Tarea N°7

ejercicios 3.4

7. Sean $\Phi : \varphi_0, \ldots, \varphi_n$ una secuencia de proposiciones y v una valuación. Demuestre o refute:

a) $v(oper(\Phi, \rightarrow, n)) = T$ sii $v(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq n$

$Q(n) = v(oper(\Phi, \rightarrow, n)) = T$ sii $v(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq n$

Caso base $n=0$

$Q(0) = v(oper(\Phi, \rightarrow, 0)) = T$ sii $v(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq 0$

- $v(oper(\Phi, \rightarrow, 0)) = T$ entonces $v(\varphi_j) = T$ para agún $0 \leq j \leq 0$

  $v(oper(\Phi, \rightarrow, 0)) = v(\varphi_0) = T$ <por definición>

  $0 \leq j \leq 0$ entonces $j = 0$

  $v(\varphi_j) = v(\varphi_0) = T$ ✓

- $v(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq 0$ entonces $v(oper(\Phi, \rightarrow, 0)) = T$

  $0 \leq j \leq 0$ entonces $j = 0$

  $v(\varphi_j) = v(\varphi_0) = T$

  <por definición> $v(oper(\Phi, \rightarrow, 0)) = v(\varphi_0) = T$
  <por reemplazo> $T = T$
  T ✓

Se supone $Q(n)$
Caso inductivo $n = n+1$

$Q(n+1) = v(oper(\Phi, \rightarrow, n+1)) = T$ sii $v(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq n+1$

- $v(oper(\Phi, \rightarrow, n+1)) = T$ entonces $v(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq n+1$

  $v(oper(\Phi, \rightarrow, n+1)) = v(oper(\Phi, \rightarrow, n) \rightarrow \varphi_{n+1}) = T$ <por definición>

  $v(T \rightarrow \varphi_{n+1}) = T$ <por reemplazo hipotesis induc.>
  por metateorema 2-23 $(\rightarrow)$

  $v(\varphi_{n+1}) = T$

  $0 \leq j \leq n+1$ $j = n+1$

  $v(\varphi_j) = v(\varphi_{n+1}) = T$
  Por reemplazo $T = T$
  T ✓

- $V(\varphi_j) = T$ para algún $0 \leq j \leq n+1$ entonces $V(oper(\Phi, ->, n+1)) = T$

$0 \leq j \leq n+1$, $j = n+1$

$V(\varphi_j) = V(\varphi_{n+1}) = T$

<Por definición> $V(oper(\Phi, ->, n+1)) = V(oper(\Phi, ->, n) -> \varphi_{n+1}) = T$

Por reemplazo de hipotesis inductiva $V(T -> \varphi_{n+1}) = T$

Por reemplazo de $V(\varphi_{n+1})$ $V(T -> T) = T$

$T = T$

T ✓

b) $V(oper(\Phi, ->, n)) = T$ síi $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n$

$Q(n) = V(oper(\Phi, ->, n)) = T$ síi $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n$

Caso base $n = 0$

$Q(0) = V(oper(\Phi, ->, 0)) = T$ síi $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq 0$

- $V(oper(\Phi, ->, 0)) = T$ entonces $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq 0$

<Por definición> $V(oper(\Phi, ->, 0)) = V(\varphi_0) = T$

$0 \leq j \leq 0$ entonces $j = 0$

$V(\varphi_j) = V(\varphi_0) = T$

$T = T$ <Por reemplazo>

T ✓

- $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq 0$ entonces $V(oper(\Phi, ->, 0)) = T$

$0 \leq j \leq 0$ entonces $j = 0$

$V(\varphi_j) = V(\varphi_0) = T$

Por definición

$V(oper(\Phi, ->, 0)) = V(\varphi_0) = T$

Por reemplazo

$V(\varphi_0) = T$

$T = T$

T ✓

Suponemos $Q(n)$

Caso inductivo $n = n+1$

$Q(n+1) = V(oper(\Phi, \to, n+1)) = T$ sií $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n+1$

- $V(oper(\Phi, \to, n+1)) = T$ entonces $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n+1$

Por definición

$V(oper(\Phi, \to, n+1)) = V(oper(\Phi, \to, n) \to \varphi_{n+1}) = T$

Por reemplazo de hipotesis inductiva $V(T \to \varphi_{n+1}) = T$

Por metateorema 2.23 $V(\varphi_{n+1}) = T$

$0 \leq j \leq n+1$, $j = n+1$

$V(\varphi_j) = V(\varphi_{n+1}) = T$

Por reemplazo $T = T$

T ✓

- $V(\varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n+1$ entonces $V(oper(\Phi, \to, n+1)) = T$

$0 \leq j \leq n+1$, $j = n+1$

$V(\varphi_j) = V(\varphi_{n+1}) = T$

Por definición

$V(oper(\Phi, \to, n+1)) = V(oper(\Phi, \to, n) \to \varphi_{n+1}) = T$

Por reemplazo de hipotesis inductiva $V(T \to \varphi_{n+1}) = T$

Por reemplazo en $V(\varphi_{n+1})$ $V(T \to T) = T$

$T = T$

T ✓

3. Sean $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ proposiciones. Demuestre:

a) $\models (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i \to \varphi_j)$, para cada $0 \leq j \leq n$

Por definición

$Q(n)$: $V(oper(\Phi, \wedge, n) \to \varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n$

Caso base $n = 0$

$Q(0) = V(oper(\Phi, \wedge, 0) \to \varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq 0$

Por def $V(\varphi_0 \to \varphi_0) = T$

met. 2.23

$V(\varphi_0) = V(\varphi_0) = T$ ✓

se supone Q(n)
Caso inductivo $n = n+1$

$Q(n+1)$: $V(Oper(\varphi, \wedge, n+1) \to \varphi_j) = T$ para cada $0 \leq j \leq n+1$

Por def:

$V((oper(\varphi, \wedge, n) \to \varphi_{n+1}) \to \varphi_{n+1}) = T$

Por hipotesis inductiva,

$V(Oper(\varphi, \wedge, n \to \varphi_{n+1})) = T$

$V((Oper(\varphi, \wedge, n) \to \varphi_{n+1}) \to \varphi_{n+1}) = T$

b) $\models (\varphi_j \to \bigvee_{i=0}^{n} \varphi_i)$ para cada $0 \leq j \leq n$

Por def.

$Q(n) = V(\varphi_j \to oper(\varphi, \vee, n)) = T$ para cada $0 \leq j \leq n$

Caso base $n = 0$

$Q(0) = V(\varphi_j \to oper(\varphi, \vee, 0)) = T$ para cada $0 \leq j \leq 0$

Por def.

$V(\varphi_0 \to \varphi_0) = T$
met. 2.23
$V(\varphi_0) = V(\varphi_0) = T$ ✓

Suponemos Q(n)

Caso inductivo $n = n+1$

$Q(n+1) = V(\varphi_j \to oper(\varphi, \vee, n+1)) = T$ para cada $0 \leq j \leq n+1$

Por def.

$V(\varphi_{n+1} \to (Oper(\varphi, \vee, n) \to \varphi_{n+1})) = T$

Por hipotesis inductiva

$V(\varphi_{n+1} \to Oper(\varphi, \vee, n) = T$

$V((\varphi_{n+1} \to Oper(\varphi, \vee, n) \to \varphi_{n+1}) = T$

9. Sean $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi_0, \ldots, \psi_n$ proposiciones. Demuestre:

a) $\models (\bigvee_{i=0}^{n} (\varphi_i \vee \psi_i) \equiv (\bigvee_{i=0}^{n} \varphi_i \vee \bigvee_{i=0}^{n} \psi_i))$

$Q(n): \; V(oper(\varphi \vee \psi, \vee, n) \equiv (oper(\varphi, \vee, n) \vee oper(\psi, \vee, n))) = T$

caso base $n=0$

$Q(0) = V(oper(\varphi \vee \psi, \vee, 0) \equiv (oper(\varphi, \vee, 0) \vee oper(\psi, \vee, 0))) = T$

Por def

$V((\varphi_0 \vee \psi_0) \equiv (\varphi_0 \vee \psi_0)) = T$

$V(\varphi_0 \vee \psi_0) = V(\varphi_0 \vee \psi_0) = T$ ✓

Se supone $Q(n)$

Caso inductivo $n = n+1$

$Q(n+1) = V(oper(\varphi \vee \psi, \vee, n+1) \equiv (oper(\varphi, \vee, n+1) \vee oper(\psi, \vee, n+1))) = T$

Por def

$V((oper(\varphi \vee \psi, \vee, n) \vee (\varphi_{n+1} \vee \psi_{n+1})) \equiv ((oper(\varphi, \vee, n) \vee \varphi_{n+1}) \vee (oper(\psi, \vee, n) \vee \psi_{n+1}))) = T$

Por hipotesis inductiva

$V((oper(\varphi \vee \psi, \vee, n) \equiv (oper(\varphi, \vee, n) \vee oper(\psi, \vee, n))) = T$

$V((\varphi_{n+1} \vee \psi_{n+1}) \equiv (\varphi_{n+1} \vee \psi_{n+1})) = T$

$V(\varphi_{n+1} \vee \psi_{n+1}) = V(\varphi_{n+1} \vee \psi_{n+1}) = T$ ✓

b) $\models (\bigwedge_{i=0}^{n} (\varphi_i \wedge \psi_i) \equiv (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} \psi_i))$

$Q(n) = V(oper(\varphi \wedge \psi, \wedge, n) \equiv (oper(\varphi, \wedge, n) \wedge oper(\psi, \wedge, n))) = T$

caso base $n=0$

$Q(0) = V(oper(\varphi \wedge \psi, \wedge, 0) \equiv (oper(\varphi, \wedge, 0) \wedge oper(\psi, \wedge, 0))) = T$

Por def.

$V((\varphi_0 \wedge \psi_0) \equiv (\varphi_0 \wedge \psi_0)) = T$ ✓

Se supone $Q(n)$

caso inductivo $n = n+1$

$Q(n+1) = V(oper(\varphi \wedge \psi, \wedge, n+1) \equiv (oper(\varphi, \wedge, n+1) \wedge oper(\psi, \wedge, n+1))) = T$

por def.

$V((oper(\varphi \wedge \psi), \wedge, n) \wedge (\varphi_{n+1} \wedge \psi_{n+1})) \equiv ((oper(\varphi, \wedge, n) \wedge \varphi_{n+1}) \wedge (oper(\psi, \wedge, n) \wedge \psi_{n+1}))) = T$

Por hipotesis inductiva

$V(oper(\varphi \wedge \psi, \wedge, n) \equiv (oper(\varphi, \wedge, n) \wedge oper(\psi, \wedge, n))) = T$

$V((\varphi_{n+1} \wedge \psi_{n+1}) \equiv (\varphi_{n+1} \wedge \psi_{n+1})) = T$ ✓

ejercicios 4.1

5. Demuestre $\models (\varphi \equiv \varphi)$

$V(\varphi \equiv \varphi) = T$

Por metateorema 2.23

$V(\varphi) = V(\varphi)$

Si $V(\varphi) = T$

$V(T \equiv T) = T$
$T = T$ ✓

Si $V(\varphi) = F$

$V(F \equiv F) = T$
$T = T$ ✓

6. encuentre proposiciones φ, ψ, τ para las cuales $\models (\varphi[p := \psi] \equiv \varphi[p := \tau])$ pero no $\models (\psi \equiv \tau)$

$\varphi = (p \vee true)$
$\psi = true$
$\tau = false$

$\models ((p \vee true)[p := true] \equiv (p \vee true)[p := false])$

$\models ((true \vee true) \equiv (false \vee true))$

Por definición

$V((true \vee true) \equiv (false \vee true)) = T$

$H_{\equiv}(V(true \vee true), V(false \vee true)) = T$

$H_{\equiv}(T, T) = T$
$T = T$ ✓

$V(\psi \equiv \tau) = F$

$V(true \equiv false) = F$
$F = F$ ✓

ejercicios 4.2

4. $\vdash_{DS} true$

1. $((true \equiv true) \equiv true)$ Ax 3
2. $(true \equiv true)$ identidad
3. $true$ identidad

$\vdash_{DS} ((\varphi \equiv \varphi) \equiv true)$

1. $((\varphi \equiv true) \equiv \varphi)$
2. $(\varphi \equiv (\varphi \equiv true))$ conmutatividad (1)
3. $(((\varphi \equiv \varphi) \equiv true)$ Asociatividad (2)

$\vdash_{DS} (\varphi \equiv \varphi)$

1. $((\varphi \equiv \varphi) \equiv true)$
2. $(\varphi \equiv \varphi)$ identidad (1)

5. Sean φ y ψ proposiciones. Demuestre o refute:

a) Si $\vdash_{DS} \varphi$ y $\vdash_{DS} \psi$, entonces $\vdash_{DS} (\varphi \equiv \psi)$

Se supone que $\vdash_{DS} \varphi$ y $\vdash_{DS} \psi$

1. φ
2. ψ
3. $(\varphi \equiv true)$ identidad (1)
4. $(\psi \equiv true)$ identidad (2)
5. $(true \equiv \psi)$ conmutatividad (3)
6. $(\varphi \equiv \psi)$ transitividad (3, 5)

6. Sean ϕ y ψ proposiciones. Demuestre:

   a) Si ϕ es un axioma, entonces $\vdash_{DS} \phi[p := \psi]$.

   b) Si $\vdash_{DS} \phi$, entonces $\vdash_{DS} \phi[p := \psi]$.

b)

como ϕ es teorema, entonces ϕ es tautología y por definición de sustitución textual ϕ[p := ψ] es tautología y al ser tautología también es teorema del sistema formal DS.