Pontificia Universidad Javeriana de Cali

Ingeniería de sistemas y computación

Minimos Cuadrados: metodo de ecuaciones normales y ortogonalización

Laboratorio 2 - Computación Cientifica

Presentado por:
Ana Maria Garcia

Marzo 13 del 2020

1 Introduccion

En este laboratorio se llevara a cabo la implementacion en Matlab de aproximaciones con minimos cuadrados, implementando el metodo de ecuaciones normales y el metodo de ortogonalizacion. Esto con el objetivo de familiarizarse y conocer mas sobre los metodos para aplicar minimos cuadrados, asi como la creacion del programa para calcularlos.

Las aproximaciones por minimos cuadrados consisten en minimizar la diferencia entre la funcion principal y los datos ingresados. Esto es utilizado en los problemas donde la cantidad de ecuaciones es mayor o igual a la cantidad de incognitas.

2 Calculos generales

En ambos metodos se trabajara con la matriz A, la cual depende del parametro t que corresponde a las coordenadas en x. Por otro lado, tambien se trabaja con el vector b el cual es el mismo que entra como parametro para indicar las coordenadas en y.

A esta representada de la sigiente manera:

$$\text{Ax} = \begin{Bmatrix} 1 & t1 & t1^2 & ... & t1^n \\ 1 & t2 & t2^2 & ... & t2^n \\ 1 & t3 & t3^2 & ... & t3^n \\ 1 & ... & ... & ... & ... \\ 1 & tm & tm^2 & ... & tm^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_m \end{Bmatrix} = \text{b}$$

Donde m indica el numero de filas, que tambien corresponde a el numero de datos en t y n indica el grado del polinomio.

3 Metodo de ecuaciones normales

Este metodo utiliza la descomposicion de cholesky para calcular los valores de x.

Si A tiene rango completo en las columnas, entonces

$$A^T A$$

es no singular. Por lo tanto el sistema de ecuaciones normales:

$$A^T AX = A^T b$$

se puede emplear para calcular la solucion al problema de minimos cuadrados.

Para mostrar el rendimiento de este metodo se utilizara el siguiente ejemplo:

$\mathrm{t} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Al variar el orden del polinomio podemos notar lo siguiente:

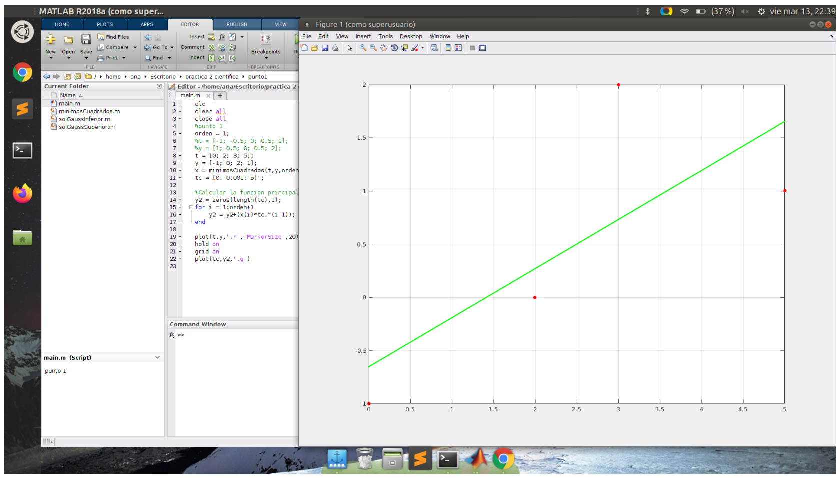

Figure 1: grado 1

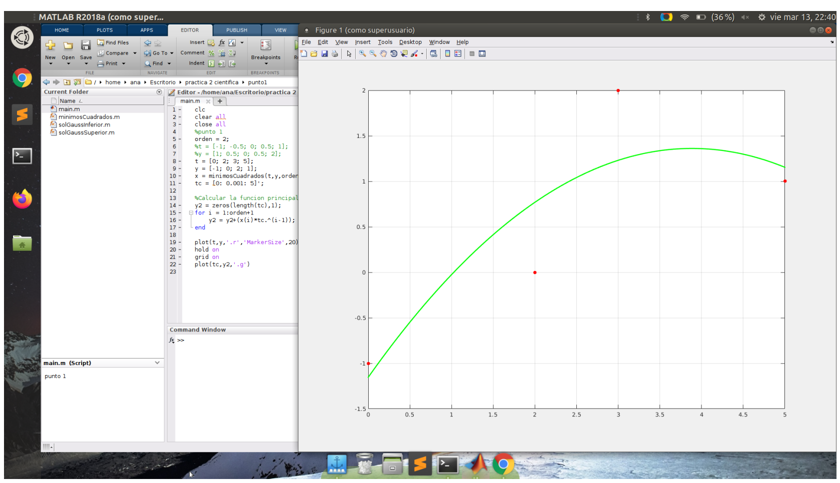

Figure 2: grado 2

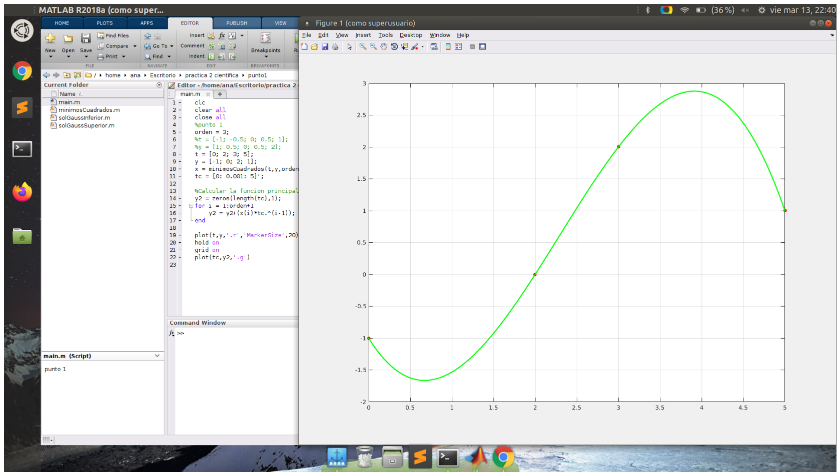

Figure 3: grado 3

Al aumentar el grado del polinomio, el ajuste a la recta es mucho mas exacto.

4 Metodo de ortogonalizacion

En vista de que el metodo por ecuaciones normales puede llegar a presentar ciertos errores en la implementacion (como se muestra a continuacion), se suele utilizar tambien este metodo por ortogonalizacion que utiliza house holder para calcular los valores de x.

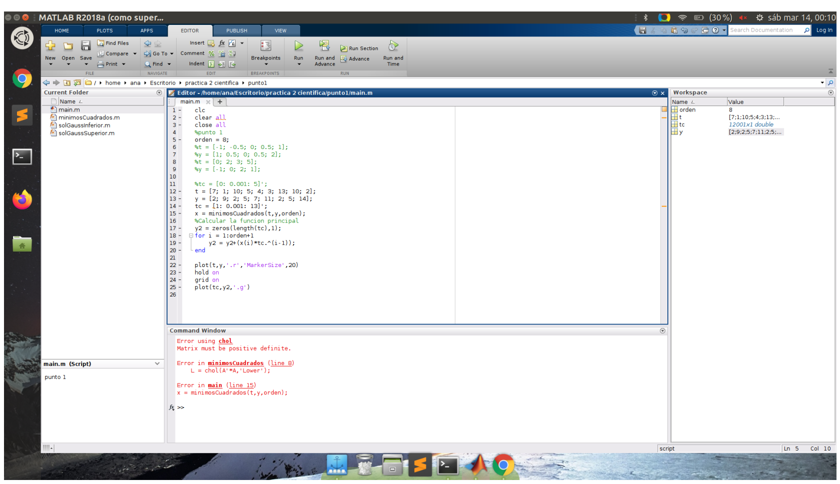

Figure 4: error ecuaciones normales

Reducir una matriz a su forma triangular con eliminacion Gaussiana no es apropiado para un problema de minimos cuadrados, ya que no se preserva la norma Euclidiana. El objetivo es encontrar ecuaciones que si preserven la norma Euclidiana.

Se dice que una matriz Q es ortogonal si sus columnas son ortonormales, es decir

$$Q^T Q = I$$

Una transformacion ortogonal Q preserva la norma Euclidiana de algun valor X, desde que se cumpla con:

$$\|QX\|_2^2 = (QX)^T QX = x^T Q^T QX = X^T X = \|X\|_2^2$$

Para mostrar el rendimiento de este metodo se utilizara el siguiente ejemplo:

t = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

y = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Al variar el orden del polinomio podemos notar lo siguiente:

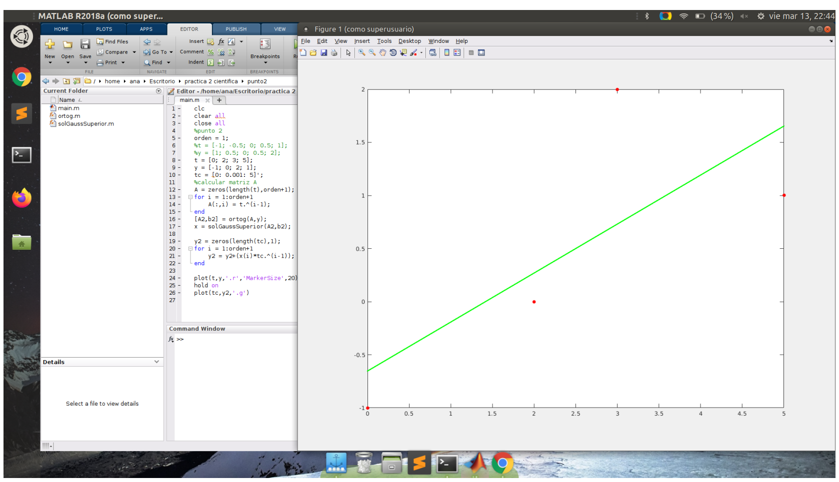

Figure 5: grado 1

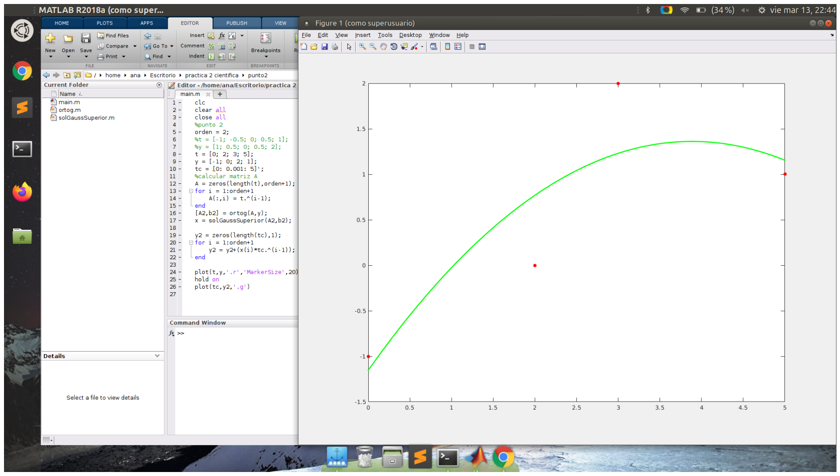

Figure 6: grado 2

Al igual que en el metodo de ecuaciones normales, al aumentar el grado del polinomio, el ajuste a la recta es mucho mas exacto.

5 Conclusion

- Se pudo aprender sobre la implementacion en un programa que aproxime minimos cuadrados por ambos metodos, mostrando los resultados de manera grafica para una mejor comprension y comparacion entre ambos.
- Se pudieron utilizar distintas tecnicas con las que no habiamos interactuado antes como lo son la descomposicion por Cholesky y householder.
- Al hacer pruebas con otros ejemplos como se muestra en la figura 5, se pudo verificar los errores que el metodo por ecuaciones normales tiene en la implementacion, sin embargo con el metodo por ortogonalizacion no se presenta este error.
- Se pudo verificar que el grado es directamente proporcional a la exactitud, es decir, que a mayor orden, mayor exactitud tendra la grafica generada.