



Pontificia Universidad Javeriana de Cali

INGENIERÍA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Laboratorio 5 Computación Científica

Autores:

Andrés Felipe Delgado y Ana María García

Junio 4 del 2020

1 Introducción

En el presente laboratorio se pondrán en práctica diferentes soluciones numéricas existentes para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial y valor de fronteras.

Para problemas de valor inicial se implementarán los metodos de euler, runge-kutta de orden 2 y 4 y multi-paso de dos pasos y cuarto orden.

Para problemas de valor de frontera se implementará el metodo de diferencias finitas y elementos finitos. Además, se implementará un metodo basado en runge-kutta de orden 4 que solucionará ecuaciones de orden superior para PVI (problema de valor inicial).

De igual forma, se adjuntarán los resultados obtenidos de la implementación y ejecución de los métodos, en graficas y tablas, en las graficas siempre la linea roja es el aproximado y la azul el analítico. Los metodos de PVI serán probados por las siguientes dos ecuaciones:

$f1 = t\sqrt{y}$, con solución analítica = $t^4/16 + t^2/4 + c1 + 1/4$, donde $c1 = 1, t_0 = 0$ y $y_0 = 1$

$f2 = t/y^2$, con solución analítica = $((3t^2)+1)/2^{1/3}$, donde $t_0 = 0$ y $y_0 = 1$

Los metodos de PVF (problemas de valor de frontera) serán probados por las siguientes dos ecuaciones:

$f3 = 3t^2$, con solución analítica = $((t^4)/4) + ((3/4)t)$, donde $a = 0$ y $b = 1$

$f4 = 6t + t.^2$, con solución analítica = $(t^3) + ((t^4)/12) - ((1/12)t)$, donde $a = 0$ y $b = 1$

Cabe resaltar que en estos metodos el valor n define a h pues $h = (b-a)/n-1$

Y el metodo de solución de ecuaciones de orden superior será probado por la siguiente ecuación de orden 2:

$x'' + 2x' + x = 2e^t$, donde tomamos $x' = y$ y $x'' = 2e^t - 2y - x$ y obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ x'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y \\ 2e^t - 2y - x \end{Bmatrix}$$

con valores iniciales $t_0, x(t_0) = 0$ y $x'(t_0) = 1$

La solución analítica de esta ecuación es: $x(t) = \sinh(t)$

ejercicio tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=hxUY0ublvrcfeature=youtu.be>

Nota: En todos los metodos se va presentar la grafica con el h más pequeño pues es la que mejor rendimiento presenta y nos permite llegar a conclusiones.

2 Resultados

NOTA: En las gráficas de Matlab adjuntas en este documento, la gráfica azul representa la solución analítica y la roja es la solución calculada por nuestros programas.

2.1 Punto 1

NOTA: En la tabla que se muestra con datos con un h correspondiente a 0.5, se indican otros datos como "y calculado" el cual indica el y que calcula el programa en la ejecución de la ecuación; se indica "y analitico" el cual indica el valor real de y ; se indica tiempo el cual indica el parámetro t que utilizan estas funciones; Y finalmente el error de cada uno de los puntos junto con el promedio y la desviación estandar.

Se indicará sólo una tabla con un valor de h , pues los otros 2 valores de h generan tablas muy grandes para adjuntar en este documento y por eso se encuentran adjuntados en un excel.

2.2 Ecuación 1

La solución analítica de la ecuación 1 se encuentra en la siguiente gráfica:

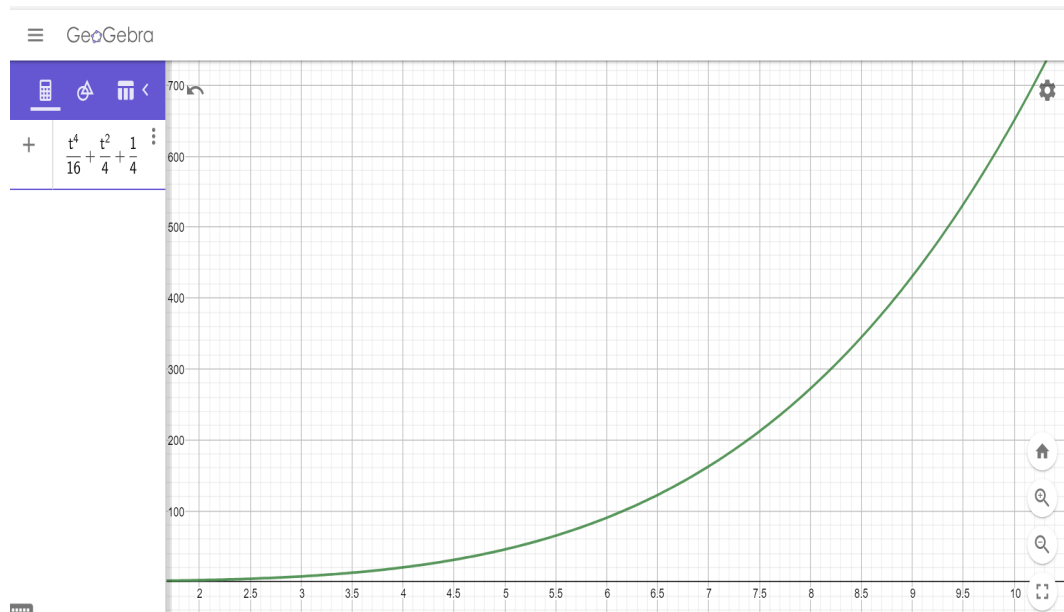


Figure 1: Ecuacion 1 - Analítica

2.2.1 Método de Euler

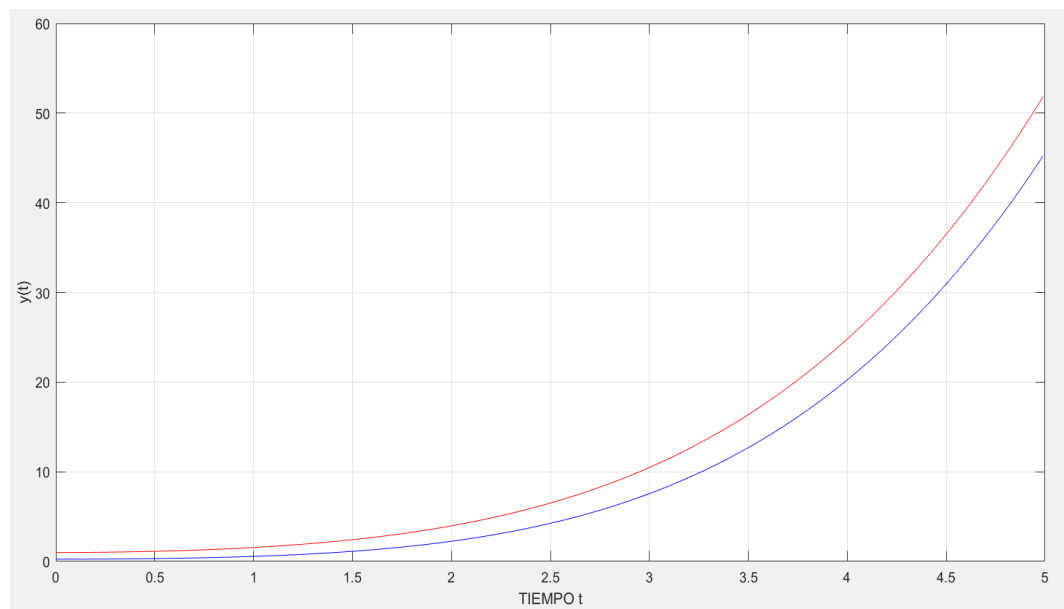


Figure 2: Solución Ecuacion 1 - Euler

Ecuacion 1 - Euler						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,2500	0,0000	3,0000	0.49173	0.76917	0,5
1,0000	0,3164	0,5000	2,1605			
1,2500	0,5625	1,0000	1,2222			
1,8090	1,1289	1,5000	0,6025			
2,8178	2,2500	2,0000	0,2523			
4,4964	4,2539	2,5000	0,0570			
7,1470	7,5625	3,0000	0,0549			
11,1570	12,6910	3,5000	0,1209			
17,0020	20,2500	4,0000	0,1604			
25,2490	30,9410	4,5000	0,1840			
36,5550	45,5630	5,0000	0,1977			
51,6700	65,0040	5,5000	0,2051			
71,4380	90,2500	6,0000	0,2084			
96,7940	122,3800	6,5000	0,2091			
128,7700	162,5600	7,0000	0,2079			
168,4900	212,0700	7,5000	0,2055			
217,1600	272,2500	8,0000	0,2023			
276,1100	344,5700	8,5000	0,1987			
346,7300	430,5600	9,0000	0,1947			
430,5200	531,8800	9,5000	0,1906			

Figure 3: Tabla Ecuacion 1 - Euler - $h = 0.5$

UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.queueCreateDefaultInteractionsOnAxes	2	0.002	0.001
euler	1	0.002	0.002
AnnotationPane.AnnotationPane>AnnotationPane.setParentImpl	2	0.002	0.002

Figure 4: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Euler - $h = 0.5$

settings	1	0.003	0.002
euler	1	0.003	0.002
UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.queueCreateDefaultInteractionsOnAxes	2	0.002	0.001

Figure 5: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Euler - $h = 0.1$

ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.childAdded	2	0.005	0.004
euler	1	0.005	0.003
ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.005	0.005

Figure 6: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Euler - $h = 0.01$

2.2.2 RK2

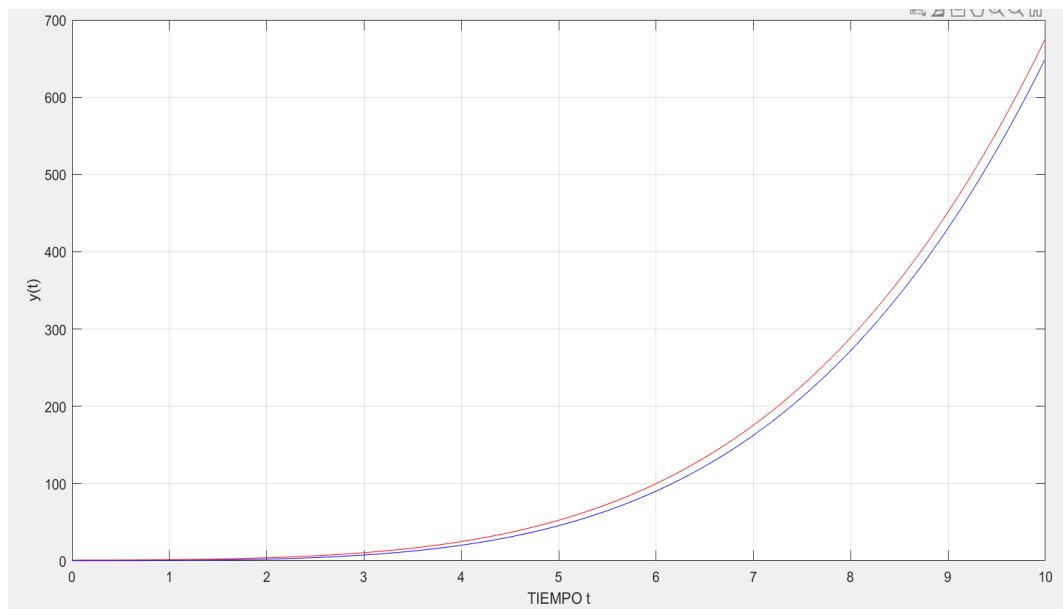


Figure 7: Solución Ecuacion 1 - RK2

Ecuacion 1 - RK2						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,2500	0,0000	3,0000	0,57268	0,87524	0,5
1,1250	0,3164	0,5000	2,5556			
1,5523	0,5625	1,0000	1,7597			
2,4169	1,1289	1,5000	1,1409			
3,9463	2,2500	2,0000	0,7539			
6,4619	4,2539	2,5000	0,5191			
10,3790	7,5625	3,0000	0,3725			
16,2080	12,6910	3,5000	0,2771			
24,5530	20,2500	4,0000	0,2125			
36,1130	30,9410	4,5000	0,1671			
51,6800	45,5630	5,0000	0,1343			
72,1410	65,0040	5,5000	0,1098			
98,4780	90,2500	6,0000	0,0912			
131,7700	122,3800	6,5000	0,0767			
173,1700	162,5600	7,0000	0,0653			
223,9700	212,0700	7,5000	0,0561			
285,5000	272,2500	8,0000	0,0487			
359,2200	344,5700	8,5000	0,0425			
446,6800	430,5600	9,0000	0,0374			
549,5200	531,8800	9,5000	0,0332			

Figure 8: Tabla Ecuacion 1 - RK2 - $h = 0.5$

settings	1	0.003	0.001
RK2	1	0.003	0.002
UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.queueCreateDefaultInteractionsOnAxes	2	0.002	0.001

Figure 9: Tiempo de Computo - Ecuación 1 RK2 - $h = 0.5$

settings	1	0.004	0.001
RK2	1	0.003	0.003
UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.queueCreateDefaultInteractionsOnAxes	2	0.002	0.001

Figure 10: Tiempo de Computo - Ecuación 1 RK2 - $h = 0.1$

newplot>ObserveAxesNextPlot	2	0.012	0.003
RK2	1	0.011	0.007
ylabel	1	0.009	0.006

Figure 11: Tiempo de Computo - Ecuación 1 RK2 - $h = 0.01$

2.2.3 RK4

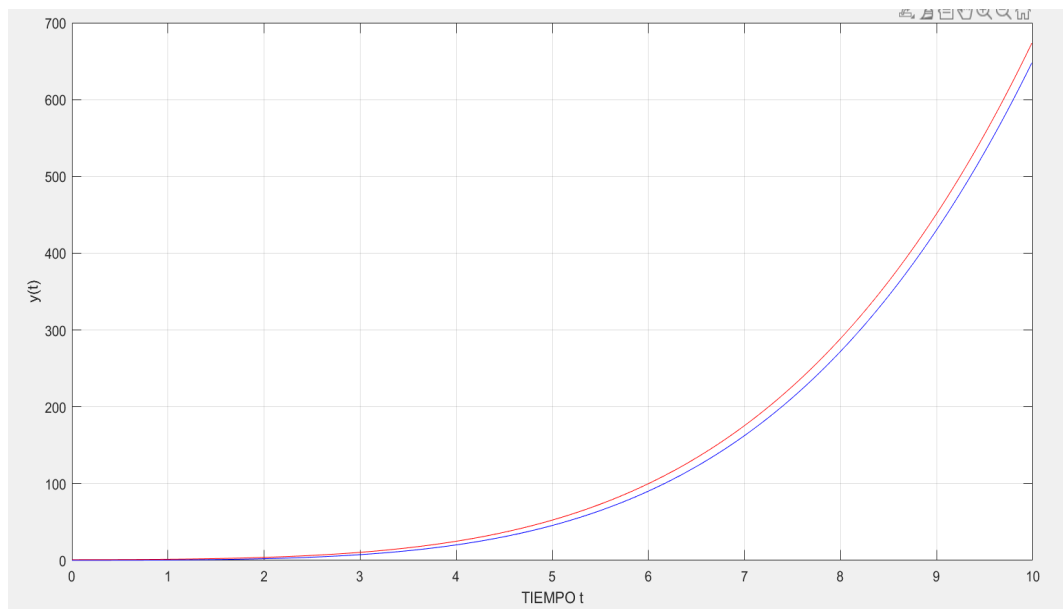


Figure 12: Solución Ecuacion 1 - RK4

Ecuacion 1 - RK4						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,2500	0,0000	3,0000	0.58937	0.87291	0,5
1,1289	0,3164	0,5000	2,5678			
1,5624	0,5625	1,0000	1,7776			
2,4412	1,1289	1,5000	1,1624			
3,9995	2,2500	2,0000	0,7776			
6,5655	4,2539	2,5000	0,5434			
10,5610	7,5625	3,0000	0,3965			
16,5020	12,6910	3,5000	0,3002			
24,9970	20,2500	4,0000	0,2344			
36,7500	30,9410	4,5000	0,1877			
52,5570	45,5630	5,0000	0,1535			
73,3090	65,0040	5,5000	0,1278			
99,9910	90,2500	6,0000	0,1079			
133,6800	122,3800	6,5000	0,0924			
175,5500	162,5600	7,0000	0,0799			
226,8600	212,0700	7,5000	0,0698			
288,9800	272,2500	8,0000	0,0615			
363,3600	344,5700	8,5000	0,0545			
451,5400	430,5600	9,0000	0,0487			
555,1700	531,8800	9,5000	0,0438			

Figure 13: Tabla Ecuacion 1 - RK4 - $h = 0.5$

settings	1	0.003	0.001
RK4	1	0.003	0.003
graphics\private\clo	1	0.003	0.003

Figure 14: Tiempo de Computo - Ecuación 1 RK4 - $h = 0.5$

ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.005	0.005
RK4	1	0.004	0.003
AnnotationPane.AnnotationPane>AnnotationPane.doSetup	2	0.004	0.003

Figure 15: Tiempo de Computo - Ecuación 1 RK4 - $h = 0.1$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.024	0.011
RK4	1	0.017	0.010
hold	1	0.012	0.008

Figure 16: Tiempo de Computo - Ecuación 1 RK4 - $h = 0.01$

2.2.4 Multipaso 2

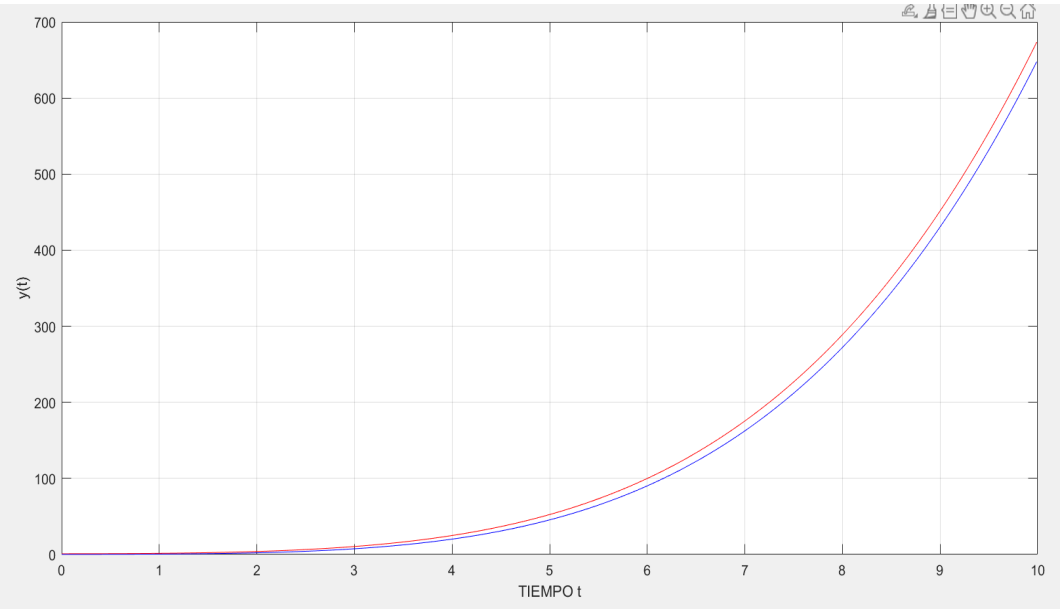


Figure 17: Solución Ecuacion 1 - Multipaso 2

Ecuacion 1 - Multipaso 2						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,2500	0,0000	3,0000	0.45579	0.82401	0,5
1,0000	0,3164	0,5000	2,1605			
1,3750	0,5625	1,0000	1,4444			
2,1295	1,1289	1,5000	0,8863			
3,4780	2,2500	2,0000	0,5458			
5,7281	4,2539	2,5000	0,3466			
9,2832	7,5625	3,0000	0,2275			
14,6430	12,6910	3,5000	0,1538			
22,4020	20,2500	4,0000	0,1063			
33,2540	30,9410	4,5000	0,0747			
47,9830	45,5630	5,0000	0,0531			
67,4710	65,0040	5,5000	0,0380			
92,6960	90,2500	6,0000	0,0271			
124,7300	122,3800	6,5000	0,0192			
164,7300	162,5600	7,0000	0,0133			
213,9600	212,0700	7,5000	0,0089			
273,7800	272,2500	8,0000	0,0056			
345,6300	344,5700	8,5000	0,0031			
431,0600	430,5600	9,0000	0,0012			
531,7000	531,8800	9,5000	0,0003			

Figure 18: Tabla Ecuacion 1 - Multipaso 2 - $h = 0.5$

graphics\private\clo	1	0.003	0.003
multipaso2	1	0.003	0.003
settings	1	0.003	0.001

Figure 19: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Multipaso 2 - $h = 0.5$

grid	1	0.005	0.003
multipaso2	1	0.004	0.003
ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.004	0.004

Figure 20: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Multipaso 2 - $h = 0.1$

ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.ScribeLayer	3	0.012	0.004
multipaso2	1	0.011	0.007
newplot>ObserveAxesNextPlot	2	0.011	0.003

Figure 21: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Multipaso 2 - $h = 0.01$

2.2.5 Multipaso 4

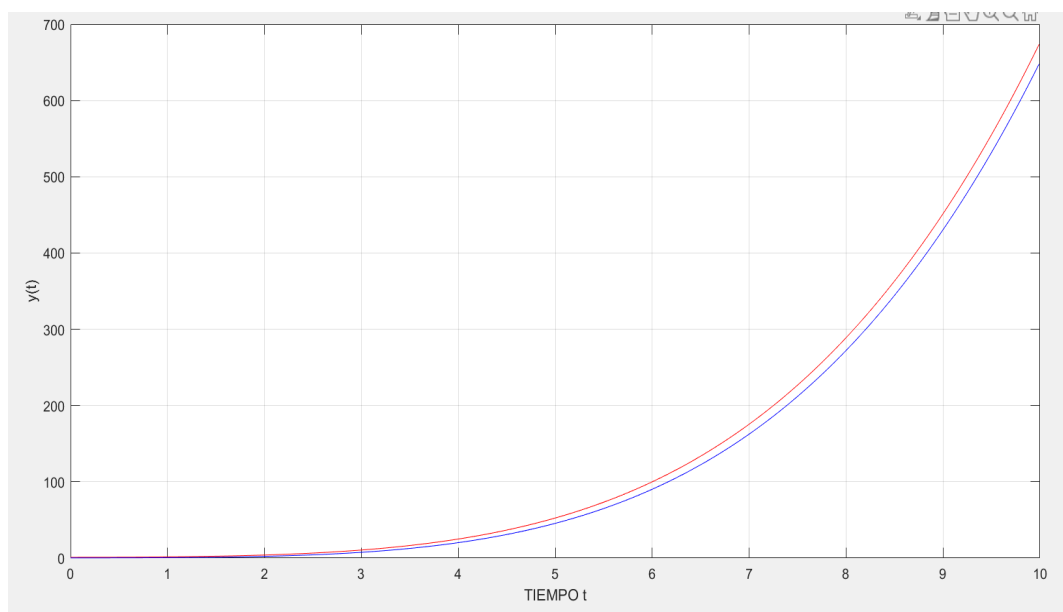


Figure 22: Solución Ecuacion 1 - Multipaso 4

Ecuacion 1 - Multipaso 4						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,2500	0,0000	3,0000	0,55963	0,82947	0,5
1,0000	0,3164	0,5000	2,1605			
1,5729	0,5625	1,0000	1,7963			
2,3954	1,1289	1,5000	1,1219			
3,8994	2,2500	2,0000	0,7331			
6,4441	4,2539	2,5000	0,5149			
10,4160	7,5625	3,0000	0,3773			
16,3180	12,6910	3,5000	0,2858			
24,7690	20,2500	4,0000	0,2232			
36,4750	30,9410	4,5000	0,1788			
52,2290	45,5630	5,0000	0,1463			
72,9220	65,0040	5,5000	0,1218			
99,5390	90,2500	6,0000	0,1029			
133,1600	122,3800	6,5000	0,0881			
174,9500	162,5600	7,0000	0,0762			
226,1800	212,0700	7,5000	0,0666			
288,2200	272,2500	8,0000	0,0586			
362,5000	344,5700	8,5000	0,0520			
450,5800	430,5600	9,0000	0,0465			
554,1000	531,8800	9,5000	0,0418			

Figure 23: Tabla Ecuacion 1 - Multipaso 4 - $h = 0.5$

ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.004	0.004
multipaso4	1	0.004	0.003
gobjects	8	0.004	0.004

Figure 24: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Multipaso 4 - $h = 0.5$

UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.createDefaultInteractions	2	0.006	0.003
multipaso4	1	0.006	0.005
ToolbarController.ToolbarController>ToolbarController.ToolbarController	1	0.006	0.005

Figure 25: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Multipaso 4 - $h = 0.1$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.024	0.011
multipaso4	1	0.019	0.011
hold	1	0.015	0.010

Figure 26: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Multipaso 4 - $h = 0.01$

2.3 Ecuación 2

La solución analítica de la ecuación 2 se encuentra en la siguiente gráfica:

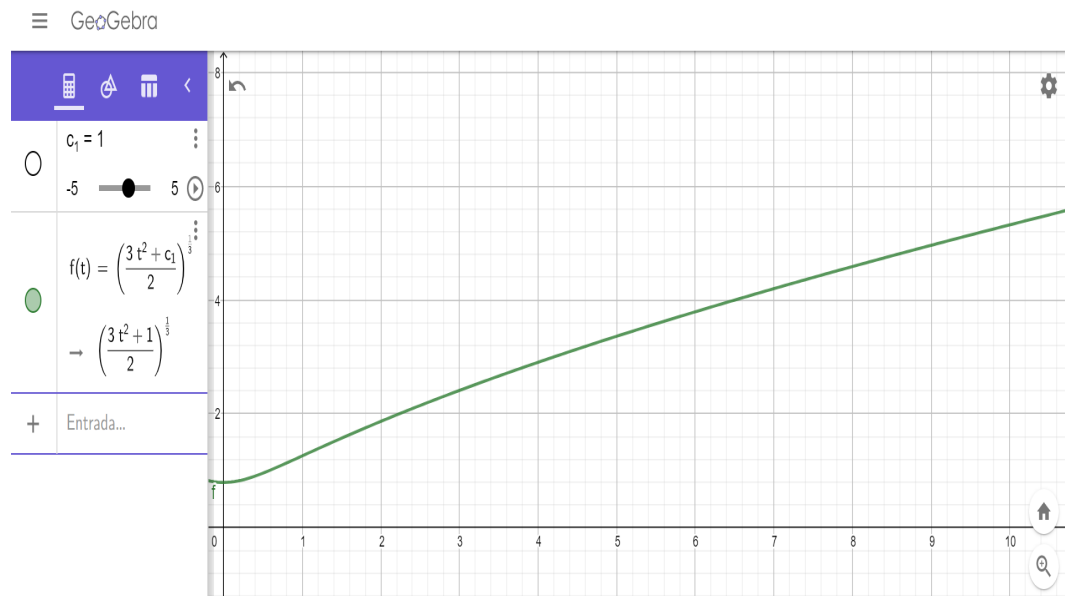


Figure 27: Ecuacion 2 - Analítica

2.3.1 Método de Euler

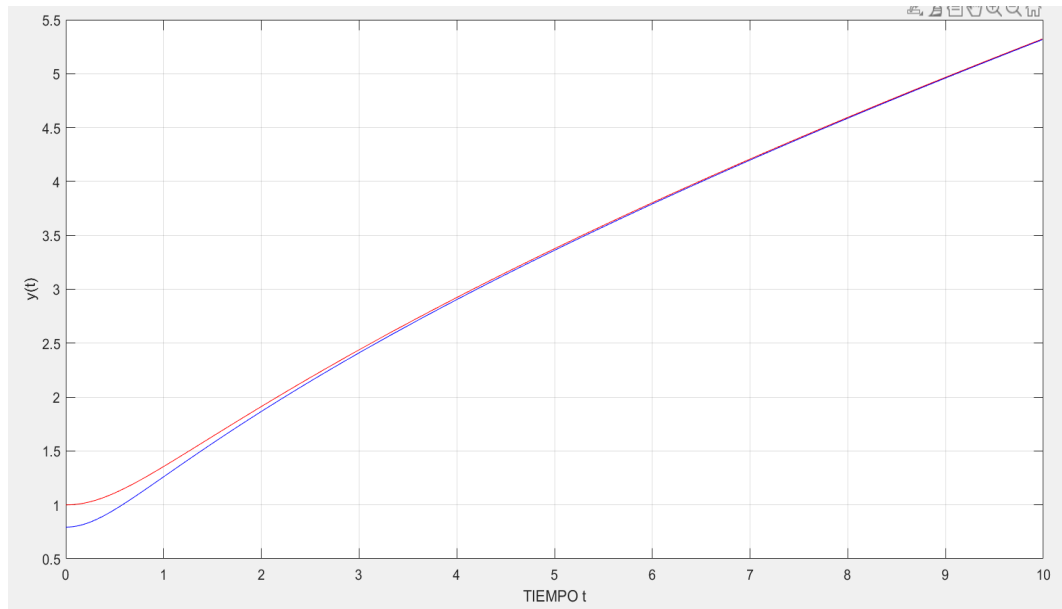


Figure 28: Solución Ecuacion 2 - Euler

Ecuacion 2 - Euler						
Y calculado	Y Analitico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,7937	0,0000	0,2599	0,020384	0,0571	0,5
1,0000	0,9565	0,5000	0,0455			
1,2500	1,2599	1,0000	0,0079			
1,5700	1,5707	1,5000	0,0004			
1,8743	1,8663	2,0000	0,0043			
2,1589	2,1454	2,5000	0,0063			
2,4271	2,4101	3,0000	0,0070			
2,6817	2,6625	3,5000	0,0072			
2,9251	2,9044	4,0000	0,0071			
3,1588	3,1372	4,5000	0,0069			
3,3843	3,3620	5,0000	0,0066			
3,6026	3,5798	5,5000	0,0064			
3,8145	3,7914	6,0000	0,0061			
4,0207	3,9974	6,5000	0,0058			
4,2217	4,1983	7,0000	0,0056			
4,4181	4,3947	7,5000	0,0053			
4,6102	4,5868	8,0000	0,0051			
4,7984	4,7750	8,5000	0,0049			
4,9830	4,9597	9,0000	0,0047			
5,1642	5,1410	9,5000	0,0045			

Figure 29: Tabla Ecuacion 2 - Euler - $h = 0.5$

settings	1	0.003	0.001
euler	1	0.002	0.002
UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.queueCreateDefaultInteractionsOnAxes	2	0.002	0.001

Figure 30: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Euler - $h = 0.5$

settings	1	0.003	0.002
euler	1	0.002	0.002
UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.queueCreateDefaultInteractionsOnAxes	2	0.002	0.001

Figure 31: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Euler - $h = 0.1$

grid	1	0.005	0.003
euler	1	0.004	0.003
ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.004	0.004

Figure 32: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Euler - $h = 0.01$

2.3.2 RK2

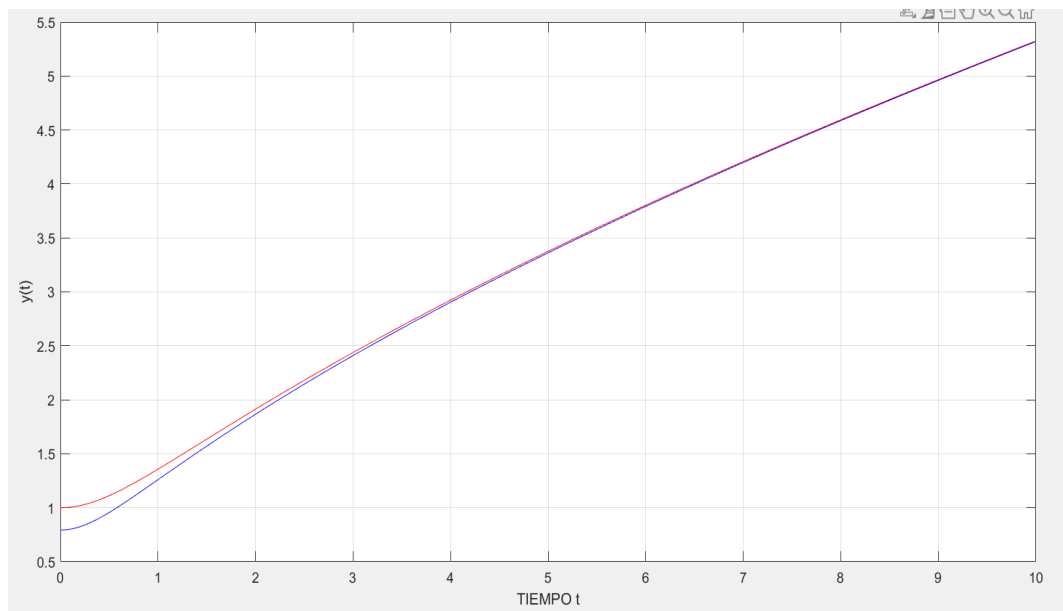


Figure 33: Solución Ecuacion 2 - RK2

Ecuacion 2 - RK2						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,7937	0,0000	0,2599	0,033247	0,067687	0,5
1,1250	0,9565	0,5000	0,1762			
1,3667	1,2599	1,0000	0,0847			
1,6409	1,5707	1,5000	0,0447			
1,9159	1,8663	2,0000	0,0266			
2,1826	2,1454	2,5000	0,0173			
2,4393	2,4101	3,0000	0,0121			
2,6861	2,6625	3,5000	0,0089			
2,9240	2,9044	4,0000	0,0067			
3,1538	3,1372	4,5000	0,0053			
3,3763	3,3620	5,0000	0,0043			
3,5923	3,5798	5,5000	0,0035			
3,8024	3,7914	6,0000	0,0029			
4,0072	3,9974	6,5000	0,0025			
4,2072	4,1983	7,0000	0,0021			
4,4027	4,3947	7,5000	0,0018			
4,5941	4,5868	8,0000	0,0016			
4,7817	4,7750	8,5000	0,0014			
4,9658	4,9597	9,0000	0,0012			
5,1467	5,1410	9,5000	0,0011			

Figure 34: Tabla Ecuacion 2 - RK2 - $h = 0.5$

settings	1	0.003	0.001
RK2	1	0.002	0.002
AnnotationPane.AnnotationPane>AnnotationPane.setParentImpl	2	0.002	0.001

Figure 35: Tiempo de Computo - Ecuación 2 RK2 - $h = 0.5$

ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.childAdded	2	0.004	0.004
RK2	1	0.004	0.004
grid	1	0.004	0.003

Figure 36: Tiempo de Computo - Ecuación 2 RK2 - $h = 0.1$

newplot>ObserveAxesNextPlot	2	0.011	0.003
RK2	1	0.009	0.005
cla	1	0.008	0.004

Figure 37: Tiempo de Computo - Ecuación 2 RK2 - $h = 0.01$

2.3.3 RK4

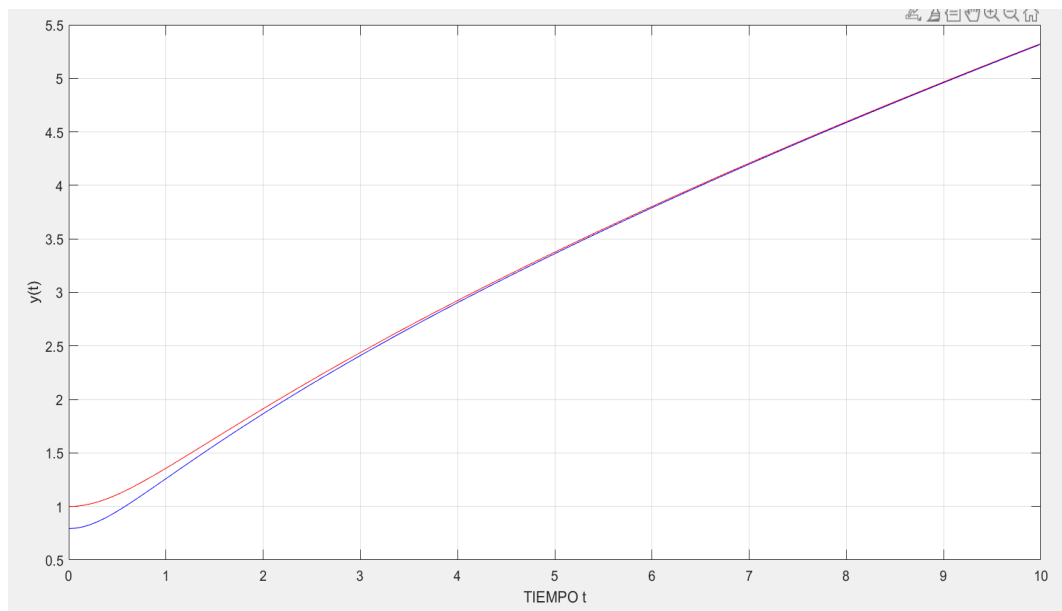


Figure 38: Solución Ecuacion 2 - RK4

Ecuacion 2 - RK4						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,7937	0,0000	0,2599	0,032008	0,065942	0,5
1,1123	0,9565	0,5000	0,1630			
1,3576	1,2599	1,0000	0,0775			
1,6358	1,5707	1,5000	0,0414			
1,9131	1,8663	2,0000	0,0251			
2,1812	2,1454	2,5000	0,0167			
2,4386	2,4101	3,0000	0,0118			
2,6859	2,6625	3,5000	0,0088			
2,9241	2,9044	4,0000	0,0068			
3,1541	3,1372	4,5000	0,0054			
3,3767	3,3620	5,0000	0,0044			
3,5928	3,5798	5,5000	0,0036			
3,8030	3,7914	6,0000	0,0031			
4,0078	3,9974	6,5000	0,0026			
4,2078	4,1983	7,0000	0,0023			
4,4033	4,3947	7,5000	0,0020			
4,5947	4,5868	8,0000	0,0017			
4,7824	4,7750	8,5000	0,0015			
4,9665	4,9597	9,0000	0,0014			
5,1473	5,1410	9,5000	0,0012			

Figure 39: Tabla Ecuacion 2 - RK4 - h = 0.5

objArrayDispatch	4	0.004	0.002
RK4	1	0.003	0.003
settings	1	0.003	0.001

Figure 40: Tiempo de Computo - Ecuación 2 RK4 - h = 0.5

grid	1	0.005	0.003
RK4	1	0.005	0.004
ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.004	0.004

Figure 41: Tiempo de Computo - Ecuación 2 RK4 - h = 0.1

.. Controller.DesktopToolBarController>DesktopToolBarController.DesktopToolBarController	1	0.024	0.010
RK4	1	0.017	0.010
Scribelayer.Scribelayer>Scribelayer.Scribelayer	3	0.013	0.005

Figure 42: Tiempo de Computo - Ecuación 2 RK4 - $h = 0.01$

2.3.4 Multipaso 2

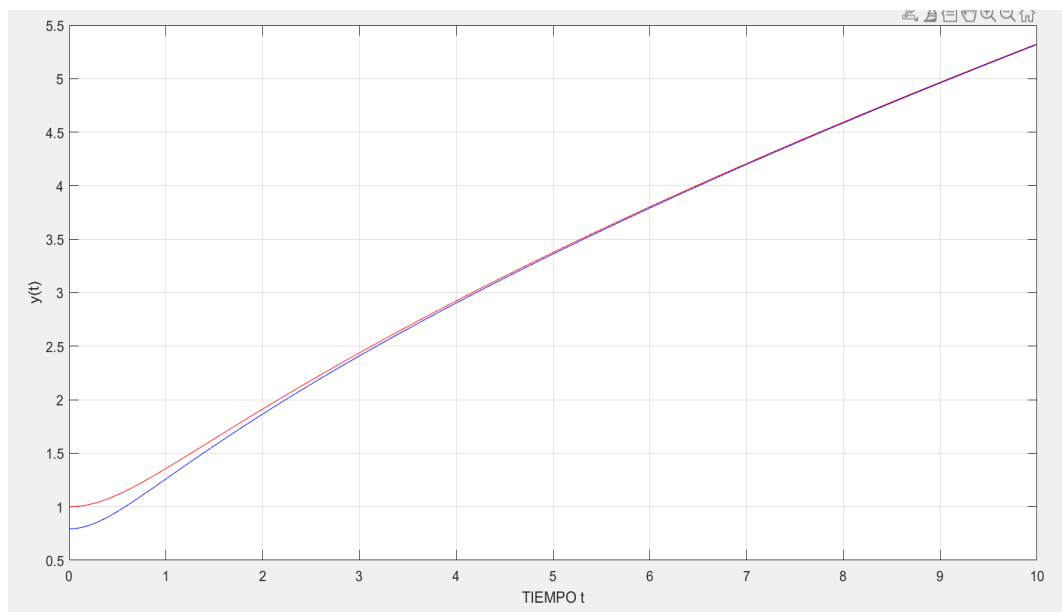


Figure 43: Solución Ecuacion 2 - Multipaso 2

Ecuacion 2 - Multipaso 2						
Y calculado	Y Analitico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,7937	0,0000	0,2599	0,028798	0,058953	0,5
1,0000	0,9565	0,5000	0,0455			
1,3750	1,2599	1,0000	0,0913			
1,6467	1,5707	1,5000	0,0484			
1,9293	1,8663	2,0000	0,0338			
2,1940	2,1454	2,5000	0,0227			
2,4492	2,4101	3,0000	0,0162			
2,6945	2,6625	3,5000	0,0120			
2,9310	2,9044	4,0000	0,0092			
3,1597	3,1372	4,5000	0,0072			
3,3813	3,3620	5,0000	0,0058			
3,5966	3,5798	5,5000	0,0047			
3,8062	3,7914	6,0000	0,0039			
4,0105	3,9974	6,5000	0,0033			
4,2101	4,1983	7,0000	0,0028			
4,4052	4,3947	7,5000	0,0024			
4,5964	4,5868	8,0000	0,0021			
4,7837	4,7750	8,5000	0,0018			
4,9677	4,9597	9,0000	0,0016			
5,1483	5,1410	9,5000	0,0014			

Figure 44: Tabla Ecuacion 2 - Multipaso 2 - $h = 0.5$

grid	1	0.004	0.003
multipaso2	1	0.004	0.004
ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.findLayer	19	0.004	0.004

Figure 45: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Multipaso 2 - $h = 0.5$

objArrayDispatch	4	0.004	0.002
multipaso2	1	0.004	0.003
gobjects	8	0.003	0.003

Figure 46: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Multipaso 2 - $h = 0.1$

.. Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.024	0.011
multipaso2	1	0.014	0.009
newplot>ObserveAxesNextPlot	2	0.013	0.003

Figure 47: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Multipaso 2 - $h = 0.01$

2.3.5 Multipaso 4

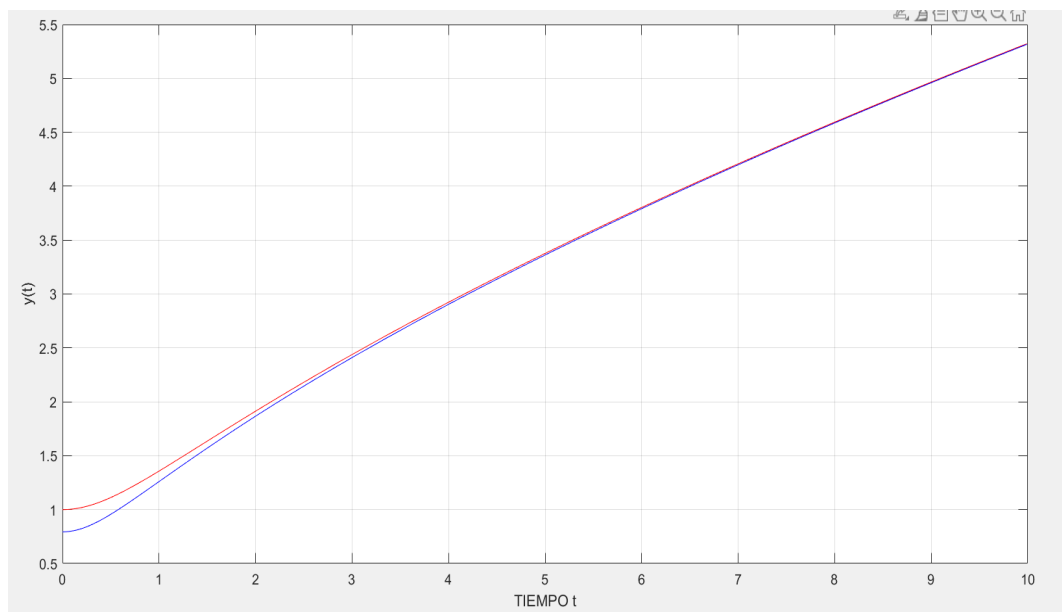


Figure 48: Solución Ecuacion 2 - Multipaso 4

Ecuacion 2 - Multipaso 4						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
1,0000	0,7937	0,0000	0,2599	0,059321	0,079827	0,5
1,0000	0,9565	0,5000	0,0455			
1,5729	1,2599	1,0000	0,2484			
1,4215	1,5707	1,5000	0,0950			
2,1607	1,8663	2,0000	0,1578			
1,9569	2,1454	2,5000	0,0879			
2,6748	2,4101	3,0000	0,1098			
2,5439	2,6625	3,5000	0,0446			
3,0711	2,9044	4,0000	0,0574			
3,0931	3,1372	4,5000	0,0141			
3,4490	3,3620	5,0000	0,0259			
3,5780	3,5798	5,5000	0,0005			
3,8367	3,7914	6,0000	0,0119			
4,0114	3,9974	6,5000	0,0035			
4,2256	4,1983	7,0000	0,0065			
4,4120	4,3947	7,5000	0,0039			
4,6065	4,5868	8,0000	0,0043			
4,7914	4,7750	8,5000	0,0034			
4,9757	4,9597	9,0000	0,0032			
5,1555	5,1410	9,5000	0,0028			

Figure 49: Tabla Ecuacion 2 - Multipaso 4 - $h = 0.5$

objArrayDispatch	4	0.005	0.003
multipaso4	1	0.005	0.004
AnnotationPane.AnnotationPane>AnnotationPane.doSetup	2	0.004	0.004

Figure 50: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Multipaso 4 - $h = 0.5$

ScribeLayer.ScribeLayer>@(src,event)hObj_childAdded(src,event)	2	0.006	0.000
multipaso4	1	0.005	0.005
ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.childAdded	2	0.005	0.005

Figure 51: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Multipaso 4 - $h = 0.1$

.. Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.022	0.010
multipaso4	1	0.017	0.011
hold	1	0.012	0.008

Figure 52: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Multipaso 4 - $h = 0.01$

2.4 Punto 2

En este punto se descompuso la ecuación de orden superior en ecuaciones de primer orden y se resolvieron en este caso las dos ecuaciones usando runge-kutta de orden 4.

A continuación se muestran los resultados obtenidos con un $h = 0.01, 0.1$ y 0.5

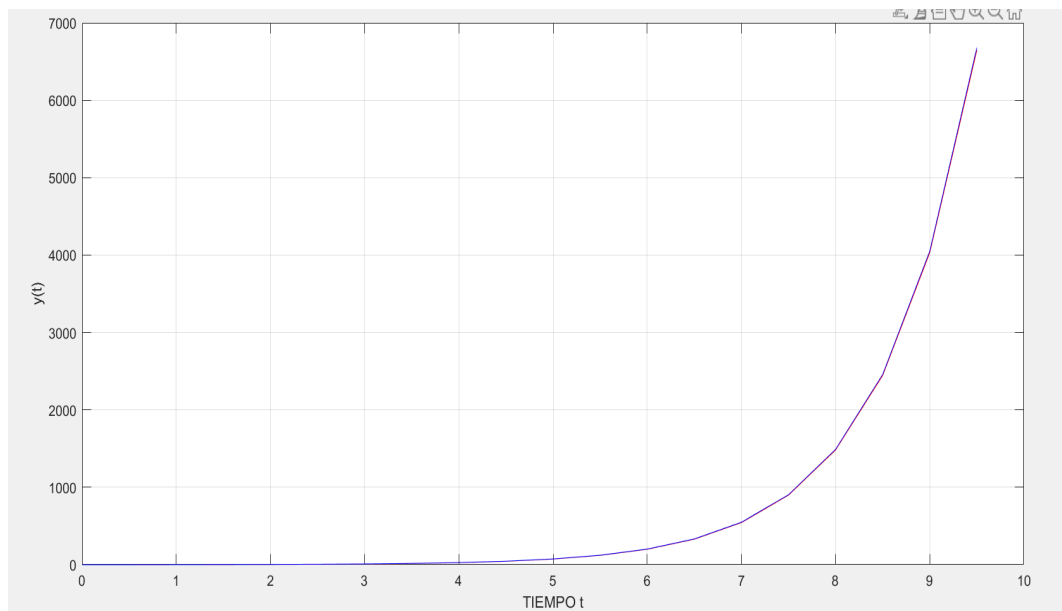


Figure 53: Solución - $h = 0.5$

Punto 2						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor h
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1033	0,461248264	0,5
0,2386	0,5211	0,5000	0,5421			
0,6796	1,1752	1,0000	0,4217			
1,4586	2,1293	1,5000	0,3150			
2,7991	3,6269	2,0000	0,2282			
5,0705	6,0502	2,5000	0,1619			
8,8814	10,0180	3,0000	0,1135			
15,2360	16,5430	3,5000	0,0790			
25,7890	27,2900	4,0000	0,0550			
43,2710	45,0030	4,5000	0,0385			
72,1820	74,2030	5,0000	0,0272			
119,9400	122,3400	5,5000	0,0196			
198,7900	201,7100	6,0000	0,0145			
328,8800	332,5700	6,5000	0,0111			
543,4900	548,3200	7,0000	0,0088			
897,4500	904,0200	7,5000	0,0073			
1481,1000	1490,5000	8,0000	0,0063			
2443,6000	2457,4000	8,5000	0,0056			
4030,7000	4051,5000	9,0000	0,0052			
6647,4000	6679,9000	9,5000	0,0049			

Figure 54: Tabla - $h = 0.5$

<code>hold</code>	1	0.012	0.008
<code>orden_sup</code>	1	0.012	0.010
<code>UnifiedAxesInteractions>UnifiedAxesInteractions.createDefaultInteractions</code>	2	0.011	0.005

Figure 55: Tiempo de Computo - $h = 0.5$

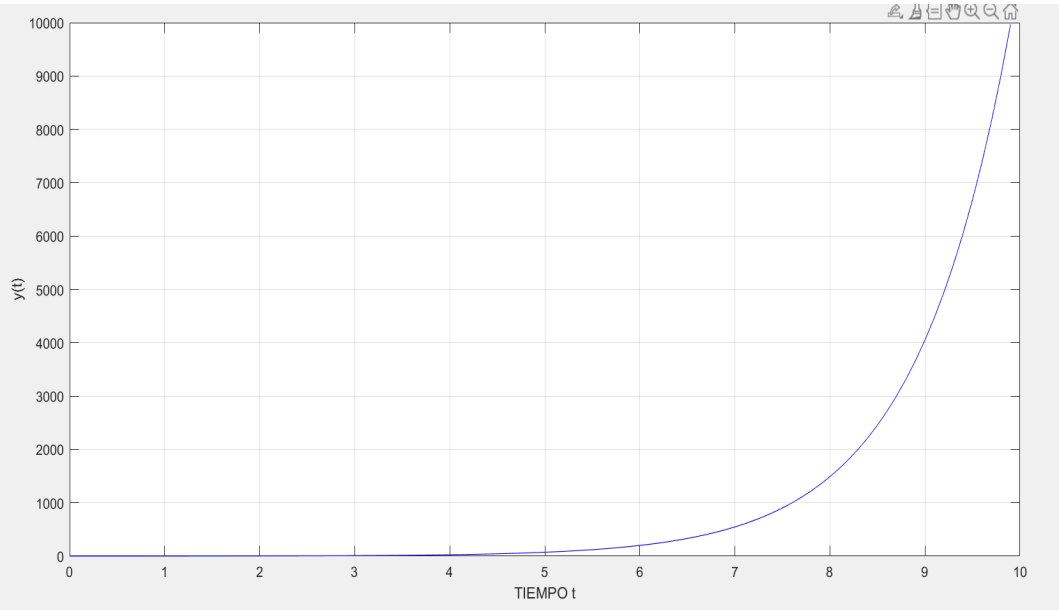


Figure 56: Solución - $h = 0.1$

<code>newplot>ObserveAxesNextPlot</code>	2	0.013	0.004
<code>orden_sup</code>	1	0.012	0.009
<code>ylabel</code>	1	0.011	0.007

Figure 57: Tiempo de Computo - $h = 0.1$

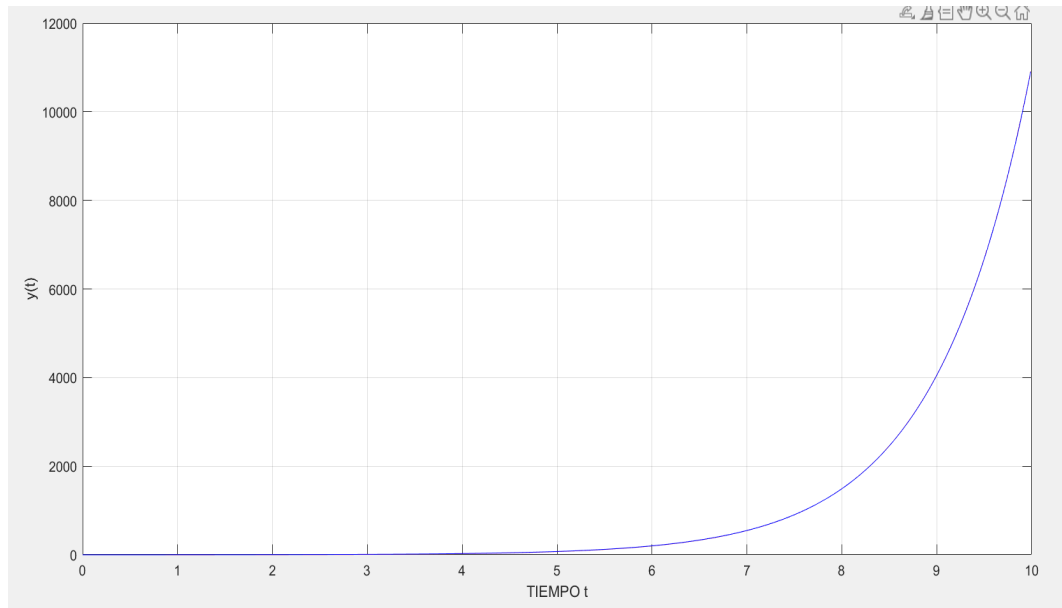


Figure 58: Solución - $h = 0.01$

CanvasSetup>CanvasSetup.createScribeLayers	1	0.047	0.009
orden_sup	1	0.044	0.029
ScribeStackManager.ScribeStackManager>ScribeStackManager.getLayer	4	0.038	0.002

Figure 59: Tiempo de Computo - $h = 0.01$

2.5 Punto 3

NOTA: En la tabla que se muestra con datos con un h correspondiente a 0.5, se indican otros datos como "y calculado" el cual indica el y que calcula el programa en la ejecución de la ecuación; se indica "y analítico" el cual indica el valor real de y ; se indica tiempo el cual indica el parámetro t que utilizan estas funciones; Y finalmente el error de cada uno de los puntos junto con el promedio y la desviación estandar.

Se indicará sólo una tabla con un valor de h , pues los otros 2 valores de h generan tablas muy grandes para adjuntar en este documento y por eso se encuentran adjuntados en un excel.

2.6 Ecuación 1

Nota: Las gráficas de la solución analítica y la solución de nuestro programa son exactamente iguales, por esta razón la analítica no fue graficada en Geogebra como en el punto 1.

2.6.1 Método de Diferencias Finitas

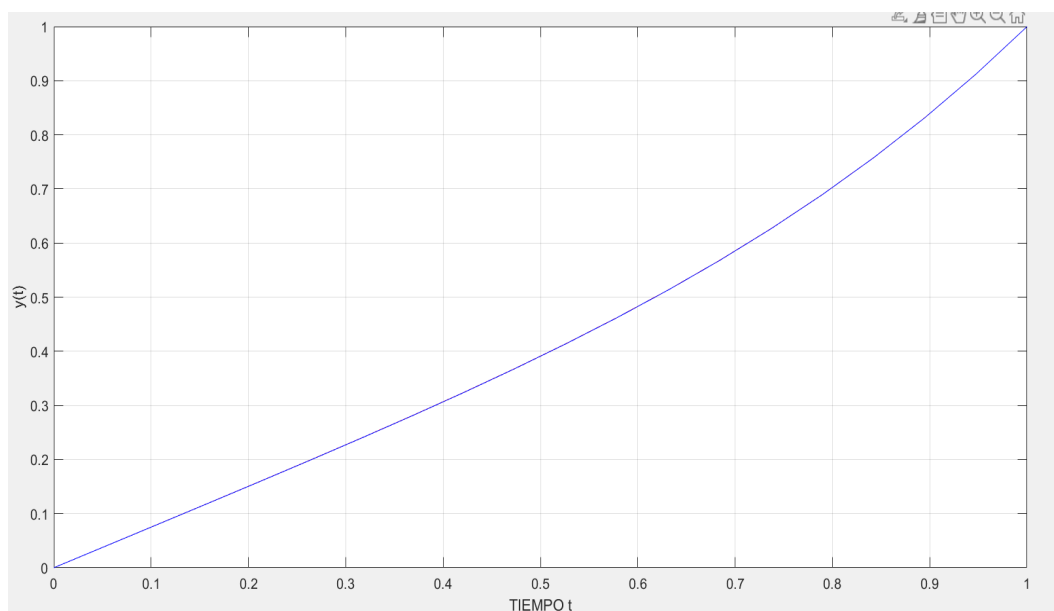


Figure 60: Solución Ecuacion 1 - Diferencias Finitas

Ecuacion 1 - Elem Finitos						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor n
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0	0	5
0,1885	0,1885	0,2500	0,0000			
0,3906	0,3906	0,5000	0,0000			
0,6416	0,6416	0,7500	0,0000			
1,0000	1,0000	1,0000	0,0000			

Figure 61: Tabla Ecuacion 1 - Diferencias Finitas - $n = 5$

<code>newplot>ObserveAxesNextPlot</code>	2	0.016	0.004
<code>dif_finitas</code>	1	0.013	0.009
<code>PointerMixin>PointerMixin.setPointerStrategy</code>	1	0.013	0.013

Figure 62: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Diferencias Finitas - $n = 5$

<code>.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController</code>	1	0.025	0.012
<code>dif_finitas</code>	1	0.021	0.010
<code>hold</code>	1	0.014	0.009

Figure 63: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Diferencias Finitas - $n = 10$

<code>.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController</code>	1	0.025	0.012
<code>dif_finitas</code>	1	0.020	0.010
<code>hold</code>	1	0.013	0.009

Figure 64: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Diferencias Finitas - $n = 20$

2.6.2 Método de Elementos Finitos

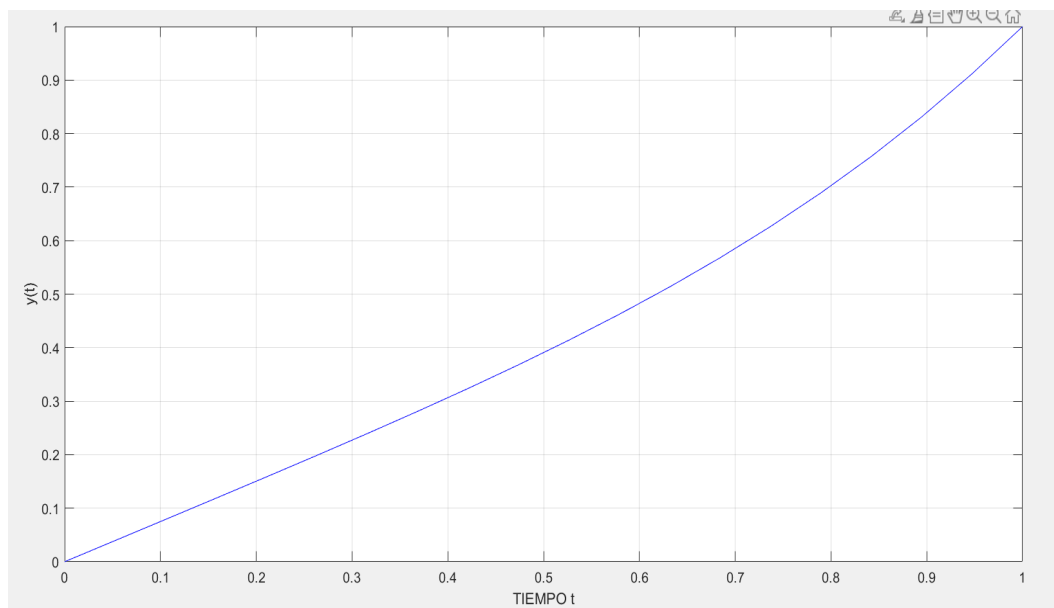


Figure 65: Solución Ecuacion 1 - Elementos Finitos

Ecuacion 1 - Elem Finitos						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor n
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0	0	5
0,1885	0,1885	0,2500	0,0000			
0,3906	0,3906	0,5000	0,0000			
0,6416	0,6416	0,7500	0,0000			
1,0000	1,0000	1,0000	0,0000			

Figure 66: Tabla Ecuacion 1 - Elementos Finitos - $n = 5$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.026	0.012
elem_finitos	1	0.020	0.011
hold	1	0.015	0.010

Figure 67: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Elementos Finitos - $n = 5$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.027	0.012
elem_finitos	1	0.024	0.013
ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.ScribeLayer	3	0.014	0.005

Figure 68: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Elementos Finitos - $n = 10$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.026	0.011
elem_finitos	1	0.024	0.013
hold	1	0.013	0.009

Figure 69: Tiempo de Computo - Ecuación 1 Elementos Finitos - $n = 20$

2.7 Ecuación 2

Nota: Las gráficas de la solución analítica y la solución de nuestro programa son exactamente iguales, por esta razón la analítica no fue graficada en Geogebra como en el punto 1.

2.7.1 Método de Diferencias Finitas

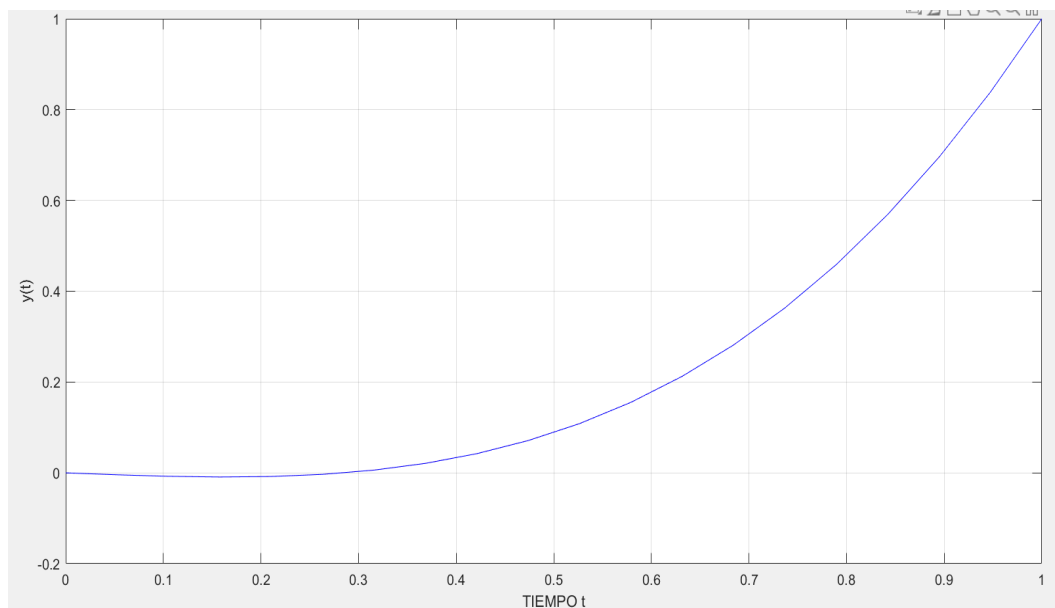


Figure 70: Solución Ecuacion 2 - Diferencias Finitas

Ecuacion 2 - Dif Finitos						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor n
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0434	0,03078424	5
-0,0039	-0,0049	0,2500	0,2000			
0,0898	0,0885	0,5000	0,0147			
0,3867	0,3857	0,7500	0,0025			
1,0000	1,0000	1,0000	0,0000			

Figure 71: Tabla Ecuacion 2 - Diferencias Finitas - $n = 5$

ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.ScribeLayer	3	0.020	0.008
dif_finitas	1	0.017	0.013
newplot>ObserveAxesNextPlot	2	0.016	0.004

Figure 72: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Diferencias Finitas - $n = 5$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.030	0.014
dif_finitas	1	0.021	0.010
ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.ScribeLayer	3	0.015	0.007

Figure 73: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Diferencias Finitas - $n = 10$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.026	0.011
dif_finitas	1	0.021	0.010
hold	1	0.015	0.010

Figure 74: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Diferencias Finitas - $n = 20$

2.7.2 Método de Elementos Finitos

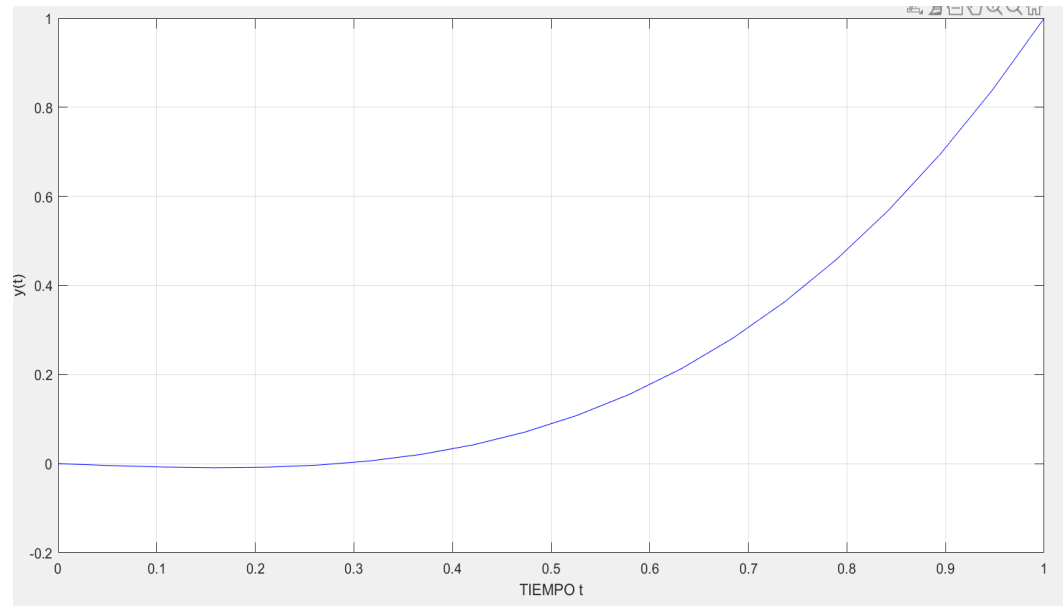


Figure 75: Solución Ecuacion 2 - Elementos Finitos

Ecuacion 2 - Elem Finitos						
Y calculado	Y Analítico	Tiempo (tk)	Error	Error Promedio	Desviacion std	Valor n
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,87726E-32	5
-0,0049	-0,0049	0,2500	0,0000			
0,0885	0,0885	0,5000	0,0000			
0,3857	0,3857	0,7500	0,0000			
1,0000	1,0000	1,0000	0,0000			

Figure 76: Tabla Ecuacion 2 - Elementos Finitos - $n = 5$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.027	0.012
elem_finitos	1	0.020	0.012
hold	1	0.014	0.009

Figure 77: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Elementos Finitos - $n = 5$

.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.026	0.013
elem_finitos	1	0.025	0.014
ScribeLayer.ScribeLayer>ScribeLayer.ScribeLayer	3	0.015	0.006

Figure 78: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Elementos Finitos - $n = 10$

DesktopToolbarController.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.getInstance	1	0.026	0.000
elem_finitos	1	0.025	0.014
.._Controller.DesktopToolbarController>DesktopToolbarController.DesktopToolbarController	1	0.025	0.012

Figure 79: Tiempo de Computo - Ecuación 2 Elementos Finitos - $n = 20$

3 Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir:

- En terminos generales todos los metodos son muy buenos pues presentan un margen de error muy pequeño, aun así se puede distinguir a simple vista como los metodos de PVI son mucho mas inexactos que los de PVF.
- Dentro de los metodos PVI se puede ver como a mayor exactitud en la aproximación, mayor tiempo de computo se requiere, esto está directamente relacionado con el tamaño de h , cuanto más pequeño un mayor número de operaciones se deben hacer.
- En los metodos PVI se puede ver también que cuanto más inexacto un metodo, mayor rendimiento computacional presenta, siendo este el caso de euler donde incluso con el valor de h más pequeño su tiempo de computo no se disparó y es el metodo que más error promedio presenta, con RK y multipaso de orden 2 sucede algo parecido, ambos son más inexactos que sus versiones en orden 4, pero con el h más pequeño son más eficientes.
- En los metodos PVF se puede ver una gran exactitud en ambos metodos, por lo cual este no es un buen atributo para definir que metodo es mejor,

en cuanto a tiempo computacional conforme n es más pequeño y por ende h también, tiende a destacarse el metodo de diferencias finitas.

- En la función basada en RK de orden 4 para resolver ecuaciones de orden superior, debido a que se deben procesar cada una de las ecuaciones de primer orden en que se descompone su tiempo computacional es el más alto de todos, sin embargo su nivel de exactitud es muy bueno, esto debido a que precisamente tiene las mismas bases numericas que el metodo RK de orden 4, que como se mencionó junto con el multipaso de orden 4 son los que menor rango de error presentan .
- Un patron que se repite en todos los metodos es que a menor h , mayor exactitud pero también mayor tiempo computacional debido al incremento en el numero de operaciones a realizar.