\neg\psi) \to (\neg\varphi)))) = T$

(1) $V((\varphi \to \psi)) = T$

$H_{\to}(V(\varphi), V(\psi)) = T$

$V(\varphi) = V(\psi) = T$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = T$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = F$

$V(((\neg\psi) \to (\neg\varphi))) = T$

$H_{\to}(V((\neg\psi)), V((\neg\varphi))) = T$

$H_{\neg}(V(\psi)) = H_{\neg}(V(\varphi)) = T$
$H_{\neg}(V(\psi)) = F \quad H_{\neg}(V(\varphi)) = T$
$V(\psi) = T \quad V(\varphi) = F$
$H_{\neg}(V(\psi)) = H_{\neg}(V(\varphi)) = F$
$V(\psi) = V(\varphi) = T$
$V(\psi) = V(\varphi) = F$

(2) $V((\varphi \to \psi)) = F$

$H_{\to}(V(\varphi), V(\psi)) = F$

$V(\varphi) = T \quad V(\psi) = F$

$V(((\neg\psi) \to (\neg\varphi))) = T$

$V(\psi) = V(\varphi) = T$
$V(\psi) = V(\varphi) = F$
$V(\psi) = T \quad V(\varphi) = F$

(3) $V((\varphi \to \psi)) = F$

$H_{\to}(V(\varphi), V(\psi)) = F$

$V(\varphi) = T \quad V(\psi) = F$

$V(((\neg\psi) \to (\neg\varphi))) = F$

$H_{\neg}(V(\psi)) = T \quad H_{\neg}(V(\varphi)) = F$
$V(\psi) = F \quad V(\varphi) = T$

valores de φ y ψ para $\models ((\varphi \to \psi) \equiv ((\neg\psi) \to (\neg\varphi)))$

$V(\varphi) = V(\psi) = T$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = T$
$V(\varphi) = T \quad V(\psi) = F$
$V(\varphi) = V(\psi) = F$

2. b) $((\neg p) \vee q)$

p	q	$(\neg p)$	$((\neg p) \vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	F	F

Es satisfacible pero no tautología.

d) $(\neg(p \wedge (\neg q)))$

p	q	$(\neg q)$	$(p \wedge (\neg q))$	$(\neg(p \wedge (\neg q)))$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

Es satisfacible pero no tautología.

5. (1) $((p \wedge false) \wedge q)$

p	q	false	$(p \wedge false)$	$((p \wedge false) \wedge q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

(2) $(\neg((p \to q) \equiv (q \leftarrow p)))$

p	q	$(p \to q)$	$(q \leftarrow p)$	$((p \to q) \equiv (q \leftarrow p))$	$(\neg((p \to q) \equiv (q \leftarrow p)))$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	F

(3) $(\neg((p \to q) \vee p))$

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \vee p)$	$(\neg((p \to q) \vee p))$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

6. b) φ tiene a false como único conectivo lógico

$\varphi = false$

$V(\varphi) = V(false) = F$

Por tanto φ no es una tautología

c) φ tiene a $\equiv$ como único conectivo lógico :

$\varphi = (\psi \equiv \gamma)$

Por metateorema 2.23 ($\equiv$)

Si $V(\psi) \neq V(\gamma)$ entonces $V(\varphi) = F$

d) φ tiene a $\not\equiv$ como único conectivo lógico

$\varphi = (\psi \not\equiv \gamma)$

Por metateorema 2.23 ($\not\equiv$), si $V(\psi) = V(\gamma)$ entonces $V(\varphi) = F$

g) φ tiene a $\rightarrow$ como único conectivo lógico

$\varphi = (\psi \rightarrow \gamma)$

Por metateorema 2.23($\rightarrow$)

Si $V(\psi) = T$ y $V(\gamma) = F$ entonces $V(\varphi) = F$

8. a) Si $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ y $\models (\psi \rightarrow \gamma)$, entonces $\models (\varphi \rightarrow \gamma)$

$\models (\varphi \rightarrow \psi)$

$V((\varphi \rightarrow \psi)) = T$
$H_{\rightarrow}(V(\varphi), V(\psi))$

$V(\varphi) = V(\psi) = T$
$V(\varphi) = V(\psi) = F$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = T$

$\models (\psi \rightarrow \gamma)$

$V((\psi \rightarrow \gamma)) = T$
$H_{\rightarrow}(V(\psi), V(\gamma))$

$V(\psi) = V(\gamma) = T$
$V(\psi) = V(\gamma) = F$
$V(\psi) = F \quad V(\gamma) = T$

$\models (\varphi \rightarrow \gamma)$

$V((\varphi \rightarrow \gamma)) = T$
$H_{\rightarrow}(V(\varphi), V(\gamma))$

$V(\varphi) = V(\gamma) = F$
$V(\varphi) = V(\gamma) = T$
$V(\varphi) = F \quad V(\gamma) = T$

+ Valores de φ, ψ y γ :

$V(\varphi) = V(\psi) = V(\gamma) = T$
$V(\varphi) = V(\psi) = V(\gamma) = F$
$V(\varphi) = V(\psi) = F \quad V(\gamma) = T$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = V(\gamma) = T$

b) Si $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ y $\models \varphi$, entonces $\models \psi$

$\models (\varphi \rightarrow \psi)$
$V((\varphi \rightarrow \psi)) = T$

$\models \varphi$
$V(\varphi) = T$

$\models \psi$
$V(\psi) = T$

Por reemplazo
$H_{\rightarrow}(V(\varphi), V(\psi)) = T$
$H_{\rightarrow}(T, V(\psi)) = T$
$V(\psi) = T$

c) Si $\models (\varphi \to \psi)$ y $\models (\psi \equiv \gamma)$, entonces $\models (\varphi \to \gamma)$

$\models (\varphi \to \psi)$
$V((\varphi \to \psi)) = T$
$H_{\to}(V(\varphi), V(\psi)) = T$

$V(\varphi) = V(\psi) = T$
$V(\varphi) = V(\psi) = F$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = T$

$\models (\psi \equiv \gamma)$
$V((\psi \equiv \gamma)) = T$
$H_{=}(V(\psi), V(\gamma)) = T$

$V(\psi) = V(\gamma) = T$
$V(\psi) = V(\gamma) = F$

$\models (\varphi \to \gamma)$
$V((\varphi \to \gamma)) = T$
$H_{\to}(V(\varphi), V(\gamma)) = T$

$V(\varphi) = V(\gamma) = T$
$V(\varphi) = V(\gamma) = F$
$V(\varphi) = F \quad V(\gamma) = T$

d) Si $\models (\varphi \equiv \psi)$ y $\models (\psi \to \gamma)$, entonces $\models (\varphi \to \gamma)$

$\models (\varphi \equiv \psi)$
$V((\varphi \equiv \psi)) = T$
metateorema 2.23 (≡)
$V(\varphi) = V(\psi)$

$\models (\psi \to \gamma)$
$V((\psi \to \gamma)) = T$
$H_{\to}(V(\psi), V(\gamma)) = T$

$V(\psi) = V(\gamma) = T$
$V(\psi) = V(\gamma) = F$
$V(\psi) = F \quad V(\gamma) = T$

$\models (\varphi \to \gamma)$
$V((\varphi \to \gamma)) = T$
$H_{\to}(V(\varphi), V(\gamma)) = T$

$V(\varphi) = V(\gamma) = T$
$V(\varphi) = V(\gamma) = F$
$V(\varphi) = F \quad V(\gamma) = T$

9. a) φ es insatisfacible sii $\models (\varphi \equiv false)$

(1) Si φ es insatisfacible
entonces
$V(\varphi) = F$

$\models (\varphi \equiv false)$
$V((\varphi \equiv false)) = T$
por reemplazo
$H_{=}(V(\varphi), V(false)) = T$
por definición $V(false) = F$
$H_{\equiv}(F, F) = T$

(2) $\models (\varphi \equiv false)$
$V((\varphi \equiv false)) = T$
metateorema 2.23 (≡)
$V(\varphi) = V(false)$
$V(false) = F$
$V(\varphi) = F$

Si $V(\varphi) = F$, entonces φ es insatisfacible

b) φ es insatisfacible sii $\models (\neg \varphi)$

(1) Si φ es insatisfacible
$V(\varphi) = F$

$\models (\neg\varphi)$
$V((\neg\varphi)) = T$
metateorema 2.23 (¬)
$V(\varphi) = F$

(1) $\models (\neg\varphi)$
$V((\neg\varphi)) = T$
metateorema 2.23 (¬)
$V(\varphi) = F$

Si $V(\varphi) = F$, entonces φ es insatisfacible

10. a) $\models (\varphi \equiv \psi)$ sii $\models \varphi$ y $\models \psi$

(1) $\models (\varphi \equiv \psi)$
$V((\varphi \equiv \psi)) = T$
metateorema 2.23 ($\equiv$)
$V(\varphi) = V(\psi)$

$\models \varphi$
$V(\varphi) = T$

$\models \psi$
$V(\psi) = T$

(2) $\models \varphi$ y $\models \psi$

$V(\varphi) = T$ $V(\psi) = T$
$V(\varphi) = V(\psi) = T$

$\models (\varphi \equiv \psi)$
$V((\varphi \equiv \psi)) = T$
metateorema 2.23 ($\equiv$)
$V(\varphi) = V(\psi)$

Ejercicios 2.4

1. c) $\{\varphi\} \models (\varphi \vee \psi)$

Por definicion φ es satisfacible y $(\varphi \vee \psi)$ también
$V(\varphi) = T$
$V((\varphi \vee \psi)) = T$
$H_\vee(V(\varphi), V(\psi)) = T$
por reemplazo
$H_\vee(T, V(\psi)) = T$

$V(\psi) = T$ $V(\psi) = F$

6. a) $\Gamma \models (\varphi \vee \psi)$ sii $\Gamma \models \varphi$ o $\Gamma \models \psi$

Por definición Γ es satisfacible y $(\varphi \vee \psi)$ también

(1) $V((\varphi \vee \psi)) = T$
Por metateorema 2.23 ($\vee$)
$V(\varphi) = V(\psi) = T$
$V(\varphi) = F$ $V(\psi) = T$
$V(\varphi) = T$ $V(\psi) = F$

$\Gamma \models \varphi$ o $\Gamma \models \psi$
$V(\varphi) = T$ $V(\psi) = T$

(2) Por definición φ y ψ son satisfacibles

$\models \varphi$ $\models \psi$
$V(\varphi) = T$ $V(\psi) = T$

$V((\varphi \vee \psi)) = T$
por reemplazo
$H_\vee(V(\varphi), V(\psi)) = T$
$H_\vee(T, T) = T$

c) $\Gamma \models (\varphi \to \psi)$ sii $\Gamma \not\models \varphi$ o $\Gamma \models \psi$

Por definición Γ es satisfacible y $(\varphi \to \psi)$

(1) $V((\varphi \to \psi)) = T$ | $\Gamma \not\models \varphi$ | $\Gamma \models \psi$
metateorema 2.23 $(\to)$ | $V(\varphi) = F$ | $V(\psi) = T$
$V(\varphi) = V(\psi)$
$V(\varphi) = F \quad V(\psi) = T$

(2) $\Gamma \not\models \varphi$ | $\Gamma \models \psi$ | $\Gamma \models (\varphi \to \psi)$
$V(\varphi) = F$ | $V(\psi) = T$

Por reemplazo

$H_{\to}(V(\varphi), V(\psi))$
$H_{\to}(F, T) = T$

d) $\Gamma \not\models (\varphi \vee \psi)$ sii $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \not\models \psi$

(1) Por definición $(\varphi \vee \psi)$ es insatisfacible

$V((\varphi \vee \psi)) = F$ | $\Gamma \not\models \varphi$ | $\Gamma \not\models \psi$
meta teorema 2.23 $(\vee)$
$V(\varphi) = V(\psi) = F$ | $V(\varphi) = F$ | $V(\psi) = F$

(2) Por definición φ y ψ son insatisfacibles

$\Gamma \not\models \varphi$ | $\Gamma \not\models \psi$ | $\Gamma \not\models (\varphi \vee \psi)$
$V(\varphi) = F$ | $V(\psi) = F$
Por reemplazo
$H_{\vee}(V(\varphi), V(\psi)) = F$
$H_{\vee}(F, F) = F$

7. a) si $\models \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

Por metateorema 2.34

Por definición Γ es satisfacible y φ también

$\Gamma \models \varphi$ | Suponemos $\models \varphi$, entonces

$V(\varphi) = T$ | $V(\varphi) = T$ y Γ es satisfacible

b) si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \models \varphi$

por definición Γ es satisfacible
$V(\varphi) = T$
como Γ es satisfacible, pero Γ es un subconjunto propio de Δ, entonces no se puede afirmar que:

$\Delta \models \varphi$

ii. a) $(\varphi \equiv \psi), (\neg\varphi), (\neg\psi)$

$\{(\varphi \equiv \psi), (\neg\varphi)\} \models (\neg\psi)$

$V((\neg\psi)) = T$ $\quad$ $V((\neg\varphi)) = T$

metateorema 2.23 ($\neg$) $\quad$ metateorema 2.23 ($\neg$)

$V(\psi) = F$ $\quad$ $V(\varphi) = F$

Por reemplazo

$H_{\equiv}(V(\varphi), V(\psi))$

$H_{\equiv}(F, F)$ $\quad$ Argumento es valido

T

b) $(\varphi \to \psi), (\neg\psi), (\neg\varphi)$

$\{(\varphi \to \psi), (\neg\psi)\} \models (\neg\varphi)$

$V((\neg\varphi)) = T$ $\quad$ $V((\neg\psi)) = T$

metateorema 2.23 ($\neg$) $\quad$ metateorema 2.23 ($\neg$)

$V(\varphi) = F$ $\quad$ $V(\psi) = F$

Por reemplazo

$H_{\to}(V(\varphi), V(\psi))$

$H_{\to}(F, F)$ $\quad$ Argumento es valido

T

c) $(\varphi \lor \psi), (\neg\varphi), \psi$

$\{(\varphi \lor \psi), (\neg\varphi)\} \models \psi$

$V(\psi) = T$ $\quad$ $V((\neg\varphi)) = T$

metateorema 2.23 ($\neg$)

$V(\varphi) = F$

Por reemplazo

$H_{\lor}(V(\varphi), V(\psi))$

Argumento es valido

$H_{\lor}(F, T)$

T

10.

a) Si $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \subset \Delta$, entonces $\Delta \not\models \varphi$

suponemos $\Gamma \not\models \varphi$

$V(\Gamma) = T$, $V(\varphi) = F$

$\Gamma \subset \Delta$

Γ es satisfacible, pero los elementos de Γ son algunos de los de Δ, por tanto no se puede afirmar que:

$$\Delta \not\models \varphi$$