Tarea N°8

Ejercicios 4.3

4) Demuestre el teorema 4.15.3

$\vdash_{DS} (\neg false)$

1. $((\neg false) \equiv true)$ (Teorema 4.15.2 puro)
2. $(\neg false)$ (identidad 1)

5) Demuestre el teorema 4.15.5

$\vdash_{DS} (((\neg \varphi) \equiv \psi) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$

1. $((\neg(\varphi \equiv \psi)) \equiv ((\neg \varphi) \equiv \psi))$, (Teorema 4.15.4 puro)
2. $(((\neg \psi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$ (Ax 2 $\varphi : (\neg \psi)$ y $\psi : \varphi$)
3. $((\neg(\psi \equiv \varphi)) \equiv ((\neg \psi) \equiv \varphi))$ (Teorema 4.15.4 $\varphi = \psi$ y $\psi = \varphi$)
4. $((\neg(\psi \equiv \varphi)) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$ (Transitividad 3, 2)
5. $((\varphi \equiv \psi) \equiv (\psi \equiv \varphi))$ (Ax 2 puro)
6. $((\neg(\varphi \equiv \psi)) \equiv (\neg(\psi \equiv \varphi)))$ (Leibniz 5. $\varphi = (\neg p)$)
7. $((\neg(\varphi \equiv \psi)) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$ (Transitividad, 6, 4)
8. $(((\neg \varphi) \equiv \psi) \equiv (\neg(\varphi \equiv \psi)))$ (R. conmutatividad 1)
9. $(((\neg \varphi) \equiv \psi) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$ (Transitividad 8, 7)

6) Demuestre el teorema 4.15.7

$\vdash_{DS} ((\varphi \equiv (\neg \varphi)) \equiv false)$

1. $((\neg \varphi) \equiv (\varphi \equiv false))$ (Ax 9 puro)
2. $(((\neg \varphi) \equiv \varphi) \equiv false)$ (R. asociatividad 1)
3. $((\varphi \equiv (\neg \varphi)) \equiv ((\neg \varphi) \equiv \varphi))$ (Ax2 $\varphi = \varphi$ y $\psi = (\neg \varphi)$)
4. $((\varphi \equiv (\neg \varphi)) \equiv false)$ (Transitividad 3, 2)

8). Demuestre el teorema 4.16.2

$\vdash_{DS} ((\varphi \not\equiv \psi) \equiv (\psi \not\equiv \varphi))$

1. $((\varphi \not\equiv \psi) \equiv ((\neg \varphi) \equiv \psi))$ (Ax10 puro)
2. $((\psi \not\equiv \varphi) \equiv ((\neg \psi) \equiv \varphi))$ (Ax 10 $\varphi = \psi$ y $\psi = \varphi$)
3. $(((\neg \varphi) \equiv \psi) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$ (Teorema 4.15.5 puro)
4. $((\varphi \not\equiv \psi) \equiv (\varphi \equiv (\neg \psi)))$ (Transitividad 1, 3)
5. $((\varphi \equiv (\neg \psi)) \equiv ((\neg \psi) \equiv \varphi))$ (Ax 2 $\varphi = \varphi$ y $\psi = (\neg \psi)$)
6. $((\varphi \not\equiv \psi) \equiv ((\neg \psi) \equiv \varphi))$ (Transitividad 4, 5)
7. $(((\neg \psi) \equiv \varphi) \equiv (\psi \not\equiv \varphi))$ (R. conmutatividad 2)
8. $((\varphi \not\equiv \psi) \equiv (\psi \not\equiv \varphi))$ (Transitividad (6, 7)

9) Demostrar el Teorema 4.16.3

$\vdash_{DS} ((\varphi \not\equiv false) \equiv \varphi)$

1. $((\varphi \not\equiv false) \equiv ((\neg \varphi) \equiv false))$ (Ax10 $\psi = false$)
2. $((\neg(\neg \varphi)) \equiv ((\neg \varphi) \equiv false))$ (Ax 9 $\varphi = (\neg \varphi)$)
3. $(((\neg \varphi) \equiv false) \equiv (\neg(\neg \varphi)))$ (R. conmutatividad 2)
4. $((\varphi \not\equiv false) \equiv (\neg(\neg \varphi)))$ (Transitividad 1, 3)

5. $((\neg(\neg(\varphi)) \equiv \varphi)$ (Teorema 4.15.6)
6. $((\varphi \not\equiv false) \equiv \varphi)$ (Transitividad 4, 5)

10) Demuestre el Teorema 4.16.5 $\vdash_{DS} (((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv \varphi)$

1. $(((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv ((\neg(\varphi \not\equiv \psi)) \equiv \psi))$ Ax 10 $\varphi := (\varphi \not\equiv \psi)$
2. $(((\neg(\varphi \not\equiv \psi)) \equiv \psi) \equiv ((\varphi \not\equiv \psi) \equiv (\neg\psi)))$ Teorema 4.15.5 $\varphi := (\varphi \not\equiv \psi)$
3. $(((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv ((\varphi \not\equiv \psi) \equiv (\neg\psi)))$ Transitividad 1, 2
4. $((\varphi \not\equiv \psi) \equiv ((\neg\varphi) \equiv \psi))$ Ax 10
5. $(((\varphi \not\equiv \psi) \equiv (\neg\psi)) \equiv (((\neg\varphi) \equiv \psi) \equiv (\neg\psi)))$ leibniz $\varphi := (P \equiv (\neg\psi))$
6. $(((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv (((\neg\varphi) \equiv \psi) \equiv (\neg\psi)))$ Transitividad 3, 5
7. $((((\neg\varphi) \equiv \psi) \equiv (\neg\psi)) \equiv ((\neg\varphi) \equiv (\psi \equiv (\neg\psi))))$ Ax1 $\varphi := (\neg\varphi)$, $\tau := (\neg\psi)$
8. $(((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv ((\neg\varphi) \equiv (\psi \equiv (\neg\psi))))$ Transitividad 6, 7
9. $((((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv (\neg\varphi)) \equiv (\psi \equiv (\neg\psi)))$ Asociatividad 8
10. $((\psi \equiv (\neg\psi)) \equiv false)$ Teorema 4.15.7 $\varphi := \psi$
11. $((((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv (\neg\varphi)) \equiv false)$ Transitividad 9, 10
12. $(((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv ((\neg\varphi) \equiv false))$ Asociatividad 11
13. $((\varphi \equiv (\neg\varphi)) \equiv false)$ Teorema 4.15.7
14. $(\varphi \equiv ((\neg\varphi) \equiv false))$ Asociatividad 13
15. $(((\neg\varphi) \equiv false) \equiv \varphi)$ Conmutatividad 14
16. $(((\varphi \not\equiv \psi) \not\equiv \psi) \equiv \varphi)$ Transitividad 12, 15

Ejercicios 4.4

1) Demuestre el teorema 4.19.2

$\vdash_{DS} ((\varphi \vee true) \equiv true)$

1. $((\varphi \equiv true) \equiv \varphi)$ Ax 3
2. $((\varphi \vee (\varphi \equiv true)) \equiv (\varphi \vee \varphi))$ leibniz $\psi := \varphi \vee P$ (1)
3. $((\varphi \vee (\varphi \equiv true)) \equiv ((\varphi \vee \varphi) \equiv (\varphi \vee true)))$ Ax8. $\psi := \varphi$, $\tau := True$
4. $(((\varphi \vee (\varphi \equiv true)) \equiv (\varphi \vee \varphi)) \equiv (\varphi \vee true))$ Asociatividad 3
5. $(\varphi \vee true)$ ecuanimidad 2, 4
6. $((\varphi \vee true) \equiv true)$ identidad 5.

2) Demuestre el Teorema 4.19.3

$\vdash_{DS} (\varphi \vee true)$

1. $((\varphi \vee true) \equiv true)$ Teorema 4.19.2
2. $(\varphi \vee true)$ identidad (1)

3) Demuestre el teorema 4.19.4

$\vdash_{DS} ((\varphi \lor \psi) \equiv ((\varphi \lor (\neg \psi)) \equiv \varphi))$

1. $((\neg\psi) \equiv (\psi \equiv \text{false}))$ (Ax 4 $\varphi : \neg\psi$)
2. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi) \equiv \varphi))$ (Leibniz $\varphi : ((p \lor \varphi) \equiv \varphi)$)
3. $((((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv ((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi)))$ (Ax2 $\varphi : (((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi) \equiv \varphi)$, $\psi : \varphi$)
4. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv ((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi)))$ (Transitividad 2,3)
5. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv ((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi))$ (R. asociatividad 4)
6. $(((\psi \equiv \text{false}) \lor \varphi) \equiv (\varphi \lor (\psi \equiv \text{false})))$ (Ax5 $\varphi : (\psi \equiv \text{false})$ $\psi : \varphi$)
7. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor (\psi \equiv \text{false})))$ (Transitividad 5,6)
8. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor (\psi \equiv \text{false})))$ (R. asociatividad 7)
9. $((\varphi \lor (\psi \equiv \text{false})) \equiv ((\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \lor \text{false})))$ (Ax 8, $\varphi : \varphi$, $\psi : \psi$, $\tau :$ false)
10. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv ((\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \lor \text{false})))$ (Transitividad 8,9)
11. $((((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)) \equiv (\varphi \lor \text{false}))$ (R. asociatividad 10)
12. $((\varphi \lor \text{false}) \equiv \varphi)$ (Ax6 puro)
13. $((((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)) \equiv \varphi)$ (Transitividad 11, 12)
14. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv ((\varphi \lor \psi) \equiv \varphi))$ (R. Asociatividad 13)
15. $(((\varphi \lor \psi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \lor \psi)))$ (Ax 2 $\varphi : (\varphi \lor \psi)$, $\psi : \varphi$)
16. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \lor \psi)))$ (transitividad 14,15)
17. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \equiv (\varphi \lor \psi))))$ (R. asociatividad 16)
18. $((\varphi \equiv (\varphi \equiv (\varphi \lor \psi))) \equiv ((\varphi \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)))$ (Ax1 $\varphi : \varphi$, $\psi : \varphi$, $\tau : (\varphi \lor \psi)$)
19. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv ((\varphi \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)))$ (Transitividad 17, 18)
20. $(((\varphi \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)) \equiv ((\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \equiv \varphi)))$ (Ax2 $\varphi : (\varphi \equiv \varphi)$, $\psi : (\varphi \lor \psi)$)
21. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv ((\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \equiv \varphi)))$ (Transitividad 19, 20)
22. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)) \equiv (\varphi \equiv \varphi))$ (R. Asociatividad 21)
23. $((\varphi \equiv \varphi) \equiv \text{true})$ (teorema 4.6.2)
24. $(((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi)) \equiv \text{true})$ (Transitividad 22, 23)
25. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor \psi))$ (identidad 24)
26. $((\varphi \lor \psi) \equiv (((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi))$ (R. conmutatividad 25)
27. $((((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv ((\neg\psi) \lor \varphi)))$ (Ax2 $\varphi : ((\neg\psi) \lor \varphi)$ $\psi : \varphi$)
28. $((\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \equiv ((\neg\psi) \lor \varphi)))$ (Transitividad 26, 27)
29. $(((\varphi \lor \psi) \equiv \varphi) \equiv ((\neg\psi) \lor \varphi))$ (R. asociatividad 28)
30. $(((\neg\psi) \lor \varphi) \equiv (\varphi \lor (\neg\psi)))$ (Ax5 $\varphi : (\neg\psi)$ $\psi : \varphi$)
31. $(((\varphi \lor \psi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \lor (\neg\psi)))$ (Transitividad 29, 30)
32. $((\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \lor (\neg\psi))))$ (R. Asociatividad 31)
33. $((\varphi \equiv (\varphi \lor (\neg\psi))) \equiv ((\varphi \lor (\neg\psi)) \equiv \varphi))$ (Ax 2 $\varphi : \varphi$, $\psi : (\varphi \lor (\neg\psi))$)
34. $((\varphi \lor \psi) \equiv ((\varphi \lor (\neg\psi)) \equiv \varphi))$ (transitividad 32, 33)

7) Demuestre que si $a \in \mathbb{N}$ y a^2 es par, entonces a es par.

$a^2 = 2c$

$a = \sqrt{2c}$ $\quad c = 2d$ = debe ser Natural

$\sqrt{d}$ = debe ser Natural

$a = \sqrt{2 \cdot 2d}$

$a = 2\sqrt{d}$

como $\sqrt{d}$ es $\mathbb{N}$ entonces $2\sqrt{d}$ es par y $\mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$ y es par.

10) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{(\varphi \vee \psi) \quad (\neg \varphi)}{\psi}$$ silogismo disyuntivo

Explique brevemente el significado de la regla, de un ejemplo de uso y demuestre que es correcta.

$V(\varphi \vee \psi) = T \quad V(\neg \varphi) = T$ por met. 2.23

Por reemplazo y met. 2.23 $\quad V(\varphi) = F$

$V(\psi) = T$

$\models \psi$, entonces al ser teorema debe ser tautologia, por lo tanto ψ es tautologia y teorema.

ejemplo:

$$\frac{(p \vee q) \quad (\neg p)}{q}$$

11) considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{(\varphi \vee \psi) \quad ((\neg \varphi) \vee \gamma)}{(\psi \vee \gamma)}$$ corte

Explique brevemente el significado de la regla, de un ejemplo de uso y demuestre que es correcta

$V(\varphi \vee \psi) = T \quad V((\neg \varphi) \vee \gamma) = T$

$V(\varphi) = V(\psi) = T \quad V(\neg \varphi) = V(\gamma) = T$

$\underline{V(\varphi) = F}, \underline{V(\psi) = T} \quad V(\neg \varphi) = F \quad V(\gamma) = T$

$\underline{V(\psi) = F}, \underline{V(\varphi) = T} \quad V(\neg \varphi) = T \quad V(\gamma) = F$

$\bullet\ \underline{V(\varphi) = F}, \underline{V(\gamma) = T}$

1. $V(\varphi) = F \quad V(\psi) = V(\gamma) = T \quad \bullet\ \underline{V(\varphi) = T} \quad \underline{V(\gamma) = T}$

2. $V(\varphi) = T \quad V(\psi) = F \quad V(\gamma) = T \quad \bullet\ V(\varphi) = F \quad V(\gamma) = F$

$V(\psi \vee \gamma) = T$

1. $V(\psi) = V(\gamma) = T \quad \models V(\psi \vee \gamma)$, con las mismas valuaciones
2. $V(\psi) = F \quad V(\gamma) = T \quad$ que lo son $\models (\varphi \vee \psi)$ y $\models ((\neg \varphi) \vee \gamma)$

12) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{\varphi}{(\varphi \vee \psi)} \text{ debilitamiento}$$

Explique brevemente el significado de la regla, de un ejemplo de uso y demuestre.

$V(\varphi) = T$

$V(\varphi \vee \psi) = T$

Por met. 2.23 si $V(\varphi) = T$ $V(\psi)$ puede ser igual a $V(\psi) = F$ o $V(\psi) = T$

13) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{(\varphi \vee \psi)}{\varphi} \text{ Debilitamiento?}$$

Explique con un cotraejemplo que esta regla es incorrecta.

$V(\varphi) = F$

$V(\varphi \vee \psi) = T$

$V(\psi) = T$

$V(\varphi) = T$, pero $V(\varphi) = F$ entonces NO es teorema porque $\models \varphi$ no es verdad.