Profesor Materia

Institución Curso Nota

Ejercicios 5.3

5)

a) $\vdash_{DS} \varphi \to (\psi \to \varphi)$

$\psi \to \varphi$
$\Leftarrow$ ⟨ fortalecimiento: Teorema 4.31.4 $\varphi: \psi$, $\psi: \varphi$ ⟩
$\psi \equiv \varphi$
$\equiv$ ⟨ leibniz $\varphi: (P \vee true)$ ⟩
$\psi \vee true \equiv \varphi \vee true$
$\equiv$ ⟨ Teorema 4.19.2 $\varphi: \psi$ y leibniz $\varphi: P \equiv \varphi \vee true$ ⟩
$true \equiv \varphi \vee true$
$\equiv$ ⟨ teorema 4.19.2 y leibniz $\varphi: true \equiv P$ ⟩
$true \equiv true$
$\equiv$ ⟨ Ax 3 $\varphi: true$ ⟩
$true$
$\Leftarrow$ ⟨ fortalecimiento: Teorema 4.29.1 ⟩
φ

entonces $\vdash_{DS} \varphi \to (\psi \to \varphi)$

b) $\vdash_{DS} ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$

$((\varphi \to \psi) \to \varphi)$
$\equiv$ ⟨ Teorema 4.28.1 $\varphi: (\varphi \to \psi)$, $\psi: \varphi$ ⟩
$\neg(\varphi \to \psi) \vee \varphi$
$\equiv$ ⟨ Ax 5 $\varphi: \neg(\varphi \to \psi)$, $\psi: \varphi$ ⟩
$\varphi \vee \neg(\varphi \to \psi)$
$\Leftarrow$ ⟨ fortalecimiento: Teorema 4.35.1 $\psi: \neg(\varphi \to \psi)$ ⟩
φ
$\to$ ⟨ debilitamiento: Teorema 4.33.1 ⟩
φ

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$

c) $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \tau) \to (\varphi \to \tau))$

$(\varphi \to \psi)$
$\Leftarrow$ ⟨ fortalecimiento: Teorema 4.31.4 y leibniz $\varphi: P \equiv \tau$ ⟩
$(\varphi \equiv \tau) \equiv (\psi \equiv \tau)$
$\equiv$ ⟨ Ax 2 $\varphi: \varphi \equiv \tau$, $\psi: \psi \equiv \tau$ ⟩
$(\psi \equiv \tau) \equiv (\varphi \equiv \tau)$
$\to$ ⟨ debilitamiento: teorema 4.31.4 $\varphi: \psi$, $\psi: \tau$ y leibniz $\varphi: P \equiv (\varphi \equiv \tau)$ ⟩
$(\psi \to \tau) \equiv (\varphi \equiv \tau)$
$\to$ ⟨ debilitamiento: teorema 4.31.4 $\psi: \tau$ y leibniz $\varphi: \psi \to \tau \equiv P$ ⟩
$\psi \to \tau \equiv \varphi \to \tau$
$\to$ ⟨ debilitamiento: teorema 4.31.4 $\varphi: (\psi \to \tau)$, $\psi: (\varphi \to \tau)$ ⟩
$(\psi \to \tau) \to (\varphi \to \tau)$

entonces $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \tau) \to (\varphi \to \tau))$

6.

a) $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \vee \tau \to \psi \vee \tau)$

$\varphi \to \psi$

$\Leftarrow$ < fortalecimiento = teorema 4.31.4 y leibniz $\varphi := P \vee \tau$ >

$\varphi \vee \tau \equiv \psi \vee \tau$

$\Rightarrow$ < debilitamiento = teorema 4.31.4 $\varphi : \varphi \vee \tau$, $\psi : \psi \vee \tau$ >

$\varphi \vee \tau \to \psi \vee \tau$

entoncen $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \vee \tau \to \psi \vee \tau)$

b) $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \tau \to \psi \wedge \tau)$

$\varphi \to \psi$

$\Leftarrow$ < fortalecimiento = Teorema 4.31.4 y leibniz $\varphi := P \wedge \tau$ >

$\varphi \wedge \tau \equiv \psi \wedge \tau$

$\to$ < debilitamiento = teorema 4.31.4 $\varphi : \varphi \wedge \tau$, $\psi : \psi \wedge \tau$ >

$\varphi \wedge \tau \to \psi \wedge \tau$

entonces $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \tau \to \psi \wedge \tau)$

Ejercicios 5.4

8.

a) Si $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi \vee \psi$

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi$

< por met. coherencia >

$\Gamma \models \varphi$, $\forall (\varphi) = T$ < def. consecuencia tautologica >

$\vdash_{DS} \varphi$

φ

$\to$ < debilitamiento : Teorema 4.35.1 >

$\varphi \vee \psi$

entonces, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{DS} \varphi \vee \psi$, como $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$

entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi \vee \psi$

b) Si $\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$, entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$

<por metateorema coherencia>

$\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$, $v(\varphi \wedge \psi) = T$ <def. consecuencia tautologica>

$\vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$

$\varphi \wedge \psi$

$\rightarrow$ <debilitamiento: Teorema 4.35.2>

φ

entonces $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{DS} \varphi$, como $\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$

entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$

c) Si $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{DS} \psi$, entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi$ $\qquad$ $\Gamma \vdash_{DS} \psi$

<por met. coherencia>

$\Gamma \vDash \varphi$ $\qquad$ $\Gamma \vDash \psi$

$v(\varphi) = T$ $\qquad$ $v(\psi) = T$

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$

<por met. coherencia>

$\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$

$v(\varphi \wedge \psi) = T$

<por met. 2.23 ($\wedge$)>

$v(\varphi) = v(\psi) = T$

por reemplazo $v(\varphi) = v(\psi) = T$

entonces $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$, como $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{DS} \psi$,

entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \psi$

10. Demuestre: $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$ si y solo si $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ es insatisfacible.

si $\{\neg \varphi\}$ es insatisfacible

entonces $v(\neg \varphi) = F$

por met. 2.23

$v(\varphi) = T$

y $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$

como $v(\varphi) = T$, por met. de completitud

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi$

Institución Curso Nota

ejercicios 5.5

8) Para $a \in \mathbb{Z}$ demuestre:

$\neg(3 \cdot | a) \equiv 3 \cdot | (a^2 - 1)$

$\neg(3 \cdot | a) \equiv 3 \cdot | (a^2-1)$
$\Rightarrow$ < debilitamiento: Γ, 4, 3.1, 4 >
$\neg(3 \cdot | a) \Rightarrow 3 \cdot | (a^2 - 1)$

$\neg(3 \cdot | a) \vdash_{DS} 3 \cdot | (a^2 - 1)$

$a = 3c + 1$

$3 \cdot | (a^2 - 1)$
< Por suposición $a = 3c + 1$ >
$3 \cdot | ((3c+1)^2 - 1)$
< Por algebra y aritmetica >
$3 \cdot | 9c^2 + 6c$
< Por aritmetica >
$3 \cdot | 3c(3c+2)$
< Por aritmetica, $3C$ es multiplo de 3 y $3K$ $K \in \mathbb{N}$
es multiplo de 3 >
true
como es true es teorema por met. de completitud

10. Sean Γ una colección de proposiciones y $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ proposiciones. Demuestre que la siguiente técnica de demostración para una conjuntoria es correcta

$\Gamma \vdash_{DS} \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i$ sii $\Gamma \vdash_{DS} \varphi_i$, para cada $0 \leq i \leq n$

$\Gamma \models \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$ <met. de completitud>

$Q: \Gamma \vdash_{DS} \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i$ y $\Gamma \vdash_{DS} \varphi_n$

Γ es satisfacible y $V(\varphi) = T$

Si $n = 0$

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi$, $V(\varphi) = T$

Si $n = n+1$

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi \wedge \dots \wedge \varphi_{n+1}$, por suposición de Q.

$\Gamma \vdash_{DS} \varphi_n \wedge \varphi_{n+1}$, por met. 2.23 $(\wedge) \models \varphi_n \wedge \varphi_{n+1}$

$V(\varphi_n) = V(\varphi_{n+1}) = T$ y $\Gamma \vdash_{DS} \varphi_n \cdot \wedge \Gamma \vdash_{DS} \varphi_{n+1}$

11) Sea Γ una colección de proposiciones y $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ proposiciones. Demuestre que:

$\Gamma \vdash_{DS} \bigvee_{i=0}^{n} \varphi_i$ sii $\Gamma \vdash_{DS} \varphi_i$, para algún $0 \leq i \leq n$

$\Gamma \models \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{DS} \varphi$ < meta de completitud >

$Q: \Gamma \vdash_{DS} \bigvee_{i=0}^{n} \varphi_i \rightarrow \Gamma \vdash_{DS} \varphi_n$

Si $n = 0$:

$\Gamma \vdash_{DS} \bigvee_{i=0}^{0} \varphi_i \equiv \Gamma \vdash_{DS} \varphi$

Por met. de completitud $v(\varphi) = T$

Si $n = n+1$, se supone Q

$\Gamma \vdash_{DS} \bigvee_{i=0}^{n+1} \varphi_i \equiv \Gamma \vdash_{DS} \varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_n \vee \varphi_{n+1}$

por met. de completitud.

$v(\varphi_0 \vee \dots \vee \varphi_{n+1}) = T$

Por met. 2.23 (v)

$v(\varphi_j) = T \quad 0 \leq j \leq n$