

# PROIECT - IDENTIFICAREA SISTEMELOR

Ana-Maria Cioban

Facultatea de Automatică și Calculatoare  
Automatică, Anul 3

Perioada de realizare a proiectului: Octombrie 2025 - Ianuarie 2026

# Cuprins

<b>1 Identificarea Sistemului Hidraulic de Ordinul II</b>	<b>2</b>
1.1 Rolul și Obiectivul Proiectului . . . . .	2
1.1.1 Descrierea Procesului Fizic . . . . .	2
1.1.2 Structura Modelului Propus . . . . .	2
1.1.3 Configurarea Inițială a Experimentului . . . . .	2
1.2 Identificarea Sistemelor de Ordin II utilizând Metoda Regresiei Liniare . . . . .	2
1.2.1 Explicația Pașilor și Formulele Utilizate . . . . .	2
1.2.2 Modelul Final și Validarea . . . . .	5
1.3 Identificarea Sistemelor de Ordin II utilizând Semnale de tip Chirp . . . . .	10
1.3.1 Introducere și Metodologie . . . . .	10
1.3.2 Explicația Pașilor de Identificare . . . . .	10
1.3.3 Validarea Modelului . . . . .	12
1.4 Compararea identificării sistemelor de ordinul doi utilizând regresie liniară și semnale de tip Chirp . . . . .	16
<b>2 Calibrarea semnalelor pseudoaleatoare binare (SPAB) și identificarea sistemelor utilizând metode parametrice</b>	<b>18</b>
2.1 Calibrarea semnalului SPAB și configurarea experimentului . . . . .	18
2.2 Pregătirea datelor pentru identificarea parametrilor . . . . .	19
2.3 Estimarea și validarea modelelor parametrice ARMAX, OE și SS-EST . . . . .	22
2.4 Compararea modelelor parametrice pe baza indicelui Fit . . . . .	26

# 1 Identificarea Sistemului Hidraulic de Ordinul II

## 1.1 Rolul și Obiectivul Proiectului

Proiectul vizează identificarea **modelului matematic** al unui sistem dinamic de ordinul II (reglarea nivelului în două rezervore deschise, conectate în serie) utilizând date experimentale. Obiectivul principal este determinarea parametrilor funcției de transfer și validarea acesteia pe baza indicilor de performanță  $J$  și  $\epsilon_{MPN}$ .

### 1.1.1 Descrierea Procesului Fizic

Se prezintă un experiment de achiziție de date pentru un sistem dinamic având regim **aperiodic amortizat**, un proces de reglare de nivel în cazul a două rezervore deschise conectate în serie. Reglarea nivelului se face în rezervorul al doilea, mărimea de execuție fiind debitul de intrare în primul rezervor.

Sistemul obținut va avea astfel:

- Semnalul de intrare  $u(t)$  – debitul de intrare în primul rezervor [ $m^3/s$ ];
- Semnalele de stare  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  – nivelul de lichid în primul și al doilea rezervor [ $m$ ];
- Semnalul de ieșire  $y(t)$  – măsura scalată a nivelului lichid din al doilea rezervor [ $m$ ].

Se consideră că echipamentele care furnizează semnalele de intrare și ieșire pot avea o amplificare arbitrară, i.e., factorul de amplificare al sistemului nu este obligatoriu unitar.

### 1.1.2 Structura Modelului Propus

Sistemul fizic este modelat printr-o funcție de transfer de ordinul II cu poli reali:

$$H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad \text{cu } T_1 \gg T_2$$

Problema de identificare constă în determinarea valorilor  $K$ ,  $T_1$  și  $T_2$ .

### 1.1.3 Configurarea Inițială a Experimentului

- **Perechea (m, n):** (4, 10)
- **Tipul Procesului:** Circuit Hidraulic (Sistem cu poli reali)
- **Cerință de Validare:**  $\epsilon_{MPN}$  trebuie să fie **sub 10%**.

## 1.2 Identificarea Sistemelor de Ordin II utilizând Metoda Regresiei Liniare

Proiectul utilizează metoda **regresiei liniare** (metoda logaritmilor succesivi) pentru identificarea sistemelor de ordinul II aperiodice, aplicată pe răspunsul obținut la un semnal de intrare de tip **treaptă**.

### 1.2.1 Explicația Pașilor și Formulele Utilizate

Procesul de identificare se desfășoară în trei etape, bazate pe analiza răspunsului la treaptă.

(a) **Determinarea Factorului de Proporționalitate ( $K$ ):**  $K$  este dat de amplificarea sistemului în regim staționar, calculat prin raportul diferențelor de regim staționar (final/inițial) ale ieșirii și intrării:

$$K = \frac{\bar{y}_{st} - \bar{y}_0}{\bar{u}_{st} - \bar{u}_0}$$

**Selectia Indecșilor:** Indecșii de timp (i1 la i4) au fost obținuți prin **inspecție vizuală** pe graficul răspunsului la treaptă, corespunzător semnalului de ieșire  $y(t)$  folosind instrumentul Cursor Data. Valorile indicelui au fost exportate în *Workspace* folosind funcția internă `cursor_info.DataIndex`.

- Regimul staționar initial  $(\bar{y}_0, \bar{u}_0)$  este definit de indecesii  $i1 = 6291$  și  $i2 = 6700$ .
- Regimul staționar final  $(\bar{y}_{st}, \bar{u}_{st})$  este definit de indecesii  $i3 = 12876$  și  $i4 = 13411$ .
- **Valoare  $K$ :**  $K = 2.763$

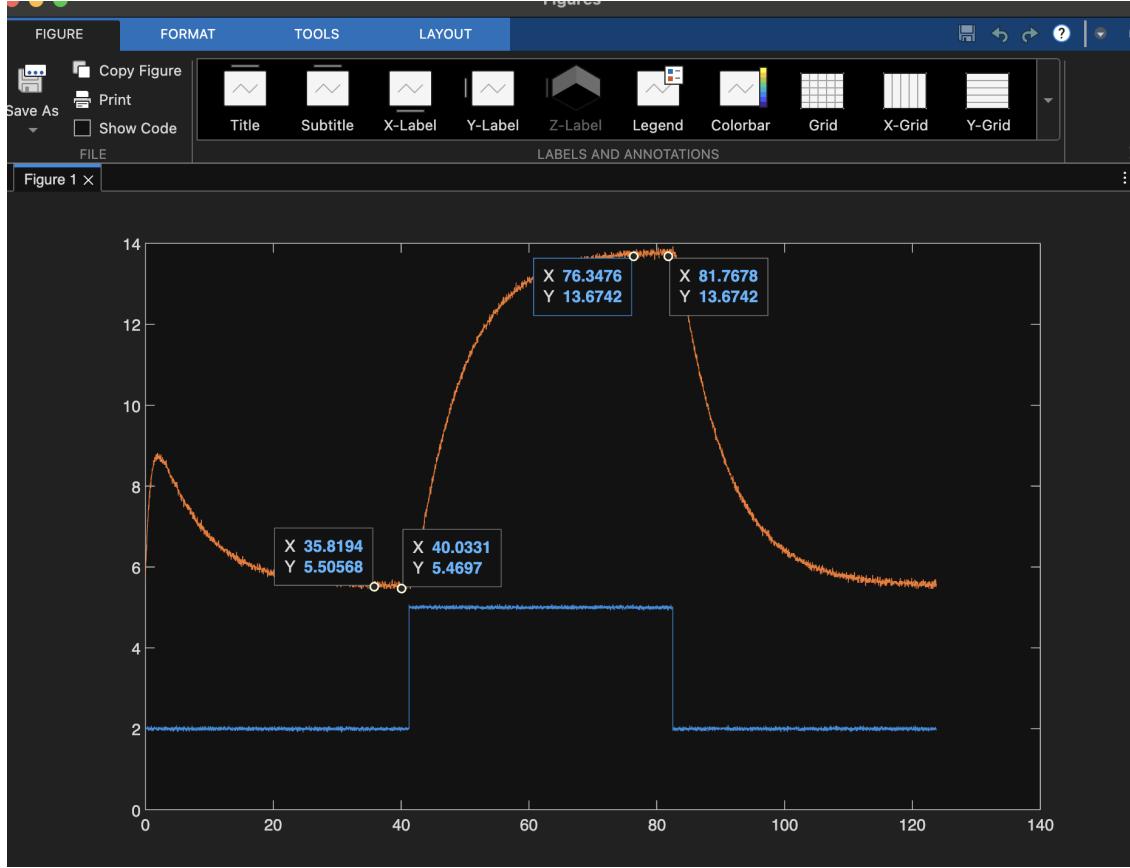


Figura 1: Alegerea punctelor salvate in indecesii  $i_1-i_2$  (regim staționar inițial) și in indecesii  $i_3-i_4$  (regim staționar final) utilizati in calculul lui  $K$ .

**(b) Determinarea Constantei de Timp Dominantă ( $T_1$ ):** Pentru  $T_1 \gg T_2$ , răspunsul indicial este dominat de prima exponențială. Logaritmând eroarea față de regimul staționar, se obține o relație liniară de forma:

$$\ln(y_{st} - y(t)) \approx \alpha t + \beta$$

Modelul liniar estimat este:

$$\hat{x}_k = \alpha t_k + \beta$$

Coeficienții  $\alpha$  (panta) și  $\beta$  (ordonata) se calculează folosind Metoda Celor Mai Mici Pătrate (CMMP) pentru potrivirea unei drepte, prin soluția sistemului compatibil determinat:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N t_k^2 & \sum_{k=1}^N t_k \\ \sum_{k=1}^N t_k & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N x_k t_k \\ \sum_{k=1}^N x_k \end{pmatrix}$$

Constanta de timp  $T_1$  este apoi determinată din panta  $\alpha$ :

$$T_1 = -\frac{1}{\alpha}$$

**Selectia indecsilor:** Indecșii de timp  $i_5 = 7155$  și  $i_6 = 8911$  au fost selectați prin inspecție vizuală pe graficul semnalului de ieșire  $y(t)$ , corespunzător unei porțiuni din regimul tranzitoriu în care răspunsul prezintă un comportament exponențial dominant, porțiune utilizată pentru aplicarea metodei regresiei logaritmice.

- **Valoare Obținută:**  $T_1 = 7.2799$  s.

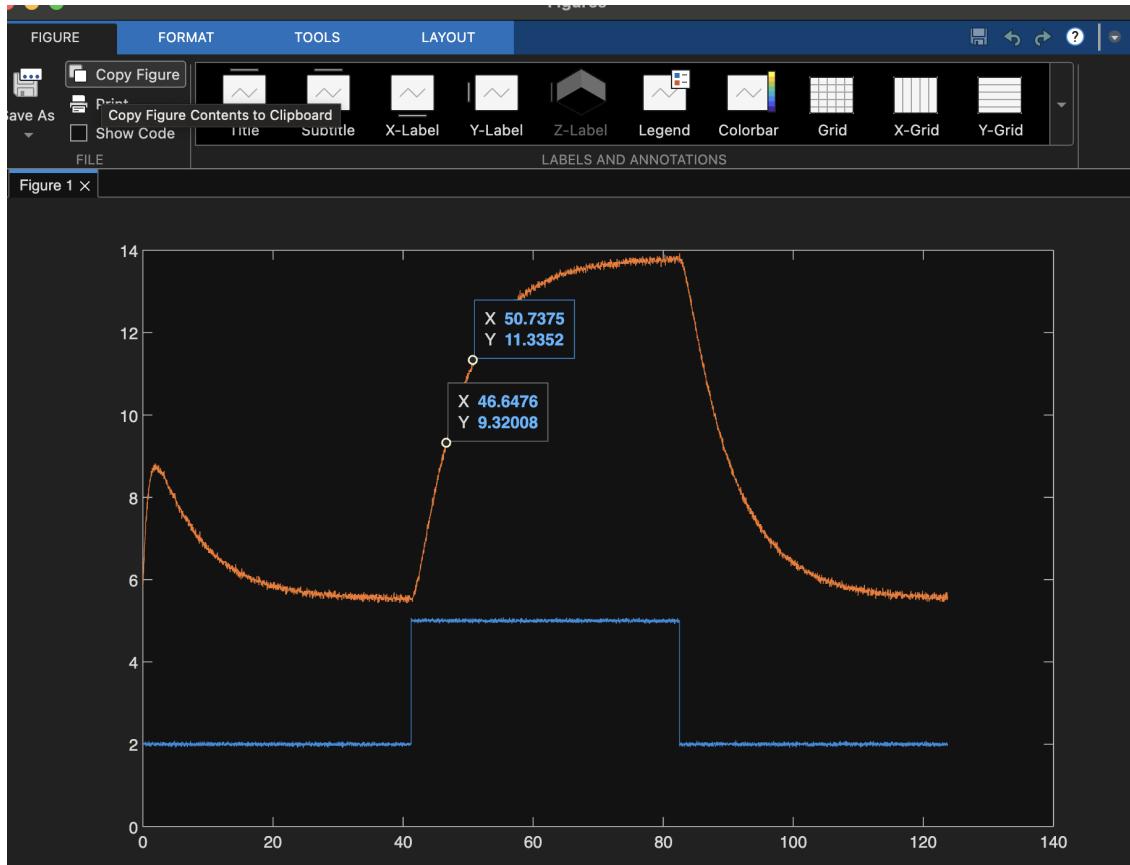


Figura 2: Selectia punctelor stocate in indecsii  $i_5$  și  $i_6$

**(c) Determinarea Constantei de Timp Nedominantă ( $T_2$ ):**  $T_2$  se determină utilizând timpul punctului de inflexiune,  $T_i$ , calculat din datele experimentale, și rezolvând ecuația transcendentă:

$$T_1 T_2 \ln(T_2) - T_2 [T_i + T_1 \ln(T_1)] + T_1 T_i = 0$$

**Selectia Indicilor:** Timpul de inflexiune  $T_i$  este estimat pe baza indecsilor  $i7 = 6668$  (momentul declanșării treptei) și  $i8 = 7315$  (punctul de inflexiune).

- **Timpul de inflexiune ( $T_i$ ):** 4.0033 s.
- **Valoare Obținută:**  $T_2 = 1.24$  s.

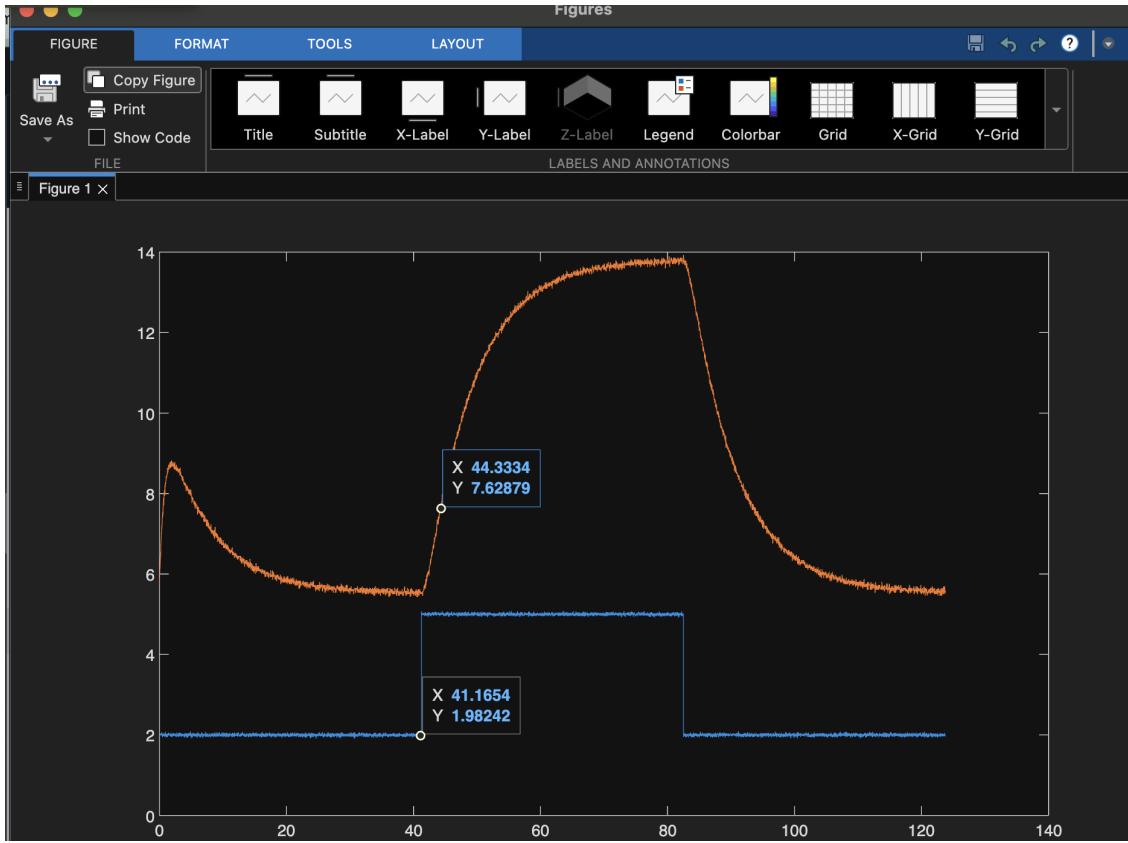


Figura 3: Selectia punctelor stocate in indecsii  $i_7$  si  $i_8$

### 1.2.2 Modelul Final și Validarea

Modelul identificat prin Regresie Liniară este:

$$H(s) = \frac{2.763}{(7.2799s + 1)(1.24s + 1)}$$

#### (a) Validarea modelului utilizând funcția de transfer:

Într-o primă etapă, validarea modelului identificat s-a realizat utilizând funcția de transfer obținută pe baza parametrilor identificați. Modelul astfel definit a fost excitat cu semnalul de intrare utilizat în experiment, iar răspunsul sistemului a fost obținut prin simulare numerică.

Semnalul de ieșire simulat a fost comparat cu semnalul de ieșire măsurat, cele două fiind reprezentate pe același grafic, alături de semnalul de intrare, pentru a evidenția fidelitatea modelului identificat în raport cu datele experimentale.

**(b) Validarea Modelului (Spațiul Stăriilor):** Simularea în condiții inițiale nenule se realizează folosind un model de tip Spațiul Stăriilor (realizarea de stare companion, generală pentru sistemele de ordin II), cu vectorul de stare inițială  $x_0 = [y(1), 3]$ . Matricele Spațiului Stăriilor sunt definite de:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0 \\ K\omega_n^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= (1 \ 0), \quad \mathbf{D} = 0 \end{aligned}$$

Unde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \quad \text{și} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

**Rezultate de validare și figuri:**

Validarea finală a modelului identificat s-a realizat utilizând reprezentarea în spațiul stărilor, prin comparația semnalului măsurat cu semnalul simulat. În acest scop, au fost utilizati următorii indici de performanță:

- **Indicele de performanță ( $J$ ):**

$$J = \frac{1}{\sqrt{N}} \|y - y_M\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - y_M(k))^2},$$

având valoarea numerică:

$$J = 0.0017.$$

- **Eroarea medie pătratică normalizată ( $\epsilon_{MPN}$ ):**

$$\epsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_M\|}{\|y - \bar{y}\|} \cdot 100\%,$$

unde  $\bar{y}$  reprezintă valoarea medie a semnalului de ieșire măsurat. Pentru modelul identificat s-a obținut:

$$\epsilon_{MPN} = 3.8816\%.$$

Deoarece valoarea erorii medii pătratice normalizate este sub pragul de 10%, modelul identificat poate fi considerat **valid**.

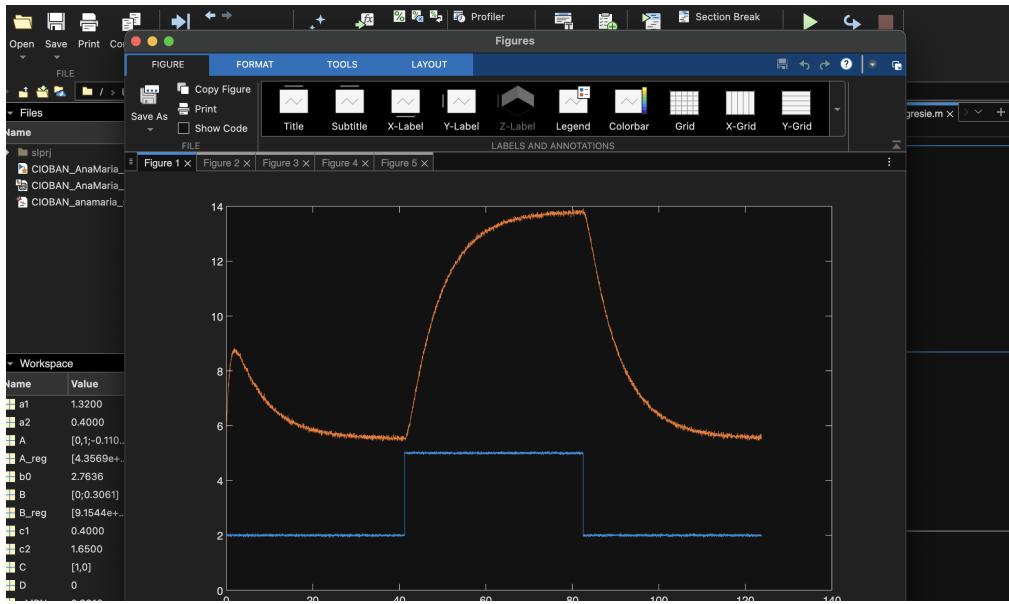


Figura 4: Semnalele de intrare ( $u$ , albastru) și ieșire ( $y$ , ruj) obținute din experimentul cu intrare de tip treaptă.

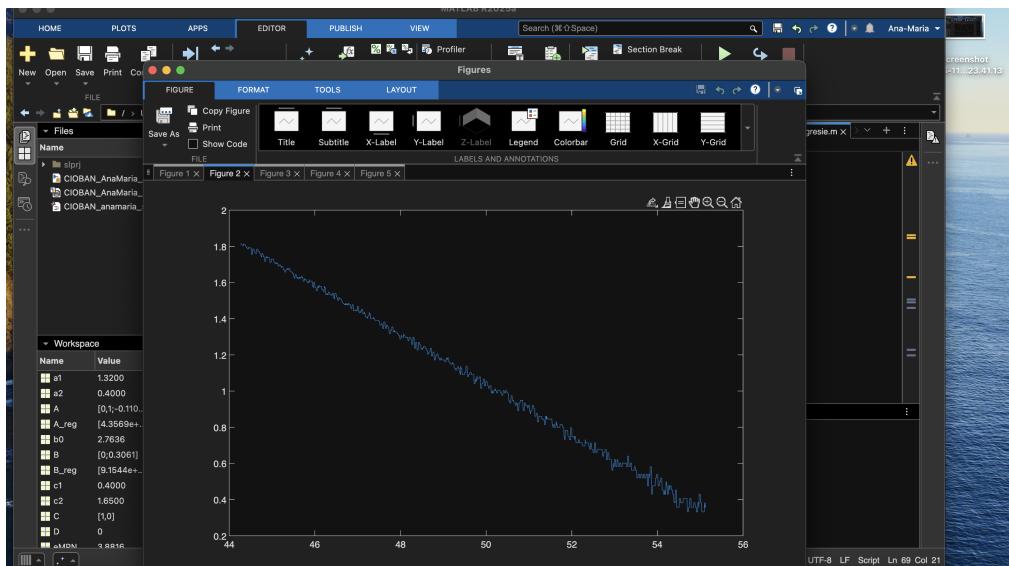


Figura 5: Regresia liniară pe  $\ln(y_{st} - y(t))$  pentru determinarea constantei de timp dominante  $T_1$ .

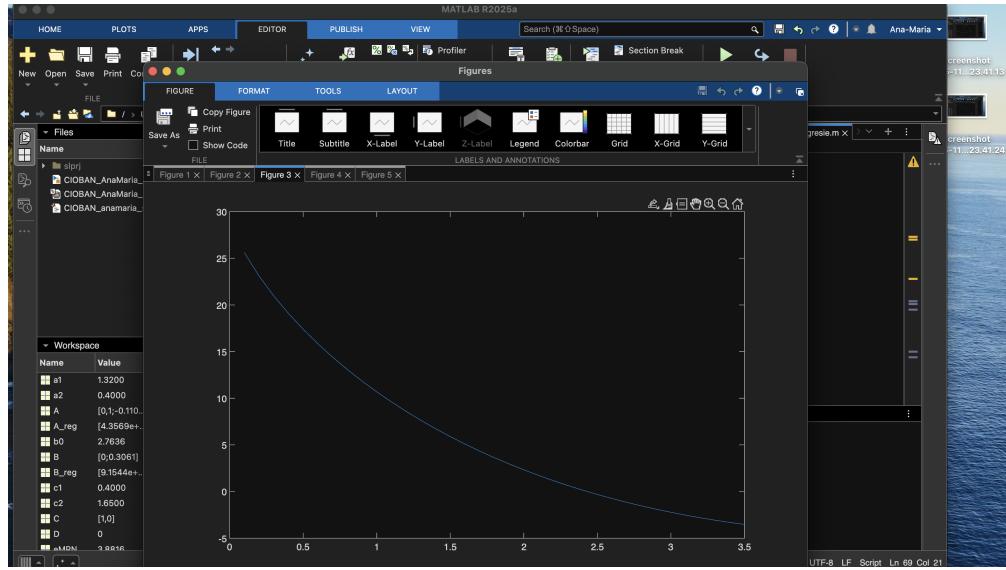


Figura 6: Graficul funcției transcendentă (Fun) utilizat pentru a găsi soluția  $T_2$  (intersecția cu axa Fun=0).

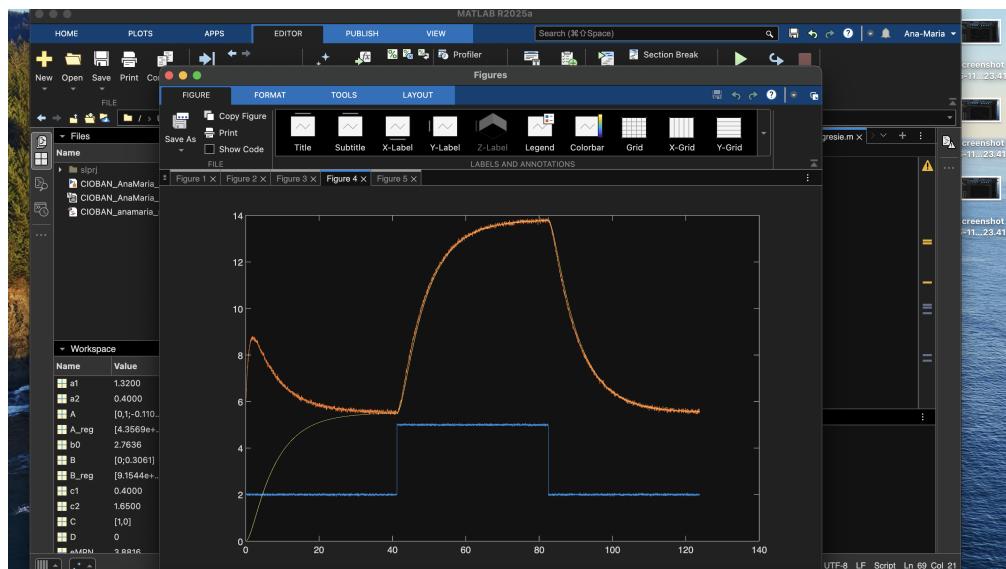


Figura 7: Validarea modelului F.T. (condiții initiale nule): Compararea ieșirii reale ( $y$ ) cu ieșirea simulată ( $ysim$ ) folosind funcția de transfer.

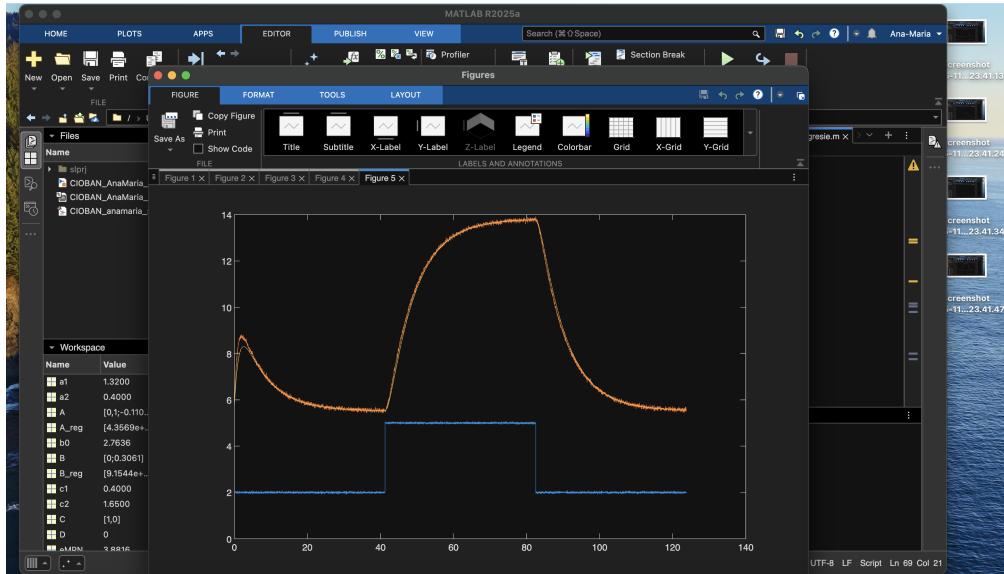


Figura 8: Validarea finală S.S. (condiții initiale nenule): Compararea ieșirii reale ( $y$ ) cu ieșirea simulată (ysim2) obținută prin modelul Spațiul Stărilor.

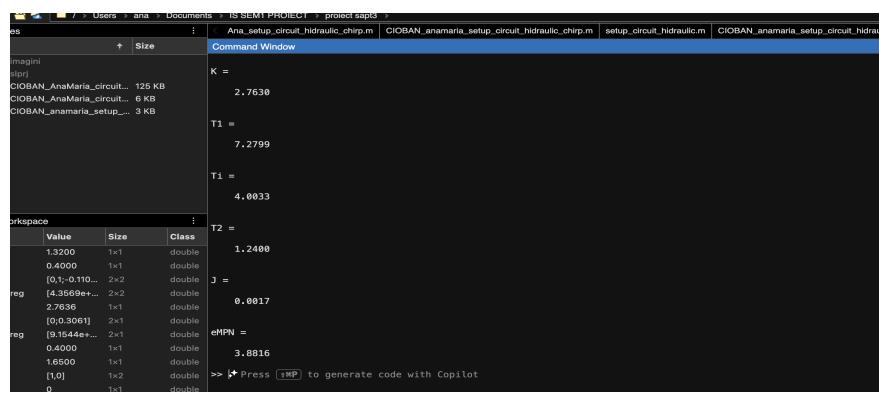


Figura 9: Fereastra de Comandă MATLAB care arată valorile finale calculate pentru  $K$ ,  $T_1$ ,  $T_i$ ,  $T_2$ ,  $J$  și  $\epsilon_{MPN}$ .

## 1.3 Identificarea Sistemelor de Ordin II utilizând Semnale de tip Chirp

### 1.3.1 Introducere și Metodologie

Această metodă vizează identificarea aceluiși sistem (Circuitul Hidraulic, sistem aperiodic de ordinul II) utilizând tehnici bazate pe **răspunsul în frecvență**. Se utilizează un semnal de intrare de tip **Chirp** (sinusoidă cu frecvență variabilă). Identificarea se bazează pe analiza punctului de pe diagrama Nyquist la pulsația unde faza este  $-\pi/2$ , permitând deducerea parametrilor  $\zeta > 1$  și  $\omega_n > 0$  în vederea obținerii constantelor de timp reale  $T_1$  și  $T_2$ .

**Generarea Semnalului Chirp:** Pentru a asigura o excitație optimă a sistemului, domeniul de frecvență al semnalului Chirp ( $f_{min}, f_{max}$ ) a fost calibrat în jurul pulsației de frângere ( $\omega_f$ ) a sistemului. Estimarea pulsației de frângere ( $\omega_f = 1/T_1$ ) a fost realizată pe baza constantei de timp dominante ( $T_1$ ) obținută din experimentul anterior (Regresia Liniară).

**Estimarea  $T_1$  din experimentul precedent:** Constanta de timp dominantă a fost estimată prin analiza vizuală a răspunsului la treaptă (metoda 63%). S-au selectat puncte pe graficul răspunsului la treaptă, corespunzătoare momentului aplicării semnalului de intrare de tip treaptă și momentului în care ieșirea atinge aproximativ 63% din valoarea sa finală.

Pe baza acestei estimări, pulsația de frângere ( $\omega_f = 1/T_1$ ) și domeniul de frecvențe pentru semnalul Chirp au fost setate în fișierul MATLAB:

```

1 T1=9;
2 wf=1/T1;
3 fmin=wf/2/pi/10;
4 fmax=wf/2/pi*5;
5 Ain=2;

```

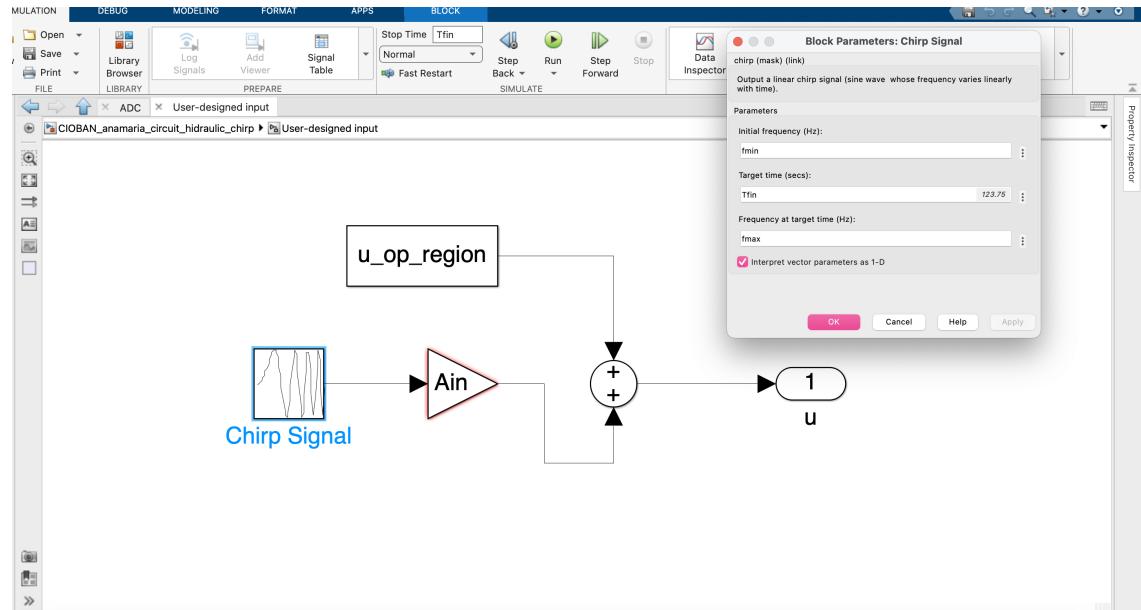


Figura 10: Modificarea blocului de intrare în Simulink: s-au eliminat cele două blocuri "Step" și s-a introdus un bloc "Chirp Signal" și un bloc "Gain".

### 1.3.2 Explicația Pașilor de Identificare

Identificarea modelului de ordinul II aperiodic,  $H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ , se realizează prin analiza răspunsului în domeniul frecvență la un semnal Chirp, conform metodologiei bazate pe analiza la pulsația de fază  $-\pi/2$  (cuadratură).

**(a) Determinarea Factorului de Proporționalitate ( $K$ )** Factorul de proporționalitate  $K$  (câștigul static) este estimat la **Capătul de Frecvență Joasă (CFJ)**, deoarece acesta reprezintă valoarea funcției de transfer pentru  $\omega \rightarrow 0$ .

În metodologia bazată pe frecvență,  $K$  poate fi dedus prin două metode:

1. Ca raportul amplitudinilor de ieșire și intrare (analogia cu diagrama Bode):

$$K \approx \frac{A_y^{CFJ}}{A_u^{CFJ}}$$

2. Ca raportul valorilor medii staționare (offset-urilor), utilizat ca alternativă:

$$K \approx \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{u}_{st}}$$

#### Măsurători (Valori Medii):

- Valoarea medie a ieșirii staționare,  $\bar{y}_{st}$ : S-a estimat media semnalului de ieșire (răspunsul neideal) ca medie între un maxim și un minim:  $\bar{y}_{st} = (6.153 + 4.965)/2$ .
- Valoarea medie a intrării (offset-ul),  $\bar{u}_{st}$ : Valoarea medie a intrării este fixată la  $\bar{u}_{st} = 2$ , corespunzătoare punctului de funcționare ales, definit de regiunea de operare `u_op_region`.

**Valoare  $K$ :** S-a obținut o valoare calculată  $K \approx 2.7795$ , ajustată la  **$K = 2.77$** .

**(b) Determinarea Parametrilor  $\omega_n$  și  $\zeta$**  Identificarea parametrilor intermediari  $\omega_n$  și  $\zeta$  se realizează la pulsația de fază  $-\pi/2$ , unde semnalele de intrare și ieșire trebuie să fie în **cuadratură**.

**1. Identificarea Pulsației ( $\omega_n$ ) și Verificarea Decalajului:** Pulsația naturală  $\omega_n$  este estimată din intervalul de timp dintre un minim și un maxim al semnalului ideal:

$$\omega_n = \mathbf{w13} = \frac{\pi}{412.62 - 403.697}$$

Apoi, s-a confirmat că sistemul operează în cuadratură prin măsurarea decalajului temporal ( **$\Delta T13 = 408.158 - 403.697$** ) între maximul semnalului de ieșire și maximul semnalului de intrare. Măsurătorile au fost ajustate până când unghiul de fază a fost cât mai aproape de  $-\pi/2$ :

$$\phi_{13} = \text{rad2deg}(-\mathbf{w13} \cdot \Delta T13) \approx -89.9899^\circ$$

**2. Măsurarea Modulului  $M$ :** Amplitudinile de ieșire ( $A_y$ ) și intrare ( $A_u$ ) sunt citite din cursori pentru a calcula modulul  $M$  al funcției de transfer:

- $A_y = \frac{67331 - 65966}{2}$ , unde indecșii selectați corespund valorii minime, respectiv maxime a semnalului de ieșire  $y(t)$ .
- $A_u = \frac{66687 - 65245}{2}$ , unde indecșii selectați corespund valorii minime, respectiv maxime ale semnalului de intrare  $u(t)$ .

$$M = \frac{A_y}{A_u}$$

Valoarea părții imaginare ( $Im$ ) este estimată ca:  **$Im = -M$** .

**3. Deducerea  $\zeta$ :** Factorul de amortizare  $\zeta$  este calculat pe baza lui  $K$  și  $Im$ :

$$\zeta = \frac{-K}{2 \cdot Im}$$

**Valoare  $\zeta$ :** S-a obținut  $\zeta > 1$ , cu valoarea numerică  $\zeta = 1.4631$ , ceea ce confirmă natura **aperiodică** a sistemului hidraulic.

4. **Deducerea  $\omega_n$ :** Pulsația naturală a sistemului este determinată pe baza frecvenței identificate anterior, având valoarea:

$$\omega_n = \omega_{13} = 0.3521.$$

(c) **Reconstrucția Finală ( $T_1, T_2$ )** Funcția de transfer de ordinul II este construită folosind parametrii  $\omega_n$  și  $\zeta$ :

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$  se obțin prin factorizarea funcției (prin aflarea polilor folosind comanda `zpk(H)` în MATLAB):

S-au identificat polii reali negativi ai sistemului:  $p_1 = -1.014$  și  $p_2 = -0.1238$ . Constantele de timp sunt calculate ca inversul magnitudinii acestor poli:

$$\mathbf{T_1 = 1/0.8961} \quad \text{și} \quad \mathbf{T_2 = 1/0.1383}$$

### 1.3.3 Validarea Modelului

#### (a) Modelul Final Identificat

Modelul identificat prin Metoda Chirp este:

$$\mathbf{H(s) = \frac{2.771}{(1.116s + 1)(7.230s + 1)}} \quad \text{unde} \quad T_1 \approx 1.116s, T_2 \approx 7.230s$$

(Constantele de timp sunt calculate ca  $T_1 = 1/0.8961$  și  $T_2 = 1/0.1383$ , inversând polii obținuți.)

#### (b) Cerințe de Validare și Rezultate

Validarea s-a realizat pe două segmente distincte ale experimentului: întregul experiment și porțiunea de validare selectată.

**Selectia Porțiunii de Validare:** S-a ales un punct de timp ('idx=65966') imediat după zona pulsăției de cuadratură ( $\phi \approx -\pi/2$ ) pentru a separa datele de identificare de cele de validare.

```

1 idx=65966;
2 tvd=t(idx:end);      % vector timp validare
3 uvd=u(idx:end);      % vector intrare validare
4 yvd=y(idx:end);      % vector iesire validare

```

- **Validarea utilizând funcția de transfer pe întregul experiment (t, u, y):**

Validarea a fost realizată prin simularea răspunsului modelului de tip funcție de transfer  $H(s)$  la segmentul de intrare măsurat  $u(t)$ , utilizând `lsim`. În această reprezentare, simularea se efectuează în mod implicit în **condiții initiale nule**. Semnalul simulat  $y_M(t)$  a fost comparat cu semnalul măsurat  $y(t)$  prin suprapunerea grafică (intrare–iesire–iesire simulată).

- **Validarea utilizând funcția de transfer pe porțiunea de validare (tvd, uvd, yvd):**

Pentru a evalua fidelitatea modelului și pe segmentul de date selectat pentru validare (de la momentul ales până la final), s-a repetat simularea folosind aceleși relații, dar pe setul redus de date ( $tvd, uvd, yvd$ ). În acest caz simularea cu funcția de transfer a fost efectuată în **condiții initiale nule**, iar rezultatul  $y_M(t)$  a fost comparat cu  $y(t)$  prin suprapunere pe același grafic.

- **Validarea utilizând SS pe Întregul Experiment (t, u, y):** (Simulare în condiții initiale nenule  $[y(1), 4]$ ). S-au obținut indicii de performanță:

$$\mathbf{J} \approx 3.4266 \times 10^{-4} \quad \text{și} \quad \epsilon_{MPN} \approx 3.6470\%$$

- **Validarea utilizând SS pe Porțiunea de Validare (tvd, uvd, yvd):** (Simulare de după faza de  $-\pi/2$  până la final, în condiții initiale nenule  $[yvd(1), 1]$ ). S-au obținut indicii de performanță:

$$\mathbf{J2} \approx 4.1996 \times 10^{-4} \quad \text{și} \quad \epsilon_{MPN2} \approx 5.4929\%$$

Deoarece ambele erori normalizate ( $\epsilon_{MPN}$  și  $\epsilon_{MPN2}$ ) sunt **sub pragul de 10%**, modelul identificat prin Metoda Chirp este **validat** cu succes.

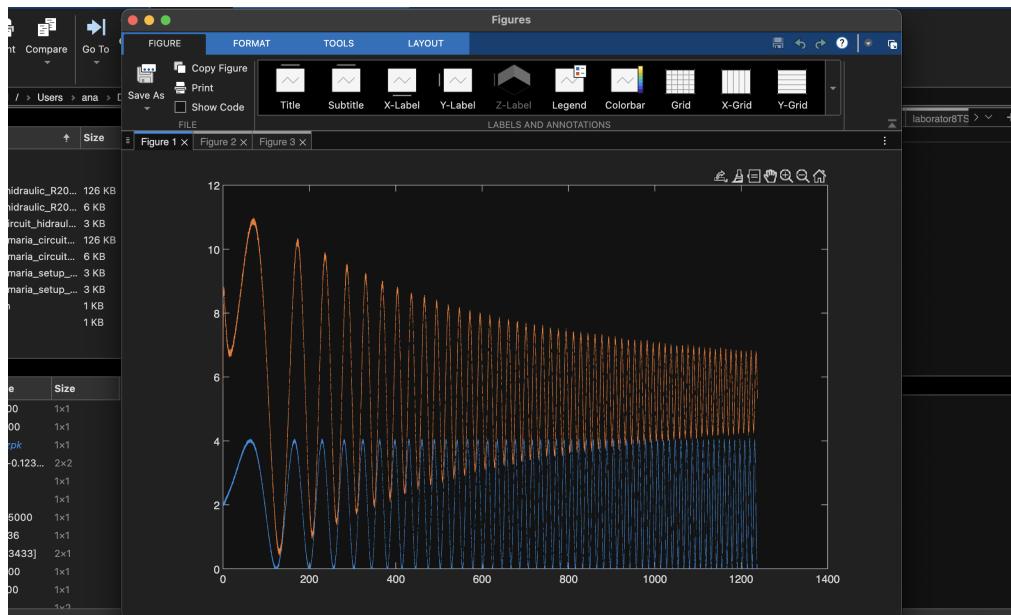


Figura 11: Semnalele de intrare și ieșire obținute din experimentul cu un semnal de intrare de tip Chirp.

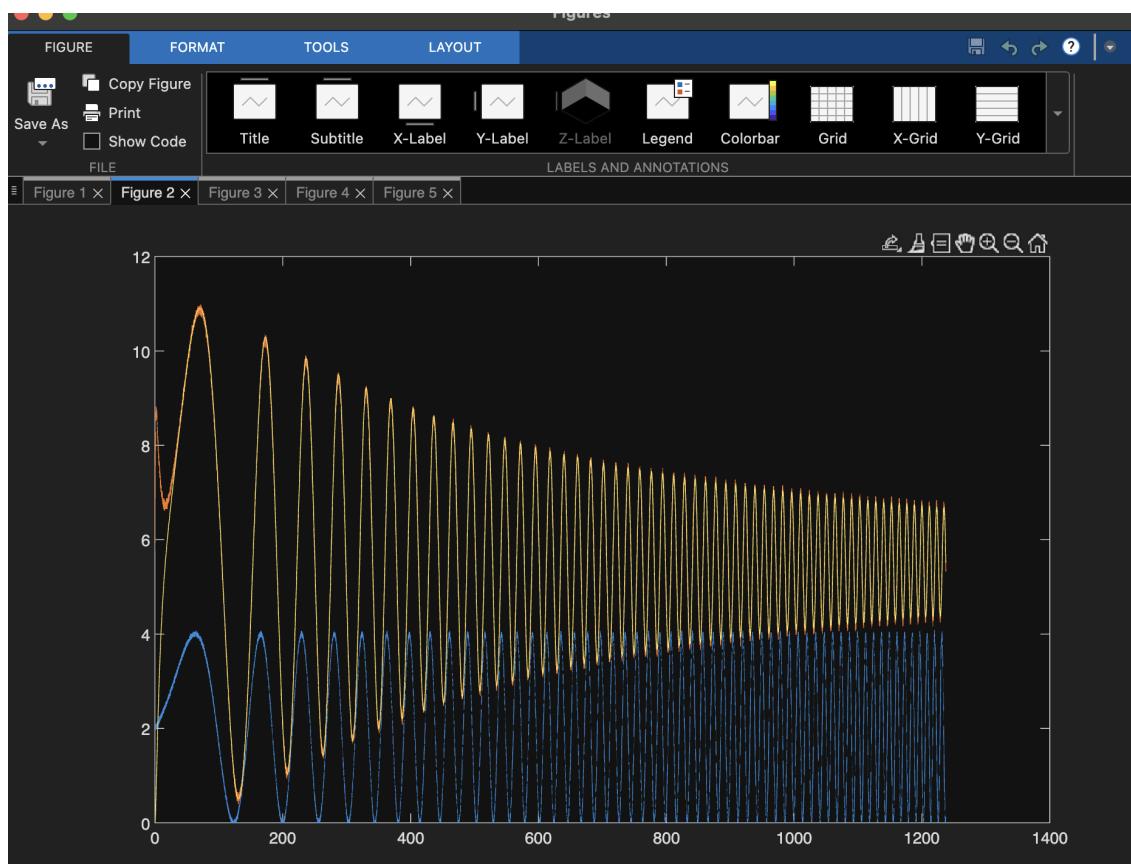


Figura 12: Validarea folosind funcția de transfer pe întreg experimentul.

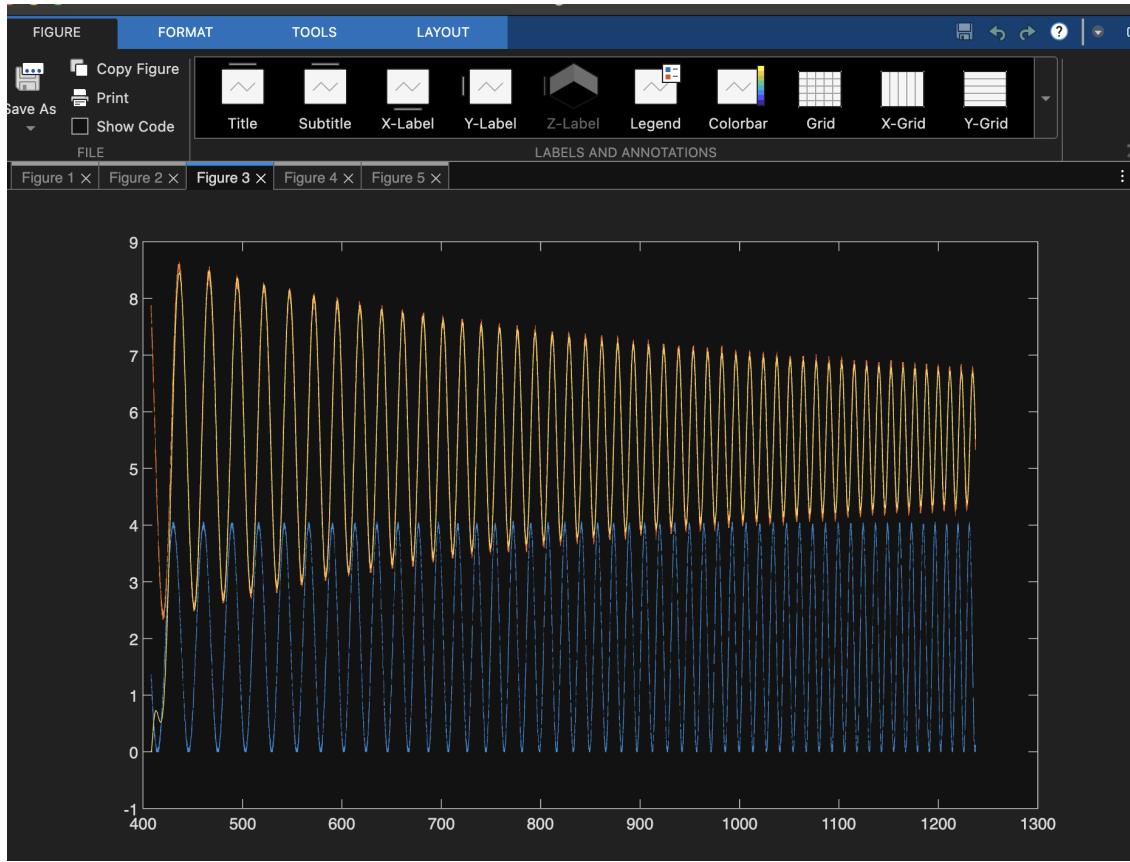


Figura 13: Validarea folosind funcția de transfer de la zona pulsăției de fază  $-\pi/2$  până la finalul experimentului.

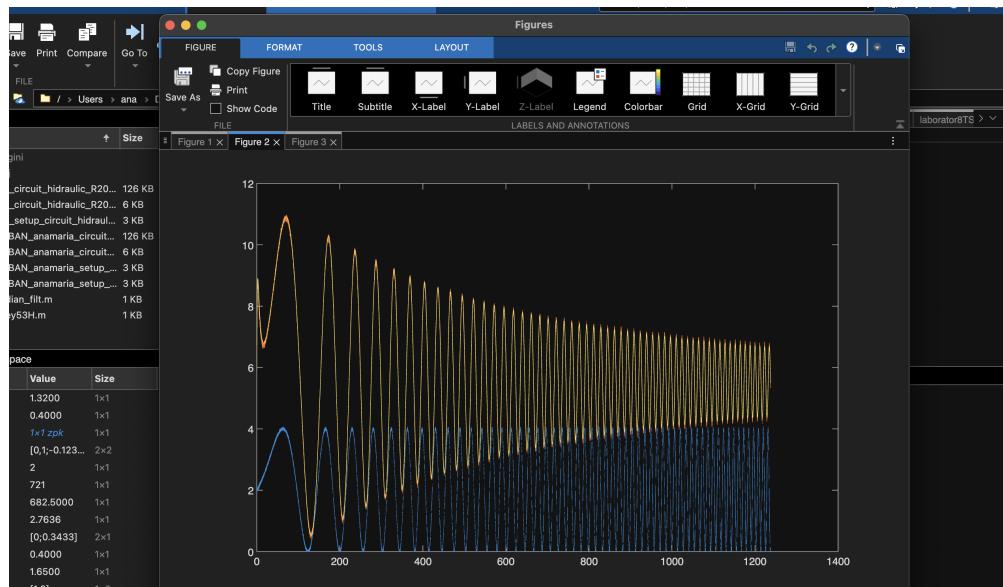


Figura 14: Validarea folosind SS pe întreg experimental .

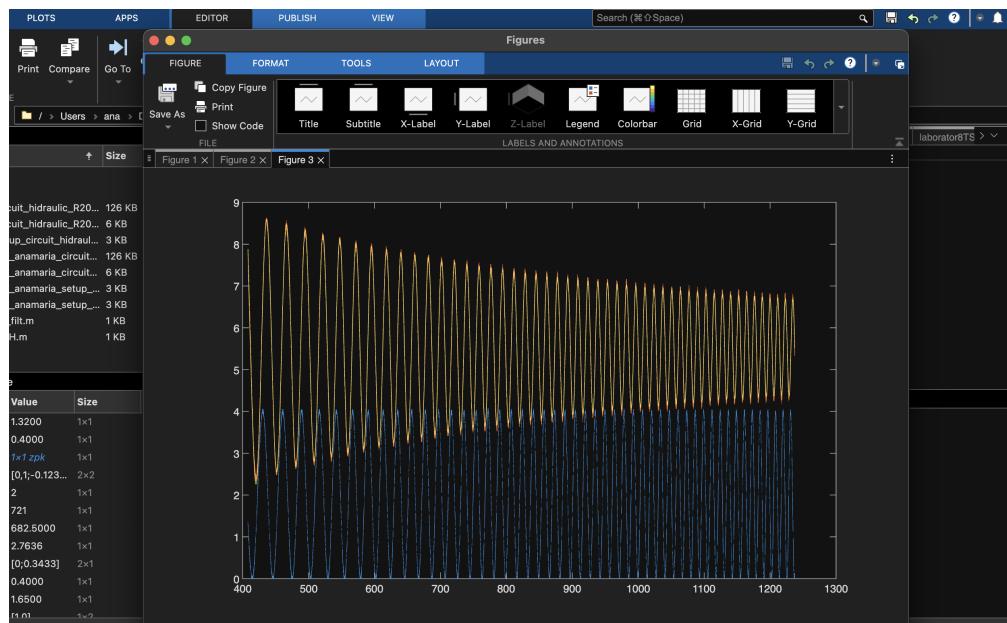


Figura 15: Validarea folosind SS de la zona pulsătiei de  $-\pi/2$  până la finalul experimentului.

## 1.4 Compararea identificării sistemelor de ordinul doi utilizând regresie liniară și semnale de tip Chirp

În această subsecțiune este realizată o comparație între identificarea sistemelor de ordinul doi utilizând metoda regresiei liniare și identificarea bazată pe semnale de tip Chirp. Compararea este efectuată pe baza erorii medii normalize procentuale (eMPN), care cuantifică gradul de suprapunere dintre ieșirea măsurată a sistemului și ieșirea simulată a modelului identificat.

Pentru a asigura o analiză corectă și obiectivă, au fost considerate două scenarii distincte. În primul scenariu, au fost utilizate datele experimentale obținute în urma identificării prin regresie liniară, iar pe acest set de date au fost testate atât modelul identificat prin regresie, cât și modelul identificat utilizând semnale de tip Chirp. În acest caz, eroarea obținută pentru modelul bazat pe regresie liniară a fost  $eMPN_{reg} = 3.8787\%$ , în timp ce pentru modelul bazat pe semnale de tip Chirp s-a obținut o eroare mai mică,  $eMPN_{Chirp} = 3.2065\%$ . Acest rezultat indică o capacitate mai bună de generalizare a modelului identificat cu ajutorul semnalelor de tip Chirp, chiar și atunci când este validat pe date provenite dintr-un experiment de tip regresie.

În cel de-al doilea scenariu, au fost utilizate datele experimentale obținute cu semnale de tip CHIRP, iar validarea a fost realizată atât pentru modelul de regresie liniară, cât și pentru modelul bazat pe semnale de tip Chirp. În acest caz, eroarea asociată modelului de regresie a fost  $eMPN_{reg} = 6.9578\%$ , în timp ce modelul identificat prin semnale de tip Chirp a condus la o eroare semnificativ mai mică,  $eMPN_{Chirp} = 4.8782\%$ .

Rezultatele obținute în ambele scenarii evidențiază faptul că metoda de identificare bazată pe semnale de tip CHIRP oferă, în general, performanțe superioare față de metoda regresiei liniare, atât pe date proprii, cât și pe date provenite dintr-un alt tip de experiment.

Figurile corespunzătoare suprapunerii dintre ieșirea măsurată și ieșirile simulate pentru cele două metode sunt prezentate în continuare, acestea confirmând vizual concluziile obținute pe baza indicelui eMPN.

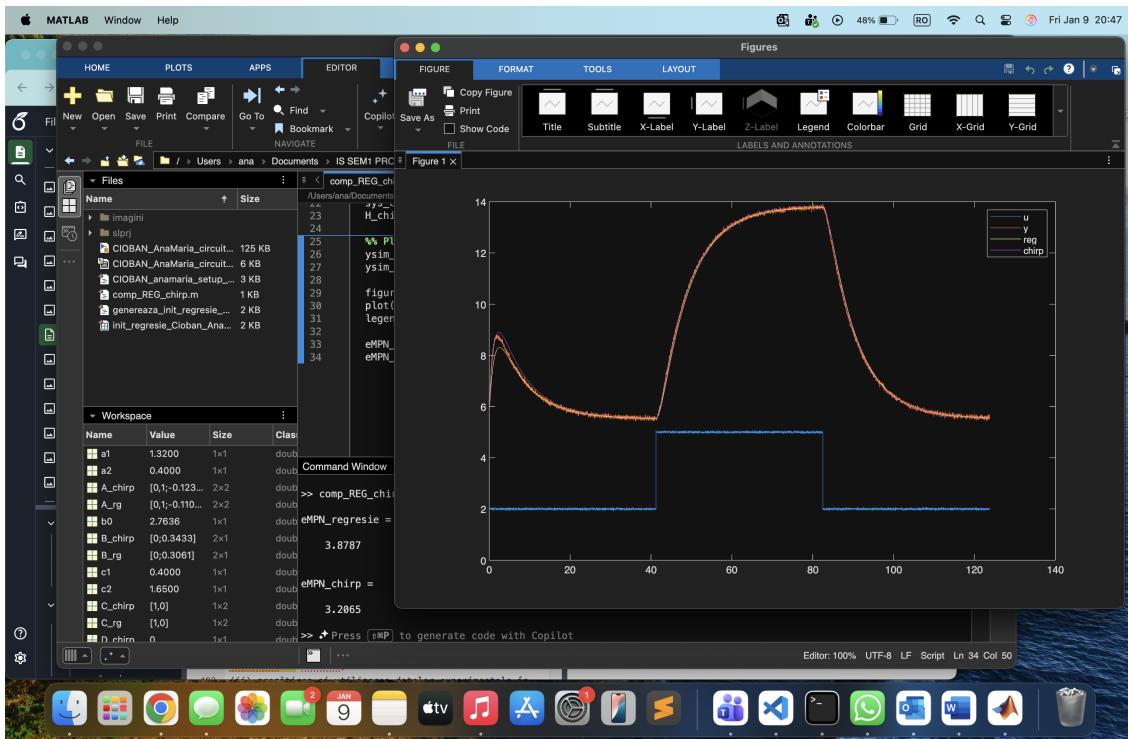


Figura 16: Suprapunere pe datele de la regresie: ieșire măsurată vs. ieșiri simulate (regresie și Chirp).

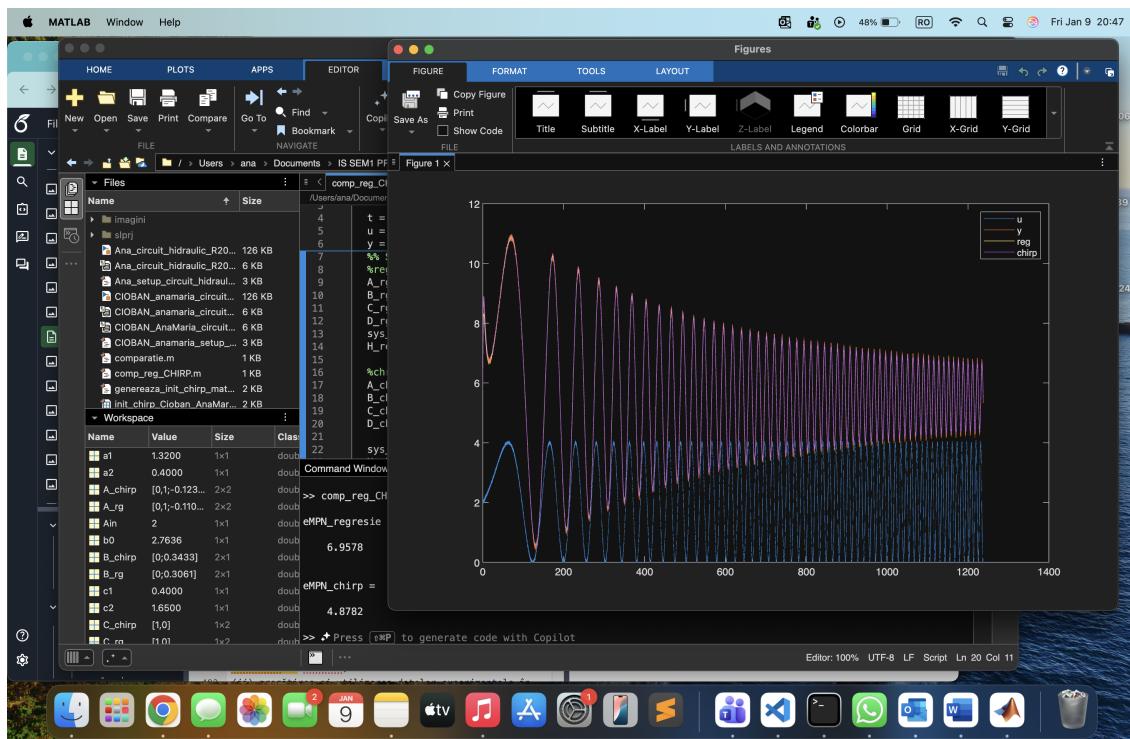


Figura 17: Suprapunere pe datele de la Chirp: ieșire măsurată vs. ieșiri simulate (regresie și Chirp).

## 2 Calibrarea semnalelor pseudoaleatoare binare (SPAB) și identificarea sistemelor utilizând metode parametrice

În această secțiune sunt prezentate etapele prin care a fost configurat experimentul de simulare pentru pendulul mecanic simplu, precum și modul în care au fost generate și prelucrate datele necesare identificării parametrice.

Punctul de pornire îl reprezintă modelul Simulink al pendulului, însăși de fișierul `setup_pendul.m`, în care sunt definite toate constantele fizice, parametrii de lucru și semnalul de intrare utilizat în experiment. Identificarea este realizată pe baza unui *singur* experiment de simulare, în conformitate cu cerințele de laborator, astfel încât întregul proces să fie reproductibil.

### 2.1 Calibrarea semnalului SPAB și configurarea experimentului

Modelul considerat este un pendul mecanic simplu, acționat de un motor electric la baza tijei. Parametrii fizici ai sistemului (masa echivalentă  $M$ , lungimea tijei  $l$ , coeficientul de frecare  $b$ ) sunt personalizați în funcție de perechea  $(m, n)$ . În fișierul `setup_pendul.m` aceștia sunt calculați după relații de forma

$$M = 0.8 - \frac{n}{48}, \quad l = 1.2 - \frac{m}{24}, \quad b = 0.3 + \frac{m}{24}.$$

Simularea este realizată cu pasul fundamental

$$T_s = 500 \mu\text{s},$$

iar pe canalele de intrare și ieșire sunt modelate saturări, zgomot alb și cuantizare (DAC/ADC), astfel încât datele generate să fie apropriate de cele ale unui sistem hardware real. Semnalul de ieșire măsurat este

$$y(t) = c_1 \theta(t) + c_2 \omega(t),$$

unde  $\theta(t)$  este poziția unghiulară,  $\omega(t)$  viteza unghiulară, iar  $c_1$  și  $c_2$  sunt coeficienți de scalare fixați în fișierul de setup.

Conform cerințelor, semnalul de intrare este alcătuit dintr-un semnal trapezoidal, care fixează două puncte apropriate de funcționare  $u^* \pm \delta$ , peste care se suprapune un semnal pseudoaleator binar (SPAB) de amplitudine mică  $\delta_{SPAB}$ . Scopul este ca dinamica pendulului, aproximată local printr-un model liniar, să fie excitată suficient de bogat în frecvență, păstrând în același timp regimul neliniar în jurul unui punct de lucru bine definit.

**Alegerea parametrilor  $t_1$ ,  $t_{po}$ ,  $N$ ,  $p$  și  $\Delta T$ .** Fișierul inițial de laborator conținea un exemplu generic pentru durata simulării:

```
Tfin = 50; % simulation duration
t0 = Tfin/4;
t1 = Tfin/2;
```

Pornind de la aceste valori, am rulat mai întâi simularea fără să modific schema Simulink, doar pentru a observa răspunsul pendulului și forma semnalului de intrare. Din figura de răspuns s-a determinat aproximativ durata unei oscilații a sistemului, notată în continuare  $t_{po}$  (timpul la care se încheie prima oscilație semnificativă), precum și timpul de urcare al semnalului (aproximativ 90% din prima oscilație), notat prin  $t_u$ . În același mod a fost ales și  $t_1$ , care reprezintă timpul necesar stabilizării pendulului înainte de aplicarea sevenței SPAB.

Implementare în `setup_pendul.m` prin sevență:

```
t1 = 20;
tu = 0.5; % moment relativ în interiorul oscilatiei
tpo = 1.6; % durata aproximativa a unei oscilatii

N = 6;
```

```

p = round(tpo/N/Ts);

DeltaT = 1.2*(2^N - 1)*p*Ts;
[input_LUT_dSPACE, Tfin] = generate_input_signal( ...
    Ts, t1, DeltaT, N, p, u_star, delta, delta_spab);

```

Alegerea lui  $t_1 = 20$  s asigură că transitorii initiale ale pendulului se estompează înainte de aplicarea ferestrelor SPAB, astfel încât datele utilizate la identificare să corespundă unui regim cvasi-staționar. Conform teoriei semnalelor pseudoaleatoare, perioada aproximativă a SPAB-ului este  $T_{SPAB} \approx (2^N - 1) p T_s$ , iar factorul 1.2 din expresia lui  $\Delta T$  oferă un mic exces de timp pentru a garanta că în fereastra de interes este acoperită cel puțin o perioadă completă a semnalului SPAB.

**Implementarea în Simulink și semnalele obținute.** Semnalul de intrare generat în MATLAB este stocat în vectorul `input_LUT_dSPACE` și importat în modelul Simulink al pendulului printr-un bloc *From Workspace*. În acest fel, schema Simulink utilizează exact semnalul proiectat în cod, nu un semnal generic de tip treapta.

Figura 18 ilustrează modul în care a fost configurat blocul *From Workspace* din schema Simulink. Sunt prezentate atât versiunea inițială (configurația implicită din fișierul de laborator), cât și versiunea finală, în care semnalul generat în MATLAB (`input_LUT_dSPACE`) este utilizat ca intrare a pendulului.

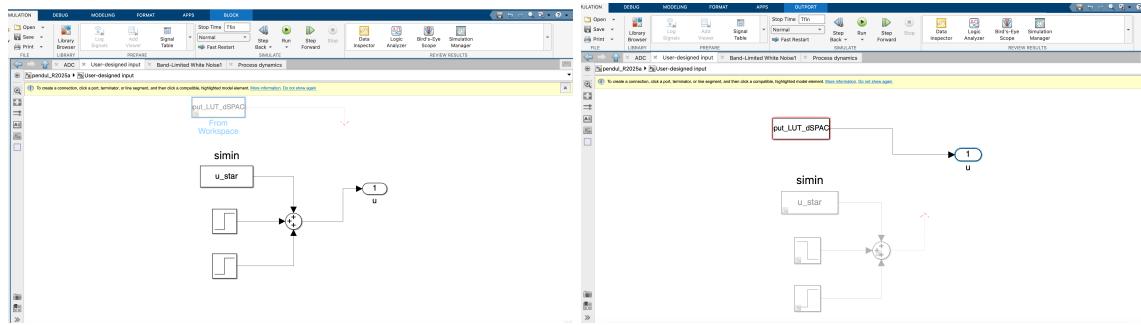


Figura 18: Configurarea blocului *From Workspace* înainte (stânga) și după calibrare (dreapta).

## 2.2 Pregătirea datelor pentru identificarea parametrilor

Identificarea a fost realizată pe baza aceluiasi experiment generat în etapa precedentă, utilizând semnalele brute de intrare  $u(t)$  și ieșire  $y(t)$  obținute din simulare. Pentru a construi două seturi de date relevante — unul pentru identificare (ID) și unul pentru validare (VD) — a fost necesară selectarea unor intervale în care sistemul prezintă o evoluție clară și lipsită de efecte nedorite.

Pentru alegerea acestor porțiuni am analizat vizual semnalele  $u(t)$  și  $y(t)$  (Figura 20), iar pe baza lor au fost selectați patru indici care delimită cele două intervale:

$$i_1 = 60340, \quad i_2 = 114552, \quad i_3 = 128532, \quad i_4 = 182852.$$

Primul interval  $[i_1, i_2]$  conține o porțiune stabilă și reprezentativă a semnalelor, fiind utilizat pentru estimarea modelelor. Al doilea interval  $[i_3, i_4]$  a fost ales astfel încât să fie suficient de îndepărtat de primul, menținând totuși caracteristici dinamice similare, ceea ce îl face potrivit pentru validarea modelelor.

După selectarea intervalelor, semnalele au fost preprocesate pentru a fi adecvate identificării parametrice. Prelucrarea s-a realizat în MATLAB prin decimare și eliminarea componentei continue (DC), conform fragmentului de cod de mai jos:

```

t_id = t(i1:N:i2);
u_id = u(i1:N:i2); u_id = u_id - mean(u_id);
y_id = y(i1:N:i2); y_id = y_id - mean(y_id);

```



Figura 19: Semnalul de intrare și răspunsul pendulului în simularea inițială, utilizate pentru estimarea lui  $t_1$ ,  $t_u$  și  $t_{po}$ .

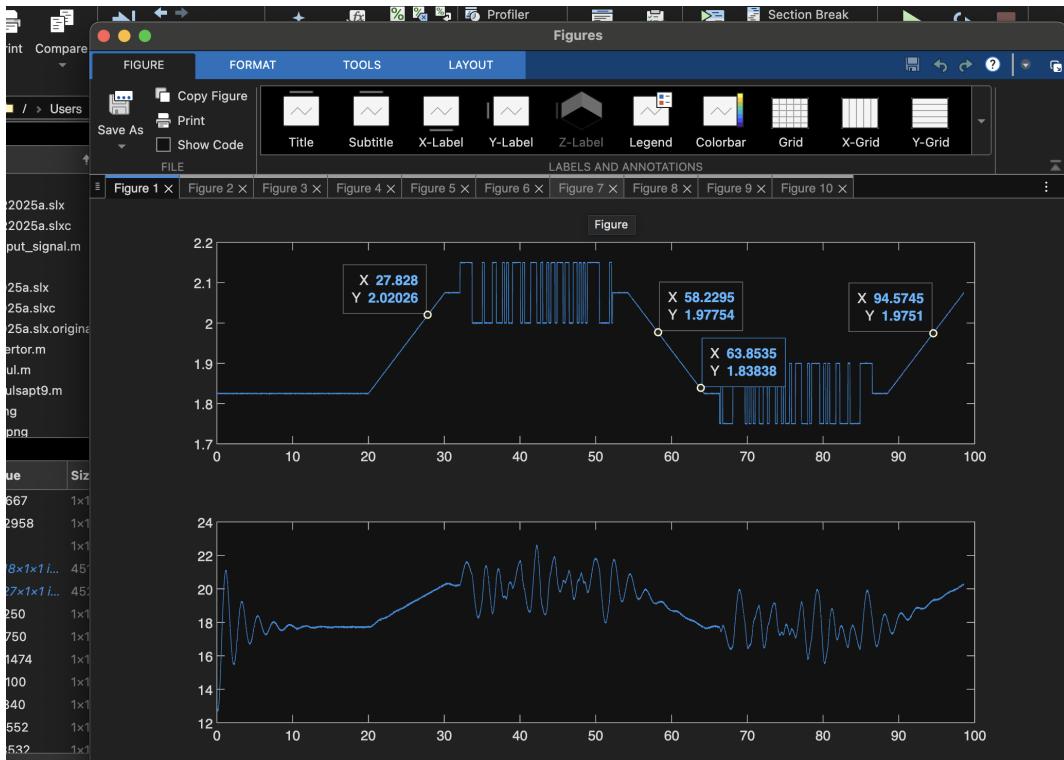


Figura 20: Semnalele  $u(t)$  și  $y(t)$  utilizate pentru selectarea intervalelor de identificare  $([i_1, i_2])$  și validare  $([i_3, i_4])$ .

```

t_vd = t(i3:N:i4);
u_vd = u(i3:N:i4); u_vd = u_vd - mean(u_vd);
y_vd = y(i3:N:i4); y_vd = y_vd - mean(y_vd);

figure
subplot(221), plot(t_id,u_id)
subplot(223), plot(t_id,y_id)
subplot(222), plot(t_vd,u_vd)
subplot(224), plot(t_vd,y_vd)

```

În urma acestor pași:

- s-a aplicat o decimare cu factorul  $N = 12$  pentru reducerea supraesantionării;
- semnalele au fost centrate prin eliminarea componentei continue (DC), astfel încât să oscileze în jurul valorii zero;
- s-au obținut patru serii preprocesate:  $u_{id}$ ,  $y_{id}$  pentru identificare, respectiv  $u_{vd}$ ,  $y_{vd}$  pentru validare.

Figura 21 prezintă semnalele preprocesate corespunzătoare celor două intervale selectate.

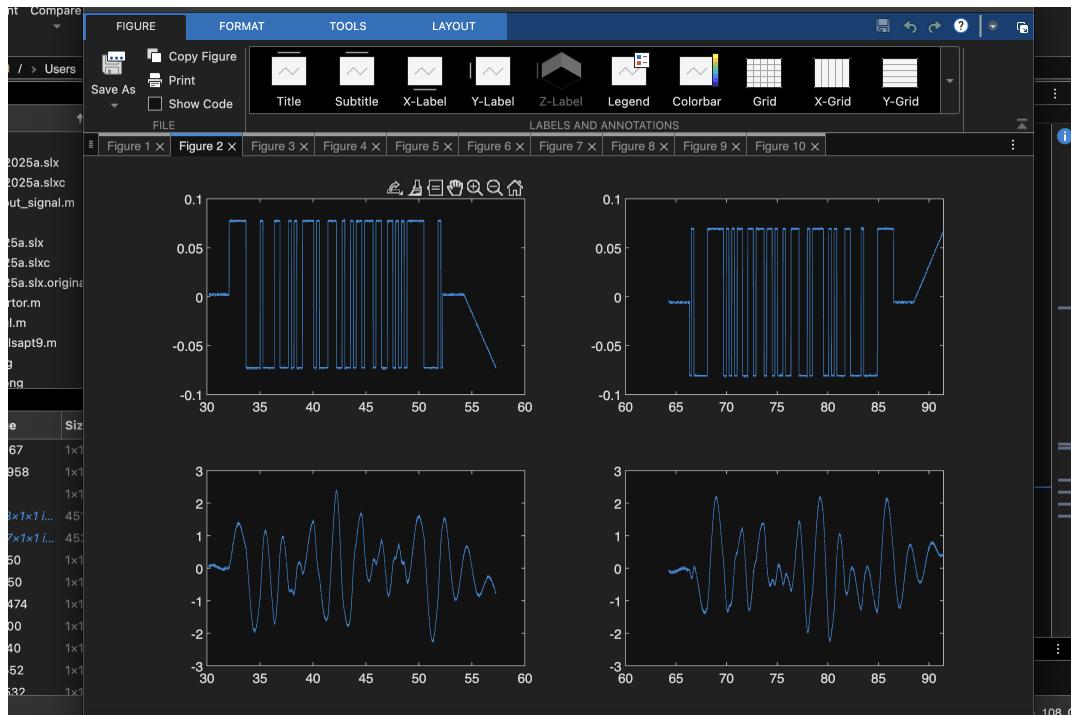


Figura 21: Semnalele preprocesate pentru identificare ( $u_{id}$ ,  $y_{id}$ ) și validare ( $u_{vd}$ ,  $y_{vd}$ ), după decimare și eliminarea componentei continue.

Conversia finală în obiecte specifice toolbox-ului de identificare se face prin:

```

1 dat_id = iddata(y_id, u_id, t_id(2) - t_id(1));
2 dat_vd = iddata(y_vd, u_vd, t_vd(2) - t_vd(1));

```

Aceste obiecte  $dat_id$  și  $dat_vd$  sunt utilizate în subsecțiunile următoare pentru estimarea și validarea modelelor parametrice ARMAX,OE și SS-EST.

## 2.3 Estimarea și validarea modelelor parametrice ARMAX, OE și SS-EST

Pe baza seturilor de date `dat_id` (identificare) și `dat_vd` (validare) au fost analizate trei modele parametrice: ARMAX, OE și SS-EST. Pentru fiecare model au fost urmărite două criterii principale:

- **calitatea ajustării** ieșirii, prin comanda `compare`;
- **comportamentul reziduurilor**, analizat cu `resid`, atât din punct de vedere al autocorelației, cât și al intercorelației cu intrarea.

### (A) Modelul ARMAX – validare prin autocorelația reziduurilor

Modelul ARMAX folosit are structura:

$$[n_a, n_b, n_c, n_k] = [2, 2, 5, 1],$$

care permite modelarea explicită a zgromotului prin polinomul  $C(q^{-1})$ .

Codul MATLAB utilizat:

```
model_armax = armax(dat_id,[2,2,5,1]);
figure, resid(model_armax, dat_vd)
figure, compare(model_armax, dat_vd)
```

În fereastra `resid` asociată acestui model, **graficul de autocorelație** (stânga) arată că toate cerculetele rămân în interiorul limitelor de încredere, ceea ce indică faptul că reziduurile pot fi considerate aproximativ zgromot alb. Aceasta este criteriu principal de validare pentru modelul ARMAX. În plus, fereastra `compare` indică o potrivire de aproximativ **94.25%** între model și datele de validare, ceea ce confirmă calitatea foarte bună a modelului ARMAX.

### (B) Modelul OE – validare prin intercorelația reziduurilor cu intrarea

Modelul OE (Output Error) descrie strict dinamica deterministă a sistemului, fără model explicit al zgromotului. Structura aleasă a fost:

$$[n_b, n_f, n_k] = [2, 2, 1],$$

iar modelul a fost estimat pe setul de validare:

```
model_oe = oe(dat_vd,[3,2,1]);
figure, resid(model_oe, dat_id)
figure, compare(model_oe, dat_id)
```

Pentru acest model, criteriu principal de validare a fost **intercorelația dintre reziduuri și intrare** (fereastra din dreapta în `resid`). Reziduurile nu prezintă corelații semnificative cu semnalul de intrare, majoritatea cerculețelor aflându-se în interiorul limitelor de încredere. Acest lucru sugerează că modelul OE a extras corect partea deterministă a dinamicii, lăsând în reziduuri doar componente de zgromot. Indicatorul din fereastra `compare` arată o potrivire de aproximativ **94.69%** între ieșirea modelului și datele de identificare, ceea ce confirmă performanța foarte bună a modelului OE.

### (C) Modelul SS-EST – validare combinată (autocorelație și intercorelație)

Modelul în spațiul stărilor a fost estimat cu `ssest`, permitând alegerea unui ordin optim în intervalul 1:15:

```
model_ssest = ssest(dat_id,1:15);
figure, resid(model_ssest, dat_vd)
figure, compare(model_ssest, dat_vd)
```

Pentru acest model, validarea se poate face atât prin **autocorelația reziduurilor**, cât și prin **intercorelația cu intrarea**. În ferestrele `resid`, atât autocorelația (stânga), cât și intercorelația (dreapta) arată rezultate satisfăcătoare; accentul a fost pus pe intercorelație, reziduurile fiind practic necorelate cu semnalul de intrare. În plus, comanda `compare` oferă o potrivire de aproximativ **94.24%** pe setul de validare, ceea ce arată că modelul SS-EST descrie foarte bine dinamica pendulului.

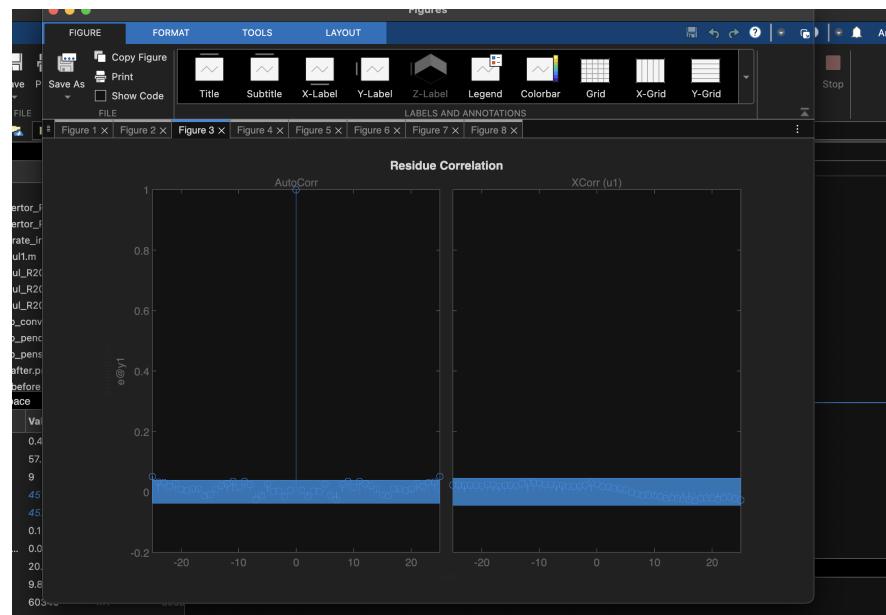


Figura 22: Reziduuri – model ARMAX

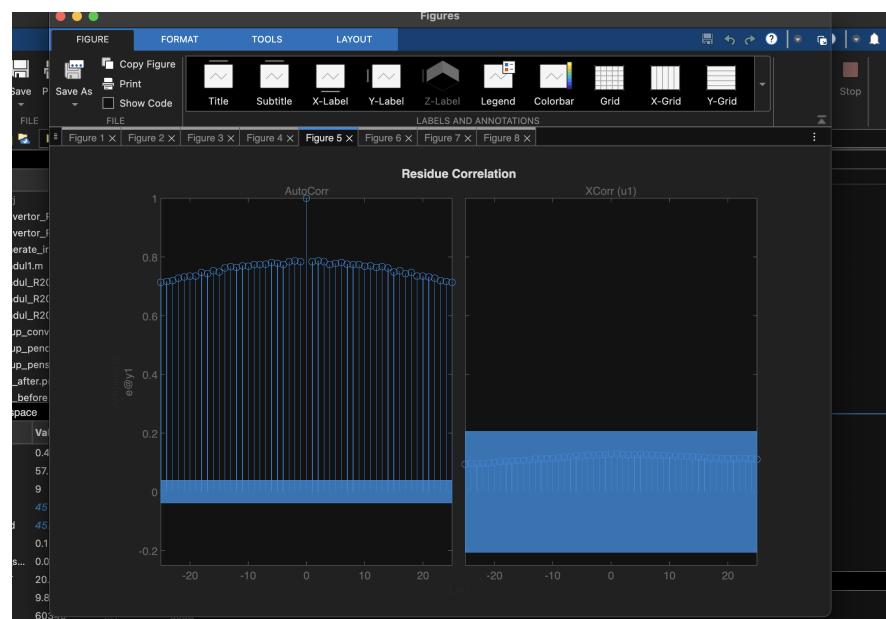


Figura 23: Reziduuri – model OE

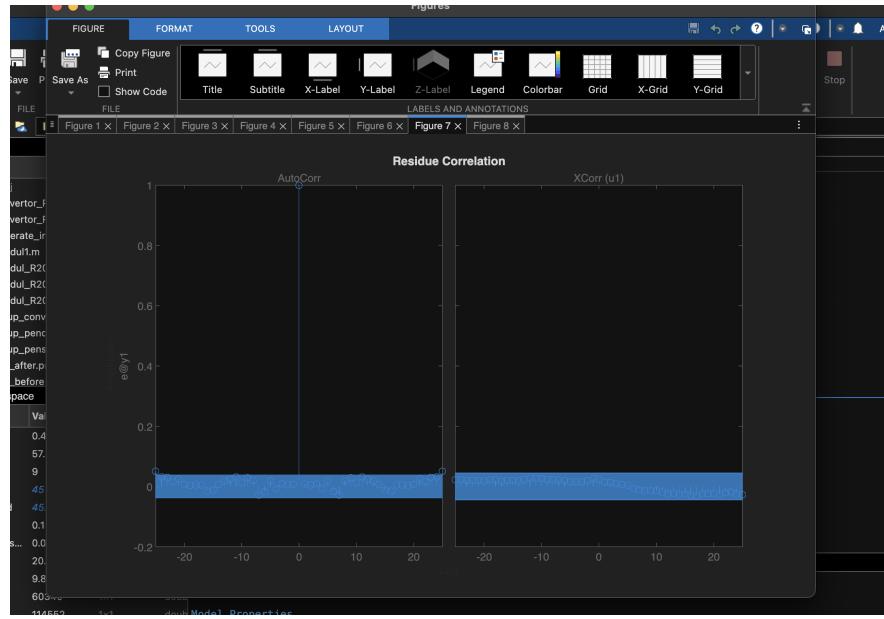


Figura 24: Reziduuri – model SS-EST



Figura 25: Comparație ieșire măsurată vs. simulată – model ARMAX

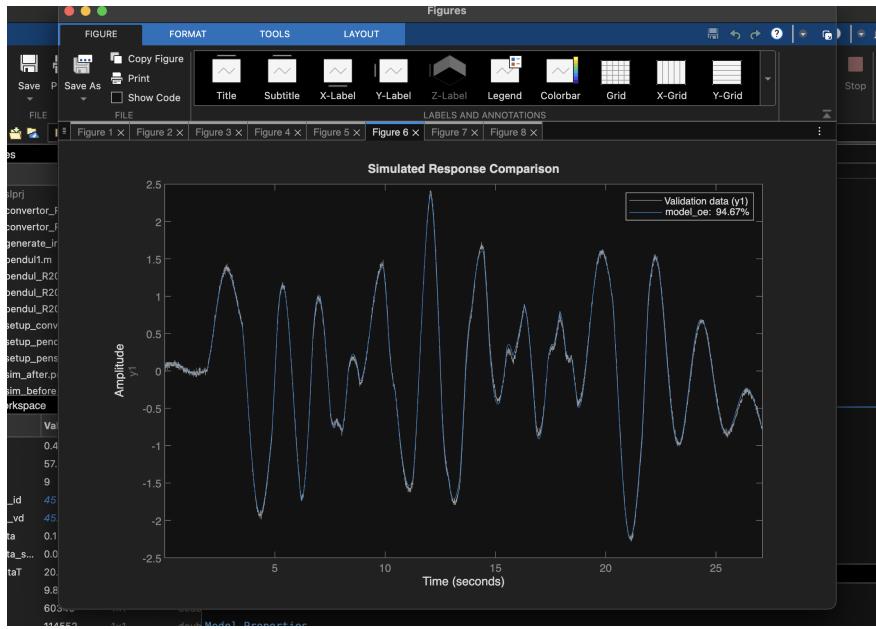


Figura 26: Comparație ieșire măsurată vs. simulată – model OE

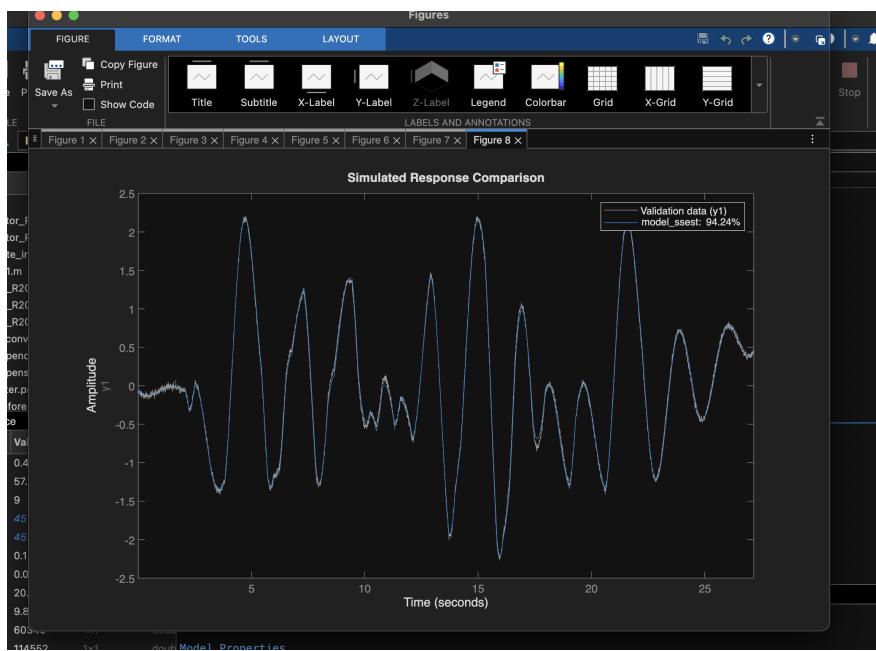


Figura 27: Comparație ieșire măsurată vs. simulată – model SS-EST

În concluzie, modelul ARMAX este bine validat prin **autocorelația reziduurilor**, modelul OE prin **intercorelația dintre reziduuri și intrare**, iar modelul SS-EST respectă ambele criterii.

## 2.4 Compararea modelelor parametrice pe baza indicelui Fit

Pentru a selecta modelul parametrizat cel mai potrivit, am comparat modelele identificate (ARMAX, OE și SS-EST) folosind indicele de performanță *Fit* exprimat procentual. Indicele Fit cuantifică cât de bine reproduce modelul ieșirea măsurată pe setul de validare: valori mai mari indică o potrivire mai bună între ieșirea simulată și datele experimentale.

În Tabelul 1 sunt prezentate valorile Fit obținute pentru fiecare structură modelată. Modelul considerat optim este cel cu Fit maxim (respectiv cu eroare minimă, în cazul folosirii unei metrii de tip eMPN).

Tabela 1: Compararea modelelor pe setul de validare

Model	Fit [%]
ARMAX	94.25%
OE	94.69%
SS-EST	94.24%

Pe baza rezultatelor, modelul OE oferă cea mai bună capacitate de reproducere a dinamicii sistemului. Totuși, se observă că și modelele ARMAX și SS-EST ating valori ale indicelui Fit ridicate, iar diferențele dintre cele trei structuri sunt relativ mici. Prin urmare, alegerea modelului OE este justificată prin avantajul său (chiar dacă modest) în ceea ce privește calitatea potrivirii globale, în timp ce celelalte două modele rămân alternative viabile.