Cálculo Diferencial e Integral I com o GeoGebra

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - CAMPUS DE SÃO CARLOS

SCC5938 - SISTEMAS INTERATIVOS E MULTIMÍDIA I
ICMC - INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO

DR. MARIA DA GRAÇA CAMPOS PIMENTEL
MS. ANA MARIA LEMES DE LIMA

Março 2019

Dedico este trabalho a minha querida avó Maria Luiza Lemes (in memoriam), uma pessoa muito especial que estará sempre comigo em meu coração. Para ela tudo estava sob controle, o conforto que temos é que só devolvemos a Deus a jóia mais preciosa que ele nos emprestou.
Saudades eternas minha vó.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, o centro e o fundamento de tudo em minha vida, por renovar a cada momento as minhas forças e disposição e pelo discernimento concedido ao longo da minha vida. Obrigada, meu pai, por tudo de bom que tenho e que sou. Agradeço também aos santos e anjos que sempre estão olhando por mim e intercedendo a meu favor. Sem essa força divina, nenhuma conquista seria possível.

Agradeço meus amados pais José Correia e Valdelice, se há algo que faz diferença na formação da personalidade e na vida de uma pessoa é o amor que ela recebe. Vocês me educaram com amor, se dedicaram à minha educação como ser humano. Vocês fizeram de mim a pessoa que hoje sou, e eu só tenho motivos para agradecê-los. Sou e serei eternamente grata por tudo que vocês dedicaram a mim. Deus não poderia ter me dado pais melhores. Obrigada por tudo. Amo muito vocês.

Agradeço a minha querida tia Creonice, minha segunda mãe pelo amor e carinho.

Agradeço as professoras Adriana Strieder Philippsen e Lucineide Andrade com quem comecei a trabalhar com o software GeoGebra no ano de 2014 na Universidade Estadual do Paraná.

Agradeço a professora Graça primeiramente pela confiança, pela paciência, pelas inúmeras ideias e pelo comprometimento com este trabalho. Sem ela este trabalho não seria possível.

Agradeço meu orientador professor José Alberto Cuminato e meu co-orientador Michael Vynnycky (KTH Royal Institute of Technology – Estocolmo - Suécia) por todo o apoio.

Agradeço também meus amigos André e Luis pelas valiosas contribuições durante a realização deste trabalho.

Por fim agradeço a Universidade de São Paulo (USP), ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), pela oportunidade de crescimento científico.

A todos meus sinceros agradecimentos.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.
(Madre Teresa de Calcuta)

Sumário

1. APRESENTAÇÃO

Este material de apoio foi desenvolvido com base nas notas de aulas da professora Márcia Federson do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos. Também contamos com a ajuda de excelentes livros de cálculo, com por exemplo, o livro de James Stewart, o livro escrito por Louis Leithold é excepcional pela didática ao ensinar minuciosamente este conteúdo.

Tudo isso foi pensado para auxiliar alunos de cursos introdutórios de cálculo diferencial e integral I, com o principal intuito de explicar de uma melhor forma a ideia geométrica de limite, derivada e integral de funções de uma variável real fazendo-se uso do incrível software GeoGebra. Optou-se por este software devido ao fato de ser um software gratuito, de fácil acesso e apresenta uma interface muito simples e extremamente dinâmica.

Algumas dicas para o estudo do Cálculo:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atentamente e pacientemente procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar as monitorias ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício se a sua solução não é óbvia, insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do cálculo.
- Dificuldades são esperadas, mas são elas que nos ajudam a evoluir. Então, ao se deparar com um resultado difícil ou um exercício complicado, não desista. Estude, releia, tente, erre, estude mais, tente novamente, mas veja nunca desista.

2. HISTÓRIA DO CÁLCULO

Neste capítulo será apresentado notas históricas a respeito do nascimento do cálculo abordando alguns dos matemáticos que contribuíram para esse importante feito. A matemática é uma ciência que encontra-se intimamente ligada ao cotidiano humano, desde os tempos mais remotos até os dias atuais, despertando o interesse de muitos estudiosos da área. Por se uma ciência do conhecimento muito ampla subdivide-se em áreas, o cálculo é uma dessas áreas na qual iremos relatar de forma breve como nasceu.

2.1 O nascimento do cálculo

A matemática é uma ciência que desde a antiguidade encontra-se presente nas atividades sociais como forma de facilitar o desenvolvimento de tarefas, desde as mais básicas como contar objetos, até as mais complexas como, por exemplo, sua presença no âmbito da construção civil, da astronomia, da medicina e da computação. Dessa maneira, é notável que seu progresso esta intimamente ligado aos avanços da sociedade, pois a medida em que novas tecnologias vão sendo criadas faz-se necessário o auxílio da matemática para coloca-las em prática.

O cálculo encontra-se presente em diversos ramos da matemática, o seu desenvolvimento ocorreu de maneira gradual fazendo-se presente desde o século XVII nas obras de diversos matemáticos, tendo como principais percursores Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Isaac Newton nasceu na Inglaterra em 1642, enquanto jovem não se destacou por seus estudos, tendo demonstrado certo grau de dificuldade nas questões de geometria no seu exame de ingresso na Universidade de Cambridge. Após concluir a sua graduação, a universidade na qual Isaac Newton estudava fechou devido um surto de peste, foi nesse período de dois anos em que o matemático desenvolveu as sua principais ideias que até hoje são exploradas na área da gravitação, ótica e cálculo.

O primeiro documento de Isaac Newton abordando o cálculo foi um manuscrito provavelmente de 1666, que teve pouca circulação, tanto na época em que foi publicado, quanto após sua morte.

O teórico Gottfried Wilhelm Leibniz cresceu em um contexto familiar completamente diferente do de Isaac Newton, desde a infância teve a influência de seu pai e avô que eram professores universitários. Gottfried Wilhelm Leibniz dedicou-se a diversos ramos do conhecimento, como direito e filosofia, mas só passou a dedicar-se ao estudo matemático após ser enviado para uma missão diplomática em Paris durante 4 anos.

Os estudos de Isaac Newton acerca do cálculo são anteriores as de Gottfried Wilhelm Leibniz, embora as publicações do trabalhos deste autor tenham ocorrido antes de Isaac Newton. Nessa época surgiram rumores no cenário acadêmico de que Gottfried Wilhelm Leibniz havia descoberto os estudos de Isaac Newton em suas visitas a Inglaterra e publicado suas ideias, mas alguns séculos depois pôde-se comprovar que tais alegações não eram realmente verdadeiras.

Os primeiros matemáticos que inovaram no campo do cálculo ao abordar conceitos que ainda não haviam sido explorados, mas para desenvolver os seus pensamentos eles buscaram inspiração em Arquimedes e Euclides, cujas obras eram então estudadas e admiradas como modelo mais acabado de rigor, que perdurou até o início do século XIX.

O cálculo divide-se em duas partes que são consideradas fundamentais de grande importância para essa área, na qual representam uma parcela relevante e rigorosa desse ramos, são eles o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, conceitos estes que serão abordados no próximo item.

2.2 História do cálculo diferencial e integral

Conforme abordamos na Seção 2.1, o século XVII trouxe grandes avanços para o universo da matemática, principalmente no que diz a respeito ao cálculo, com as inúmeras contribuições de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, mas a maior contribuição que ocorreu nesse período foi à criação do cálculo diferencial e integral.

A origem do cálculo integral é bastante anterior ao diferencial, embora no mundo acadêmico este seja apresentado primeiro que o cálculo integral. A ideia da integração teve origem em processo somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionados entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

Ambas as modalidades de cálculo, se desenvolveram a partir da Álgebra e da Geometria, tendo como foco o estudo de taxas de variação de grandezas.

É importante ressaltar que além de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, outros estudiosos contribuíram de maneira efetiva para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, dentre os quais podemos destacar a grande contribuição de Augustin Louis Cauchy, uma vez que este inovou ao traçar o conceito de limite, que consistiu na divisão formal entre o cálculo e a matemática mais elementar.

Também podemos mencionar as contribuições de Bernhard Riemann que dedicou-se ao cálculo integral de maneira aprofundada. Os conceitos por ele desenvolvidos são constantemente utilizados em cursos de Análise Matemática, através das definições de soma superior e inferior.

Referente ao cálculo integral é importante ressaltar que os primeiros fatos históricos que envolveram as integrais trataram-se de problemas de quadratura. Um dos principais problemas enfrentados nesse período foi enfrentado pelos gregos, os quais tinham o objetivo de encontrar o valor de uma superfície medindo as suas áreas.

3. CONHECENDO O GeoGebra

Neste capítulo será apresentado o magnífico software GeoGebra e suas principais ferramentas de comandos.

3.1 O que é o GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universidade de Salzburgo, e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida.

Figura 3.1: Criador do GeoGebra.

O GeoGebra é um software livre, ou seja, ele é gratuito e isso significa que qualquer pessoa pode utilizar sem custo algum. O software permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos e entre outras coisas. Assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas.

O software é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Isto é, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria e outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Já se tem lançado o Geogebra na versão 5.0 e 6.0. Nestas versões, é possível trabalhar em três dimensões. O software GeoGebra pode ser encontrado para download no site www.geogebra.org.

O software tem se destacado muito no âmbito educacional, ele é ganhador de vários prêmios alguns citados a seguir:

- EASA 2002 - European Academic Software Award (Ronneby, Suécia)
- Digita 2004 - German Educational Software Award (Colônia, Alemanha)
- Comenius 2004 - German Educational Media Award (Berlim, Alemanha)
- Learnie Award 2005 - Austrian Educational Software Award for Spezielle Relativit

3.2 Apresentação do software

Ao inicializar o GeoGebra abre-se uma janela, cuja a interface é composta por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, a janela de álgebra, a janela de visualização, o campo de entrada de texto, um menu de comandos e o menu de símbolos.

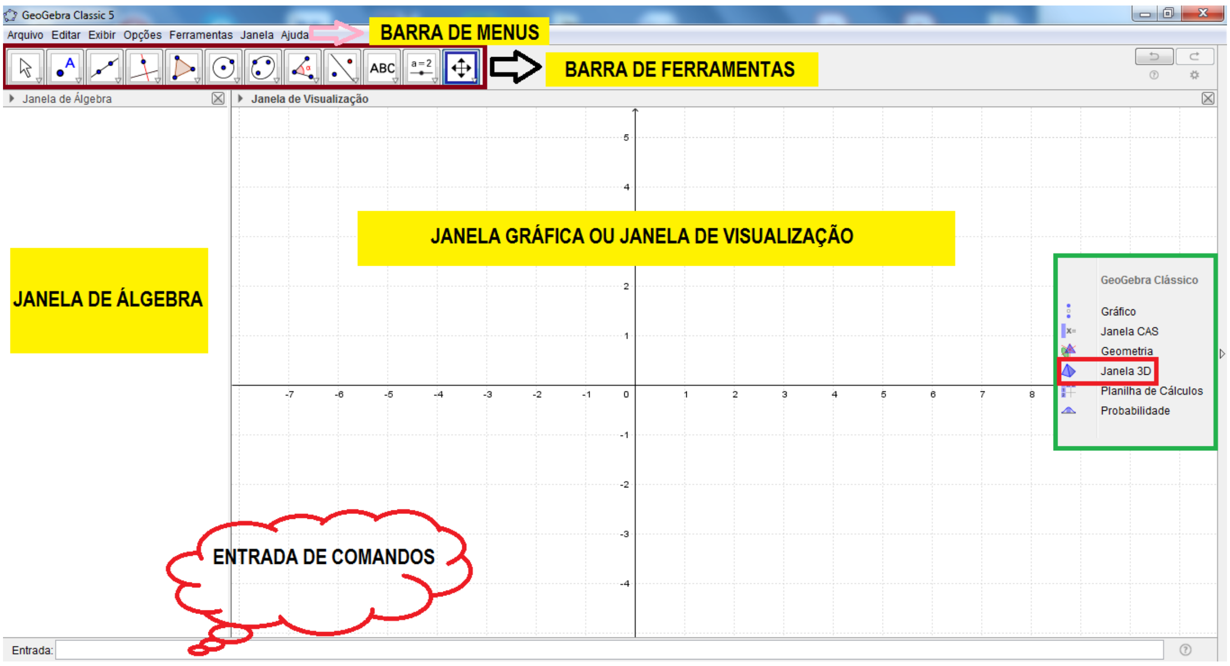


Figura 3.2: Interface do software GeoGebra.

- **Janela de Visualização:** A janela gráfica ou janela de visualização, mostra a representação gráfica de pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, retas e cônicas, que podem ser introduzidos diretamente na janela geométrica ou através da entrada de texto. Ao passar o mouse sobre algum desses objetos, aparece sua respectiva descrição.

- **Barra de Menus:** A Barra de menus fica na parte superior da janela gráfica, e é composta pelas opções: Arquivo, Editar, Exibir, Disposições, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda.

- **Barra de Ferramentas:** A Barra de Ferramentas, é onde se encontram as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos. Ao selecionar uma destas ferramentas, uma breve descrição sobre seu uso aparecerá à direita da barra de ferramentas.

- **Personalizando a Janela de Visualização:** Para personalizar a janela de visualização, basta clicar com o botão direito do mouse sobre a janela geométrica e em seguida no item Janela de Visualização. Além de personalizar os eixos coordenados e a malha, podemos, por exemplo, alterar o estilo da linha, as unidades e a cor dos eixos coordenados, e a cor de fundo. Note que também podemos personalizar cada um dos eixos individualmente, clicando em "EixoX" ou "EixoY". Além disso, podemos alterar a cor e o estilo das linhas da malha, e alterar a distância entre as linhas.

- **Janela Algébrica:** A janela algébrica mostra informações como valores, coordenadas ou equações de objetos livres ou dependentes que podem (ou não) estar visíveis na janela gráfica. Através da janela algébrica (ou da janela gráfica) podemos, também, renomear, alterar as propriedades (no caso dos objetos livres) ou exibir/esconder um objeto da zona gráfica.

- **Entrada de Comandos:** O campo de entrada de texto (ou entrada de comandos) é usado para inserir comandos, coordenadas, equações e funções diretamente através do teclado.

- **Menu de Comandos:** Para facilitar a inserção de comandos no campo de entrada, podemos utilizar a ferramenta Ajuda, localizada no canto inferior direito, ao lado do campo de entrada. Esta ferramenta dispõe de um menu de comandos com informações para as seguintes opções: Funções Matemáticas, Todos os Comandos, Álgebra, Cônicas, Diagramas, Estatística, Funções e Cálculo, GeoGebra, Geometria, Listas, Lógica, Matemática Discreta, Otimização, Planilha, Probabilidade, Programação, Texto, Transformações, e Vetores e Matrizes. Deste modo, ao selecionar um desses itens, aparecerá uma caixa de texto com as instruções necessárias para a utilização do comando desejado.

- **Menu de Símbolos:** O menu de símbolos está localizado no canto direito do campo de entrada de comandos, e dispõe de alguns dos símbolos matemáticos mais frequentemente utilizados para nomear um objeto ou inserir um comando através do campo de entrada.

3.3 Comandos básicos

 **Mover:** Esta ferramenta é utilizada para arrastar e mover objetos livres. Ao selecionar um objeto no modo Mover, pode-se apagar o objeto pressionando a tecla DELETE, ou então movê-lo usando o mouse ou as setas do teclado. Também é possível ativar a ferramenta Mover pressionando a tecla ESC.

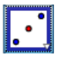
 **Rotação em Torno de um Ponto:** Selecione primeiro o ponto que será o centro da rotação. Depois, você pode rodar objetos livres em torno desse centro, arrastando-os com o mouse. Note que, a distância entre os dois objetos permanecerá a mesma.

 **Gravar para planilha de Cálculos:** selecionar diversos objetos na Janela de Visualização, é possível transportar estas informações para a planilha de cálculos. Além disso, você pode gravar na planilha de Cálculos as alterações e variações dos valores de determinados objetos conforme estes forem sendo modificados.

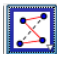
 **Novo Ponto:** Para criar um novo ponto, selecione esta ferramenta e em seguida clique na janela gráfica. Clicando em um segmento, reta, polígono, cônica, gráfico de função ou curva, você pode criar um ponto nesse objeto. Clicando na interseção de duas retas cria-se um ponto de interseção.

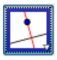
 **Ponto em Objeto:** Esta ferramenta permite criar um ponto dependente de um objeto. O ponto criado só poderá ser movido dentro do objeto. Além do mais. Ao mover o objeto o ponto criado também se moverá. No caso de um polígono, Para criar um ponto que é fixado a um objeto, clique no botão da ferramenta e depois no objeto. Este novo ponto pode ser movido através da ferramenta Mover, mas apenas dentro do objeto. Para colocar um ponto interior de um círculo ou elipse será necessário aumentar a opacidade (transparência) destes. Se você clicar no perímetro de um objeto (por exemplo: círculo, elipse, polígono), então o ponto será fixado ao perímetro ao invés do interior.

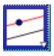
 **Intersecção de Dois Objetos:** Os pontos de intersecção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de intersecção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma intersecção de duas retas, assim apenas um ponto de intersecção será criado.

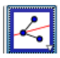
 **Ponto Médio ou Centro:** Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio. Também pode-se clicar numa secção cônica (por exemplo, circunferência) para criar o respectivo centro.

 **Segmento com Comprimento Fixo:** Clique num ponto A (que será o extremo inicial do segmento), e em seguida, especifique o comprimento desejado no campo de texto da janela de diálogo que irá aparecer. Será criado um segmento com o comprimento desejado e extremos A e B, o qual poderá ser rodado em torno do ponto inicial A utilizando a ferramenta Mover.

 **Caminho Poligonal:** Com esta ferramenta pode-se criar uma linha poligonal, selecionando-se todos os pontos (vértices) desejados. A linha poligonal criada será fechada ao clicar novamente no vértice inicial.

 **Reta Perpendicular:** Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, deve-se clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos citados anteriormente.

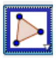
 **Reta Paralela:** Utilizando esta ferramenta, pode-se construir uma reta paralela a uma reta, semi-reta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar a reta paralela, basta clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos recentemente citados.

 **Bissetriz:** Através desta ferramenta, podemos definir uma bissetriz selecionando três pontos A, B e C, obtendo-se assim a bissetriz do ângulo ABC; ou então selecionando-se duas retas, semi-retas vetores, ou segmentos de reta. Neste caso, serão determinados todos os ângulos existentes entre o par de objetos utilizado.

 **Reta Tangente:** Com esta ferramenta, pode-se construir as retas tangentes a uma circunferência, cônica ou função, a partir de um determinado ponto. Para isso, deve-se clicar em um ponto e depois no objeto ao qual a reta (ou retas) será tangente.

 **Reta de Regressão Linear:** Com esta ferramenta, pode-se encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Podemos fazer isso criando um retângulo de seleção que contenha todos os pontos desejados, ou então selecionando uma lista de pontos.

 **Lugar Geométrico:** Esta ferramenta constrói automaticamente o lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc) ao longo de uma trajetória.

 **Polígono:** Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono irregular com a quantidade de lados desejada. Para isso, selecione sucessivamente pelo menos três pontos, os quais serão os vértices do polígono, e depois clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que, a área do polígono construído será mostrada na janela de álgebra.

 **Polígono regular:** Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono regular a partir de um lado. Selecione dois pontos A e B e especifique o número total de vértices no campo de texto da janela de diálogo que aparece. Isto dá-lhe um polígono regular com n vértices (incluindo A e B).

 **Círculo dados Centro e Raio:** Com esta ferramenta, podemos construir um circulo a partir de centro e com comprimento de raio definidos. Para isso, basta clicar na tela (ou em um ponto), para definir o centro da circunferência. Em seguida, aparecerá uma caixa na tela, solicitando a medida do comprimento do raio. Digite o comprimento desejado e aperte Enter ou clique OK.

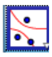
 **Arco circular dados centro e dois pontos:** Para construir um arco circular a partir de um centro e dois pontos, é preciso criar um ponto ou então clicar sobre um ponto já existente (o qual será o centro do arco circular); e em seguida clique em mais dois pontos. Se o sentido dos cliques for anti-horário o arco construído será o menor arco definido pelos 3 pontos. Se for no sentido horário, será construído o maior arco.

 **Arco Circular Definido por Três Pontos:** Esta ferramenta constrói um arco a partir de três pontos que podem (ou não) já estar na janela de visualização. Se os pontos não estiverem na janela de visualização, basta criá-los com a ferramenta ativada. Se já estiverem, ativar a ferramenta e em seguida selecionar os pontos.

 **Setor circular dados o centro e dois pontos:** Esta ferramenta constrói um setor circular a partir do centro e dois pontos. Para utilizá-la, clique inicialmente sobre o ponto que será o centro do arco, e em seguida clique sobre os dois pontos restantes. Se o sentido dos cliques for anti-horário, será construído o menor setor definido pelos três pontos. Se for no sentido horário, será construído o maior setor.

 **Setor circular definido por três pontos:** Para utilizar esta ferramenta, basta clicar em três pontos que podem (ou não) já estar na janela geométrica. Se os pontos não estiverem na janela de visualização, basta criá-los com a ferramenta ativada.

 **Elipse:** Para construir uma elipse, basta selecionar dois pontos (que serão os focos da elipse), e em seguida selecionar um terceiro ponto, o qual pertencerá à elipse.

 **Hipérbole:** Para criar uma hipérbole, basta selecionar dois pontos (que serão os focos da hipérbole). Em seguida, especifique um terceiro ponto, o qual pertencerá à hipérbole.

 **Parábola:** Para construir uma parábola, basta selecionar um ponto (que pertencerá à parábola) e uma reta, a qual será a diretriz da parábola.

 **Cônica definida por cinco pontos:** Após ativar esta ferramenta, selecionando-se cinco pontos, será criada a secção cônica que passa por estes pontos. Neste caso, a seção cônica mencionada poderá ser uma elipse, hipérbole, parábola ou circunferência. Note que, se quatro destes pontos forem colineares, a cônica não será criada.

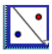
 **Ângulo:** Através desta ferramenta, podemos determinar um ângulo selecionando três pontos ou então selecionando duas retas, semi-retas vetores, ou segmentos de reta. Para determinar o ângulo entre os objetos selecionados, deve-se selecioná-los em ordem, no sentido horário. Pode-se, ainda, através desta ferramenta, se determinar todos os ângulos de um polígono, sendo ele regular ou não. Para isso, basta ativar a ferramenta e depois selecionar o polígono.

 **Ângulo com amplitude fixa:** Com esta ferramenta, a partir de dois pontos, pode-se construir um ângulo com amplitude fixa. Para isso, deve-se clicar nos dois pontos iniciais, e então definir (na janela que se abrirá), a medida e o sentido (horário ou anti-horário) do ângulo que se deseja criar.

 **Distância, comprimento ou perímetro:** Esta ferramenta fornece a distância entre dois pontos, duas retas, ou entre um ponto e uma reta, mostrando um texto dinâmico na janela de visualização. Além disso, também fornece o comprimento de um segmento, e o perímetro de um polígono, circunferência ou elipse.

 **Área:** Esta ferramenta fornece o valor numérico da área de um polígono, círculo ou elipse, mostrando um texto dinâmico com o respectivo valor na janela de visualização.

 **Inclinação:** Esta ferramenta fornece o declive (inclinação) de uma reta, e mostra na janela de visualização um triângulo retângulo cuja razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto da inclinação da respectiva reta.

 **Reflexão em Relação a uma reta:** Esta ferramenta constrói o reflexo de um objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a uma reta. Para isso, deve-se selecionar primeiro o objeto, e depois a reta de reflexão.

 **Reflexão em Relação a um ponto:** Esta ferramenta constrói o reflexo de um objeto (ponto, círculo, reta polígono, etc.) em relação a um ponto. Para isso, deve se selecionar primeiro o objeto e, depois o ponto de reflexão.

 **Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo:** Com esta ferramenta, podemos construir o reflexo de um objeto ao redor de um ponto, em relação à um determinado ângulo. Para isso, selecione o objeto que pretende rodar, em seguida, clique num ponto para especificar o centro da rotação e, finalmente, insira a amplitude do ângulo da rotação na janela de diálogo que irá aparecer. Note que, ao alterar o objeto original, seu reflexo também será alterado. No entanto, o ângulo de rotação definido permanecerá o mesmo.

Inserir Texto: Com esta ferramenta podemos inserir textos estáticos, dinâmicos ou em LaTeX na janela de visualização. Para isso, deve-se, primeiramente, especificar a localização do texto clicando em um lugar vazio da janela geométrica; ou então clicar em um ponto, para que o texto criado fique anexado a esse ponto. Em seguida, aparecerá uma janela de diálogo onde pode-se inserir o tipo de texto pretendido. O Texto Estático não depende de nenhum objeto matemático e não é afetado por eventuais alterações na construção; o Texto Dinâmico contém valores de objetos que são automaticamente adaptados às alterações provocadas nesses objetos; e o Texto Misto é uma combinação dos anteriores. Além dos tipos de texto mencionados, também podemos inserir textos e fórmulas em LaTex. Para fazer isso, ative a caixa "Fórmula LaTeX" na janela de diálogo da ferramenta Inserir Texto e insira o texto e as fórmulas desejados. Além disso, podemos selecionar as fórmulas e símbolos desejados clicando na seta ao lado de "Fórmula LaTeX".

Inserir Imagem: Com esta ferramenta, podemos inserir figuras na janela de visualização. Ao selecionar esta ferramenta e clicar na janela de visualização, abrirá uma caixa onde você poderá procurar a figura que deseja inserir na tela. Essa figura deverá estar no formato jpg, gif, png ou tif.

Inspetor de Funções: Esta ferramenta possibilita uma análise mais específica da função em determinado intervalo, tais como pontos de máximo e mínimo, integral, reta tangente, círculo osculador, etc.

Controle Deslizante: Para criar um controle deslizante, basta ativar a respectiva ferramenta e clicar sobre o local desejado na janela geométrica. Feito isto, aparecerá uma janela onde você poderá nomear, especificar o intervalo e incremento e alterar as propriedades do controle deslizante. O uso de um controle deslizante possibilita causar variações em objetos (manualmente ou automaticamente), podendo também assumir a função de uma variável. Esta variável pode estar associada a um objeto matemático, o que permite a transição contínua entre estados intermediários do objeto estudado, destacando os aspectos invariantes. Além disso, a possibilidade de variar objetos garante o dinamismo nas representações e a manipulação de conceitos antes abstratos.

Caixa para Exibir/Esconder Objetos: Com esta ferramenta, podemos criar uma caixa e anexar a esta objetos já construídos. Desta forma, ao marcar a caixa, os objetos anexados ficarão visíveis, e ao desmarcá-la, os objetos serão ocultados.

Mover Janela de Visualização: Com esta ferramenta, pode-se mover o sistema de eixos, bem como todos os objetos nele contidos, ajustando a área visível na Janela de Visualização. Pode-se, também, alterar a relação de escala entre os eixos coordenados, arrastando cada um deles com o mouse.

Ampliar: Com o auxílio desta ferramenta, ao clicar em qualquer lugar da janela de visualização, podemos ampliar a construção.

 **Reduzir:** Utilizando esta ferramenta, ao clicar em qualquer lugar da janela de visualização, podemos reduzir a construção.

 **Exibir / Esconder rótulo:** Com esta ferramenta, podemos ocultar os rótulos que estão visíveis nos objetos, além de poder exibir os rótulos que estão ocultos.

 **Copiar estilo visual:** Esta ferramenta permite copiar propriedades visuais (como cor, tamanho, estilo da linha, entre outros) de um objeto para outro(s). Para fazê-lo, primeiro selecione o objeto cujas propriedades pretende copiar, e em seguida, clique nos objetos que herdarão estas propriedades.

 **Apagar Objeto:** Com esta ferramenta, pode-se apagar qualquer objeto que esteja visível na janela geométrica e/ou algébrica. Caso apague um objeto acidentalmente, utilize o botão "Desfazer".

3.4 Por que será utilizado este software

Existentes diversos softwares no mercado, pagos ou gratuitos, que têm sido utilizados como ferramenta auxiliar no ensino de matemática. Alguns deles com maior aplicabilidade num certo conteúdo que outros.

Aqui o software escolhido foi o GeoGebra, classificado como um software matemático que reúne os conceitos da geometria e da álgebra. Tratando-se de um aplicativo de distribuição livre, como já mencionado, escrito em linguagem Java, podendo estar disponível em diferentes plataformas. O GeoGebra, em sua estrutura, é prático e dinâmico permitindo que os discentes absorvam com maior facilidade os conceitos e conteúdos abordados em sala de aula. É uma ferramenta que torna as aulas mais interessantes e esclarecedoras, proporcionando melhor compreensão, estudantes mais motivados e consequentemente melhores resultados, através da exploração da modelagem. Enfatizando está ideia, Souza (2011) alega que por ser um programa de geometria dinâmica, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, fazer conjecturas e testá-las, além de relacionar os conteúdos algébricos e geométricos.

4. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Aprender cálculo pode ser sua experiência educacional mais empolgante e estimulante pois é a base para quase toda a matemática e para muitas das grandes realizações no mundo moderno. Você deverá iniciar o estudo de cálculo com o conhecimento de certos conceitos matemáticos. Em primeiro lugar, pressupõe-se que você possua conhecimentos de Álgebra e Geometria. Além disso, existem tópicos que são de extrema importância. Talves você já os tenha estudado em algum curso de Matemática; senão, você terá um primeiro contato com alguns deles neste capítulo.

4.1 Números reais & desigualdades

O sistema numérico real consiste em um conjunto de elementos chamados de **números reais** e duas operações denominadas **adição** e **multiplicação**, denotadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$.

Se a e b forem elementos do conjunto $\mathbb{R}$, $a+b$ denotará a **soma** de a e b e $a \cdot b$ ou (ab) denotará o seu **produto**.

A operação de subtração é definida pela igualdade:

$$a - b = a + (-b)\,,$$

onde $-b$ denota o **negativo** de b, tal que $b + (-b) = 0$.

A operação de **divisão** é definida pela igualdade:

$$a/b = a \cdot b^{-1} \quad b \neq 0,$$

onde b^{-1} denota o **recíproco** de b, tal que $b \cdot b^{-1} = 1$.

O sistema numérico real pode ser inteiramente descrito por um conjunto de axiomas (a palavra **axioma** é usada para indicar uma afirmação formal considerada verdadeira, dispensando provas). Com esses axiomas podemos deduzir as propriedades dos números reais das quais seguem as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como os conceitos algébricos de resolução de equações, fatoração e assim por diante.

As propriedades que podem ser obtidas como consequências lógicas dos axiomas são os **teoremas**. No enunciado da maioria dos teoremas existem duas partes: a parte chamada de **hipótese** e a segunda parte que chamamos de **conclusão**. A argumentação que verifica a veracidade de um teorema é a **demonstração ou prova**, a qual consiste em mostrar que a conclusão é consequência de se admitir a hipótese como verdadeira.

Definição 4.1.1 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

(i) $a < b$ se e somente se $b - a$ for positivo;

(ii) $a > b$ se e somente se $a - b$ for positivo.

Exemplo 4.1 Considerando números reais, temos:

- $3 < 5$ pois $5 - 3 = 2$, e 2 é positivo.
- $-10 < -6$ pois $-6 - (-10) = 4$, e 4 é positivo.
- $7 > 2$ pois $7 - 2 = 5$, e 5 é positivo.
- $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ pois $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$, e $\frac{1}{12}$ é positivo.

■

Agora irei definir os símbolos $\leq$ (lemos "é menor do que ou igual a") e $\geq$ (lemos "é maior do que ou igual a").

Definição 4.1.2 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

(i) $a \leq b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a < b$ ou $a = b$;

(ii) $a \geq b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a < b$ ou $a = b$.

As afirmações $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ e $a \geq b$ são chamadas de **desigualdades**. Especificando, $a < b$ e $a > b$ são chamadas de desigualdades **estritas**, enquanto que $a \leq b$ e $a \geq b$ são denominadas desigualdades **não-estritas**.

O teorema a seguir decorre imediatamente da Definição 4.1.1.

Teorema 4.1.1 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

(i) $a > 0$ se e somente se a for positivo;

(ii) $a < 0$ se e somente se a for negativo.

Um número x está entre a e b se $a < x$ e $x < b$. Podemos escrever isso como uma **sequência de desigualdades**, da seguinte forma:

$$a < x < b.$$

Outra sequência de desigualdades é

$$a \leq x \leq b,$$

que significa que acontecem ambas as desigualdades $a \leq x$ e $\leq b$. Outras sequências de desigualdes são $a \leq x < b$ e $a < x \leq b$.

Teorema 4.1.2 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:
(i) $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$;
(ii) $a > 0$ e $b > 0$ então $ab > 0$.

A parte (i) do teorema acima estabelece que a soma de dois números positivos é positivo e a parte (ii) estabelece que o produto de dois números positivos é positivo.

Teorema 4.1.3 — Propriedade Transitiva da Ordem. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, e se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

■ **Exemplo 4.2** Se $x < 5$ e $5 < y$, então, pela propriedade transitiva da ordem, decorre $x < y$. ■

Teorema 4.1.4 Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

■ **Exemplo 4.3** Se $x < 8$ e $y < -3$, então temos, pelo Teorema 4.1.4, que $x + y < 8 + (-3)$; isto é, $x + y < 5$. ■

Conceito de *valor absoluto* de um número é usado em algumas definições importantes. Além disso, você precisará trabalhar com desigualdades envolvendo valores absolutos.

Definição 4.1.3 O **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Da definição, o valor absoluto de um número é um número positivo ou zero; isto é, não-negativo.

Em termos geométricos, o valor absoluto de um número x é sua distância ao 0. Em geral, $|a - b|$ é a distância entre a e b, sem levar em conta qual é o maior número.

A desigualdade $|x| < a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da orige, até o ponto x é menor que a unidades; ou seja, $-a < x < a$. Portanto, x está no intervalo aberto $(-a, a)$. De fato, este é o caso estabelecido no teorema a seguir.

Teorema 4.1.5

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad \text{onde} \quad a > 0.$$

Corolário 4.1.6

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad \text{onde} \quad a > 0.$$

Teorema 4.1.7

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a \quad \text{onde} \quad a > 0.$$

Teorema 4.1.8

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a \quad \text{onde} \quad a > 0.$$

Teorema 4.1.9 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

Prova

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b|. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.10 — Desigualdade Triangular. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Prova
Pela Definição 4.1.3, temos que $a = |a|$ ou $a = -|a|$, assim:

$$-|a| \leq a \leq |a|. \qquad (1)$$

Da mesma forma,

$$-|b| \leq b \leq |b|. \qquad (2)$$

Das desigualdades (1) e (2) e do Teorema 4.1.4,

$$-(|a| + |b| \leq a + b \leq |a| + |b|).$$

Logo do corolário 4.1.6 segue que:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

O Teorema 4.1.10 tem dois corolários importantes que serão enunciados e provados a seguir.

Corolário 4.1.11 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$|a-b| \leq |a| + |b|.$$

Prova

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |(-b)| = |a| + |b|.$$

Corolário 4.1.12 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

Prova

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|.$$

Assim, subtraindo $|b|$ de ambos os membros da desigualdade, temos:

$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

4.2 Funções reais de uma variável real

O objeto fundamental do cálculo são as funções. As funções surgem quando uma quantidade depende de outra.

Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso dizemos que A é uma função de r. Outros exemplos são, a população P de uma determinada espécie depende do tempo t, o custo C de envio de um pacote pelo correio depende de seu peso p.

Definição 4.2.1 Dados dois conjuntos A, $B \neq \emptyset$, uma função f de A em B (escrevemos $f : A \to B$) é uma lei ou regra que a cada $x \in A$, associa um único elemento $f(x) \in B$. Temos:

- A é chamado **domínio** de f;
- B é chamado contra-domínio de f;
- O conjunto

$$Im(f) = \{y \in B; y = f(x), x \in A\}$$

é chamado imagem de f.

A Figura 4.1 dá uma visualização de tal correspondência, onde os conjuntos A e B consistem em pontos numa região plana.

Noções alternativas. Seja $f : A \to B$ uma função. Podemos denotar:

- $D_f = D(f) = A$ para o domínio de f;
- $f(D_f) := Im(f)$ para a imagem de f.

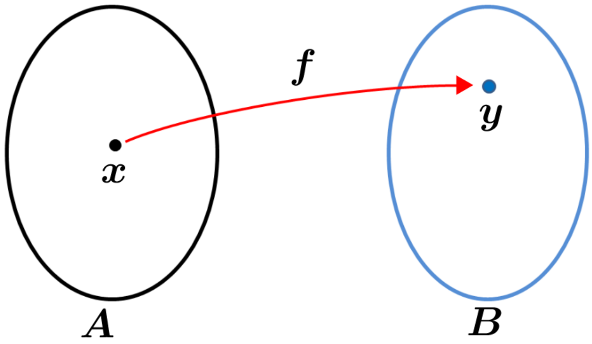


Figura 4.1: Diagrama de Venn.

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como:

$$x \in A \mapsto f(x) \in B.$$

Convecção: Se o domínio de uma função não é dado explicitamente, então, por convecção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

Definição 4.2.2 Sejam $f : A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado de *gráfico* de f.

Decorre da definição acima que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f. Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Definição 4.2.3 Dadas duas funções f e g, a **função composta**, denotada por $f \circ g$, é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

A definição indica que quando calculamos $(f \circ g)(x)$, primeiro aplicamos a função g a x e então, a função f a $g(x)$. Esse procedimento será demonstrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.4 Seja f e g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 3.$$

Solução

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-3) \\ &= \sqrt{2x-3}. \end{aligned}$$

O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$, e o domínio de f é $[0, +\infty)$. Logo, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números reais, para os quais $2x - 3 \geq 0$ ou, de modo equivalente, $[3/2, +\infty)$.

Exemplo 4.5 Dado que f e g estão definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

Determine: (a) $f \circ f$; (b) $g \circ g$; (c) $f \circ g$; (d) $g \circ f$. Encontre também o domínio da função composta em cada parte.

Solução

$$\begin{aligned} (a)\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\sqrt{x}\right) \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x}. \end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} (b)\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g\left(x^2 - 1\right) \\ &= \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2. \end{aligned}$$

O domínio é $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned} (c)\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(x^2 - 1\right) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

O domínio é $(\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$$
\begin{aligned}
(d)\ (g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g\left(\sqrt{x}\right) \\
&= \left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 \\
&= x-1.
\end{aligned}
$$

O domínio é $[0,+\infty)$.

■

Observação 01: No item (d) embora $x-1$ seja definida por todos os valores de x, o domínio de $g\circ f$, pela definição de uma função composta, será o conjunto de todos os números x no domínio de f, tais que $f(x)$ esteja no domínio de g. Assim, o domínio de $(g\circ f)$ deve ser um subconjunto do domínio de f.

Observação 02: Observe que nos item (c) e (d) do exemplo, que $(f\circ g)(x)$ e $(g\circ f)(x)$ não são, necessariamente, iguais.

Definição 4.2.4 — Função par e Função ímpar. (i) Uma função é **par** se, para todo valor de x no domínio de f, $(-x) = f(x)$.

(ii) Uma função f é denominada **ímpar** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

Em ambos os casos (i) e (ii), devemos entender que $-x$ está no domínio de f, sempre que x estiver lá.

■ **Exemplo 4.6** Se $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$, então:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= 3(-x)^4 - 2x^2 + 7 \\
&= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Logo, f é uma função par.

■

■ **Exemplo 4.7** Se $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$, então:

$$
\begin{aligned}
g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\
&= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\
&= -\left(3x^5 - 4x^3 - 9x\right), \\
&= -g(x).
\end{aligned}
$$

Logo, g é uma função ímpar.

■

■ **Exemplo 4.8** Se $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$, então:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9. \end{aligned}$$

Observe que a função h não é nem par nem ímpar. ■

4.3 Principais tipos de funções reais no GeoGebra

Com o auxílio do software GeoGebra será implementado cada função.

Definição 4.3.1 — Função Constante. Uma função constante é uma função cujo valor (de saída) é o mesmo para cada valor de entrada. Por exemplo, a função $y(x) = 4$ exibida como exemplo é uma função constante porque o valor de $y(x)$ é 4, independentemente do valor de entrada x (veja a Figura (4.2)).

■ **Exemplo 4.9** Exemplo de uma função constante descrita por $f(x) = 4$ em um domínio real.

Primeiro passo: Primeiramente, devemos declarar a função $f(x) = 4$. Para isso, digite na **entrada de comandos** a função $f(x) = 4$, como mostra a Figura (4.2) e pressione a tecla Enter de seu teclado. ■

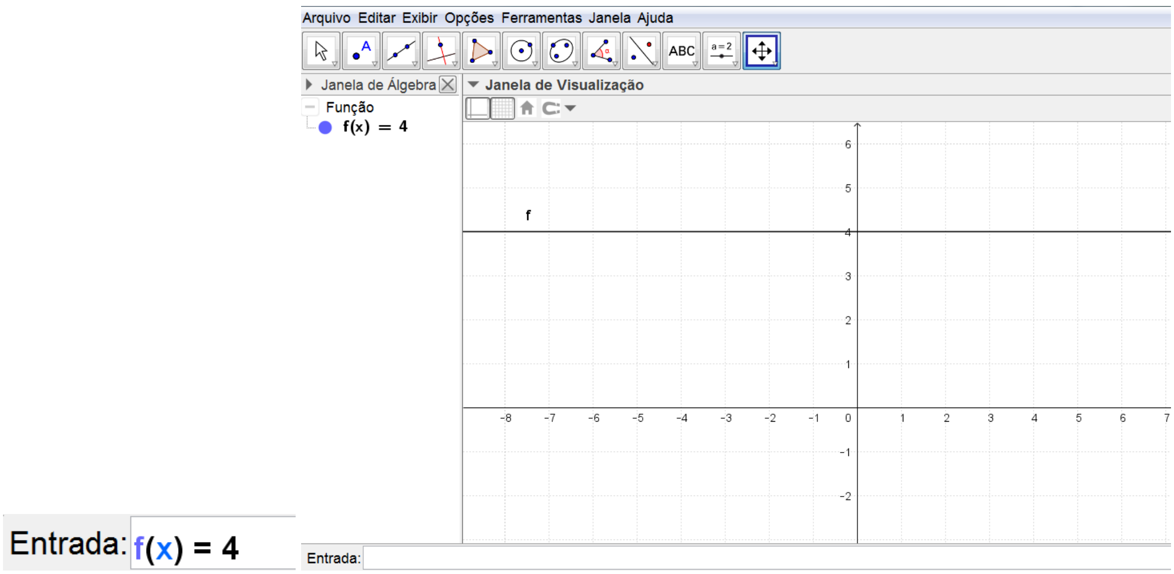
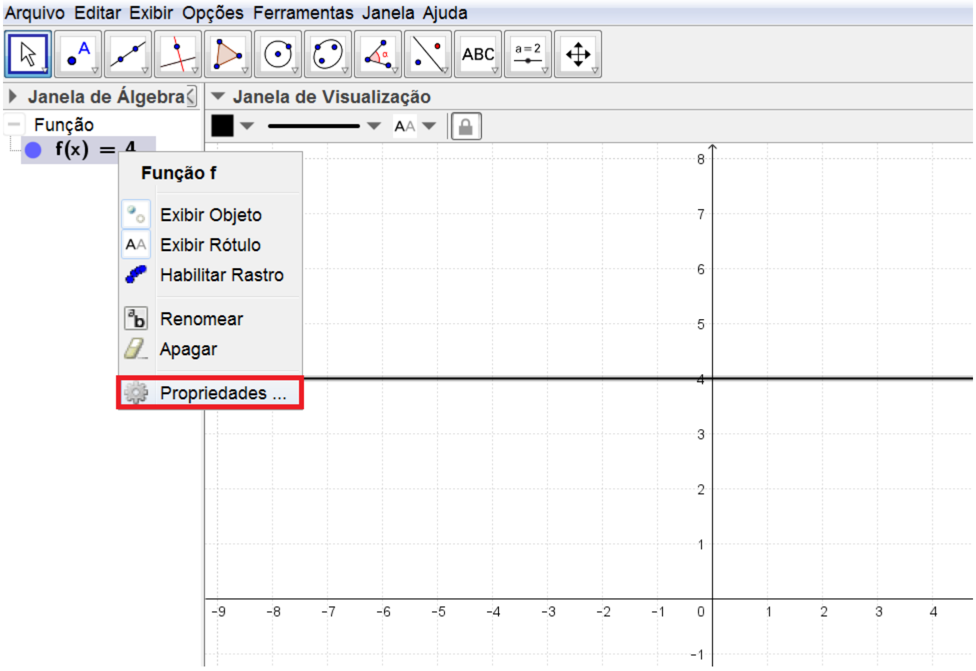
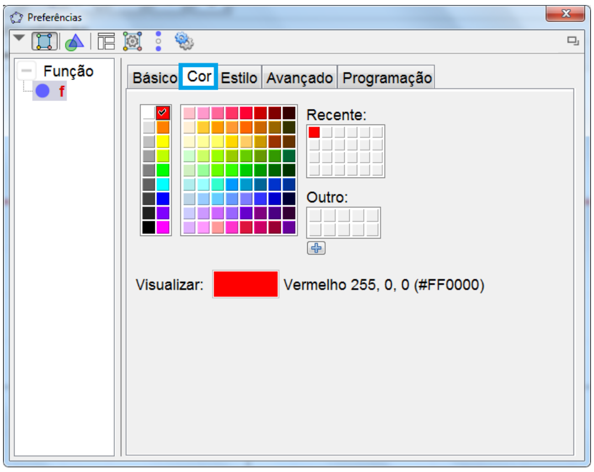


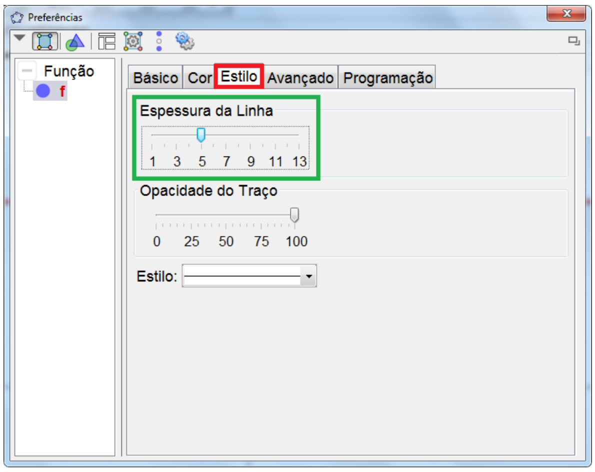
Figura 4.2: Digitando a função f na entrada de comandos.

Segundo passo: Para mudar a cor do gráfico, clique em cima dele com o botão direito do mouse e observe que irá abrir uma nova janela. Nesta nova janela, selecione a opção **propriedades** como mostra a Figura abaixo:



Terceiro passo: Observe que irá abrir uma nova janela, clique em **cor** e selecione a cor, por exemplo **vermelha**. Depois clique em **estilo** e escolha por exemplo, 5, como nas Figuras abaixo:





Como resultado final da atividade, teremos:

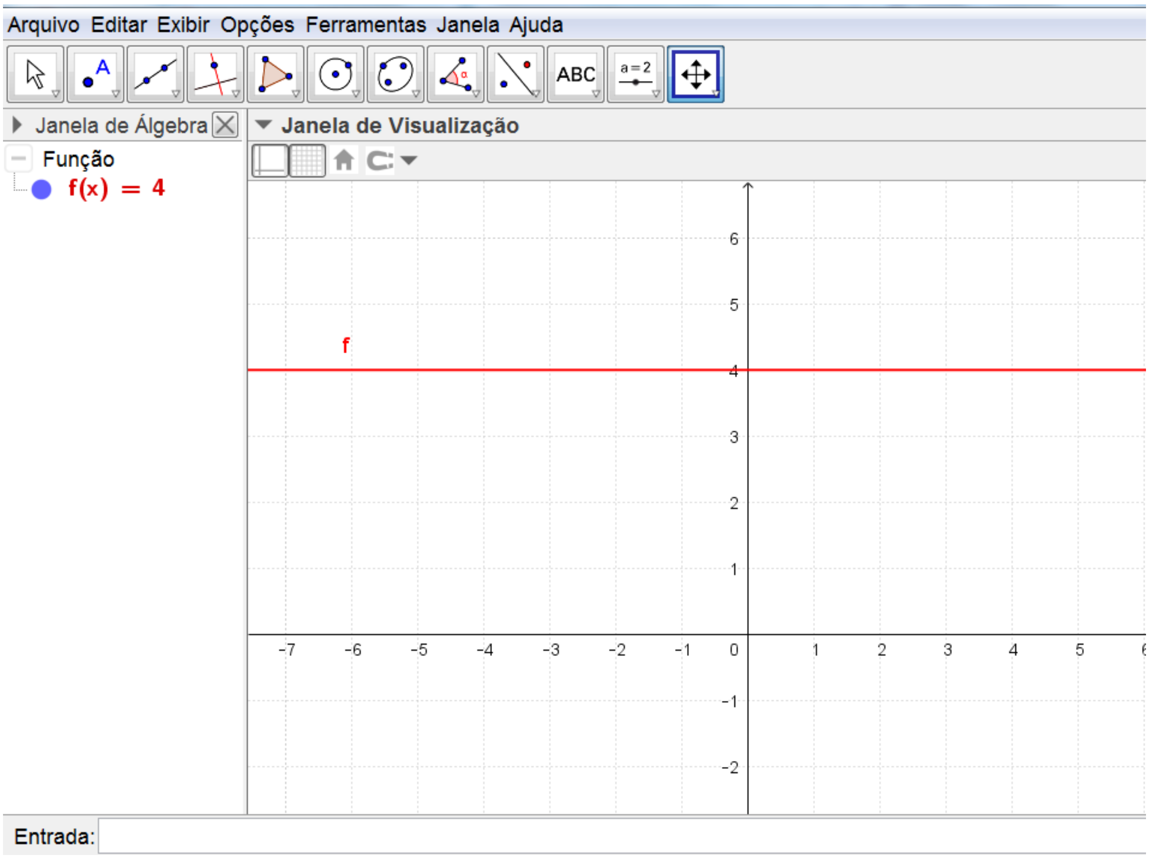


Figura 4.3: Função constante definida por $f(x) = 4$.

■ **Exemplo 4.10** Exemplo de varias funções constantes em um domínio real.

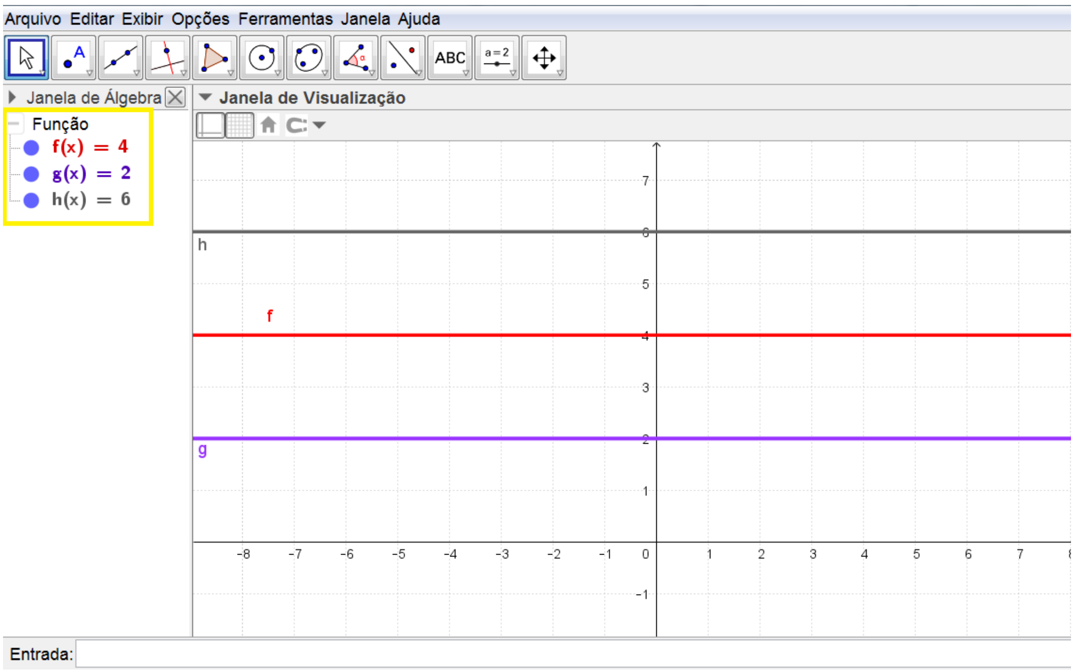


Figura 4.4: Funções constantes: $f(x) = 4, g(x) = 2$ e $h(x) = 6$.

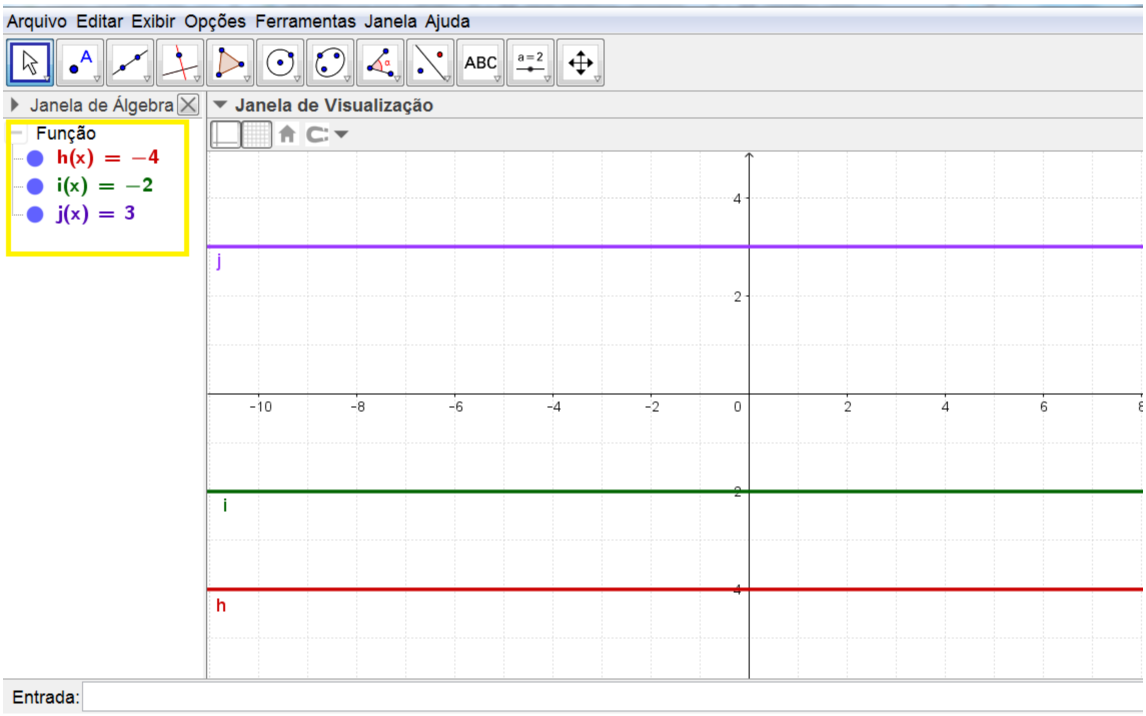


Figura 4.5: Funções constantes: $h(x) = -4, i(x) = 2$ e $j(x) = 6$.

Observação: Para declarar as funções ilustradas no Exemplo (4.10) na entrada de comandos, é feito da mesma maneira como ensinado no Exemplo (4.9). ■

Definição 4.3.2 — Função Identidade. A função identidade no conjunto X é a função definida por:

$$f : X \to X$$
$$x \mapsto x$$

Ou seja, $f(x) = x$.

O gráfico da função identidade é uma reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrante $(x = y)$, ou seja, a reta passa pela origem $(0,0)$. Por essa mesma razão ele se parece com a função linear. Por abuso de linguagem, por vezes também se chama identidade à *função inclusão*.

■ **Exemplo 4.11** Exemplo de uma função identidade definida por $f(x) = x$ em um domínio real.

Primeiramente, devemos declarar a função $f(x) = x$. Para isso, digite na **entrada de comandos** a função $f(x) = x$, como mostra a Figura (4.6) e pressione a tecla Enter de seu teclado.

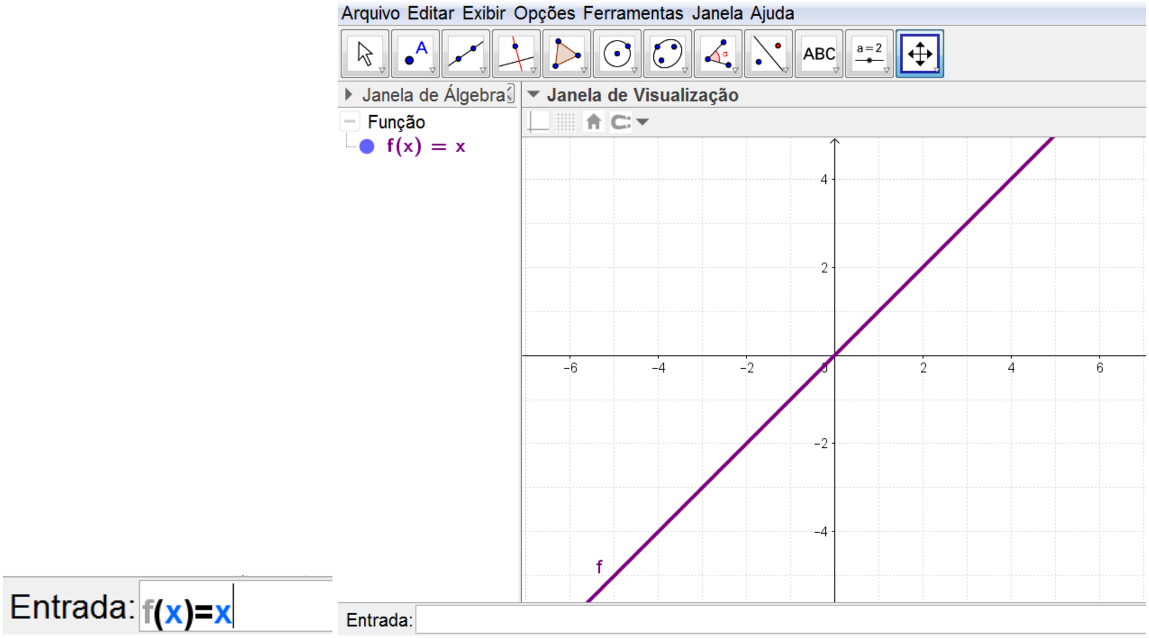


Figura 4.6: Digitando a função $f(x) = x$ na entrada de comandos.

■

Definição 4.3.3 — Função Linear. Uma função linear é um caso particular da função afim onde $a \neq 0$ e $b = 0$, sendo, portanto, expressa como:

$$f(x) = ax.$$

Um caso específico da função linear é a função identidade, onde $a = 1$. Logo a função identidade é expressa como:

$$f(x) = x.$$

■ **Exemplo 4.12** Exemplo de uma função linear definida por $f(x) = 2x$ em um domínio real.

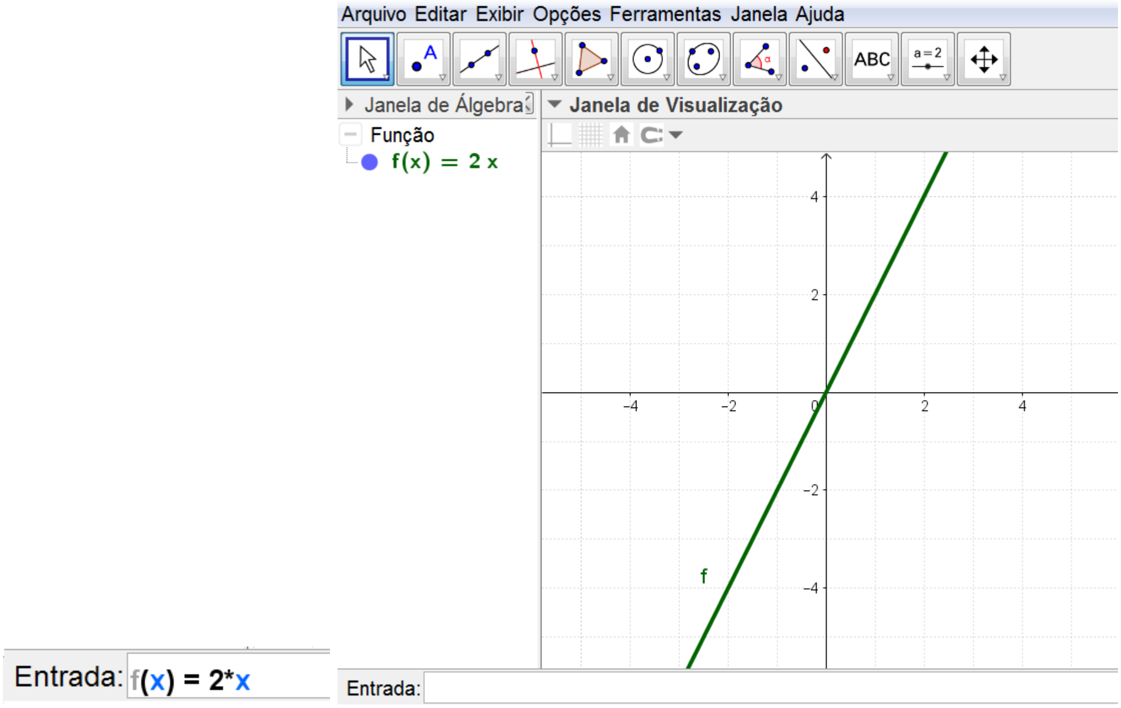


Figura 4.7: Digitando a função linear $f(x) = 2x$ na entrada de comandos.

■

■ **Exemplo 4.13** Exemplo de varias funções lineares em um domínio real.

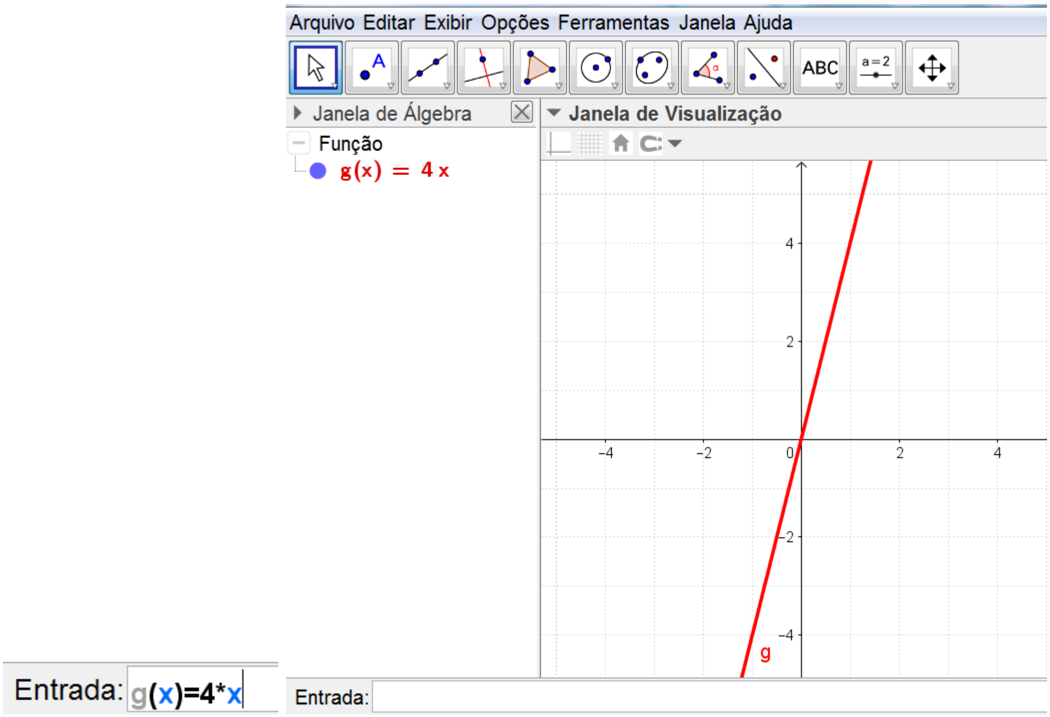


Figura 4.8: Funções linear definida por $g(x) = 4x$.

■

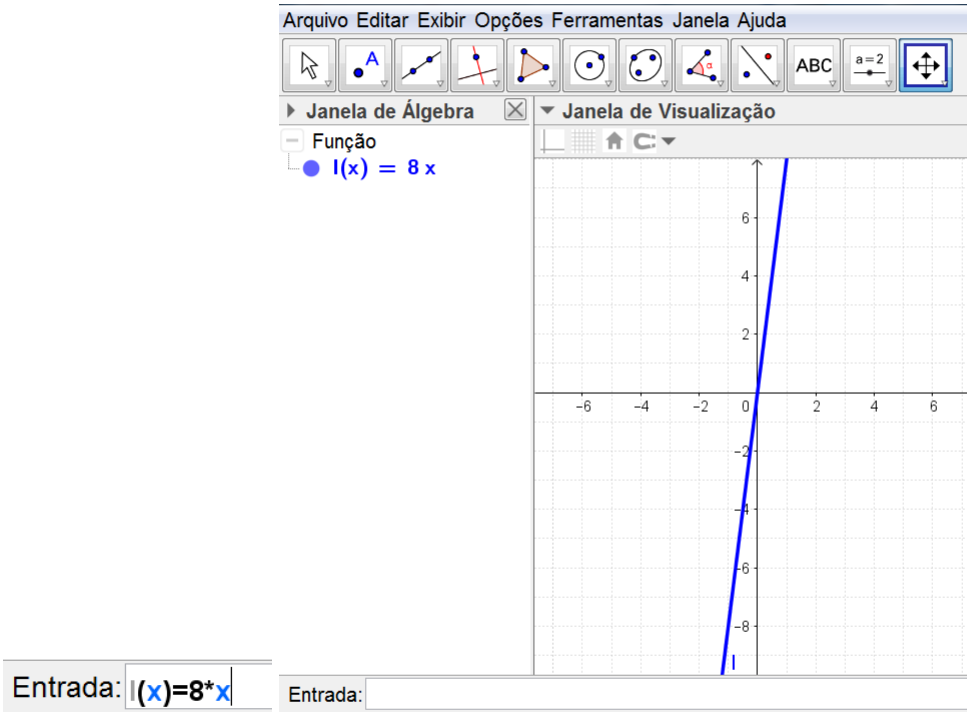


Figura 4.9: Função linear $l(x) = 8x$.

Definição 4.3.4 — Função Afim. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existe dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ e $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Coeficientes - Para facilitar a análise dessas funções, dizemos que o coeficiente "a" da função é o coeficiente angular ou declividade da reta. Esse coeficiente determina a inclinação da reta que representa a função. E o coeficiente "b" determina o deslocamento da reta em relação à origem, por isso ele é conhecido como coeficiente linear da reta.

■ **Exemplo 4.14** Exemplo de uma função afim definida por $f(x) = 4x + 1$ em um domínio real. ■

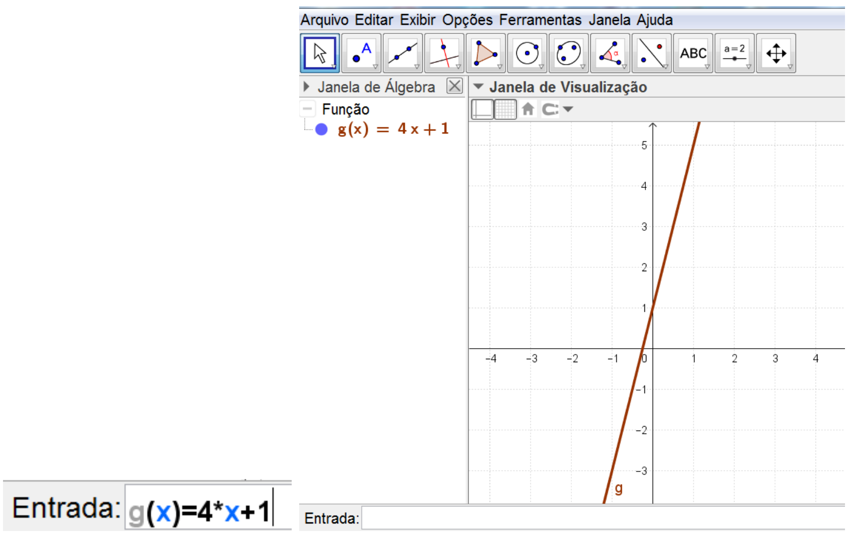


Figura 4.10: Função afim $g(x) = 4x + 1$.

Definição 4.3.5 — Função Polinomial.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=0}^{n} a_ix_i; \text{ em particular,}$$

Se $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma **função quadrática**,
Se $n = 3$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é uma **função cúbica**.

■ **Exemplo 4.15** Exemplo de função quadrática definida por $f(x) = x^2$ em um domínio real.

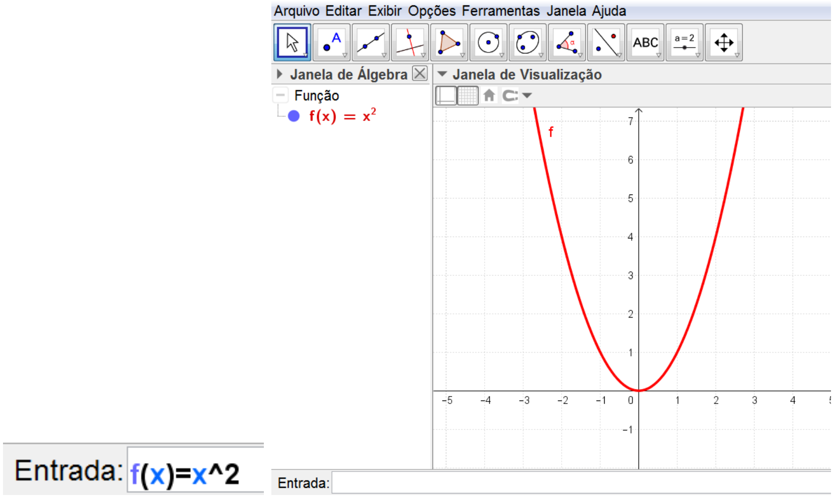


Figura 4.11: Função quadrática $f(x) = x^2$.

■

■ **Exemplo 4.16** Exemplo de função quadrática definida por $f(x) = x^2 + 2x$ em um domínio real.

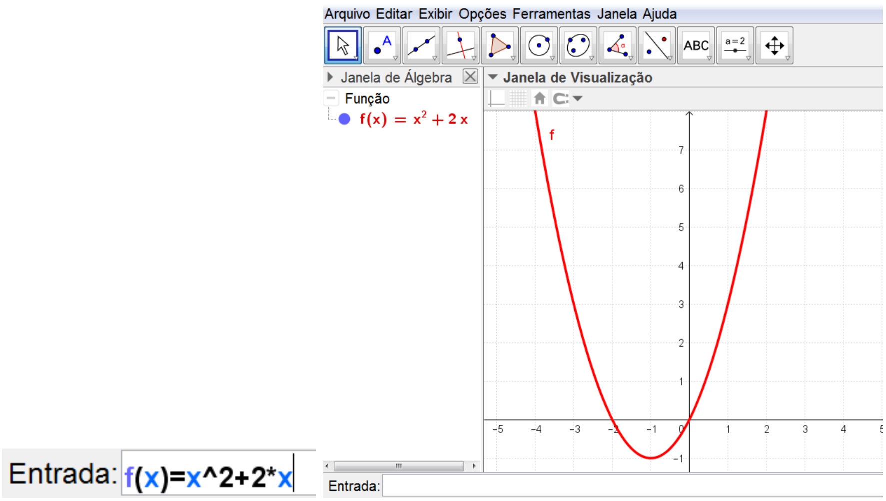


Figura 4.12: Função quadrática $f(x) = x^2 + 2x$.

■

■ **Exemplo 4.17** Exemplo de função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ em um domínio real. ■

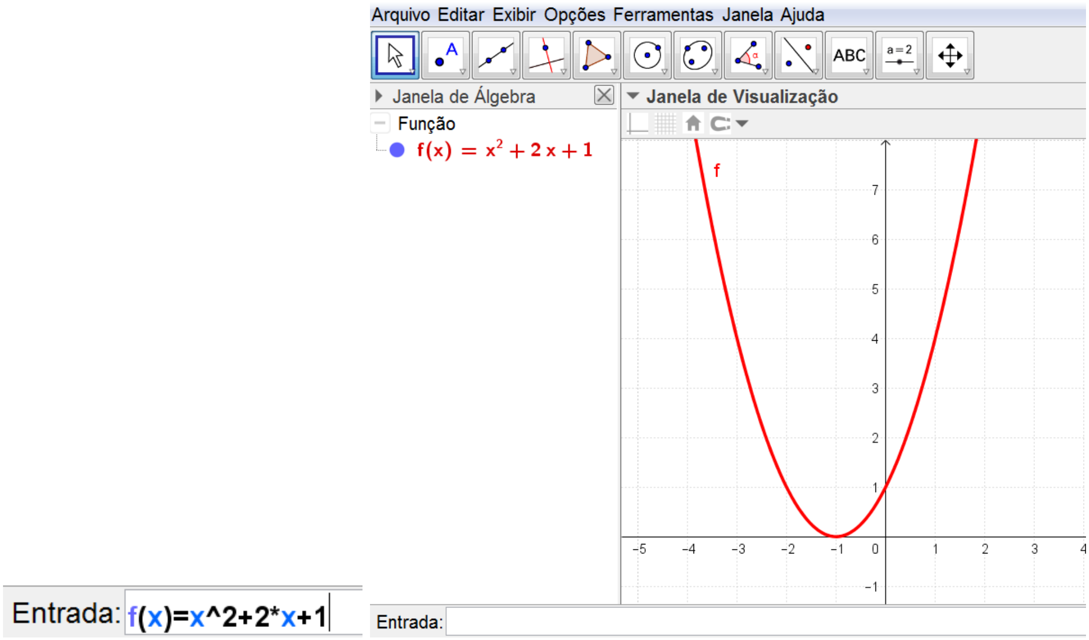


Figura 4.13: Função quadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

Relação entre os coeficientes e o gráfico

O coeficiente a diz respeito a concavidade da parábola. Dependendo do valor do coeficiente a o vértice pode ser um ponto máximo ou um ponto mínimo da função.

O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo y de forma crescente ou decrescente.

- $b > 0$ intersecção crescente;
- $b < 0$ intersecção decrescente;
- $b = 0$ intersecção simétrica ou reta.

O coeficiente c é o termo independente da função e indica o ponto do eixo y que a parábola o intersecta.

Por exemplo, se $c = 3$ a parábola irá cruzar o eixo y no ponto $(0,3)$; se $c = -3$ o ponto será exatamente $(0,-3)$; e $c = 0$ a parábola irá cortar o eixo y na sua origem, isto é, no ponto $(0,0)$.

Definição 4.3.6 — Função Potência.

$$f(x) = x^a, \text{ onde } a \text{ é uma constante; em particular,}$$

Se $a = \dfrac{1}{n}, f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo, é uma **função raiz**; temos que $D_f = [0, +\infty)$ se n é par e $D_f = \mathbb{R}$ se n é ímpar.

■ **Exemplo 4.18** Exemplo de uma função potência definida por $f(x) = x^{1/2}$ definida em um domínio real positivo. ■

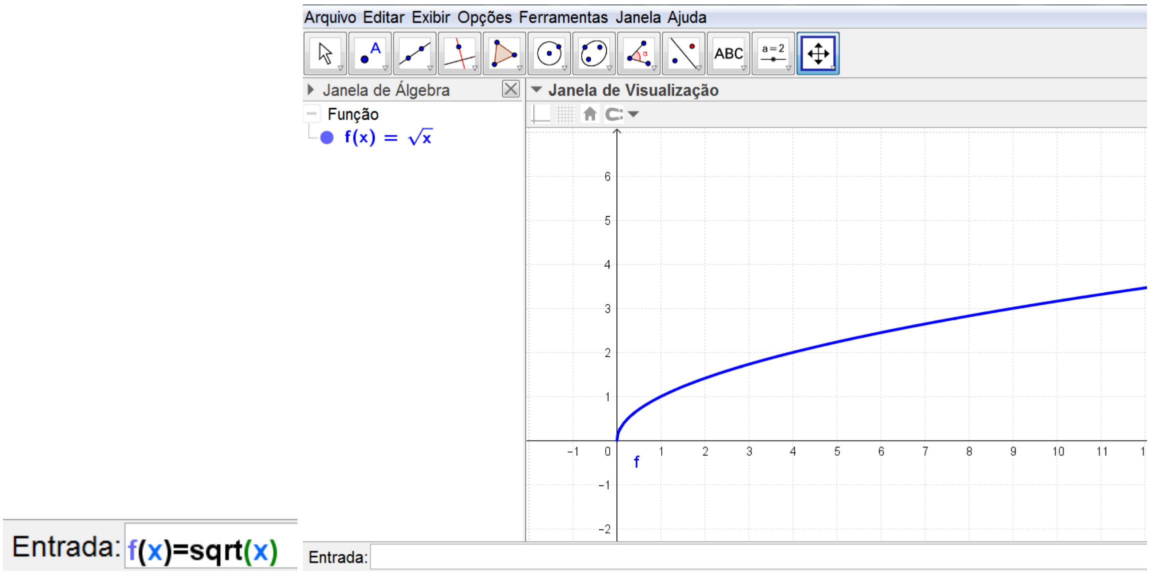


Figura 4.14: Função potência $f(x) = x^{1/2}$.

CURIOSIDADE MATEMÁTICA

Aprendemos em uma certa fase do ensino médio que os números negativos não tem raiz quadrada, por que não é possível que um número negativo multiplicado por ele mesmo dê um número negativo. Por exemplo,

$$(-2)\cdot(-2) = 4$$

não há número que ao quadrado dê -4.

Isso de fato é verdade, mas os matemáticos acharam uma maneira de driblar essa dificuldade, pois em muitas contas acabavam achando raízes quadradas de números negativos, e queriam lidar com elas. Por isso existe um outro conjunto de números, os imaginários. Como o próprio nome diz, não existem de fato pois são a raiz quadrada de números negativos. Para representar, usamos o i:

$$i = \sqrt{-1}$$

Desta maneira,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i.$$
$$\sqrt{-8} = \sqrt{-1}\sqrt{8} = 2\sqrt{2}i.$$

E esses dois números pertencem ao conjunto dos números imaginários.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos Exercícios de 1 a 10, ache o conjunto-solução da desigualdade dada e mostre-o na reta numérica real.

1. $5x+2 > x-6$
2. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$
3. $3-x < 5+3x$
4. $3-2x \geqslant 9+4x$
5. $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$
6. $x^2 > 4$
7. $(x-3)(x+5) > 0$
8. $x^2-3x+2 > 0$
9. $1-x-2x \geqslant 0$
10. $x^3+1 > x^2+x$

    Nos Exercícios de 11 a 13, resolva em x.

11. $|4x+3| = 7$
12. $|5x-3| = |3x+5|$
13. $|7x| = 4-x$
14. $|3x+9| = 2$
15. $2x+3 = |4x+5|$

    Nos Exercícios de 16 a 20, ache todos os valores de x para os quais o número é real.

16. $|3x-4| \leq 2$
17. $|5-x| > 7$
18. $|2x-5| < 3$
19. $|3-x| < 5$
20. $|x+4| \leq |4x+3|$

5. LIMITES & CONTINUIDADE

As duas operações matemáticas fundamentais em Cálculo são a *diferenciação* e a *integração*. Essas operações envolvem o cálculo da derivada e da integral definida, ambas baseadas na noção de *limite*.

5.1 O limite de uma função

Definição 5.1.1 Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a **será** L, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em palavras, Definição (5.1.1) afirma que os valores da função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

É importante perceber que na definição acima nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$. Isto é, não é necessário que a função esteja definida em $x = a$ para que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista. Além disso, mesmo que a função seja definida por $x = a$, é possível que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista sem ter o mesmo valor que $f(a)$.

O teorema a seguir estabelece que uma função não pode tender a dois limites diferentes ao mesmo tempo. Ele é chamado de *teorema da unicidade*, pois garante que o limite de uma função existir, e ele será único. Vamos enunciar o teorema aqui.

Teorema 5.1.1 Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

O Teorema (5.1.1) permite-nos afirmar que se a função f tiver um limite L no número a, então L será o limite de f em a.

5.2 Aproximação intuitiva

A noção de limite é fundamental no início do estudo de cálculo diferencial. O conceito de limite pode ser aprendido de forma intuitiva, pelo menos parcialmente.

Quando falamos do processo limite, falamos de uma incógnita que "tende"a ser um determinado número, ou seja, no limite, esta incógnita nunca vai ser o número, mas vai se aproximar muito, de tal maneira que não se consiga estabelecer uma distância que vai separar o número da incógnita. Em poucas palavras, um limite é um número para o qual $y = f(x)$ difere arbitrariamente muito pouco quando o valor de x difere de x_0 arbitrariamente muito pouco também.

Por exemplo, imaginemos a função: $f(x) = 2x+1$ e imaginando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Definida nos reais). Sabemos, lógico, que esta função nos dá o gráfico de uma reta, que não passa pela origem, pois se substituirmos: $f(0) = 2.0+1$ que nos dá: $f(0) = 0+1 = 1$, ou seja, no ponto onde $x = 0$ (origem), o $y = (f(x))$ é diferente de zero. Mas usando valores que se aproximem de 1, por exemplo:

Se $x = 0,98$ então: $y = f(x) = 2,96$ Se $x = 0,998$ então: $y = f(x) = 2,996$ Se $x = 0,9998$ então: $y = f(x) = 2,9996$ Se $x = 0,99999$ então: $y = f(x) = 2,99998$ Ou seja, à medida que x "tende" a ser 1, o y tende" a ser 3. Então no processo limite, quando tende a ser um número, esta variável aproxima-se tanto do número, de tal forma que podemos escrever como no seguinte exemplo:

Exemplo: Sendo uma função f definida por: $f(x) = 2x+1$ nos reais, calcular o limite da função f quando $x \to 1$. Temos então, neste caso, a função descrita no enunciado e queremos saber o limite desta função quando o x" tende a ser 1: Ou seja, para a resolução fazemos:

Então, no limite é como se pudéssemos substituir o valor de x para resolvermos o problema. Na verdade, não estamos substituindo o valor, porque para o cálculo não importa o que acontece no ponto x, mas sim o que acontece em torno deste ponto. Por isso, quando falamos que um número tende" a ser n, por exemplo, o número nunca vai ser n, mas se aproxima muito do número n. Enfim, como foi dito anteriormente, a definição de limite é tão e somente intuitiva. Vai de analisar a função que está ocorrendo apenas. Agora, o exercício do Exemplo mostra que x se aproxima de 1 pela esquerda, ou seja:

Porém, temos também uma outra forma de se aproximar do número 3, na função $f(x)$ descrita nos exemplo acima, por exemplo: Se $x = 2$, $y = f(x) = 5$; Se $x = 1,8$ então: $y = f(x) = 4,6$; Se $x = 1,2$ temos que: $y = f(x) = 3,4$; Se $x = 1,111$ então: $y = f(x) = 3,222$ Podemos perceber então, que x está tendendo a 1 pela direita agora, e não mais pela esquerda como foi mostrado no exemplo anterior. Então para resolvermos problemas que envolvem cálculo, devemos saber como a função que está em jogo se comporta.

Exemplo 5.1 Seja f a função definida por $f(x) = 4x - 7$ e suponha que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.
(a) Para $\varepsilon = 0,01$, determine um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x-3| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)-5| < 0,01.$$

(b) usando as propriedades das desigualdades, determine $\delta > 0$, tal que a afirmativa na parte (a) seja verdadeira.

Solução

(a) Observe que os valores funcionais aumentam á medida que x cresce. Assim, precisamos de um valor de x_1, tal que $f(x_1) = 4,99$ e um valor de x_2, tal que $f(x_2) = 5,01$, isto é, precisamos de x_1 e x_2 tais que

$$\begin{aligned} \star\, 4x_1 - 7 &= 4,99 \\ x_1 &= \frac{11,99}{4} \\ x_1 &= 2,9975 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star\, 4x_2 - 7 &= 5,01 \\ x_2 &= \frac{12,01}{4} \\ x_2 &= 3,0025 \end{aligned}$$

Como $3 - 2,9975 = 0,0025$ e $3,0025 - 3 = 0,0025$ escolhemos $\delta = 0,0025$ de tal forma que temos a afirmativa:

$$0 < |x-3| < 0,0025 \quad \text{então} \quad |f(x)-5| < 0,01.$$

(b) Como $f(x) = 4x - 7$,

$$\begin{aligned} |f(x)-5| &= |(4x-7)-5| \\ &= |4x-12| \\ &= |4x-3| \end{aligned}$$

Queremos determinar um $\delta > 0$, tal que

$$\begin{array}{llll} & \text{se} & 0 < |x-3| < \delta & \text{então} \quad |f(x)-5| < 0,01 \\ \Leftrightarrow & \text{se} & 0 < |x-3| < \delta & \text{então} \quad 4|x-3| < 0,01 \\ \Leftrightarrow & \text{se} & 0 < |x-3| < \delta & \text{então} \quad |x-3| < 0,0025 \end{array}$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para δ é $0,0025$. Então, temos o seguinte argumento:

$$\begin{array}{ll} 0 & < |x-3| < 0,0025 \\ \Rightarrow & 4|x-3| < 4(0,0025) \\ \Rightarrow & |4x-12| < 0,01 \\ \Rightarrow & |(4x-7)-5| < 0,01 \\ \Rightarrow & |f(x)-5| < 0,01. \end{array}$$

Mostramos que

$$\text{Se} \quad 0 < |x-3| < 0,0025 \quad \text{então} \quad |f(x)-5| < 0,01.$$

Neste exemplo, qualquer número positivo menor do que $0,0025$ pode ser usado em lugar de $0,0025$ como sendo o δ requerido. ■

Vamos entender a ideia geométrica com o GeoGebra! ☺

Por meio do do software GeoGebra foi possível desenvolver um arquivo muito didático para explicar a definição geométrica de limite de uma dada função contínua. A seguir os passos para usar o programa.

Primeiro passo: Entre com uma função contínua $f(x)$.

Segundo passo: Movimente o ponto "a" e observe o limite "L" de $f(x)$ quando x tende para "a".

Terceiro Passo: Escolha um ε e observe o intervalo em torno de "L".

Quarto passo: Encontre um δ tal que o intervalo $(f(a-\delta), f(a+\delta))$ esteja contido no intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

■ **Exemplo 5.2** Considerando a função $f(x) = 4x+7$ vista no exemplo, vimos que para qualquer número positivo menor do que $\frac{1}{4}\varepsilon$ pode ser usado em lugar de $\frac{1}{4}\varepsilon$ como sendo o δ referido.

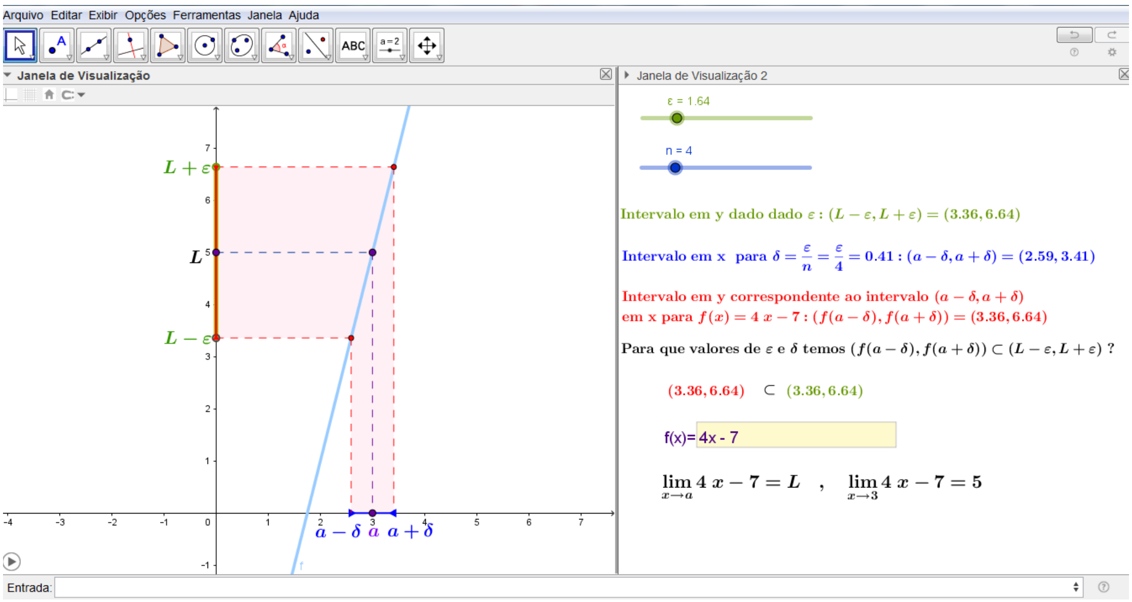


Figura 5.1: Limite de uma função $\boxed{\text{f(x) = 4*x - 7}}$.

■

■ **Exemplo 5.3** Considerando a mesma função do exemplo anterior $f(x) = 4x - 7$. Mas considere agora o número $a = 4$, $\varepsilon = 2.72$ e $\varepsilon = 4.68$.

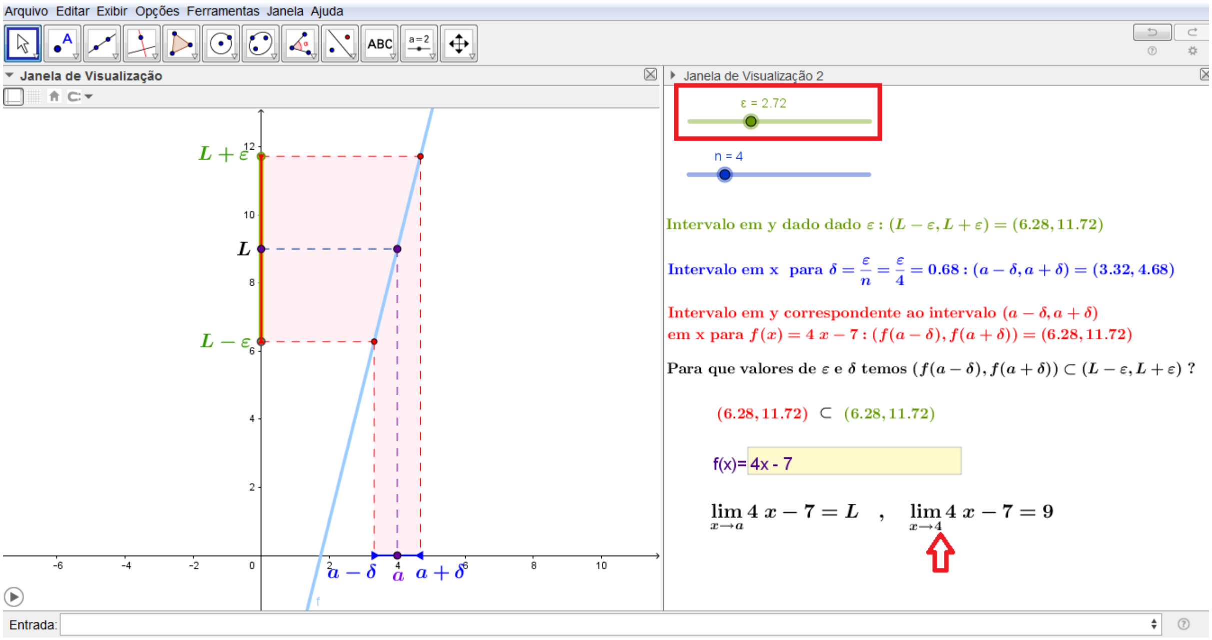


Figura 5.2: Função: $\boxed{\text{f(x)=4*x -7}}$ e $\varepsilon = 2.72$.

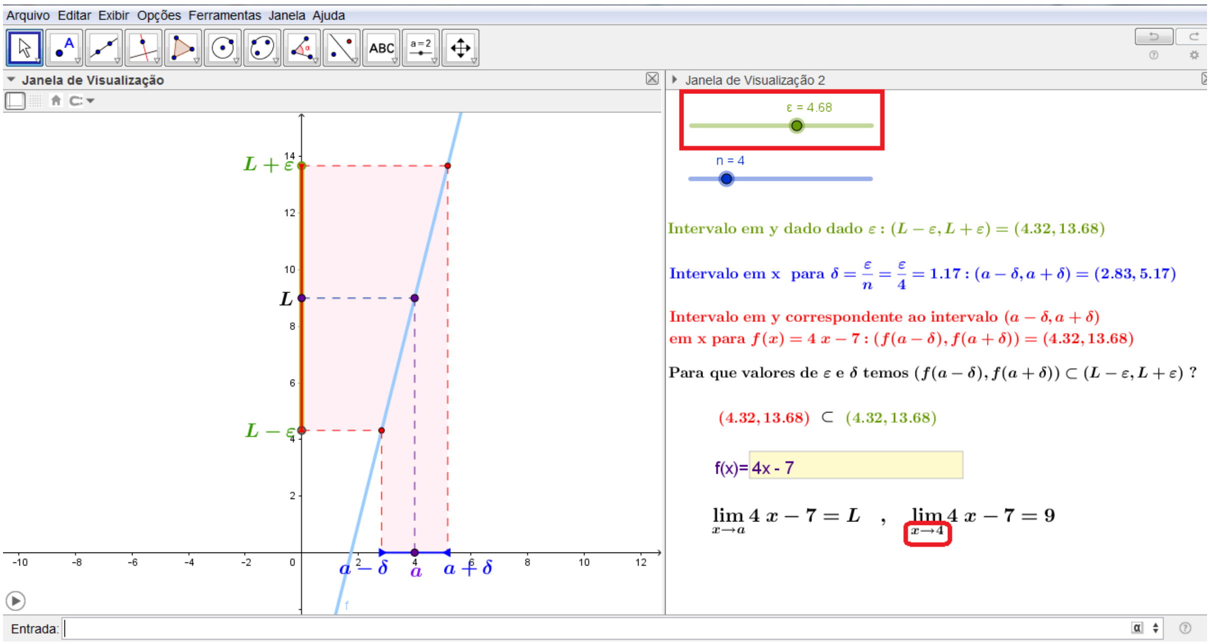


Figura 5.3: Função: $\boxed{\text{f(x)=4*x -7}}$ e $\varepsilon = 4.68$.

■

5.3 Teoremas sobre limites de funções

Na Seção (5.1) provamos que o limite de uma função era um determinado número, aplicando a Definição (5.1.1). Para calcular limites de funções por métodos mais simples, usaremos teoremas cujas provas estejam baseadas na Definição (5.1.1).

Teorema 5.3.1 Se m e b forem constantes quaisquer,

$$\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b.$$

Prova

Para demonstrar esse teorema, usamos a Definição (5.1.1). Para todo $\varepsilon > 0$, devemos provar que existe um $\delta > 0$, tal que

se $0 < |x-a| < \delta$ então $|(mx+b)-(ma+b)| < \varepsilon$. $(\star)$

Caso 01: $m \neq 0$.

Como $|(mx+b)-(ma+b)| = |m|\cdot|x-a|$, queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$.

Se $0 < |x-a| < \delta$ então $|m|\cdot|x-a| < \varepsilon$.

ou, como $m \neq 0$

se $0 < |x-a| < \delta$ então $|x-a| < \dfrac{\varepsilon}{|m|}$.

A afirmativa acima será verdadeira se $\delta = \varepsilon/|m|$; assim, concluímos que

se $0 < |x-a| < \delta$ e $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$ então $|(mx+b)-(ma+b)| = 0$ para todos os valores de x. Assim, tomamos δ como sendo qualquer número positivo, e a afirmativa $(\star)$ é verdadeira. Isso prova teorema no Caso 02.

Exemplo 5.4 Do Teorema (5.3.1), segue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(4x+2) &= 4\cdot(3)+2\\ &= 15.\end{aligned}$$

■

Teorema 5.3.2 Se c for uma constante, então para qualquer número a,

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

Prova

Isso segue imediatamente do blueTeorema (5.3.1), tomando $m = 0$ e $b = c$.

Teorema 5.3.3

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Prova

Isso também segue imediatamente do Teorema (5.3.1), tomando $m = 1$ e $b = 0$.

■ **Exemplo 5.5** Do Teorema (5.3.2),

$$\lim_{x \to 5} 10 = 10$$

e do Teorema (5.3.3),

$$\lim_{x \to -6} x = -6.$$

■

Teorema 5.3.4

$$\text{Se } \lim_{x \to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = M, \text{ então } \lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = LM.$$

Prova

Provaremos esse teorema com o sinal mais. Dado

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (\star)$$

e

$$\lim_{x \to a} g(x) = M \qquad (\star\star)$$

queremos provar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

Usamos a Definição (5.1.1), isto é, para todo $\varepsilon > 0$ precisamos provar que existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a|, \delta$ então $|[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \varepsilon \quad (\star\star\star)$.

Como $(\star)$ foi dado, segue, da definição de limite, que para $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$, tal que

se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $0 < |f(x) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Da mesma forma, de $(\star\star)$, para $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$, tal que

se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|g(x) - M| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Seja, agora, δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2. Então, $\delta \le \delta_1$ e $\delta \le \delta_2$. Assim,

se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$, e

se $0 < |x - a| < \delta$ então $|g(x) - M| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Logo, se $0 < |x-a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |[f(x)+g(x)]-(L+M)| &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\ &\leq |f(x)-L|+|g(x)-M| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtivemos a afirmativa $(\star\star\star)$ e, portanto, provamos que

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M.$$

A prova do Teorema (5.3.4) usando o sinal menos será deixado como exercício.

O Teorema (5.3.4) pode ser aplicado a um número qualquer finito de funções.

Teorema 5.3.5

$$\text{Se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = M, \text{ então } \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M.$$

■ **Exemplo 5.6** Do Teorema (5.3.5), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3}[x(2x+1)] &= 7.\ \text{Assim pelo teorema,} \\ &= 3\cdot 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$

■

Teorema 5.3.6 Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$.

■ **Exemplo 5.7** Do Teorema (5.3.6), segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2}(5x+7)^4 &= \left[\lim_{x\to -2}(5x+7)\right]^4 \\ &= (-3)^4 \\ &= 81. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.3.7 Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

se $M \neq 0$.

■ **Ilustração 5.1** Do Teorema (5.3.7), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1} &= \frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4}(-7x+1)}\\ &= \frac{4}{-27}\end{aligned}$$

Teorema 5.3.8 Se n for um inteiro positivo e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

■ **Exemplo 5.8** Do Teorema (5.3.8), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1}}\\ &= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}}\\ &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 5.9** Ache o $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+7x-5\right)$ e, quando aplicável, indique o teorema de limite que está sendo usado.

Solução

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(x^2+7x-5\right) &= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 7x - \lim_{x\to 3} 5 && (T.L.5)\\ &= \lim_{x\to 3} x\cdot\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 7\cdot\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 5 && (T.L.6)\\ &= 3\cdot 3+7\cdot 3-5 && (T.L.3 \text{ e } T.L.2)\\ &= 9+21-5\\ &= 25.\end{aligned}$$

■

Definição 5.3.1 — Continuidade. Dizemos que a função f é **contínua** no número a se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mias de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f

será **descontínua** em a.

■ **Exemplo 5.10** Um atacadista que vende um produto por quilo (ou fração de quilo), cobra \$1 por quilo se o pedido for de até $10kg$. Mas se o pedido ultrapassar esse peso, ele cobrará \$10 mais \$0,7 por quilo excedente. Assim, se x quilos do produto forem pedidos e $C(x)$ for o custo total, então $C(x) = x$, se $0 \leq x \leq 10$ e $C(x) = 10 + 0,7(x - 10)$, se $10 < x$. Logo,

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0,7x + 3 & \text{se} \quad 10 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de C está na Figura (5.4). Para essa função $C(10) = 10$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 10^-} C(x) &= \lim_{x \to 10^-} (0,7x + 3) \\ &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 10^+} C(x) &= \lim_{x \to 10^+} (0,7x + 3) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \to 10} C(x)$ existe e é igual a $C(10)$. Assim, C é contínua em 10. ■

■ **Exemplo 5.11** Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad \text{se} \quad x \neq 1 \\ 2 & , \quad \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Observe que há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 1$. Assim, vamos considerar aí as condições da Definição 2.6.1.

- $f(1) = 2$; logo, a condição (i) é satisfeita.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$: logo, a condição (ii) está satisfeita.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$; mas $f(1) = 2$; logo, a condição (iii) não está satisfeita.

Assim, f é descontínua em 1. ■

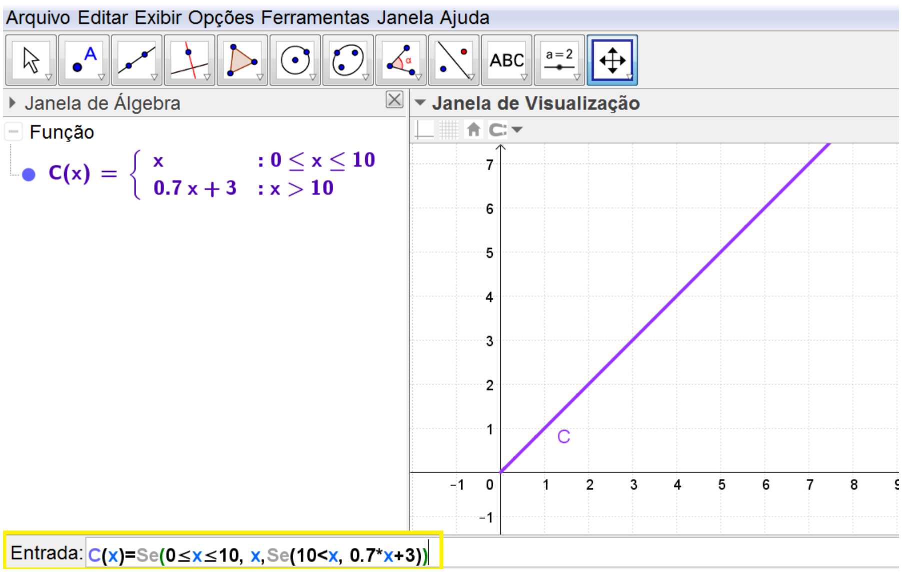


Figura 5.4: Gráfico da função por partes C.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos Exercícios de 1 a 10 são dados $f(x)$, a e L, bem como $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(a) Usando argumentos similares aqueles do Exemplo 1, determine um $\delta > 0$ para o ε dado, tal que se

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)-L| < \varepsilon. \qquad (\star)$$

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine um $\delta > 0$, tal que a afirmativa $(\star)$ seja verdadeira para o valor dado de ε.

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x-1) = 3;$ $\quad \varepsilon = 0,2$
2. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+4) = 10;$ $\quad \varepsilon = 0,01$
3. $\lim\limits_{x\to 3}(x+2) = 5;$ $\quad \varepsilon = 0,02$
4. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3) = 2;$ $\quad \varepsilon = 0,005$
5. $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4;$ $\quad \varepsilon = 0,003$
6. $\lim\limits_{x\to 5}(x-2x+1) = 1;$ $\quad \varepsilon = 0,001$
7. $\lim\limits_{x\to 3}(x-x-6) = 1;$ $\quad \varepsilon = 0,005$
8. $\lim\limits_{x\to 4}(x-1);$ $\quad \varepsilon = 0,2$
9. $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{9x-1}{3x-1} = 2;$ $\quad \varepsilon = 0,01$
10. $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2-7x+2) = -2;$ $\quad \varepsilon = 0,02$

Nos Exercícios de 11 a 15, prove que o limite é o número indicado.

11. $\lim\limits_{x\to 7} = 7$
12. $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = 9$
13. $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8) = 3$
14. $\lim\limits_{x\to 3}(7-3x = -2)$
15. $\lim\limits_{x\to -2}(1+3x) = -5$

Nos Exercícios 16 a 20, ache o limite e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

16. $\lim\limits_{x\to 5}(3x-7)$
17. $\lim\limits_{x\to 2}(x+2x-1)$
18. $\lim\limits_{x\to 3}(\dfrac{4x-5}{5x-1})$
19. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x-3x+4}{2x-x-1}}$
20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x-3x+4}$

6. DERIVADA

No cálculo, a derivada em um ponto de uma função $y = f(x)$ representa a taxa de variação instantânea de y em relação a x neste ponto. Um exemplo típico é a função velocidade que representa a taxa de variação (derivada) da função espaço. Do mesmo modo, a função aceleração é a derivada da função velocidade. Geometricamente, a derivada no ponto $x = a$ de $y = f(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico desta função no ponto $(a,\ f(a))$. A função que a cada ponto x associa a derivada neste ponto de $f(x)$ é chamada de função derivada de $f(x)$.

6.1 Definições

Definição 6.1.1 Suponha que a função f seja contínua em x_1. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (\star)$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{para} + \infty \text{ ou } - \infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{para} +\infty \text{ ou } -\infty.$$

Se nem (i) nem (ii) da (6.1.1) forem verdadeiras, então não existirá reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

■ **Exemplo 6.1** Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto (x_1, y_1).

Solução

$$\begin{aligned} f(x_1) &= {x_1}^3 - 3x_1 + 4 \\ f(x_1+\Delta x) &= (x_1+\Delta x)^3 - 3(x_1+\Delta x) + 4 \end{aligned}$$

De $(\star)$,

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1+\Delta x)^3 - 3(x_1+\Delta x) + 4 - \left(x_1^3 - 3x_1 + 4\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x + 4 - x_1^3 + 3x_1 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por Δx e obter

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\right] \\ m(x_1) &= 3x_1^2 - 3. \end{aligned}$$

■

Definição 6.1.2 A **reta normal** a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular á reta tangente naquele ponto.

Definição 6.1.3 A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existir.

■ **Exemplo 6.2** Ache a derivada de f se $f(x) = 3x^2 + 12$.
Solução

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3\,(x + \Delta x)^2 + 12\right] - \left(3x^2 + 12\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3) \\
&= 6x
\end{aligned}$$

Logo, a derivada de f é a função f', definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f. ■

6.2 Notação

Duas distintas notações são comumente utilizados para a derivada, o resultante de Leibniz e o outro a partir de Joseph Louis Lagrange.

Na notação de Leibniz, uma mudança infinitesimal em x é denotada por dx, e a derivada de y em relação a x é escrito $\frac{dy}{dx}$. Sugerindo que a razão de duas quantidades infinitesimais (A expressão acima é lido como "a derivada de y em relação a x", "dy por dx", ou "dy sobre dx". A forma oral $dydx$ é usado frequentemente em tom de conversa, embora possa levar à confusão).

Na notação de Lagrange, a derivada em relação a x de uma função $F(x)$ é denotada $f^{'}(x)$ ou $fx^{'}(x)$, em caso de ambiguidade da variável implicada pela derivação. A notação de Lagrange é por vezes incorretamente atribuída a Newton.

6.3 Teoremas sobre derivação

Teorema 6.3.1 Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x_1 então

$$f'(x) = 0.$$

■ **Exemplo 6.3** Se $f(x) = 10$, então $f'(x) = 0$. ■

Teorema 6.3.2 Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

■ **Exemplo 6.4** Se $f(x) = x^8$, então $f'(x) = 8x^7$. ■

Teorema 6.3.3 Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

então, se $f'(x)$ existir,

$$g'(x) = c \cdot f'(x).$$

Exemplo 6.5 se $f(x) = 2x^7$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 7x^6 \\ &= 14x^6. \end{aligned}$$

Teorema 6.3.4 Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

A derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas se elas existirem.

Teorema 6.3.5 Se f e g forem funções e h for a função definida por

$$h(x) = f(x)g(x)$$

então, se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

A derivada do produto de duas funções é a derivada da primeira função vezes a segunda função mais a derivada da segunda função vezes a primeira função, se essas derivadas existirem.

Teorema 6.3.6 Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

A derivada do quociente de duas funções é a fração tendo como denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.

6.4 Derivadas de ordem superior

Quando obtemos a derivada de uma função o resultado é também uma função de x e como tal também pode ser diferenciada. Calculando-se a derivada novamente obtemos então a segunda derivada da função f. De forma semelhante, a derivada da segunda derivada é chamada de terceira derivada e assim por diante. Podemos nos referir às derivadas subsequentes de f por:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)$$

e assim sucessivamente. No entanto, a notação mais empregada é:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}$$

ou alternativamente,

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x).$$

Ou ainda

$$f^{(1)}(x), \quad f^{(2)}(x), \quad f^{(3)}(x).$$

Se, para algum $k \in N$, f for k vezes derivável e, além disso, $f(k)$ for uma função contínua, diz-se que f é de classe C^k.

Se a função f tiver derivadas de todas as ordens, diz-se que f é infinitamente derivável ou indefinidamente derivável ou ainda de classe C^∞.

6.5 A ideia geométrica com o GeoGebra

■ **Exemplo 6.6** Software GeoGebra na representação gráfica do conceito de derivadas através da função $f(x) = x^2$.

Primeiro passo: Digite a função $f(x) = x^2$ na entrada de comandos e verifique a plotagem do gráfico.

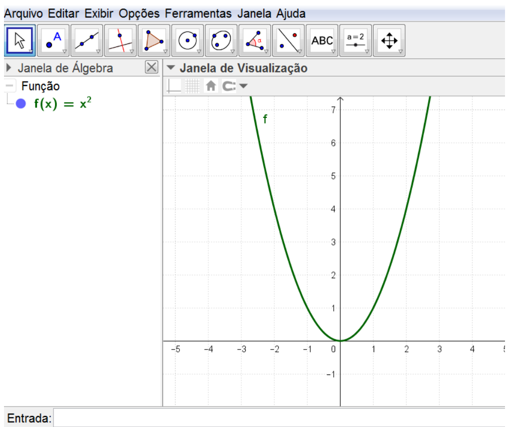


Figura 6.1: Representação gráfica da função $f(x) = x^2$.

Segundo passo: Crie um ponto aleatoriamente na função $f(x)$ digitando na entrada de comandos $A = ponto(f)$. **Observação:** Este ponto pode ser arrastado para qualquer outra

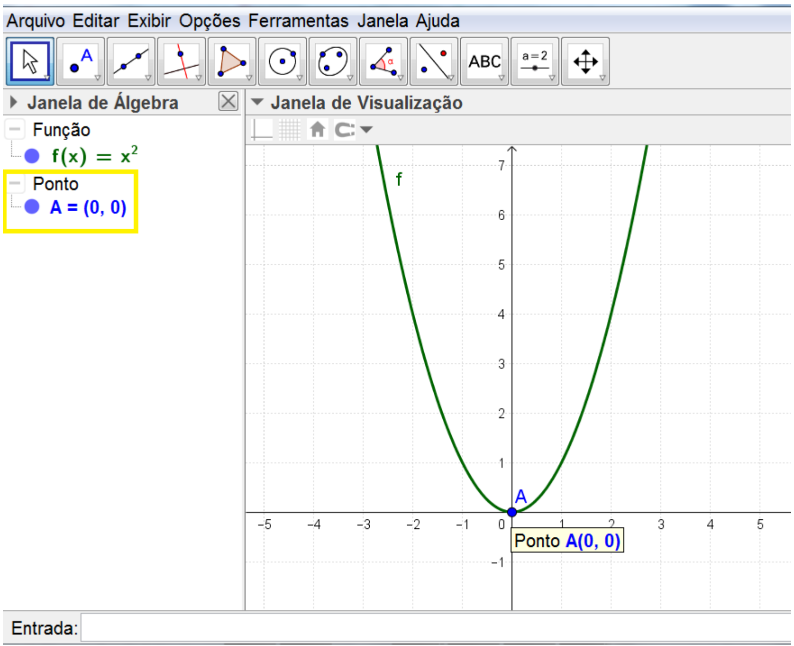


Figura 6.2: Representação gráfica da função $f(x) = x^2$ e do ponto A.

posição ao longo da função $f(x)$.

Terceiro passo: Adicione uma reta tangente a função $f(x)$ no ponto A, para isso digite na entrada de comandos $t = tangente[A, f]$.

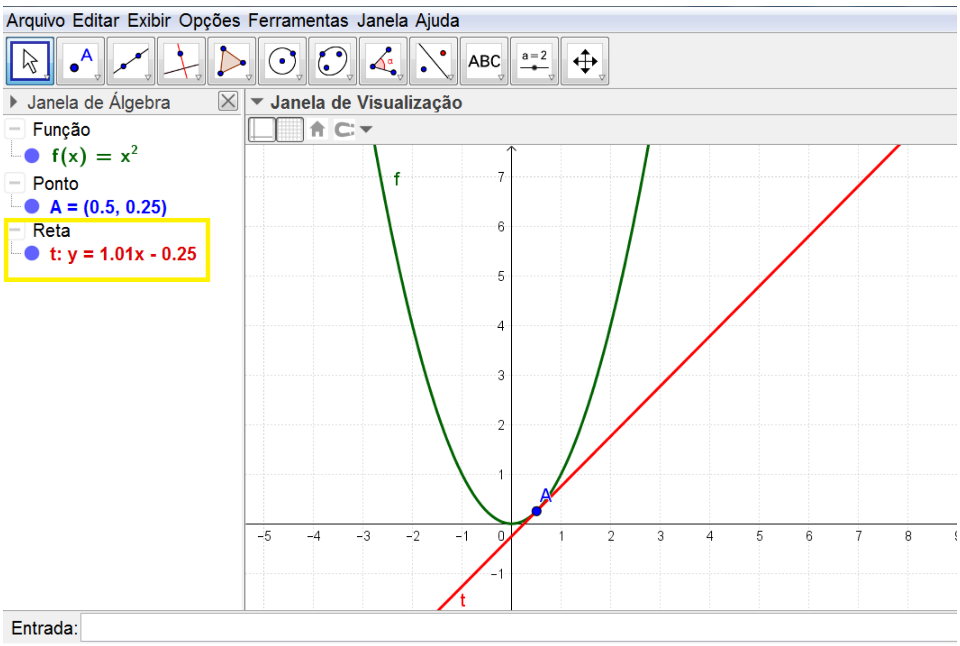


Figura 6.3: Representação gráfica da função $f9x) = x^2$ e da reta tangente no ponto A.

Movimentando o ponto A ao longo da função $f(x)$ verifica-se que altera a reta tangente e nota-se, que o coeficiente angular da reta, altera-se de acordo com o ponto A. ∎

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela dos valores de x, y e m nos vários pontos do gráfico e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico utilizando o software GeoGebra,

1. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$
2. $f(x) = \sqrt{4-x}$
3. $f(x) = x^3 - 6x + 9x - 2$
4. $f(x) = 7 - 6x - x$
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$
6. $x - x - x + 10$
7. Ache uma equação da reta tangente á curva $y = 2x + 3$ que é paralela á reta $8x - y + 3 = 0$.

   Nos Exercícios de 8 a , ache $f'(x)$.

8. $f(x) = 7x + 3$
9. $f(x) = -4$
10. $f(x) = 4 - 2x^2$
11. $f(x) = 8 - 5x$
12. $f(x) = 3x^2 + 4$
13. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

    Nos Exercícios de 14 a 18, ache a derivada indicada.

14. $\dfrac{d}{dx}(8 - x^3)$
15. $\dfrac{d}{dx}(x^3)$
16. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$
17. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+3}{3x-2}\right)$
18. $D_x\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

7. INTEGRAL

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano e também surge naturalmente em dezenas de problemas da física, como por exemplo na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes. O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de *integração*. A integral também é conhecida como antiderivada.

7.1 Integral definida

Seja f uma função contínua definida no intervalo fechado $[a,b]$, então a **integral definida** de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$), será dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$$

se o limite existir.

Note que a afirmação "a função f é integrável no intervalo fechado $[a,b]$" é sinônima da afirmação "a integral definida de f de a até b existe".

Teorema 7.1.1 Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então ela será integrável em $[a,b]$.

7.2 Integral indefinida

A integral indefinida de $f(x)$ é a função (ou família de funções) definida por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

em que C é uma constante indeterminada e $F(x)$ é uma antiderivada ou primitiva de $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$. A notação $\int f(x)dx$ é lida como: a integral de $f(x)$em relação a x.

É importante saber-se distinguir a integral definida da integral indefinida. Uma integral definida é um número, enquanto uma integral indefinida é uma função (ou uma família de funções). Como consideramos a integral como uma antiderivada, ou seja, o inverso da derivada, colocamos a constante C pois a derivada da constante resulta em 0,, reatando assim apenas a derivada de $F(x)$ que nada mais é do que a própria função $f(x)$. Logo, temos uma primitiva para cada valor de C.

7.3 Teorema fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que se $f(x)$ for contínua em $[a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde, $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$.

De forma mais geral, este teorema afirma que se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo I então, para qualquer $a \in I$, temos que:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma antiderivada de $f(x)$ definida para todo $x \in I$. Ou seja:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

7.4 Cálculo de integrais

O teorema fundamental do cálculo fornece a principal ferramenta para o cálculo de integrais, pois ao conhecer uma função $F(x)$ cuja derivada é igual ao integrando $f(x)$, obtém-se a integral, que é igual a $F(x)$ somada a uma constante C que independe de x. Tal constante é tradicionalmente adicionada após o término do cálculo da parte da integral que independe de x. Valendo-se também que a integral da soma de duas funções é a soma das respectivas integrais e que a integral de uma função multiplicada por uma constante é a constante que multiplica a integral da função, pode-se compilar uma lista de integrais relacionadas às funções mais fundamentais, como polinômios, funções trigonométricas, a função exponencial e a função logarítmica. Por exemplo, a derivada da função $F(x) = x^2$ é $f(x) = 2x$. Portanto, como F é antiderivada de f, temos (omitindo a constante aditiva por conveniência) que:

$$\int 2xdx = x^2.$$

Utilizando a propriedade de que a constante 2 em “$2x''$ pode ser “retirada para fora” da integral, podemos escrever que:

$$2\left(\int x dx\right) = x^2 \implies \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Esse argumento pode ser repetido para outras potências de x, como x^3, x^4, etc. Em geral, a função $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tem como derivada $f(x) = x^n$, sendo n um número real diferente de -1 (pois o denominador da fração $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ não pode ser nulo). Logo, temos a integral de qualquer potência de x (à exceção de $1/x$):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

7.5 Soma de Riemann com o GeoGebra

Soma de Riemann é o nome dado ao processo de calcular uma determinada medida por meio da soma de infinitas parcelas. Podemos calcular a área de uma determinada região subdividindo-a em vários retângulos, e somando-se a área desses retângulos. Quanto mais retângulos usarmos para a decomposição, melhor será a aproximação dessa soma com o valor real da área da região. Vamos entender melhor através do exemplo abaixo, considerando uma função $f(x) = x^2 + 2$.

Primeiro passo: Digite a função $f(x) = x^2 + 2$ na entrada de comando e tecle Enter.

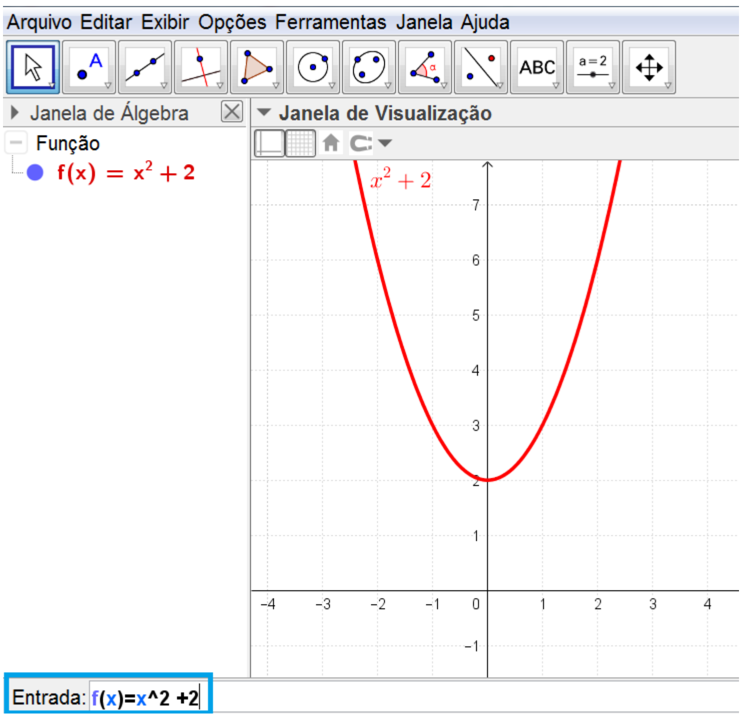
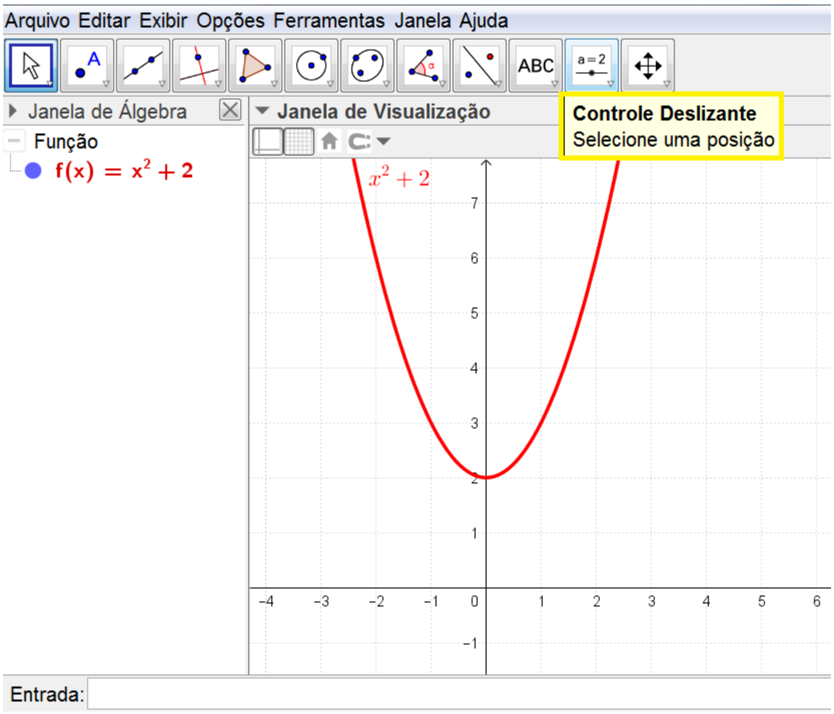


Figura 7.1: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + 2$.

Segundo passo: Clique na opção "controle deslizante" e em um local qualquer sobre a área gráfica.



Terceiro passo: Digite na entrada de comandos $x = -2$ e $x = 2$ para delimitar a área que iremos aproximar.

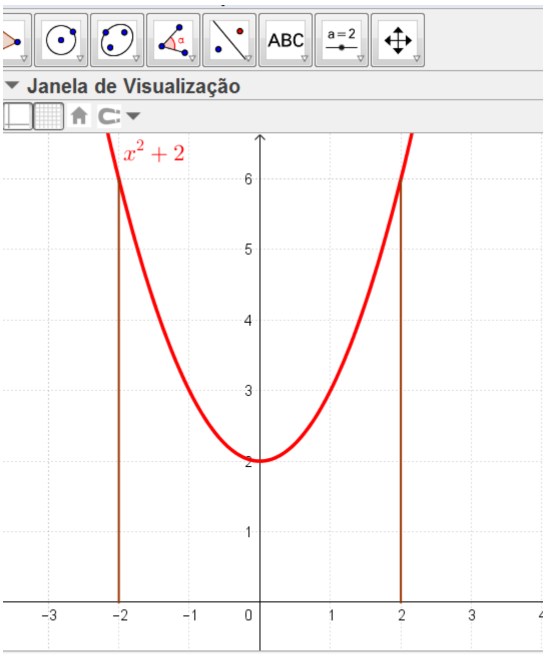


Figura 7.2: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + 2$ delimitada pelas retas $x = -2$ e $x = 2$.

Quarto passo: Nos intervalos delimite-os entre 1 a 50, o incremento de 1 a altere o nome para “n”.

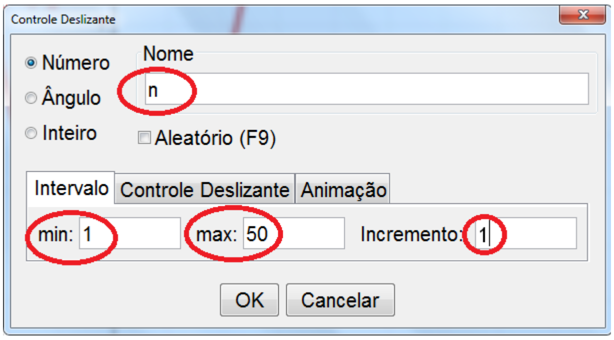


Figura 7.3: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 + 2$ definindo o incremento "n".

Quinto passo: Na aba " controle deslizante", desmarque a opção " Fixo", altere-se a largura para 400 clique em "aplicar".

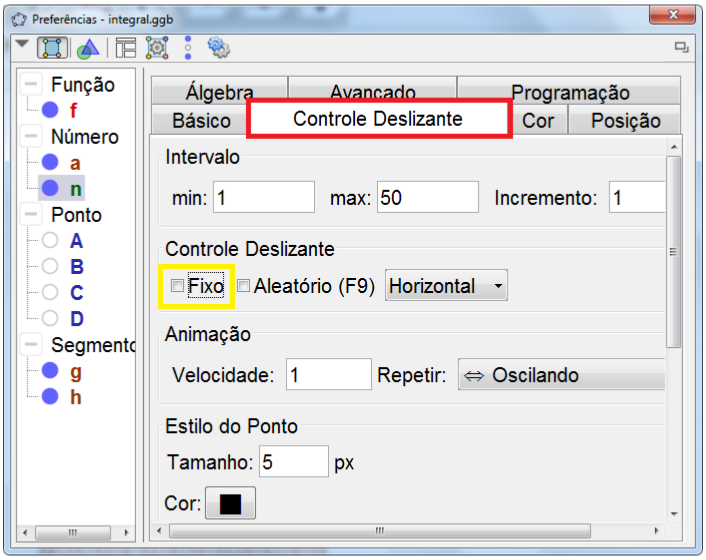


Figura 7.4: Representação gráfica da função aplicando largura 400.

Sexto passo Na barra de comandos digite: $SomaDeRiemann[x^2 + 2, n]$. **Observação:** O comando baseia-se em: SomaDeRiemannInferior[Função, Valor de x inicial, Valor de x Final, Número de Retângulos], delimitamos os intervalo de x e em "Números de Retângulos" colocamos "n" pois será uma variável que movimentaremos ao longo da reta.

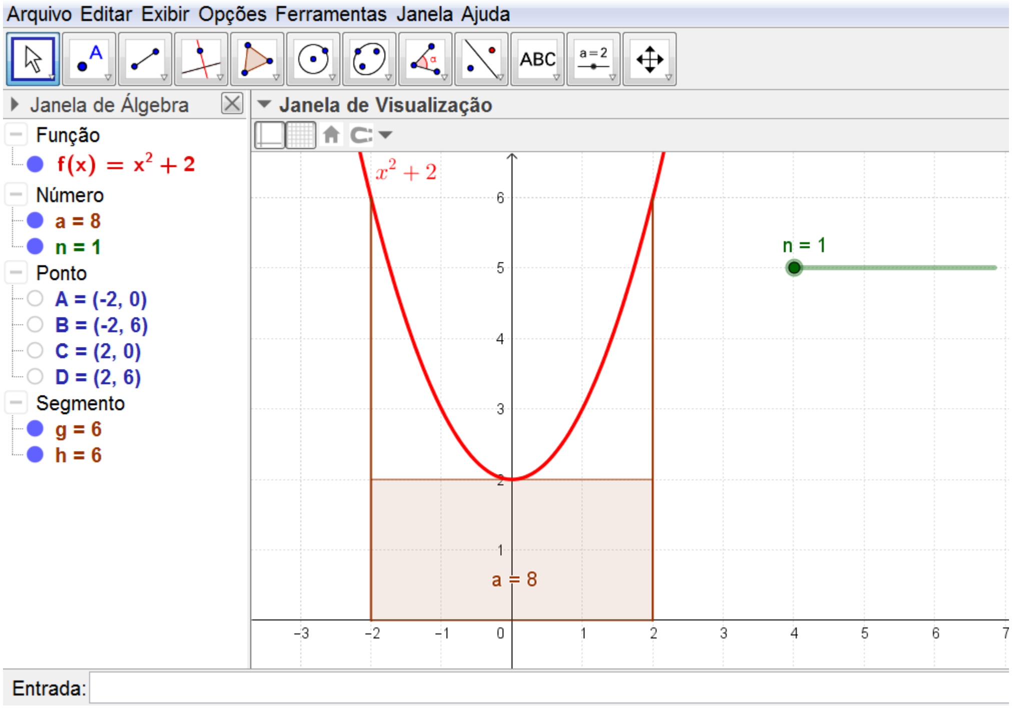


Figura 7.5: Representação da Soma de Riemann de 1 retângulo.

Sétimo passo: Movimente a variável $n = 1$ ao longo da reta, como por exemplo $n = 10$.

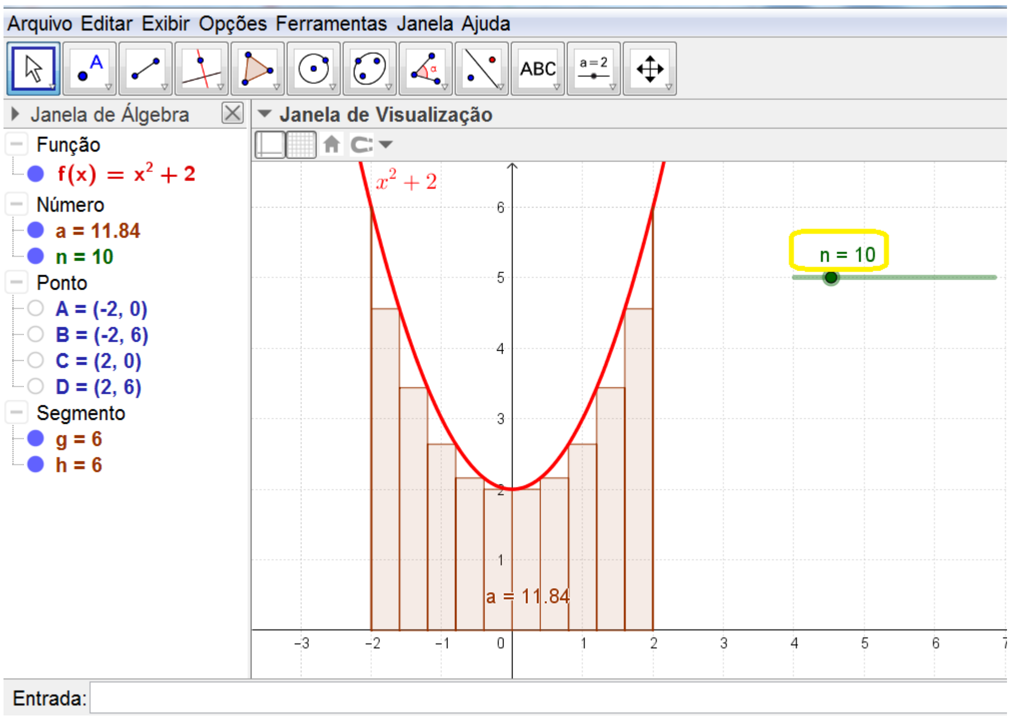


Figura 7.6: Representação da Soma de Riemann através de 10 retângulos.

Verifica-se que quanto maior o valor de n, mais retângulos temos e a área se aproxima do valor exato que pode ser determinada através da *integral definida*.

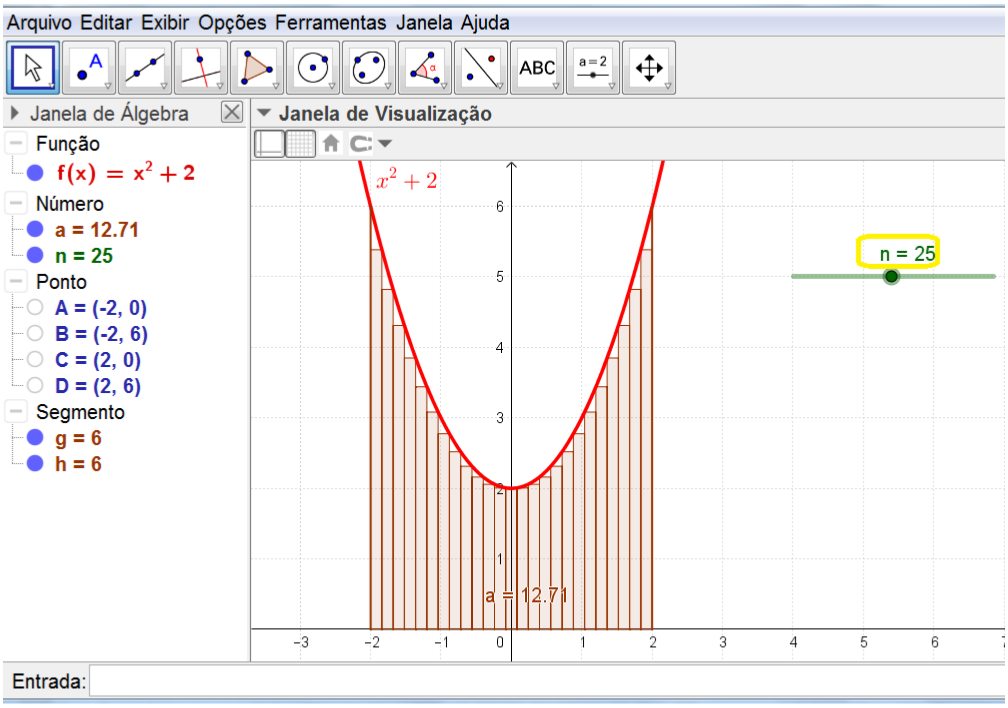


Figura 7.7: Representação da Soma de Riemann através de 25 retângulos.

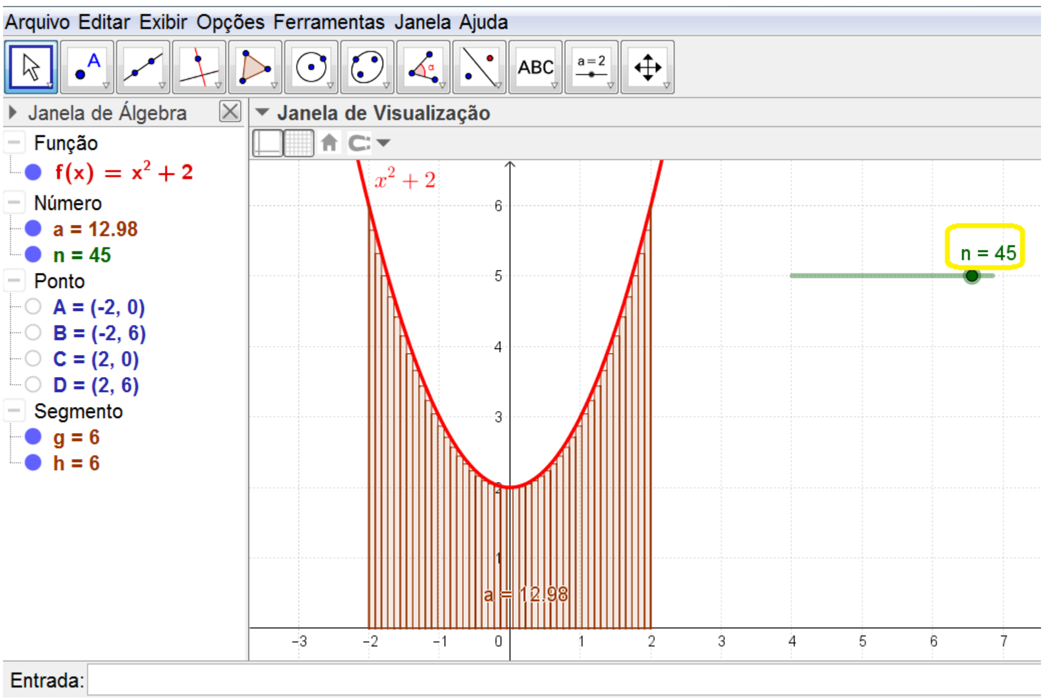


Figura 7.8: Representação da Soma de Riemann através de 45 retângulos.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos Exercícios de 1 a 10 , faça a antidiferenciação e verifique, calculando a derivada de sua resposta.

1. $\int 3x^4 dx$

2. $\int 2x^7 dx$

3. $\int 5u^{3/2} du$

4. $\int 6t^2 \sqrt{x^2} dx$

5. $\int (4x^3 + x^2) dx$

6. $\int \sqrt{x}(x+1) dx$

7. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

8. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt{t}} dt$

9. $\int \frac{x + 4x - 4}{\sqrt{x}} dx$

10. $\int 10x^4 + \frac{2}{5}x^{10} dx$

11. O ponto $(3,2)$ está numa curva e em qualquer ponto (x,y) sobre a curva a inclinação da reta tangente é igual a $2x-3$. Ache uma equação da curva.

    Nos Exercícios de 12 a 17, ache o valor exato da integral definida.

12. $\int_2^7 3x dx$

13. $\int_1^2 x^3 dx$

14. $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx$

15. $\int_{-2}^2 (x^3 + 1) dx$

16. $\int_2^4 x^2 dx$

17. $\int_0^5 (x^3 - 1) dx$

Nos Exercícios de 18 a 20, ache a soma de Riemann para a função no intervalo, usando a partição Δ dada e os valores de ε_i dados. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo dado e mostre os retângulos cujas medidas de área são os termos da soma de Riemann utilizando o software GeoGebra.

18. $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 3$; para $\Delta : x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\frac{1}{4}, x_3 = 2\frac{1}{4}, x_4 = 3; \varepsilon_1 = \frac{1}{4}, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1\frac{1}{2}, \varepsilon_4 = 2\frac{1}{2}$.

19. $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 3$; para $\Delta : x_0 = 0, x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 1\frac{1}{4}, x_3 = 2, x_4 = 2\frac{2}{4}, x_5 = 3; \varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1\frac{3}{4}, \varepsilon_4 = 2\frac{1}{4}, \varepsilon_5 = 1\frac{1}{2}$.

20. $f(x) = x^3, -1 \leq x \leq 2$; para $\Delta : x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1\frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = 1\frac{1}{4}, x_5 = 2; \varepsilon_1 = -\frac{1}{2}, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = \frac{2}{3}, \varepsilon_4 = 1\frac{1}{4}, \varepsilon_5 = 1\frac{1}{2}$.

Referências Bibliográficas

FEDERSON, M; PLANAS, G. **Cálculo Diferencial e Integral**. 01 mar. 2013. Notas de Aula.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. 5 Ed., V. 1, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2001.

GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em 30 de maio de 2019.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3.Ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **Cálculo. V. 1** , 4ª ed., Pioneira, São Paulo, 2001.