Profesor | Materia

Institución | Curso | Nota

Ejercicios 4.5

*3) Demuestre que si una secuencia $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ de proposiciones en Ds es una demostración, entonces es una derivación.

$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ si es demostración $\vdash_{DS} \varphi_n$ y $\vdash_{DS} \varphi_0$ como

Por definición de derivación

φ_0
$\equiv$
φ_1
$\equiv$
$\vdots$
$\equiv$
φ_n , entonces $\vdash_{DS} (\varphi_0 \equiv \varphi_n)$

5) Considere una secuencia $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ de proposiciones en Ds. demuestre que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

✓ $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ es una derivación
✓ $\varphi_n, \ldots, \varphi_0$ es una derivación

Por metateorema 4.21

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ una derivación de Ds, entonces

$\vdash_{DS} (\varphi_0 \equiv \varphi_n)$

Por conmutatividad

$\vdash_{DS} (\varphi_n \equiv \varphi_0)$

Por tanto, las afirmaciones anteriores son equivalentes

*6) Considere una secuencia $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ de proposiciones Ds y las siguientes afirmaciones:

✓ $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ es una derivación
✓ $\vdash_{DS} (\varphi_0 \equiv \ldots \equiv \varphi_n)$

Justifique por qué estas dos afirmaciones no son equivalentes

φ_0 $\quad$ $\vdash_{DS} (\varphi_0 \equiv \varphi_n)$ por metateorema 4.21
$\equiv$
φ_1 $\quad$ $\vdash_{DS} (\varphi_0 \equiv \varphi_{n-1})$ por metateorema 4.21
$\equiv$
$\vdots$
$\equiv$
φ_n

Primavera® PAPERS KIDS

Para ser Teorema de DS, por derivación se define como la secuencia:

$$\begin{array}{l} \varphi_0 \\ \equiv \\ \vdots \\ \equiv \\ \varphi_n \end{array}$$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi_0 \equiv \varphi_n)$

Sin embargo no se puede concluir que $\vdash_{DS} (\varphi_0 \equiv \cdots \equiv \varphi_n)$

$$\begin{array}{l} \varphi_0 \\ \equiv \\ \vdots \\ \equiv \varphi_i \\ \vdots \\ \equiv \\ \varphi_n \end{array} \qquad 0 < i < n$$

porque lo que se está haciendo en sí es una transitividad por tanto se necesita de φ_i para: $\vdash_{DS} ((\varphi_0 \equiv \varphi_n)$

ejercicios 4.6

4) Demuestre el teorema 4.24.3

$\vdash_{DS} ((\varphi \wedge true) \equiv \varphi)$

$$\begin{array}{l}
(\varphi \wedge true) \\
\equiv \langle Ax\ 11 \quad \psi : true \rangle \\
(\varphi \equiv (true \equiv (\varphi \vee true))) \\
\equiv \langle Ax\ 1 \quad \psi : true,\ \tau : (\varphi \vee true) \rangle \\
((\varphi \equiv true) \equiv (\varphi \vee true)) \\
\equiv \langle Ax\ 3 \text{ y leibniz } \varphi : (P \equiv (\varphi \vee true)) \rangle \\
(\varphi \equiv (\varphi \vee true)) \\
\equiv \langle Ax\ 2 \quad \psi : (\varphi \vee true) \rangle \\
((\varphi \vee true) \equiv \varphi) \\
\equiv \langle \text{Teorema } 4.19.2 \text{ y leibniz } \varphi : (P \equiv \varphi) \rangle \\
(true \equiv \varphi) \\
\equiv \langle Ax\ 2 \quad \varphi : true,\ \psi : \varphi \rangle \\
(\varphi \equiv true) \\
\equiv \langle Ax\ 3 \text{ puro} \rangle \\
\varphi
\end{array}$$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \wedge true) \equiv \varphi)$

5) Demuestre el Teorema 4.24.4

$\vdash_{DS} ((\varphi \wedge false) \equiv false)$

$$\begin{array}{l}
(\varphi \wedge false) \\
\equiv \langle Ax\ 11 \quad \psi : false \rangle \\
(\varphi \equiv (false \equiv (\varphi \vee false))) \\
\equiv \langle Ax\ 1 \quad \psi : false,\ \tau : (\varphi \vee false) \rangle \\
((\varphi \equiv false) \equiv (\varphi \vee false)) \\
\equiv \langle Ax\ 6 \text{ y leibniz } \varphi : ((\varphi \equiv false) \equiv P) \rangle \\
((\varphi \equiv false) \equiv \varphi) \\
\equiv \langle Ax\ 9 \text{ leibniz } \varphi : (P \equiv \varphi) \rangle \\
((\neg\varphi) \equiv \varphi) \\
\equiv \langle Ax\ 2 \quad \varphi : (\neg\varphi),\ \psi : \varphi \rangle \\
(\varphi \equiv (\neg\varphi)) \\
\equiv \langle \text{Teorema } 4.15.7 \rangle \\
false
\end{array}$$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \wedge false) \equiv false)$

6) Demuestre el Teorema 4.24.5

$\vdash_{DS} ((\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi)$

$(\varphi \wedge \varphi)$
$\equiv \langle Ax\ 11 \quad \psi : \varphi \rangle$
$(\varphi \equiv (\varphi \equiv (\varphi \vee \varphi)))$
$\equiv \langle Ax\ 1 \quad \psi : \varphi,\ \tau : (\varphi \vee \varphi) \rangle$
$((\varphi \equiv \varphi) \equiv (\varphi \vee \varphi))$
$\equiv \langle Ax\ 7 \quad leibniz\ \theta : ((\varphi \equiv \varphi) \equiv P) \rangle$
$((\varphi \equiv \varphi) \equiv \varphi)$
$\equiv \langle$ teorema $4.6.2$ y leibniz $\theta : (P \equiv \varphi) \rangle$
$(true \equiv \varphi)$
$\equiv \langle Ax\ 2 \quad \varphi : true,\ \psi : \varphi \rangle$
$(\varphi \equiv true)$
$\equiv \langle Ax\ 3 \quad$ puro $\rangle$
φ

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi)$

8) Demuestre el Teorema 4.25.1

$\vdash_{DS} ((\varphi \wedge (\neg\varphi)) \equiv false)$

$(\varphi \wedge (\neg\varphi))$
$\equiv \langle Ax\ 11 \quad \psi : (\neg\varphi) \rangle$
$(\varphi \equiv ((\neg\varphi) \equiv (\varphi \vee (\neg\varphi))))$
$\equiv \langle Ax\ 1 \quad \psi : (\neg\varphi),\ \tau : (\varphi \vee (\neg\varphi)) \rangle$
$((\varphi \equiv (\neg\varphi)) \equiv (\varphi \vee (\neg\varphi)))$
$\equiv \langle Ax\ 2 \quad \psi : (\neg\varphi)$ y leibniz $\theta : (P \equiv (\varphi \vee (\neg\varphi))) \rangle$
$(((\neg\varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \vee (\neg\varphi)))$
$\equiv \langle Ax\ 1 \quad \varphi : (\neg\varphi),\ \psi : \varphi,\ \tau : (\varphi \vee (\neg\varphi)) \rangle$
$((\neg\varphi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \vee (\neg\varphi))))$
$\equiv \langle Ax\ 2 \quad \psi : (\varphi \vee (\neg\varphi))$ y leibniz $\theta : ((\neg\varphi) \equiv P) \rangle$
$((\neg\varphi) \equiv ((\varphi \vee (\neg\varphi)) \equiv \varphi))$
$\equiv \langle$ Teorema $4.19.4 \quad \psi : \varphi$ y leibniz $\theta : ((\neg\varphi) \equiv P) \rangle$
$((\neg\varphi) \equiv (\varphi \vee \varphi))$
$\equiv \langle Ax\ 7$ y leibniz $\theta : ((\neg\varphi) \equiv P) \rangle$
$((\neg\varphi) \equiv \varphi)$
$\equiv \langle Ax\ 2 \quad \varphi : (\neg\varphi),\ \psi : \varphi \rangle$
$(\varphi \equiv (\neg\varphi))$
$\equiv \langle$ Teorema $4.15.7 \rangle$
$false$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \wedge (\neg\varphi)) \equiv false)$

9) Demuestre el Teorema 4.25.2

$\vdash_{DS} ((\neg(\varphi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)))$

$((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.19.4 $\varphi := (\neg\varphi), \psi := (\neg\psi) \rangle$

$((((\neg\varphi) \vee (\neg(\neg\psi))) \equiv (\neg\varphi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.15.6 $\varphi := \psi$ y leibniz $\varphi := (((\neg\varphi) \vee P) \equiv (\neg\varphi)) \rangle$

$(((\neg\varphi) \vee \psi) \equiv (\neg\varphi))$

$\equiv \langle$ Ax5 $\varphi := (\neg\varphi)$ y leibniz $\varphi := (P \equiv (\neg\varphi)) \rangle$

$((\psi \vee (\neg\varphi)) \equiv (\neg\varphi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.19.4 $\varphi := \psi, \psi := (\neg\varphi)$ y leibniz $\varphi := (P \equiv (\neg\varphi)) \rangle$

$(((\psi \vee (\neg(\neg\varphi))) \equiv \psi) \equiv (\neg\varphi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.15.6 y leibniz $\varphi := (((\psi \vee P) \equiv \psi) \equiv (\neg\varphi)) \rangle$

$(((\psi \vee \varphi) \equiv \psi) \equiv (\neg\varphi))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\varphi := (\psi \vee \varphi), \tau := (\neg\varphi) \rangle$

$((\psi \vee \varphi) \equiv (\psi \equiv (\neg\varphi)))$

$\equiv \langle$ Ax2 $\varphi := \psi, \psi := (\neg\varphi)$ y leibniz $\varphi := ((\psi \vee \varphi) \equiv P) \rangle$

$((\psi \vee \varphi) \equiv ((\neg\varphi) \equiv \psi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.15.4 y leibniz $\varphi := ((\psi \vee \varphi) \equiv P) \rangle$

$((\psi \vee \varphi) \equiv (\neg(\varphi \equiv \psi)))$

$\equiv \langle$ Ax2 $\varphi := (\psi \vee \varphi), \psi := (\neg(\varphi \equiv \psi)) \rangle$

$((\neg(\varphi \equiv \psi)) \equiv (\psi \vee \varphi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.15.4 $\varphi := (\varphi \equiv \psi), \psi := (\psi \vee \varphi) \rangle$

$(\neg((\varphi \equiv \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)))$

$\equiv \langle$ Ax5 $\varphi := \psi, \psi := \varphi$ y leibniz $\varphi := (\neg((\varphi \equiv \psi) \equiv P)) \rangle$

$(\neg((\varphi \equiv \psi) \equiv (\varphi \vee \psi)))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\tau := (\varphi \vee \psi)$ y leibniz $\varphi := (\neg P) \rangle$

$(\neg(\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))))$

$\equiv \langle$ Ax11 y leibniz $\varphi := (\neg P) \rangle$

$(\neg(\varphi \wedge \psi))$

entonces $\vdash_{DS} (((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \equiv (\neg(\varphi \wedge \psi)))$ y por conmutatividad
$\vdash_{DS} ((\neg(\varphi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)))$

11) Demuestre el teorema 4.25.4

$\vdash_{DS} ((\varphi \wedge (\psi \equiv \tau)) \equiv (((\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \tau)) \equiv \varphi))$.

$(\varphi \wedge (\psi \equiv \tau))$

$\equiv \langle$ Ax11 $\psi := (\psi \equiv \tau) \rangle$

$(\varphi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv (\varphi \vee (\psi \equiv \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 y leibniz $\varphi := (\varphi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv P)) \rangle$

$(\varphi \equiv ((\psi \equiv \tau) \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\varphi := \psi, \psi := \tau, \tau := ((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \tau))$ y leibniz $\varphi := (\varphi \equiv P) \rangle$

$(\varphi \equiv (\psi \equiv (\tau \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \tau)))))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\varphi := \tau, \psi := (\varphi \vee \psi), \tau := (\varphi \vee \tau)$ y leibniz $\varphi := (\varphi \equiv (\psi \equiv P)) \rangle$

$(\varphi \equiv (\psi \equiv ((\tau \equiv (\varphi \vee \psi)) \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax2 $\varphi := \tau, \psi := (\varphi \vee \psi)$ y leibniz $\varphi := (\varphi \equiv (\psi \equiv (P \equiv (\varphi \vee \tau)))) \rangle$

$(\varphi \equiv (\psi \equiv (((\varphi \vee \psi) \equiv \tau) \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\varphi := (\varphi \vee \psi), \psi := \tau, \tau := (\varphi \vee \tau)$ y leibniz $\varphi := (\varphi \equiv (\psi \equiv P)) \rangle$

$(\varphi \equiv (\psi \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau)))))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\varphi := \psi, \psi := (\varphi \vee \psi), \tau := (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))$ y leibniz $\varphi := (\varphi \equiv P) \rangle$

$(\varphi \equiv ((\psi \equiv (\varphi \vee \psi)) \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\psi := (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)), \tau := (\tau \equiv (\varphi \vee \tau)) \rangle$

$((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau)))$

$\equiv \langle$ Ax11 y leibniz $\varphi := (P \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))) \rangle$

$((\varphi \wedge \psi) \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau)))$

Profesor Materia

Institución Curso Nota

$\equiv \langle$ leibniz $\varphi : (\varphi \equiv p) \rangle$

$((\varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv (\varphi \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax11 $\psi : \tau$ y leibniz $\varphi : ((\varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv p) \rangle$

$((\varphi \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv (\varphi \wedge \tau))$

$\equiv \langle$ Ax1 $\psi : (\varphi \wedge \psi)$, $\tau : (\varphi \wedge \tau) \rangle$

$(\varphi \equiv ((\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \tau)))$

$\equiv \langle$ Ax2 $\psi : ((\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \tau)) \rangle$

$(((\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \tau)) \equiv \varphi)$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \wedge (\psi \equiv \tau)) \equiv (((\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \tau)) \equiv \varphi))$

13) Demuestre el teorema 4.25.6

$\vdash_{DS} ((\varphi \wedge (\psi \vee \tau)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau)))$

$((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau))$

$\equiv \langle$ Ax11 y leibniz $\varphi : (p \vee (\varphi \wedge \tau)) \rangle$

$((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\varphi \wedge \tau))$

$\equiv \langle$ Ax11 $\psi : \tau$ y leibniz $\varphi : ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee p) \rangle$

$((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\varphi \equiv (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 $\varphi : (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))$, $\psi : \varphi$, $\tau : (\tau \equiv (\varphi \vee \tau)) \rangle$ x

$(((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee \varphi) \equiv \overline{((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))}$

$\equiv \langle$ Ax5 $\varphi : (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))$, $\psi : \varphi$ y leibniz $\varphi : (p \equiv x) \rangle$

$((\varphi \vee (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 $\psi : \varphi$, $\tau : (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))$ y leibniz $\varphi : (p \equiv x) \rangle$

$(((\varphi \vee \varphi) \equiv (\varphi \vee (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax7 y leibniz $\varphi : ((p \equiv (\varphi \vee (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))) \equiv x) \rangle$

$((\varphi \equiv (\varphi \vee (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 $\tau : (\varphi \vee \psi)$ y leibniz $\varphi : ((\varphi \equiv p) \equiv x)) \rangle$

$((\varphi \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax4 $\psi : \varphi$, $\tau : \psi$ y leibniz $\varphi : ((\varphi \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv p)) \equiv x) \rangle$

$((\varphi \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv ((\varphi \vee \varphi) \vee \psi))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax7 y leibniz $\varphi : ((\varphi \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv (p \vee \psi))) \equiv x) \rangle$

$((\varphi \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \psi))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ teorema 4.6.2 $\varphi : (\varphi \vee \psi)$ y leibniz $\varphi : ((\varphi \equiv p) \equiv x) \rangle$

$((\varphi \equiv true) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax3 y leibniz $\varphi : (p \equiv x) \rangle$

$(\varphi \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\tau \equiv (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 $\varphi : (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))$, $\psi : \tau$, $\tau : (\varphi \vee \tau)$ y leibniz $\varphi : (\varphi \equiv p) \rangle$

$(\varphi \equiv (((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee \tau) \equiv \underline{((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\varphi \vee \tau))}))$ $\to y$

$\equiv \langle$ Ax5 $\varphi : (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))$, $\psi : \tau$ y leibniz $\varphi : (\varphi \equiv (p \equiv y)) \rangle$

$(\varphi \equiv ((\tau \vee (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 $\varphi : \tau$, $\psi : \varphi$, $\tau : (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))$ y leibniz $\varphi : (\varphi \equiv (p \equiv y)) \rangle$

$(\varphi \equiv (((\tau \vee \varphi) \equiv (\tau \vee (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax8 $\varphi : \tau$, $\tau : (\varphi \vee \psi)$ y leibniz $\varphi : (\varphi \equiv (((\tau \vee \varphi) \equiv p) \equiv y)) \rangle$

$z :$ $\underline{(\varphi \equiv (((\tau \vee \varphi) \equiv ((\tau \vee \psi) \equiv (\tau \vee (\varphi \vee \psi)))))} \equiv ((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))) \vee (\varphi \vee \tau))))$

$\equiv \langle$ Ax5 $\varphi : (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi)))$, $\psi : (\varphi \vee \tau)$ y leibniz $\varphi : (z \equiv p) \rangle$

$(\varphi \equiv (((\tau \vee \varphi) \equiv ((\tau \vee \psi) \equiv (\tau \vee (\varphi \vee \psi)))) \equiv ((\varphi \vee \tau) \vee (\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \vee \psi))))))$

$\equiv \langle Ax8\ \varphi:(\varphi\vee\tau),\ \psi:\varphi,\ \tau:(\psi\equiv(\varphi\vee\psi))$ y leibniz $\varphi:(z\equiv p)\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\varphi)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi))))))$

$\equiv \langle Ax5\ \varphi:(\varphi\vee\tau),\ \psi:\varphi$ y leibniz $\varphi:(z\equiv(p\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi)))))\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv((\varphi\vee(\varphi\vee\tau))\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi))))))$

$\equiv \langle Ax4\ \psi:\varphi,$ y labniz $\varphi:(z\equiv(p\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi)))))\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv(((\varphi\vee\varphi)\vee\tau)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi))))))$

$\equiv \langle Ax7$ y leibniz $\varphi:(z\equiv((p\vee\tau)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi)))))\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\psi\equiv(\varphi\vee\psi))))))$

$\equiv \langle Ax8\ \varphi:(\varphi\vee\tau),\ \tau:(\varphi\vee\psi)$ y leibniz $\varphi:(z\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv p))\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\psi)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee(\varphi\vee\psi))))))$

$\equiv \langle Ax4\ \varphi:(\varphi\vee\tau),\ \psi:\varphi,\ \tau:\psi$ y leibniz $\varphi:(z\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\psi)\equiv p)))\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\psi)\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\varphi)\vee\psi)))))$

$\equiv \langle Ax5\ \varphi:(\varphi\vee\tau),\ \psi:\varphi,\ Ax4\ \psi:\varphi$ y leibniz $\varphi:(z\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\psi)\equiv p)))\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\psi)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee\psi)))))$

$\equiv \langle Ax1\rangle$

$(\overbrace{(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv(\varphi\vee\tau)))}^{\ell}\equiv(((\varphi\vee\tau)\vee\psi)\equiv((\varphi\vee\tau)\vee\psi)))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.6.2 $\varphi:((\varphi\vee\tau)\vee\psi)$ y leibniz $\varphi:(\ell\equiv p)\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))\equiv(\varphi\vee\tau))\equiv true)$

$\equiv \langle Ax3$ y $Ax2\ \varphi:((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi)))),\ \psi:(\varphi\vee\tau)$ y leibniz $\varphi:(\varphi\equiv p)\rangle$

$((\varphi\equiv((\varphi\vee\tau)\equiv((\tau\vee\varphi)\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))))$

$\equiv \langle Ax5\ \psi:\tau$ y $Ax2\ \varphi:(\tau\vee\varphi),\ \psi:(\tau\vee\varphi),\ \tau:((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi)))$ y leibniz $\varphi:(\varphi\equiv p)\rangle$

$(\varphi\equiv(((\tau\vee\varphi)\equiv(\tau\vee\varphi))\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi)))))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.6.2 $\varphi:(\tau\vee\varphi)$ y leibniz $\varphi:(\varphi\equiv(p\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi)))))\rangle$

$(\varphi\equiv(true\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi)))))$

$\equiv \langle Ax2\ \varphi:true,\ \psi:((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))),\ Ax3\ \varphi:((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi)))$ y leibniz $\varphi:(\varphi\equiv p)\rangle$

$(\varphi\equiv((\tau\vee\psi)\equiv(\tau\vee(\varphi\vee\psi))))$

$\equiv \langle Ax5\ \varphi:\tau,\ Ax5\ \varphi:\tau,\ \psi:(\varphi\vee\psi),$ leibniz $\varphi:(\varphi\equiv p)\rangle$

$(\varphi\equiv((\psi\vee\tau)\equiv((\varphi\vee\psi)\vee\tau)))$

$\equiv \langle Ax4$ y leibniz $\varphi:(\varphi\equiv((\psi\equiv\tau)\equiv p))\rangle$

$(\varphi\equiv((\psi\vee\tau)\equiv(\varphi\vee(\psi\vee\tau))))$

$\equiv \langle Ax11\ \psi:(\psi\vee\tau)\rangle$

$(\varphi\wedge(\psi\vee\tau))$

entonces $\vdash_{DS}(((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\tau))\equiv(\varphi\wedge(\psi\vee\tau)))$ y por conmutatividad de la equivalencia

$$\vdash_{DS}((\varphi\wedge(\psi\vee\tau))\equiv((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\tau)))$$

16) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\varphi}$$ DEBILITAMIENTO

Explique brevemente el significado de la regla, de un ejemplo y demuestre que es correcta.

$\vdash_{DS} (\varphi \wedge \psi)$, si es teorema de DS es tautología, entonces:

$\models (\varphi \wedge \psi)$ por definición

$V(\varphi \wedge \psi) = T$
Por metateorema 2.23

$V(\varphi) = V(\psi) = T$

$\vdash_{DS} \varphi$
$\models \varphi$
$V(\varphi) = T$
Por reemplazo
$T = T$ ✓

17) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{(\varphi \wedge \psi)}$$ unión

Explique brevemente el significado de la regla, de un ejemplo y demuestre que es correcta.

$\vdash_{DS} \varphi$ $\quad \vdash_{DS} \psi$, si es teorema de DS es tautología, entonces:

$V(\varphi) = V(\psi) = T$

$\vdash_{DS} (\varphi \wedge \psi)$, $V(\varphi \wedge \psi) = T$
Por reemplazo y metateorema 2.23
$V(\varphi) = V(\psi) = T$

Ejercicios 4.7

10) Demuestre el Teorema 4.30.3

$\vdash_{DS} ((\varphi \to (\psi \land \tau)) \equiv ((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \tau)))$

$(\varphi \to (\psi \land \tau))$
$\equiv$ < Teorema 4.28.2 $\psi : (\psi \land \tau)$ >
$((\varphi \land (\psi \land \tau)) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < Teorema 4.24.2 $\psi : (\psi \land \tau)$ y leibniz $\varphi : (p \equiv \varphi)$ >
$(((\psi \land \tau) \land \varphi) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < Teorema 4.24.1 $\varphi : \psi, \psi : \tau, \tau : \varphi$ y leibniz $\varphi : (p \equiv \varphi)$ >
$((\psi \land (\tau \land \varphi)) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < teorema 4.24.2 $\varphi : \tau, \psi : \varphi$ y leibniz $\varphi : ((\psi \land p) \equiv \varphi)$ >
$((\psi \land (\varphi \land \tau)) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < AX 11 $\psi : \tau$ y leibniz $\varphi : ((\psi \land p) \equiv \varphi)$ >
$((\psi \land (\varphi \equiv (\tau \equiv (\varphi \lor \tau)))) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < Ax 2 $\varphi : \tau, \psi : (\varphi \lor \tau)$ y leibniz $\varphi : ((\psi \land (\varphi \equiv p)) \equiv \varphi)$ >
$((\psi \land (\varphi \equiv ((\varphi \lor \tau) \equiv \tau))) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < AX 12 $\psi : \tau$ y leibniz $\varphi : ((\psi \land (\varphi \equiv p)) \equiv \varphi)$ >
$((\psi \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < leibniz $\varphi : (\varphi \land p)$ >
$((\varphi \land (\psi \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau)))) \equiv (\varphi \land \varphi))$
$\equiv$ < Teorema 4.24.1 $\psi : (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))$ y leibniz $\varphi : (p \equiv (\varphi \land \varphi))$ >
$(((\varphi \land \psi) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (\varphi \land \varphi))$
$\equiv$ < Ax 11 y leibniz $\varphi : ((p \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (\varphi \land \varphi))$ >
$(((\varphi \equiv (\psi \equiv (\varphi \lor \psi))) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (\varphi \land \varphi))$
$\equiv$ < Ax 2 $\varphi : \psi, \psi : (\varphi \lor \psi)$ y leibniz $\varphi : (((\varphi \equiv p) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau)) \equiv (\varphi \land \varphi))$ >
$(((\varphi \equiv ((\varphi \lor \psi) \equiv \psi)) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (\varphi \land \varphi))$
$\equiv$ < Ax 12 y leibniz $\varphi : (((\varphi \equiv p) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (\varphi \land \varphi))$ >
$(((\varphi \equiv (\varphi \to \psi)) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (\varphi \land \varphi))$
$\equiv$ < Teorema 4.24.5 y leibniz $\varphi : (((\varphi \equiv (\varphi \to \psi)) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv p)$ >
$(((\varphi \equiv (\varphi \to \psi)) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv \varphi)$

p	q	r	$(p \to q)$	$\overbrace{((p \to q) \equiv p)}^{A}$	$(p \to r)$	$\overbrace{((p \to r) \equiv p)}^{B}$	$(A \land B)$	$\overbrace{((p \to q) \land (p \to r))}^{C}$	$(C \equiv p)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	T	F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F	F	T	F
F	F	F	T	F	T	F	F	T	F

$\varphi : (((p \equiv (p \to q)) \land (p \equiv (p \to r))) \equiv (((p \to q) \land (p \to r)) \equiv p))$

$\varphi : [p := \varphi, q := \psi, r := \tau]$

lema 1.
$(((\varphi \equiv (\varphi \to \psi)) \land (\varphi \equiv (\varphi \to \tau))) \equiv (((\varphi \to \psi) \land ((\varphi \to \tau)) \equiv \varphi))$

$\equiv$ < lema 1 y leibniz $\varphi : (p \equiv \varphi)$ >
$((((\varphi \to \psi) \land ((\varphi \to \tau)) \equiv \varphi) \equiv \varphi)$
$\equiv$ < AX 1 $\varphi : ((\varphi \to \psi) \land ((\varphi \to \tau))$, $\psi : \varphi$, $\tau : \varphi$ >
$(((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \tau)) \equiv (\varphi \equiv \varphi))$
$\equiv$ < Teorema 4.6.2 leibniz $\varphi : (((\varphi \to \psi) \land ((\varphi \to \tau)) \equiv p)$ >
$(((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \tau)) \equiv true)$
$\equiv$ < Ax 3 $\varphi : ((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \tau))$ >
$((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \tau))$
entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \to (\psi \land \tau)) \equiv ((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \tau)))$

15) Demuestre el Teorema 4.31.3

$\vdash_{DS} ((\phi \equiv \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)))$

$(\phi \equiv \psi)$

$\equiv \langle \text{leibniz } \phi : (\phi \rightarrow p) \rangle$

$((\phi \rightarrow \phi) \equiv (\phi \rightarrow \psi))$

$\equiv \langle \text{Ax 12 } \psi : \phi \text{ y leibniz } \phi : (p \equiv (\phi \rightarrow \psi)) \rangle$

$(((\phi \vee \phi) \equiv \phi) \equiv (\phi \rightarrow \psi))$

$\equiv \langle \text{Ax 7 y leibniz } \phi : ((p \equiv \phi) \equiv (\phi \rightarrow \psi)) \rangle$

$((\phi \equiv \phi) \equiv (\phi \rightarrow \psi))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.6.2 y leibniz } \phi : (p \equiv (\phi \rightarrow \psi)) \rangle$

$(true \equiv (\phi \rightarrow \psi))$

$\equiv \langle \text{Ax 2 } \phi : true, \psi : (\phi \rightarrow \psi) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \equiv true)$

$\equiv \langle \text{Ax 3 } \phi : (\phi \rightarrow \psi) \rangle$

$(\phi \rightarrow \psi)$

$\equiv \langle \text{teorema 4.24.5 } \phi : (\phi \rightarrow \psi) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.28.2 y leibniz } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge p) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \wedge \psi) \equiv \phi))$

$\equiv \langle \text{Ax 11 y leibniz } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (p \equiv \phi)) \rangle$

$(((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \vee \psi))) \equiv \phi))$

$\equiv \langle \text{Ax 1 } \tau : (\phi \vee \psi) \text{ y leibniz } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (p \equiv \phi)) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \wedge (((\phi \equiv \psi) \equiv (\phi \vee \psi)) \equiv \phi))$

$\equiv \langle \text{Ax 1 } \phi : (\phi \equiv \psi), \psi : (\phi \vee \psi), \tau : \phi \text{ y leibniz } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge p) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv \psi) \equiv ((\phi \vee \psi) \equiv \phi)))$

$\equiv \langle \text{Ax 5 y leibniz } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv \psi) \equiv (p \equiv \phi))) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv \psi) \equiv ((\psi \vee \phi) \equiv \phi)))$

$\equiv \langle \text{Ax 12 } \phi : \psi, \psi : \phi \text{ y leibniz } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv \psi) \equiv p)) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv \psi) \equiv (\psi \rightarrow \phi)))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.25.4 } \phi : (\phi \rightarrow \psi); \psi : (\phi \equiv \psi), \tau : (\psi \rightarrow \phi) \rangle$

$((((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))) \equiv (\phi \rightarrow \psi))$

$\equiv \langle \text{Ax 2 } \phi : (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \wedge ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))), \psi : (\phi \rightarrow \psi) \rangle$

$((\phi \rightarrow \psi) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))))$

$\equiv \langle \text{Ax 1 } \phi : (\phi \rightarrow \psi), \psi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)), \tau : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rangle$

$((((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi))) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)))$

$\equiv \langle \text{leibniz } \phi : (p \wedge (\phi \equiv \psi)) \rangle$

$((((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi))) \wedge (\phi \equiv \psi)) \equiv \overbrace{(((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi))}^{X}$

$\equiv \langle \text{teorema 4.24.2 } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi))), \psi : (\phi \equiv \psi) \text{ y leibniz } \phi : (p \equiv X)$

$(((\phi \equiv \psi) \wedge ((\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)))) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi))$

$\equiv \langle \text{teorema 4.25.4 } \phi : (\phi \equiv \psi), \psi : (\phi \rightarrow \psi), \tau : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \text{ y leibniz } \phi : (p \equiv X) \rangle$

$((((\phi \equiv \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \wedge (\phi \equiv \psi))) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.24.1 } \phi : (\phi \rightarrow \psi), \psi : (\phi \equiv \psi), \tau : (\phi \equiv \psi) \text{ y leibniz } \phi : ((((\phi \equiv \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \equiv p) \equiv X) \rangle$

$((((\phi \equiv \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge ((\phi \equiv \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)))) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.24.5 } \phi : (\phi \equiv \psi) \text{ y leibniz } \phi : ((((\phi \equiv \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge p)) \equiv X) \rangle$

$((((\phi \equiv \psi) \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi))) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.24.2 } \phi : (\phi \equiv \psi), \psi : (\phi \rightarrow \psi) \text{ y leibniz } \phi : ((p \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi))) \equiv X) \rangle$

$((((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi))) \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)))$

$\equiv \langle \text{Teorema 4.6.2 } \phi : ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \equiv \psi)) \text{ y leibniz } \phi : (p \equiv X) \rangle$

$(true \equiv (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)))$

$\equiv \langle \text{Ax 2 } \phi : true \ \psi : (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)) \rangle$

$((((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)) \equiv true)$

$\equiv \langle \text{Ax 3 } \phi : (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi)) \rangle$

$(((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \equiv \psi))$

$\equiv \langle \text{leibniz } \phi : (((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge (\phi \rightarrow p)) \rangle$

$(((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \wedge ((\phi \rightarrow \phi) \equiv (\psi \rightarrow \phi)))$

$\equiv \langle Ax12 \ \psi: \varphi$ y leibniz $Q: (((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge (P \equiv (\psi \to \varphi))) \rangle$

$(((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge (((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\psi \to \varphi)))$

$\equiv \langle Ax7$ y leibniz $Q: (((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge ((P \equiv \varphi) \equiv (\psi \to \varphi))) \rangle$

$(((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge ((\varphi \equiv \varphi) \equiv (\psi \to \varphi)))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.6.2 y leibniz $Q: (((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge (P \equiv (\psi \to \varphi))) \rangle$

$(((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge (true \equiv (\psi \to \varphi)))$

$\equiv \langle Ax2 \ \varphi: true, \ \psi: (\psi \to \varphi)$ y leibniz $Q: (((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge P) \rangle$

$(((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge ((\psi \to \varphi) \equiv true))$

$\equiv \langle Ax3 \ \varphi: (\psi \to \varphi)$ y leibniz $Q: (((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge P) \rangle$

$(((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \wedge (\psi \to \varphi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.24.1 $\varphi: (\varphi \to \psi), \ \psi: (\psi \to \varphi), \ \tau: (\psi \to \varphi) \rangle$

$((\varphi \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \wedge (\psi \to \varphi)))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.24.5 $\varphi: (\psi \to \varphi)$ y leibniz $Q: ((\varphi \to \psi) \wedge P) \rangle$

$((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \equiv \psi) \equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)))$

17) Demuestre el teorema 4.31.5

$\vdash_{DS} ((\varphi \to (\psi \to \tau)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \to \tau))$

$((\varphi \to (\psi \to \tau))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.28.2 $\psi: (\psi \to \tau) \rangle$

$((\varphi \wedge (\psi \to \tau)) \equiv \varphi)$

$\equiv \langle$ Teorema 4.28.2 $\varphi: \psi, \ \psi: \tau$ y leibniz $Q: ((\varphi \wedge P) \equiv \varphi) \rangle$

$((\varphi \wedge ((\psi \wedge \tau) \equiv \psi)) \equiv \varphi)$

$\equiv \langle$ Teorema 4.25.4 $\psi: (\psi \wedge \tau), \ \tau: \psi$ y leibniz $Q: (P \equiv \varphi) \rangle$

$((((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv \varphi) \equiv \varphi)$

$\equiv \langle Ax1 \ \varphi: ((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi)), \ \psi: \varphi, \ \tau: \varphi \rangle$

$(((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv (\varphi \equiv \varphi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.6.2 y leibniz $Q: (((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv P) \rangle$

$(((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi)) \equiv true)$

$\equiv \langle Ax3 \ \varphi: ((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi)) \rangle$

$((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \equiv (\varphi \wedge \psi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.24.1 y leibniz $Q: (P \equiv (\varphi \wedge \psi)) \rangle$

$(((\varphi \wedge \psi) \wedge \tau) \equiv (\varphi \wedge \psi))$

$\equiv \langle$ Teorema 4.28.2 $\varphi: (\varphi \wedge \psi), \ \psi: \tau \rangle$

$((\varphi \wedge \psi) \to \tau)$

entonces $\vdash_{DS} ((\varphi \to (\psi \to \tau)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \to \tau))$

Nombre	Fecha día mes año
Profesor	Materia
Institución	Curso Nota

22) Demuestre el teorema 4.33-1

$\vdash_{DS} (\varphi \to \varphi)$

1. $(\varphi \equiv \varphi)$ $\langle$ Teorema 4.6.3 $\rangle$
2. $((\varphi \to \varphi) \equiv (\varphi \to \varphi))$ $\langle$ Leibniz 1 $\varphi : (\varphi \to p)$ $\rangle$
3. $((\varphi \to \varphi) \equiv ((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi))$ $\langle$ Ax 12 $\psi : \varphi$ $\rangle$
4. $((\varphi \to \varphi) \equiv ((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi))$ $\langle$ transitividad 2,3 $\rangle$
5. $(((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \vee \varphi)))$ $\langle$ Ax2 $\psi : (\varphi \vee \varphi)$ $\rangle$
6. $((\varphi \to \varphi) \equiv (\varphi \equiv (\varphi \vee \varphi)))$ $\langle$ Transitividad 4,5 $\rangle$
7. $(((\varphi \to \varphi) \equiv \varphi) \equiv (\varphi \vee \varphi))$ $\langle$ Regla asociatividad 6 $\rangle$
8. $((\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi)$ $\langle$ Ax7 puro $\rangle$
9. $(((\varphi \to \varphi) \equiv \varphi) \equiv \varphi)$ $\langle$ Transitividad 7,8 $\rangle$
10. $((\varphi \to \varphi) \equiv (\varphi \equiv \varphi))$ $\langle$ Regla asociatividad 9 $\rangle$
11. $((\varphi \equiv \varphi) \equiv true)$ $\langle$ Teorema 4.6.2 $\rangle$
12. $((\varphi \to \varphi) \equiv true)$ $\langle$ Transitividad 10,11 $\rangle$
13. $(\varphi \to \varphi)$ $\langle$ identidad en 12 $\rangle$

23) Demuestre el teorema 4.33.2

$\vdash_{DS} (((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \tau)) \to (\varphi \to \tau))$

1. (

43) la propiedad de "Modus Ponens", más que como Teorema, se usa como regla de inferencia en los sistemas formales Tradicionales de la lógica proposicional:

$$\frac{\varphi \quad (\varphi \to \psi)}{\psi} \text{ Modus Ponens}$$

Demuestre que es correcta.

$\vdash_{DS} \varphi$, $\vdash_{DS} (\varphi \to \psi)$ al ser teoremas deben ser tautología, entonces

$V(\varphi) = T$ $\quad V(\varphi \to \psi) = T$

Por reemplazo

$V(T \to \psi) = T$

Por metateorema 2.23

$V(\psi) = T$

entonces $\vdash_{DS} \psi$

44) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{(\varphi \to \psi) \quad (\neg\psi)}{(\neg\varphi)} \text{ Modus ToLens}$$

a) explique brevemente el significado.

Si se tiene una implicación y uno de sus componentes negados, entonces se obtiene el otro de ellos negado

demuestrela.

$V(\varphi \to \psi) = T$ $\quad V(\neg\psi) = T$

Por reemplazo $\quad V(\psi) = F$

$V(\varphi \to F) = T$

Por met. 2.23

$V(\varphi) = F \Rightarrow V(\neg\varphi) = T$

la relación que tiene con Modus Ponens, se pueden ver como los opuestos, ya que en Modus ponens está de forma "positiva" y en Modus Tolens se encuentra "Negada"

45) Considere la siguiente regla de inferencia:

$$\frac{(\varphi \to \psi) \quad (\psi \to \tau)}{(\varphi \to \tau)} \text{ Transitividad}$$

$V(\varphi \to \psi) = T$ $\quad V(\psi \to \tau) = T$

- $V(\varphi) = V(\psi) = T$ $\quad$ • $V(\tau) = V(\psi) = T$
- $V(\varphi) = T \; V(\psi) = F$ $\quad$ • $V(\tau) = T \; V(\psi) = F$
- $V(\psi) = T \; V(\varphi) = F$ $\quad$ • $V(\psi) = T \; V(\tau) = F$

la relación que tiene con la regla de corte se debe a que la implicación se puede definir en terminos de disyunción, por Teorema 4.28.1

$\vdash_{DS} ((\varphi \to \psi) \equiv ((\neg\varphi) \vee \psi))$.

$V(\varphi \to \tau) = T$

$V(\varphi) = V(\tau) = T$

las mismas V que hacen T a $(\varphi \to \psi)$ y $(\psi \to \tau)$, son las mismas que hacen T a $(\varphi \to \tau)$

Profesor Materia

Institución Curso Nota

Ejercicios 5.1

1) Elimine tantos paréntesis como sea posible de las siguientes proposiciones sin introducir ambigüedad.

c) $((\varphi \vee (\psi \vee \tau)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \vee \tau))$

R/ $\varphi \vee \psi \vee \tau \equiv \varphi \vee \psi \vee \tau$

f) $((\neg \varphi) \equiv (\varphi \equiv false))$

R/ $\neg \varphi \equiv \varphi \equiv false$

m) $((\varphi \equiv (\neg \varphi)) \equiv false)$

R/ $\varphi \equiv \neg \varphi \equiv false$

t) $((\varphi \rightarrow \psi) \equiv ((\varphi \vee \psi) \equiv \psi))$

R/ $\varphi \rightarrow \psi \equiv \varphi \vee \psi \equiv \psi$

w) $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \tau)) \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \tau)))$

R/ $\varphi \rightarrow \psi \vee \tau \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \tau)$

x) $((\varphi \rightarrow (\psi \wedge \tau)) \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \tau)))$

R/ $\varphi \rightarrow \psi \wedge \tau \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \tau)$

z) $(((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \equiv \psi))$

R/ $\varphi \vee \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi \equiv \varphi \equiv \psi$

2) Determine si alguna de las siguientes expresiones es ambigua, de serlo, liste todas las posibles formas de parentizarla.

a) $p \vee q \wedge r$

✓ $p \vee (q \wedge r)$
✓ $(p \vee q) \wedge r$

b) $p \wedge q \vee r$

✓ $(p \wedge q) \vee r$
✓ $p \wedge (q \vee r)$

c) $p \rightarrow q \rightarrow r$

✓ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
✓ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

d) $p \rightarrow q \leftarrow r$

✓ $p \rightarrow (q \leftarrow r)$
✓ $(p \rightarrow q) \leftarrow r$

e) $p \leftarrow q \rightarrow r$

✓ $(p \leftarrow q) \rightarrow r$
✓ $p \leftarrow (q \rightarrow r)$

Hecho por Primavera® PAPERS KIDS

5) considere las siguientes expresiones en el lenguaje de DS; algunas de ellas no son formulas del sistema formal. Para cada una de ellas encuentre una parentización de tal manera que la proposición resultante sea una tautología:

a) $true \vee p \wedge q$, por metateorema 2.23

R/ $true \vee (p \wedge q)$

b) $p \equiv p \vee q$, por metateorema 2.23

R/ $(p \equiv p) \vee q$

c) $p \rightarrow q \equiv r \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$

R/ $p \rightarrow (q \equiv r) \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$

d) $p \equiv q \not\equiv r \leftarrow false \wedge p$, por metateorema 2.23

R/ $((p \equiv q) \not\equiv r) \leftarrow false \wedge p$

e) $\neg p \wedge p \equiv p \rightarrow r$

R/ $\neg (p \wedge p \equiv p) \rightarrow r$

Para (e)

p	r	$p \wedge p$	$p \wedge p \equiv p$	$\neg(p \wedge p \equiv p)$	$\neg(p \wedge p \equiv p) \rightarrow r$
T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T

Para (c)

p	q	r	$q \equiv r$	$p \rightarrow (q \equiv r)$	$p \wedge q$	$p \rightarrow (q \equiv r) \equiv p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \rightarrow (q \equiv r) \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F	F	F	T