Profesor Materia

Institución Curso Nota

Ejercicios 6.1

3. Sea $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ con a, b, c constantes (i.e., $ar(a) = ar(b) = ar(c) = 0$) ¿Cuales son los terminos sobre $\mathcal{F}$ libres de variables?

a, b, c

6. Sea $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$ con $ar(d) = 0$, $ar(f) = 3$ y $ar(g) = 2$

a) La longitud de un termino sobre $\mathcal{F}$ corresponde a la cantidad de símbolos que se usan en su representación, incluyendo las comas y paréntesis. liste todos los terminos sobre $\mathcal{F}$ libres de variables, cuya longitud sea menor a 10

✓ d $\quad l = 1$

✓ $g(x_0, x_1)$
$g(x_0, d)$
$g(x_1, d)$
$\quad l = 6$

✓ $f(x_0, x_1, x_2)$
$f(x_0, d, x_2)$
$f(d, x_1, x_2)$
$f(x_0, x_1, d)$
$\quad l = 8$

16. Use los simbolos de predicado.

$A(x, y)$: "x admira a y"
$B(x, y)$: "x asistio a y"
$P(x)$: "x es profesor"
$E(x)$: "x es estudiante"
$C(x)$: "x es clase"
m: "María"

a) María admira a todos los profesores.

$\forall x\, (P(x) \to A(m, x))$

b) Algún profesor admira a María.

$\exists x\, (P(x) \wedge A(x, m))$

c) María se auto-admira.

$A(m, m)$

d) No todos los estudiantes asisten a todas las clases.

$\neg \forall x\, \forall y\, ((C(y) \wedge E(x)) \to B(x, y))$

e) Ninguna clase tuvo como asistente a todos los estudiantes.

$\neg \exists x\, \forall y\, ((C(x) \wedge E(y)) \to B(y, x))$

f) Ninguna Clase tuvo como asistente a estudiante alguno.

$\neg\exists_x \neg\exists_y ((C(x) \wedge E(y) \rightarrow B(y, x))$

#18. Suponga que $P(x, y)$ denota "x es padre de y" y $M(x, y)$ denota "x es madre de y". De forma similar, suponga que $E(x, y)$, $A(x, y)$ y $H(x, y)$ denotan "x es esposo/hermana/hermano de y", respectivamente. Finalmente, suponga que puede usar símbolos de función constante para identificar individuos como "Juan" y "Juana".

$P(x, y)$: "x es padre de y"
$M(x, y)$: "x es madre de y"
$E(x, y)$: "x es esposo de y"
$A(x, y)$ = "x es hermana de y"
$H(x, y)$: "x es hermano de y"
J: "Juan" C: "Carlos"
Ja: "Juana" M: "Monica"

a) Todos tienen una madre.

$\exists_x \forall_y \; M(x, y)$

b) Todos tienen una madre y un padre.

$\forall_x \exists_y \exists_z (M(y, x) \wedge P(z, x))$

c) Quien sea tiene una madre tiene un padre.

$\forall_x \exists_y \exists_z (M(y, x) \wedge P(z, x))$

d) Juan es abuelo

$\exists_y \exists_z (P(J, y) \wedge P(y, z))$

e) Todos los 'papás' son padres.

$\forall_x \exists_y \exists_z ((A(y, z) \vee H(y, z) \rightarrow P(x, y) \wedge P(x, z))$

f) Todos los esposos son pareja.

$\forall_x \exists_y \; E(x, y)$

g) No Tío es una tía

$\exists_z \forall_x \exists_y (\neg(P(x, z) \wedge H(y, x)) \rightarrow P(x, z) \wedge A(y, x))$

h) la abuela de ninguno es el padre de alguien.

$\exists_y \forall_x \neg\exists_z (M(x, y) \wedge M(y, z) \rightarrow \neg P(x, y))$

i) Juan y Juana son marido y mujer.

$E(J, Ja)$

j) Carlos es el cuñado de Mónica.

$\exists_x (E(C, x) \wedge A(x, M))$

19. Suponga que $\mathcal{F} = \{\}$ y $P = \{P\}$ es tal que $ar(P) = 2$. Además suponga que:

$P(x, y)$ = "x e y son iguales"

en este caso, la pareja $(\mathcal{F}, P)$ se denomina el lenguaje de la igualdad.

a) Hay al menos dos elementos.

$\exists_x \exists_y \neg P(x, y)$

b) Hay a lo sumo dos elementos.

$\forall_x \forall_y \neg P(x, y)$

c) Hay exactamente tres elementos.

$\forall_x \forall_y \forall_z (\neg P(x, y) \wedge \neg P(x, z) \wedge \neg P(y, z))$

d) Para cualquier par de elementos, hay otro elemento distinto a ellos.

$\exists_x \exists_y \exists_z (P(x, y) \rightarrow \neg P(x, z))$

20. Suponga que $\mathcal{F} = \{\}$ y $P = \{R\}$ es tal que $ar(R) = 1$.
$R(x)$: x tiene la propiedad
a) Exactamente un elemento tiene la propiedad R.

$\exists_x (R(x) \wedge \neg \forall_x R(x))$

b) Todos, excepto dos elementos, tienen la propiedad R.

$\forall_x \neg\exists_y \neg\exists_z (R(x) \wedge R(y) \wedge R(z))$

22. especifique:

$E(x)$ = "x es egoista"
$H(x)$ = "x es Humano"

a) Todos los humanos son egoistas.

$\forall_x (H(x) \rightarrow E(x))$

b) Ningún humano es egoista.

$\neg\exists_x (H(x) \rightarrow E(x))$

c) Algunos humanos son egoistas.

$\exists_x (H(x) \rightarrow E(x))$

d) Algunos humana no son egoistas.

$\exists_x (H(x) \rightarrow \neg E(x))$

24. especifique:

$E(x, y, z)$: "x puede engañar a y z veces"

$U(x)$: "x es usted"

a) Usted puede engañar a algunos algunas veces.

$\forall x \exists y \exists z\ (U(x) \wedge E(x, y, z))$

b) Usted puede engañar a todos algunas veces.

$\forall x \forall y \exists z\ (U(x) \wedge E(x, y, z))$

c) Usted no puede engañarlos a todos algunas veces.

$\forall x \forall y \exists z\ (U(x) \wedge \neg E(x, y, z))$

d) Usted no puede engañar a alguien todas las veces.

$\forall x \exists y \forall z\ (U(x) \wedge \neg E(x, y, z))$

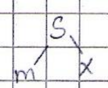
Profesor Materia

Institución Curso Nota

Ejercicios 6.2

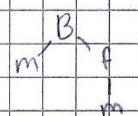
3) Sea m un símbolo de una función constante (i.e., $ar(m)=0$), f un símbolo de función con un argumento y S, B símbolos de predicados con dos argumentos. Suponga que x, y, z son variables en X. Para cada una de las siguientes fórmulas, indique (i) cuáles apariciones de x, y, z son libres y (ii) cuáles acotadas.

a) $S(m, x)$



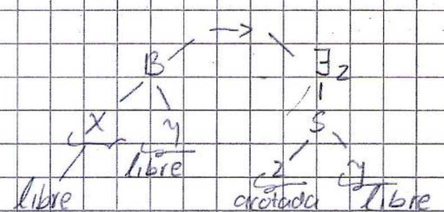
X es libre

b) $B(m, f(m))$

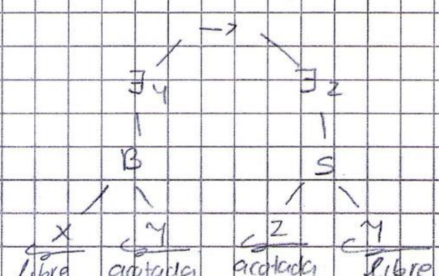


No hay apariciones de x, y o z.

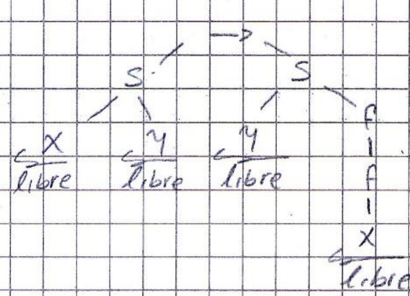
c) $B(x, y) \to \exists_z S(z, y)$



d) $\exists_y B(x, y) \to \exists_z S(z, y)$

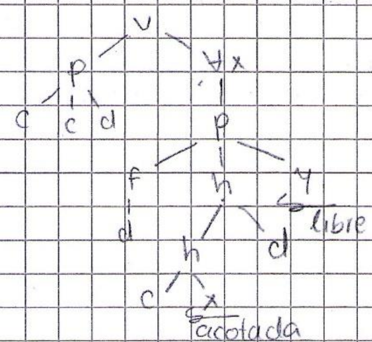


e) $S(x, y) \to S(y, f(f(x)))$



4. Sean c y d símbolos de funciones constantes, f un símbolo de una función con un argumento y h un símbolo de función con dos argumentos. Además, sean P, Q símbolos de predicados con 3 argumentos. Suponga que x, y, z son variables en X. Para cada una de las siguientes fórmulas, indique (i) cuáles apariciones de x, y, z son libres, (ii) cuáles acotadas y (iii) el alcance de cada uno de los cuantificadores.

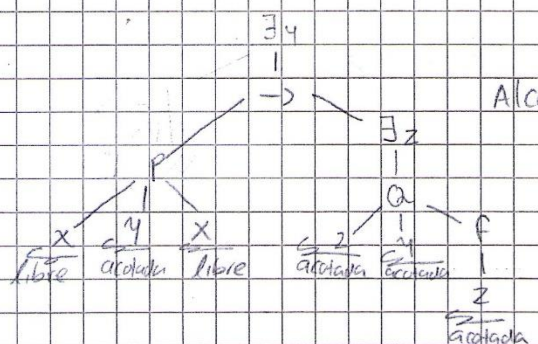
a) $P(c,c,d) \vee \forall x\, P(f(d), h(h(c,x),d), y)$



Alcance de $\forall x$ es

$P(f(d), h(h(c,x),d), y)$

b) $\exists y\, (P(x,y,x) \to \exists z\, Q(z,y,f(z)))$



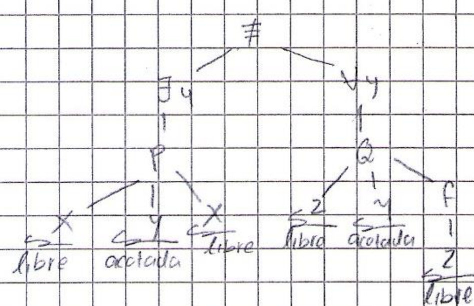
Alcance de $\exists y$ es

$P(x,y,x)$ y $Q(z,y,f(z))$

Alcance de $\exists z$ es

$Q(z,y,f(z))$

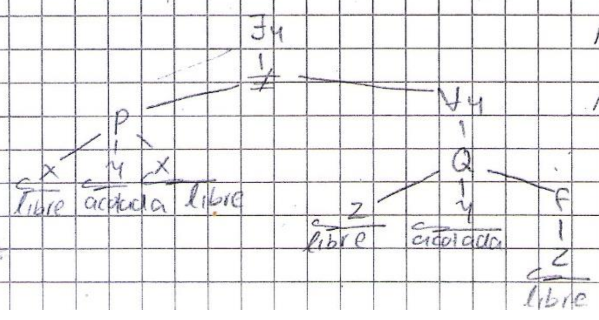
c) $\exists y\, P(x,y,x) \not\equiv \forall y\, Q(z,y,f(z))$



Alcance $\exists y$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\forall y$ es $Q(z,y,f(z))$

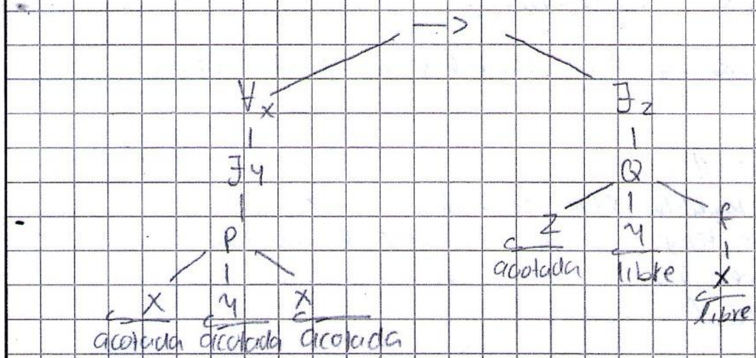
d) $\exists y\, (P(x,y,x) \not\equiv \forall y\, Q(z,y,f(z)))$



Alcance $\exists y$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\forall y$ es $Q(z,y,f(z))$

e) $\forall x \exists y \; P(x,y,x) \rightarrow \exists z \; Q(z,y,f(x))$

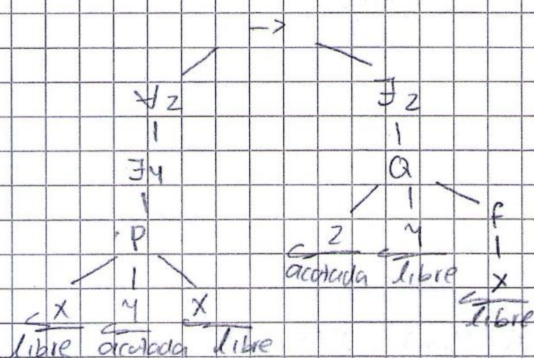


Alcance $\forall x$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\exists y$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\exists z$ es $Q(z,y,f(x))$

f) $\forall z \exists y \; P(x,y,x) \rightarrow \exists z \; Q(z,y,f(x))$

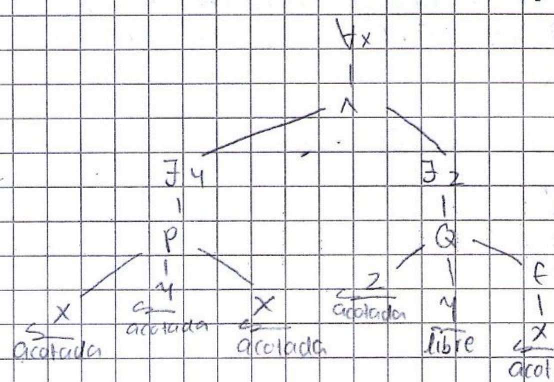


Alcance $\forall z$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\exists y$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\exists z$ es $Q(z,y,f(x))$

g) $\forall x \; (\exists y \; P(x,y,x) \wedge \exists z \; Q(z,y,f(x)))$

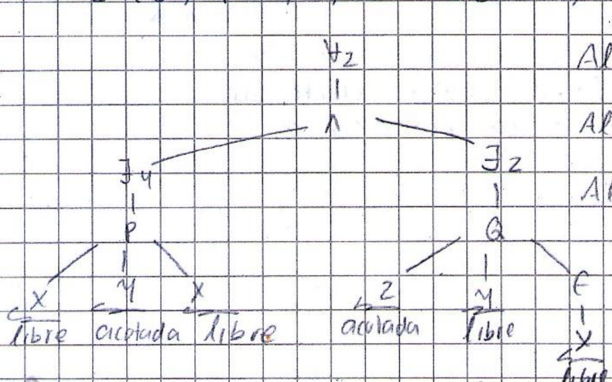


Alcance $\forall x$ es $P(x,y,x)$ y $Q(z,y,f(x))$

Alcance $\exists y$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\exists z$ es $Q(z,y,f(x))$

h) $\forall z \; (\exists y \; P(x,y,x) \wedge \exists z \; Q(z,y,f(x)))$



Alcance $\forall z$ es $P(x,y,x)$

Alcance $\exists y$ es $P(x,y,x)$

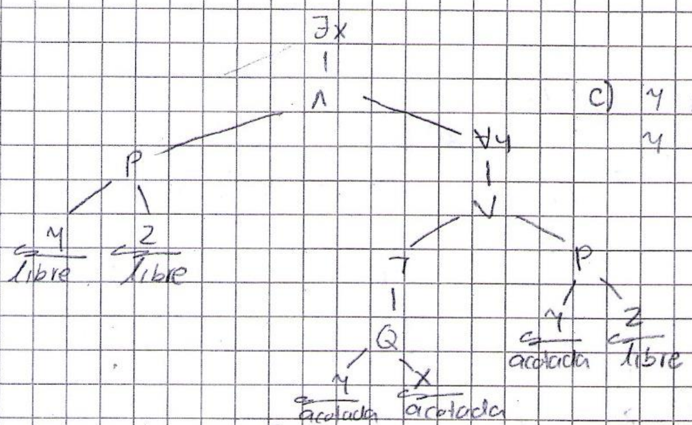
Alcance $\exists z$ es $Q(z,y,f(x))$

5. Sea $\emptyset$ la fórmula

$$\exists x\,(P(y,z) \wedge \forall y\,(\neg Q(y,x) \vee P(y,z)))$$

en donde x, y, z son variables y P, Q símbolos de predicados con dos argumentos.

a) dibuje el árbol de sintaxis de $\emptyset$
b) Identifique las apariciones de variables libres y acotadas en $\emptyset$
c) ¿Hay alguna variable en $\emptyset$ que tenga apariciones libres y acotadas?
d) ¿Cuál es el alcance de $\exists x$ en $\emptyset$?
e) ¿Cuál es el alcance de $\forall y$ en $\emptyset$?



c) y tiene apariciones libres y acotadas

d) Alcance $\exists x$ es $P(y,z)$ y $(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))$

e) Alcance $\forall y$ es $(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))$

f) cambie la parentización en $\emptyset$ de tal manera que el alcance de $\exists x$ en la fórmula resultante sea $P(y,z)$, dibuje el árbol de sintaxis.

$$\exists x\, P(y,z) \wedge \forall y\,(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))$$